Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Sistemas de Numeración

Número de Tema: **01**

Área: **Matemática**

- **El Concepto de Base**: Cuando los hombres empezaron a contar usaron los dedos, porotos, marcas en bastones, nudos en una cuerda y algunas otras formas para ir pasando de un número al siguiente. A medida que la cantidad crece es necesario un sistema de representación más práctico. En diferentes partes del mundo y épocas, se llegó a la misma solución para este problema de representar números:

- Cuando se alcanza un determinado número se hace una marca o símbolo distinta que los representa a todos ellos, ***Este número es la Base***. (en nuestro sistema de numeración decimal se añaden unidades hasta llegar a la base que es 10, y la marca o símbolo que se utiliza para representar cualquiera de estos números menores a la base son los dígitos del 1-9)
- Luego, se siguen añadiendo unidades hasta que se vuelve a alcanzar al número anterior y se añade otra marca de la segunda clase, o segundo orden (en nuestro sistema es el orden de las decenas) y así sucesivamente se van agregando símbolos para cada orden que sea necesario.

La base que más se ha utilizado a lo largo de la Historia es 10 según todas las apariencias por ser ese el número de dedos con los que contamos. Hay alguna excepción notable como son las numeración babilónica que usaba 10 y 60 como bases y la numeración maya que usaba 20 y 5 aunque con alguna irregularidad.

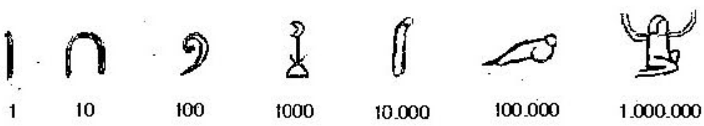
Desde hace 5000 años la gran mayoría de las civilizaciones han contado en unidades, decenas, centenas, millares etc. es decir de la misma forma que seguimos haciéndolo hoy. Sin embargo la forma de escribir los números ha sido muy diversa y muchos pueblos han visto impedido su avance científico por no disponer de un sistema eficaz que permitiese el cálculo. El sistema actual fue inventado por los indios y transmitido a Europa por los árabes.

- **Clasificación de los Sistemas de Numeración**: Como hay muchos Sistemas de Numeración y tienen diferencias importantes entre sí, para estudiarlos vamos a dividirlos en tres grupos:
  - **Sistemas de Numeración Aditivos** (como el egipcio, sumerio, hitita, cretense, azteca, romano, griego, armenio, judío y árabe)
  - **Sistemas de Numeración Híbridos** (como el chino, el asirio, el arameo, el etíope y algunos del subcontinente indio cómo el tamil, y el cingalés)
  - **Sistemas de Numeración Posicionales** (como por ejemplo el indio, el babilónico y el maya y por supuesto el que usamos nosotros que es muy similar al sistema indio)

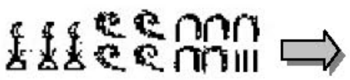
Sistemas de Numeración Aditivos

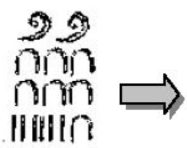
Los sistemas aditivos son aquellos que acumulan los símbolos de todas las unidades, decenas... como sean necesarios hasta completar el número. Una de sus características es por tanto que se pueden poner los símbolos en cualquier orden, aunque en general se ha preferido una determinada disposición.

Veamos primero el
Sistema de Numeración Egipcio
Estos son los símbolos que se usaban:



Entonces podríamos formar por ejemplo los números:

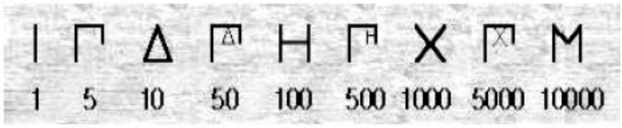

3453


276

Como en estos sistemas no importa el orden de cada símbolo para escribir un número se pueden usar criterios estéticos o de apariencia, es decir, que se pueden agrupar de cualquier modo para que quede mas lindo, también podemos escribirlos vertical u horizontalmente.. Cabe aclarar que en estos sistemas de escritura los grupos de signos adquirieron una forma propia, y así se introdujeron símbolos particulares para 20, 30....90....200, 300.....900, 2000, 3000...... con lo que disminuye el número de signos necesarios para escribir una cifra.

Veamos ahora el **Sistema de Numeración Griego**
El primer sistema de numeración griego se desarrolló hacia el 600 a.C. Para representar la unidad y los números hasta el 4 se usaban trazos verticales. Para el 5, 10 y 100 las letras correspondientes a la inicial de la palabra cinco (pente), diez (deka) y mil (khiloi). Por este motivo se llama a este sistema acrofónico.

Se usaban estos símbolos:



Y por ejemplo para escribir el número **3737:**

Cabe aclarar que progresivamente los griegos fueron remplazando este sistema por otro que remplazaba estos símbolos por las 24 letras del alfabeto griego junto con algunos otros símbolos más.

Sistema de Numeración Romano
Este sistema es el que nos resulta mas familiar de todos los sistemas de numeración de adición. Y como es el más usado de este tipo vamos a dedicarle un poco mas de atención:

Los símbolos que se usan son:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Pero hay un detalle con este sistema de numeración, y es una regla propia del sistema: **"Nos se pueden repetir mas de tres símbolos seguidos iguales"**

Por lo tanto si queremos representar por ejemplo al 4 no podemos escribir cuatro "I" seguidos, entonces se escribe restando al símbolo mas cercano (o sea "V" que es el del 5) una unidad, y para restar hay que escribir el símbolo de una unidad delante del de 5, por lo tanto nos quedaría el 4 escrito como "IV"

Así podemos armar la siguiente tabla de números romanos hasta el 50

1	I	11	XI	21	XXI	31	XXXI	41	XLI
2	II	12	XII	22	XXII	32	XXXII	42	XLII
3	III	13	XIII	23	XXIII	33	XXXIII	43	XLIII
4	IV	14	XIV	24	XXIV	34	XXXIV	44	XLIV
5	V	15	XV	25	XXV	35	XXXV	45	XLV
6	VI	16	XVI	26	XXVI	36	XXXVI	46	XLVI
7	VII	17	XVII	27	XXVII	37	XXXVII	47	XLVII
8	VIII	18	XVIII	28	XXVIII	38	XXXVIII	48	XLVIII
9	IX	19	XIX	29	XXIX	39	XXXIX	49	XLIX
10	X	20	XX	30	XXX	40	XL	50	L

Y así podemos armar cualquier número a modo de ejemplo

143 → CXLIII   **1856 → MDCCCLVI**
284 → CCLXXXIV   **2991 → MMCMXCI**
621 → DCXXI

Sistemas de Numeración Híbridos

En estos sistemas se combina el principio aditivo con el multiplicativo. O sea que si para representar 500 los sistemas aditivos recurren a cinco representaciones de 100, los híbridos utilizan la combinación del 5 y el 100. Pero siguen acumulando estas combinaciones de signos para los números más grandes. Y sigue siendo innecesario un símbolo para el 0. Por ejemplo, para representar el 703 se usa la combinación del 7 y el 100 seguida del 3. En estos sistemas, el orden en la escritura de las cifras es ahora fundamental para evitar confusiones.

Ya con un sistema de numeración de este tipo nos estamos acercando al sistema de numeración que usamos hoy en día. Ya que si los signos del 10, 100 etc se repiten siempre en los mismos lugares, por lo tanto bastó solo con que alguien haya pensado en suprimirlos, dándolos por supuestos y escribir sólo las cifras correspondientes a las decenas, centenas etc. .Pero para ello era necesario un cero, algo que indique que algún orden de magnitud está vacío como para poder escribir números como el 307 y 3070 y que no se confundan.

✓ Veamos como ejemplo el **Sistema de Numeración Chino**

La forma clásica de escritura de los números en China se empezó a usar desde el 1500 a.C. aproximadamente. Es un sistema decimal estricto que usa las unidades y los distintas potencias de 10. Utiliza los símbolos de la siguiente figura:

1	一	5	五	8	八	100	百
2	二	6	六	9	九	1000	千
3	三	7	七	10	十	10000	萬
4	四						

Y por ejemplo vamos a escribir el número **5789** ⇨ 5 . 1000 + 7 . 100 + 8 . 10 +9

五千七百八十九

Aparte de esta forma que podríamos llamar canónica se usaron otras. Para los documentos importantes se usaba una grafía más complicada con objeto de evitar falsificaciones y errores. En los sellos se escribía de forma más estilizada y lineal y aún se usaban hasta dos grafías diferentes en usos domésticos y comerciales, aparte de las variantes regionales. Los eruditos chinos desarrollaron un sistema posicional muy parecido al actual que desde que incorporó el cero por influencia india en s. VIII en nada se diferencia de éste.

Sistemas de Numeración Posicionales

Es el tipo de sistema más efectivo de los sistemas de numeración. En ellos la posición de una cifra nos dice si son decenas, centenas ... o en general la potencia de la base correspondiente (por ejemplo, como vamos a ver después, el sistema binario cada posición es una potencia determinada de base 2). Lo mas importante de los sistemas posicionales es la regla que le da el nombre a este tipo de sistemas **"Cada símbolo escrito en cada posición tiene un significado, que es la cantidad de potencias de las base del sistema"**

Sistema de Numeración Posicional Decimal

Bueno, no hace falta decir nada nuevo acá. Este es el sistema que ya conocemos, cada posición es una potencia de 10. Así, la primera posición es la unidad, la segunda es la decena(10^1), la tercera es la centena (10^2), la cuarta posición es la unidad de mil (10^3), después la decena de mil (10^4) y así sucesivamente..

Los símbolos son los dígitos: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Veamos un ejemplo: El número 17.825

$1 \,.\, 10^4 + 7 \,.\, 10^3 + 8 \,.\, 10^2 + 2 \,.\, 10^1 + 5 \,.\, 10^0$

$1 \,.\, 10.000 + 7 \,.\, 1.000 + 8 \,.\, 100 + 2 \,.\, 10 + 5 = 10.000 + 7.000 + 800 + 20 + 5$

Sistema de Numeración Posicional Binario

Este sistema es similar al anterior, solo que la base del sistema es 2. Por lo tanto vamos a usar solo dos símbolos: el 0 y el 1. Este sistema es el utilizado por las computadoras para realizar cálculos y para codificar la información de entrada y salida.

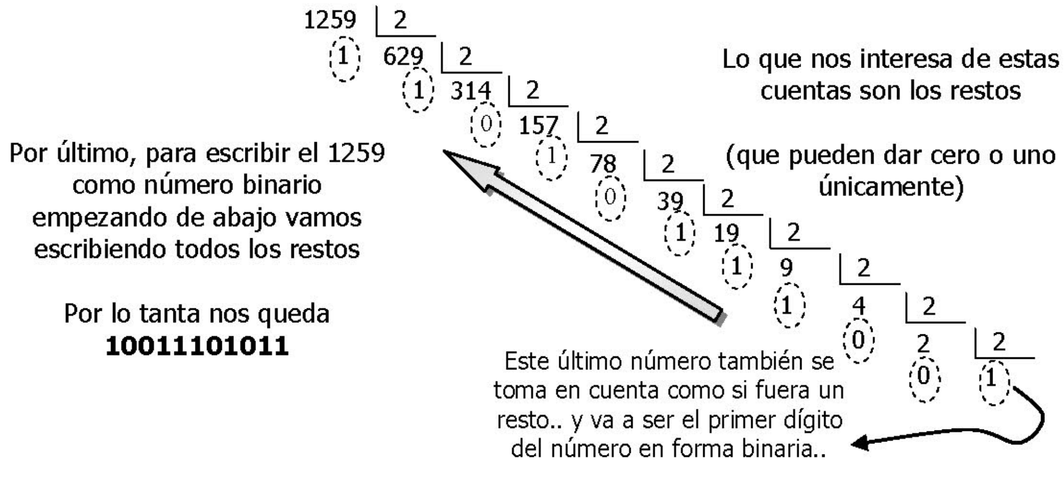
Como es un sistema posicional cada símbolo depende de la posición que esté va a tener su significado que en este caso serán las distintas potencias de 2.
Contando de derecha a izquierda, el primero va a ser la cantidad de veces que multiplique a 2^0, el segundo la cantidad de veces que multiplique a 2^1, la tercera la cantidad de veces que multiplique a 2^2, la cuarta la cantidad de veces que multiplique a 2^3 y así sucesivamente.. a su vez estas cantidades pueden ser 0 o 1 (que son las dos únicas cifras con las que se escriben los números en este sistema).

Veamos un ejemplo:
El número 111011011
111011011 (empezando del 2^0, desde la derecha hasta llegar al 2^8, el primer dígito)
$1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
$1 \cdot 256 + 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 2 +1 **= 475**

Esa es la manera de saber qué número es en nuestro sistema un número que está escrito en sistema binario, pero la cosa se complica un poco cuando queremos ver como se escribe en binario un número determinado de nuestro sistema decimal.. por ejemplo como se escribe en binario el número 1259. Cuestión que vamos a ver bien ahora..

Pasaje de sistema decimal a sistema binario:

Para pasar un número al sistema binario, lo que vamos a hacer en primer lugar es dividirlo por dos, luego dividir por dos al resultado y así sucesivamente hasta terminar.. veamos el ejemplo del 1259



- **Otros sistemas de Numeración Posicional**

Así como vimos el sistema binario (en base 2) hay sistemas de numeración de base 3, base 4, base 5, etc..

Por ejemplo el sistema de numeración posicional de base 7, utiliza los números 0 1 2 3 4 5 y 6.. cada posición empezando de la derecha es un potencia de 7 (la primera sería 7^0, después 7^1, después 7^2, después 7^3 y así sucesivamente, y la manera de pasar de sistema decimal a base 7 es similar a la del sistema binario, solo que en el caso de pasar de decimal a base 7 las divisiones serían por 7.

Pasar los siguientes números romanos al sistema decimal:

1) III	6) XIX	11) XCIX	16) DCCXXXI
2) IV	7) XIV	12) CMXCIX	17) CCLXXIX
3) IX	8) XL	13) CXXIV	18) DCCCXV
4) XI	9) XLIV	14) CCLXVII	19) CCCXXVII
5) XXI	10) XXXIV	15) CDLVIII	20) DCLXVI

Escribir los siguientes números en el Sistema de Numeración Romano:

21) 45	25) 22	29) 80	33) 643	37) 188
22) 54	26) 88	30) 52	34) 183	38) 818
23) 18	27) 75	31) 194	35) 918	39) 264
24) 33	28) 79	32) 172	36) 167	40) 462

- Pasar los siguientes números del Sistema Binario al Decimal:

41)	1 0 0 1	51)	1 1 1 0 0 1 0	61)	1 1 0 1 1 1 0 1 1
42)	1 0 1 1	52)	1 0 0 0 1 1 1	62)	1 0 1 0 0 0 1 1 0
43)	1 1 0 0 1	53)	1 0 1 0 1 0 1 1	63)	1 1 0 1 1 0 1 0 1
44)	1 1 0 1 1	54)	1 1 0 0 0 1 0 1	64)	1 0 1 1 0 1 0 1 0
45)	1 0 1 1 0	55)	1 0 1 1 0 1 0 0	65)	1 0 1 0 1 1 1 0 1 1
46)	0 1 1 1 1	56)	1 1 1 0 0 1 1 0	66)	1 1 0 1 0 0 0 1 1 0
47)	1 1 0 0 1	57)	1 1 0 1 0 1 0 1	67)	1 0 1 1 0 1 0 0 0 1
48)	1 1 1 0 1	58)	1 0 0 0 1 1 1 1	68)	1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
49)	0 0 1 0 1	59)	1 1 0 1 1 0 1 1 0	69)	1 0 0 1 1 0 0 0 1 0
50)	0 1 1 0 0	60)	1 0 1 0 1 0 1 1 1	70)	1 1 0 1 0 0 1 0 0 0

- Pasar los siguientes números del Sistema Decimal al Binario:

71)	12	77)	37	83)	186	89)	279	95)	703
72)	14	78)	41	84)	212	90)	350	96)	782
73)	21	79)	44	85)	149	91)	426	97)	724
74)	28	80)	45	86)	206	92)	276	98)	1016
75)	17	81)	102	87)	157	93)	292	99)	515
76)	51	82)	78	88)	166	94)	367	100)	513

- Realizar las siguientes operaciones combinadas con números en diferentes sistemas de numeración:

(Aclaración: Los números con ceros y unos están en sistema binario)

101) $4 \cdot IV - 2 + 11000 - XXXIII$

102) $3 \cdot IX - 11100 \div V$

103) $IV \cdot 10 + 5 \cdot VII - XLII$

104) $XVI \div 000 + XLII \div 11$

105) $7 \div 111 + 5 \cdot IX - XLIV$

106) $17 - 1110 + 5 \cdot IV + VI$

107) $3 \cdot IX - IV \cdot 6$

108) $LVI \div 1000 + 10110 \div 2$

109) $3 \cdot XIV - 100 - (VIII \div 4 + 101)$

110) $XLVIII \div [000 + 10110] \div 5$

111) $(3 \cdot XIV - 100) \div (VIII \div 4 + 101)$

112) $(XLV - (000 + 10110) \div 2) \div VI$

113) $2 \cdot 1100 - (VIII \div 4 + 100) \div 4^{2}$

114) $\sqrt{XLIX} \div [\,+ (000 + 10110)] \div 5$

115) $2 \cdot 1100 \div \sqrt{(VIII \div 4 + 100) \div 4}$

116) $14 \div (\sqrt{XLVI - 010} + (XIV - 101)^{2})$

117) $(\sqrt{XLV + 100} - (XXXII - 11111)) \div II$

118) $(011 - \sqrt{IX})^{2} \div [0010 - 5 + XIX]$

119) $\sqrt{12 + XIV + 1010} \div \sqrt{XLIX - 10}$

120) $\sqrt{CXLVII \div \sqrt{CXXIV - 110011}}$

by Dal-0r para TARINGA!

- Escribir en letras:

121) 1.101.200
122) 132.025.000
123) 354.100.000
124) 354.000.100
125) 1.123.000.000
126) 16.123.686.000
127) 64.183.700.000
128) 64.183.000.700
129) 120.100.000.000
130) 120.000.100.000
131) 120.000.000.100
132) 642.185.000.000
133) 1.135.158.000.000
134) 6.130.000.000.500
135) 8.138.000.000.020
136) 9.990.099.090.000
137) 9.909.990.990.000
138) 9.090.009.909.000
139) 9.900.090.099.000
140) 9.009.900.900.000

Escribir en números:

141) Ocho billones ochocientos mil millones ochocientos ochenta.
142) Ocho billones ochenta mil ochocientos millones ocho mil ochocientos.
143) Ocho billones ochenta y ocho mil ochenta.
144) Ocho billones ochocientos ocho mil ochenta y ocho
145) Ocho billones ochenta y ocho mil millones ocho.
146) Ocho billones ochenta y ocho millones ocho.
147) Ocho billones ochenta y ocho millones ochocientos ocho mil ochocientos ocho.
148) Ocho billones ochenta mil millones ochocientos ocho mil ochocientos.
149) Ocho billones ochocientos ochenta mil millones ochocientos mil ochocientos.
150) Ocho billones ochocientos ochenta mil ochenta y ocho millones ochocientos.

Escribir el número que resulta de sumar:

151) Tres unidades de mil, cinco centenas, ocho decenas y cuatro unidades.
152) Seis unidades, tres centenas y cinco centenas de mil.
153) Nueve decenas, seis centenas, 4 decenas de mil, una centena de mil, una unidad de mil y 7 unidades.
154) Ocho centenas, nueve decenas de mil, cinco unidades, tres unidades de mil.
155) La mitad de una unidad de mil, la cuarta parte de una centena de mil y tres unidades.
156) El doble de siete unidades de mil, el triple de 3 centenas y el cuádruple de 6 unidades.
157) Tres unidades de mil, tres unidades y el triple de tres centenas.
158) Cuatro decenas de mil, el cuádruple de cuatro centenas y cuatro unidades de mil.
159) Tres unidades, tres centenas, tres decenas de mil y la tercera parte de tres centenas de mil.
160) El doble de seis centenas, el doble de siete unidades de mil y el quíntuple de 7 decenas.

161) Inventá con tus compañeros un sistema de numeración:
a) Cuántos símbolos usan en su sistema de numeración?
b) Hay un símbolo para el cero?
c) Discutí con ellos de que tipo de sistema de numeración se trata y por que.
d) Escriban en ese sistema las siguientes cifras:

d-1) 46 d-2) 106 d-3) 1006 d-4) 1060 d-5) 1600

162) Responder Verdadero o Falso:

a) Un Sistema de numeración aditivo tiene un símbolo para representar al cero.
b) Un Sistema de numeración aditivo puede tener o no un símbolo para el cero.
c) Un Sistema de numeración aditivo no tiene ningún símbolo para representar al cero porque al ser aditivo no hace falta sumar ceros porque además no tendría sentido.
d) Los sistemas de numeración aditivos son los más simples de todos los sistemas pero para escribir números grandes no son muy "prácticos" que digamos ya que escribir un número grande requiere muchos símbolos.
e) Los sistemas de numeración aditivos son muy complicados de usar pero son los mas usados.
f) En los sistemas de numeración aditivos se puede escribir cualquier número por más grande que sea.
g) Los sistemas de numeración híbridos tienen la ventaja de ser tan simples como los aditivos y al escribir números muy grandes la tarea se hace más fácil porque se reducen la cantidad de símbolos.
h) En los sistemas de numeración híbridos no importa el orden en que se escriban los símbolos.
i) En los sistemas de numeración aditivos sí importa el orden en que se escriban los símbolos.
j) Los sistemas de numeración posicionales pueden tener o no un símbolo para el cero.

k) Los sistemas de numeración posicionales deben tener un símbolo para el cero sí o sí.

l) La ventaja de los sistemas de numeración posiciónales es que con ellos es mucho más simple el cálculo de operaciones como sumas, restas, multiplicación y división.
m) El sistema de numeración binario es un sistema de numeración posicional.

➢ <u>Problemas para pensar un poco</u>

163) Una persona le dijo a otra que escribió un número de 4 cifras (el año de su nacimiento, que puede ser entre el 1500 y el 1600) en un sistema de numeración que inventó el mismo.. Le dice además que para ello usó solo tres símbolos diferentes.. y por último le muestra el año de su nacimiento escrito en su sistema de numeración para que lo vea..

El número escrito era el siguiente: ♌ & ♎ ♎

a) ¿Puede tratarse de un sistema de numeración aditivo? (Si decís que si, da un ejemplo de un posible año, y si decís que no explica por qué no puede ser)
b) ¿Puede tratarse de un sistema de numeración híbrido? (Si decís que si, da un ejemplo de un posible año, y si decís que no explica por qué no puede ser)
c) ¿Puede tratarse de un sistema de numeración posicional? (Si decís que si, da un ejemplo de un posible año, y si decís que no explica por qué no puede ser)

164) Vamos a hacer de cuenta que somos arqueólogos y encontramos en una vasija fosilizada un número tallado en un sistema de numeración que desconocemos. La vasija se supone que fue hecha por miembros de una cultura que nos interesa estudiar y por lo tanto queremos saber que tan avanzado era su sistema de numeración, el número escrito en símbolos es este:

♓ ⌘ ❖ ♒ ♓ ♐ ♑ ◈ ♓

Tenemos además las siguientes pistas:

- El número en nuestro sistema es un número de 5 cifras..
- La cifra de la decena de mil, la de la centena y la de la unidad son iguales.
- La base usada en el sistema de numeración en que fue escrito ese número es 10.

Preguntas:
A ¿Se puede tratar de un sistema de numeración aditivo? ¿Por qué si o por qué no?
B ¿Se puede tratar de un sistema híbrido? ¿Por qué si o por qué no?
C ¿Se puede tratar de un sistema posicional? ¿Por qué si o por qué no?
D Les adelanto una cosita, de los tres tipos de sistemas de numeración, este número puede pertenecer a dos de ellos, ahora la pregunta es (supongo que ya sabrán a cuales me refiero) ¿Cuál de estos dos tipos de sistemas es más probable que haya sido el usado para escribir ese número?

165) Una persona nos dice que inventó un sistema de numeración con el cual pudo escribir un número de 6 cifras empleando solo un símbolo, una sola vez (es decir que no hizo falta escribir repetidamente ese símbolo) ¿Que tipo de sistema es ese?

166) Una persona nos dice que inventó un sistema de numeración, muy primitivo y simple de usar, aunque es muy pesado para números grandes... También nos dice que con su sistema es capaz de escribir cualquier número, cualquiera que sea.. y todo usando solo un símbolo (repitiéndolo la cantidad de veces que se quiera) ¿Es cierto lo que nos dice esta persona? ¿Si es cierto, que tipo de sistema de numeración sería?

167) Ordenar de menor a mayor los siguientes números y escribirlos a todos en el mismo sistema de numeración: (los que están en negrita están escritos en sistema binario)

XV **1100** 28 X **101** 9 XXIX **10001** XVI 4

168) En un libro dice que Florencia nació en el año MDCCLXXIV y dice además que Florencia se casó a la edad de 25 años. Luego dice que 2 años después de su casamiento tuvo a su primera hija, cuyo nombre fue Alma. A su vez dice el libro que Alma se casó en el año MDCCCXXIV. ¿A que edad se casó Alma?

169) Encontrar en la siguiente sopa de números romanos, los números:

X	D	I	I	V	X	X	C	C	C
M	C	D	L	X	I	X	L	L	M
C	C	I	C	L	C	C	M	X	X
C	X	D	M	D	X	V	D	C	C
X	L	X	L	V	L	X	C	I	I
I	X	V	I	X	L	X	C	L	X
I	I	I	I	I	I	I	X	X	D
I	I	C	V	I	X	I	X	V	C
I	D	C	C	C	X	L	V	I	I
C	I	D	D	C	X	V	I	L	I

a) 1462
b) 1726
c) 847
d) 476
e) 457
f) 1469
g) 327
h) 616
i) 157
j) 999

Nota: Vale En forma recta, en diagonal, para adelante y para atrás.

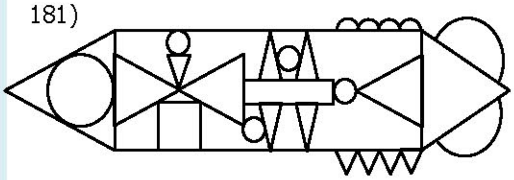
➢ Completar los siguientes números en base 2: (Los datos que tenemos son los valores de la posición de la unidad de cada número en el sistema decimal, o sea que como dato tenemos el último dígito de cada número)

170)	1	0	X	1	0	0	1	=	_9
171)	1	1	1	0	X	1	1	=	_ _9
172)	0	1	X	1	0	1	1	=	_3
173)	1	0	1	0	1	X	0	=	_4
174)	1	X	0	1	0	1	1	=	_ _7
175)	1	0	1	0	0	X	1	=	_ 1
176)	0	1	1	1	1	X	0	=	_ 0
177)	1	0	X	1	0	1	0	=	_ 4
178)	1	X	1	1	0	1	0	=	_ _ 2
179)	1	1	0	X	0	0	1	=	_ _ 5

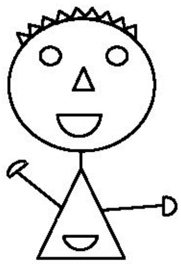
180) Escribí el número 101, en el sistema binario. Luego tomá el resultado como si fuera un número en sistema decimal y restale 101. Luego dividilo por "MC" (este último número está en sistema romano). ¿Qué resultado obtuviste?

➢ Imaginemos un sistema de numeración aditivo, en el cual los símbolos son figuras geométricas, de modo tal que, los triángulos valen 1 unidad, los semicírculos valen 5 unidades, los círculos valen 10 unidades y los rectángulos 100. Con este sistema de numeración, decir que número representa cada una de las siguientes figuras:

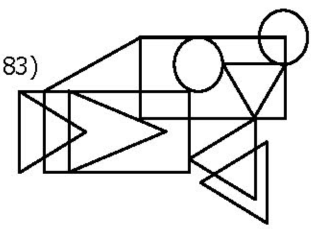
181)



182)



183)



Se cuentan las figuras "superpuestas"

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

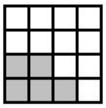
Regla de Tres Simple

Número de Tema: **02**

Área: **Matemática**

✓ **<u>Razones</u>:** Una razón es un cociente entre dos magnitudes o valores que están relacionados entre sí.

Ejemplos: *Por cada 5 cuadraditos sombreados tenemos 11 cuadraditos blancos*



La razón entre los cuadraditos sombreados y los cuadraditos blancos es: $\frac{5}{11}$

Cinco Personas tardan 8 días en realizar un determinado trabajo: *La razón entre las personas que realizan el trabajo y los días que tardan es:* $\frac{5}{8}$

✓ **<u>Proporcionalidad</u>:** Cuando se igualan dos razones, decimos que existe una proporcionalidad.

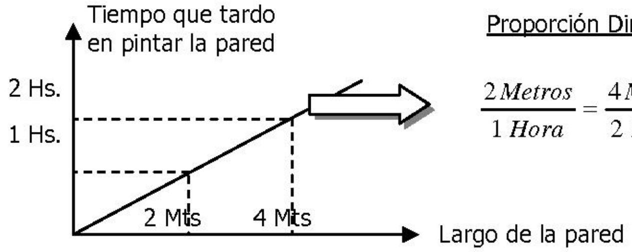
Pero hay que tener cuidado en la forma que escribimos esta igualdad, ya que <u>hay dos tipos distintos de proporcionalidad</u>:

➢ **Magnitudes <u>Directamente</u> Proporcionales**

Las magnitudes **DIRECTAMENTE** proporcionales son las que <u>al aumentar una aumenta proporcionalmente la otra</u> (es decir que por ejemplo, si una se duplica, la otra también se duplica) o *al disminuir una disminuye proporcionalmente la otra.*

*Por ejemplo: El tiempo que tardo en pintar una pared y el largo de la pared, queda claro que mientras **más** larga sea la pared, **más** tiempo voy a tardar en pintarla.* (O que por ejemplo si la pared fuera el doble de larga, tardaría el doble en pintarla)

En el gráfico se ve muy claro que mientras más larga sea la pared, más tiempo voy a tardar..



<u>Proporción Directa</u>:

$$\frac{2\,Metros}{1\,Hora} = \frac{4\,Metros}{2\,Horas}$$

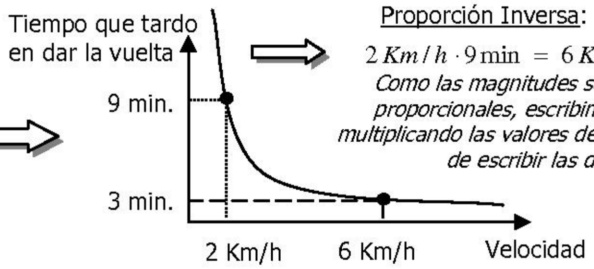
Ojo con la proporcionalidad!!! En muchos casos vamos a ver que hay dos magnitudes en las que al aumentar una, también aumenta la otra y no son precisamente directamente proporcionales. Un ejemplo de este tipo de magnitudes son "el lado de un cuadrado y su área" por ejemplo si el lado de un cuadrado vale 5 cm, su área será 25cm^2, pero si su lado vale el doble, o sea 10 cm, su área vale 100 cm^2, que es el cuádruple. En este caso aumenta una magnitud y también aumenta la otra, pero no aumenta proporcionalmente, por lo tanto **NO** son directamente proporcionales.

➢ **Magnitudes <u>Inversamente</u> Proporcionales**

Las magnitudes **INVERSAMENTE** proporcionales son las <u>que al aumentar una disminuye proporcionalmente la otra</u> o *al disminuir una aumenta proporcionalmente la otra.* (Por eso Inversa)

*Por ejemplo: El tiempo que tardo en dar una vuelta a la manzana y la velocidad con que lo haga, mientras **mas** rápido corra **menos** voy a tardar.. (Y es proporcional porque si voy el doble de rápido, tardaré la mitad del tiempo)*

*En el gráfico se ve muy claro que mientras **más** rápido corra, **menos** tiempo voy a tardar..*



<u>Proporción Inversa</u>:

$$2\,Km/h \cdot 9\,\text{min} = 6\,Km/h \cdot 3\,\text{min}$$

Como las magnitudes son Inversamente proporcionales, escribimos la proporción multiplicando las valores de cada razón en lugar de escribir las divisiones.

✓ ¿Qué es la Regla de Tres Simple? **Es un método para calcular Magnitudes Proporcionales.**
Cuando las MAGNITUDES son <u>DIRECTAMENTE</u> PROPORCIONALES, es **Regla de Tres Simple <u>DIRECTA</u>**.
Cuando las MAGNITUDES son <u>INVERSAMENTE</u> PROPORCIONALES, es **Regla de Tres Simple <u>INVERSA</u>**.

Regla de Tres Simple **Directa**:

Ejemplo: Calcular el tiempo que tardo en pintar una pared de 3 metros si para pintar una de 2 metros tardé 6 horas.

Es DIRECTA porque a **MAS** larga, **MAS** voy a tardar (Y es proporcional, porque si tengo que pintar por ejemplo, exactamente el doble, tardaría exactamente el doble)

Planteo:

2 metros ⟶ 6 Horas ⇢ En la 1ª Línea escribo el DATO que me dan: "Para pintar una pared de 2 metros tardé 6 horas"

3 metros ⟶ X Horas ⇢ En la 2ª Línea escribo lo que tengo que calcular: ¿Cuántas horas tardaré (**X**) para pintar 3 metros?

Planteo la proporción Directa:

$$\frac{2\,Metros}{6\ Horas} = \frac{3\,Metros}{X}$$

Paso los términos que están dividiendo, multiplicando para el otro lado del igual: $2\,Metros \cdot X = 3\,Metros \cdot 6\,Horas$

Paso el término que está multiplicando a la X, dividiendo para el otro lado del igual

$$X = \frac{6\ horas \bullet 3\ \cancel{metros}}{2\ \cancel{metros}} \Rightarrow X = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\,Hs \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 9\ Horas$$

Esta es la respuesta final: Para pintar la pared de 3 metros tardo 9 horas.

Regla de Tres Simple **INVERSA**:

Ejemplo: Calcular el tiempo que tardan 5 personas en pintar una pared, si sabemos que 3 personas tardan 40 minutos.

Es INVERSA porque a **MAS** personas, **MENOS** van a tardar (Y es proporcional porque si fueran exactamente el doble de personas, tardarían exactamente la mitad del tiempo)

Planteo:

3 personas ⟶ 40 minutos ⇢ En la 1ª Línea escribo el DATO: "3 Personas tardan 40 minutos"

5 Personas ⟶ X ⇢ En la 2ª Línea escribo lo que tengo que calcular.

Planteo la proporción Inversa:

$$3\ personas \bullet 40\ minutos = 5\ personas \bullet X$$

Paso el término que está multiplicando a la X, dividiendo para el otro lado del igual

$$X = \frac{3\ personas \bullet 40\ minutos}{5\ personas}$$

Simplifico y Resuelvo

$$X = \frac{3\ \cancel{personas} \bullet \overset{8}{\cancel{40}}\ minutos}{\underset{1}{\cancel{5}}\ \cancel{personas}} = 24\ minutos$$

Esta es la respuesta final: Las 5 personas tardarán 24 minutos.

Casos con los que hay que tener mucho cuidado: Hay casos en los que parece ser que tenemos una regla de tres simple y no es así!!! Veamos un ejemplo típico de error:

Ezequiel a los 7 años medía 1 metro de altura, ¿Cuánto medirá Ezequiel a los 14 años?
Ojo con esto!!! Un error típico es pensar que la relación entre la edad y la altura es directamente proporcional razonando que a más años de edad, mas alto es Ezequiel, pero tengamos en cuenta que no siempre es así. De hecho si fuera siempre así a los 14 años debería medir 2 metros y a los 21, 3 metros.

Moraleja: Estas magnitudes (La edad y la altura) si bien al aumentar una también aumenta la otra (Al menos en los primeros años de edad) no son para nada directamente proporcionales, por lo tanto nunca podemos resolver un problema con estas magnitudes por regla de tres simple. Así como pasa con estas magnitudes también pasa con otras, por eso debemos tener mucho cuidado en entender que no basta con relacionar si aumenta una magnitud y la otra también, sino que tenemos que ver si estos aumentos son proporcionales. Para lo que si una magnitud aumenta al doble, la otra también debería hacerlo.

1) De una tela de 12 metros se hicieron 18 remeras. ¿Cuántas remeras se harán de una tela de 14 metros?

2) El precio de una botella de Coca Cola de 1,5 litros es $ 1. Si el precio fuera proporcional al tamaño, ¿Cuánto tendría que costar la botella de Coca Cola de 2,25 litros?

3) Un avión que viaja a unos 600 kilómetros por hora aproximadamente en promedio tarda en llegar de Buenos Aires hasta Mendoza, mas o menos 2 horas. ¿Cuánto tarda entonces en llegar, un helicóptero, que en promedio su velocidad aproximada es 200 kilómetros por hora?

4) Un remís le cobró a Emiliano $ 3,5 por llevarlo de su casa a la casa de Lucas, que queda a unas 56 cuadras de su casa. Si al otro día llama a la misma remisería para que lo lleve a la casa de Marcelo que queda a 64 cuadras de su casa: ¿Cuánto le van a cobrar esta vez?

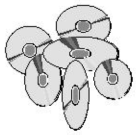
5) La tierra está a unos 149 millones de kilómetros del sol, viajando a la velocidad de la luz, llegaríamos al sol en 8 minutos y medio. La distancia de la Tierra a Marte es de 80 millones de kilómetros, viajando a la velocidad de la luz ¿Cuánto tiempo, aproximadamente, tardaríamos en llegar a Marte?

6) El kiosquero de la esquina tiene la siguiente promoción los chocolates que en realidad cuestan $ 0,60 cada uno, los vende a 6 por $ 3. Si Matías se gasta $ 12 en esos chocolates. ¿Cuánta plata se ahorró, comparado con lo que le hubiera salido comprar los mismos chocolates en otro Kiosco?

7) Para fabricar 80 bolitas de vidrio se necesitan 320 gramos de vidrio. ¿Cuántas bolitas se podrán fabricar con 360 gramos de vidrio?

8) Un microprocesador PENTIUM con velocidad de 133,33 Mhz cuesta aproximadamente $ 60. Si el precio fuera proporcional a la velocidad de los procesadores: ¿Cuánto costaría un microprocesador PENTIUM de 800 Mhz?

9) El último disco de Britney Spears vendió 140.000 unidades en los primeros 12 días de venta en los Estados Unidos. Suponiendo que la venta se mantuvo constante los días siguientes, calcular: ¿Cuántos discos se vendieron en los primeros 18 días?



10) Un caballo, realiza 30 pasos cada 2 metros que recorre, si hace 555 pasos ¿Cuántos metros recorre?

11) Un auto como el FIAT UNO, consume aproximadamente 12,5 litros de nafta para recorrer 112,5 kilómetros. ¿Cuántos litros de nafta necesitaría para recorrer 360 km?.

12) Si para ir a Villa Gesell con este auto, gastamos $ 40,8 teniendo en cuenta que la distancia hasta Villa Gesell es de 360 kilómetros, ¿Cuánta plata gastaríamos para ir a Córdoba sabiendo que la distancia a Córdoba es 720 kilómetros?

13) Los derechos televisivos para transmitir el partido Argentina - Inglaterra para el mundial Corea - Japón 2002, le costaron a los canales argentinos U$S 12 millones. Suponiendo que el precio es proporcional a la población del país y sabiendo que Argentina tiene 40 millones de habitantes y que Inglaterra tiene 56 millones de habitantes, ¿Cuánto le cuestan los derechos televisivos a un canal inglés?

14) Se calcula que, en un asado, en promedio una persona adulta come 0,6 kilos de carne y un niño come 0,3 kilos de carne. Marcelo quiere organizar un asado para el día de la primavera con sus amigos. En total son 22 adultos y 6 niños. ¿Cuántos kilos de carne tiene que comprar?

15) En un trabajo hecho con computadora, con letra de tamaño 12, hay en promedio 3.780 palabras por cada 7 páginas. Si tenemos que escribir 7020 palabras ¿Cuántas páginas van a ocupar?

16) Un cuaderno espiralado para anotaciones de 96 hojas cuesta $ 1,35. Si el precio es proporcional a la cantidad de hojas ¿Cuánto cuesta un cuaderno de la misma marca, de 64 hojas?

17) En un diskette con 1,44 Megabytes de capacidad se pueden guardar aproximadamente 60 fotos de 10 cm por 15 cm. ¿Cuántas fotos se pueden guardar en un CD, si la capacidad del CD es 650 Megabytes?

18) Mariano y un amigo suyo juntaron en 10 días 160 latitas vacías. ¿En cuántos días juntarán la misma cantidad de latitas, si los ayudan dos amigos mas?

19) En una regata un Yate empleó 7 horas en realizar una etapa navegando a 24 Km/h. ¿Qué tiempo hubiera empleado en realizar ese mismo trayecto si su velocidad hubiera sido 42 Km/h?

20) A una estación de servicio le alcanzan los depósitos que tienen de nafta para vender durante 5 días vendiendo en promedio unos 1600 litros de nafta por día. Si aumentan las ventas diarias y el promedio de ventas pasa a ser 2000 litros por día. ¿Para cuántos días de ventas le alcanzan sus depósitos?

21) Para emparejar el césped de la cancha de River, con una máquina cortadora se hace el trabajo en 8 horas. Si hay poco tiempo y se necesita que en un lapso de 2 horas se haga ese trabajo. ¿Cuántas máquinas cortadoras se deberían usar simultáneamente?

22) Para pintar un paredón muy grande un obrero notó que con 3 baldes de pintura le alcanzaba para cubrir 2 metros de alto por 9 metros de largo. Con los mismos 3 baldes de pintura: ¿Qué largo se puede cubrir del paredón si se pinta hasta una altura de 1,5 metros?

23) Un granjero calcula que las provisiones de comida que tiene para sus 12 cerdos le durarán 18 días. Si vende 3 cerdos en ese momento ¿Para cuántos días le durarán entonces sus provisiones?

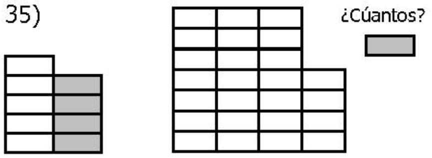
24) Planteá en clase una lista de 5 magnitudes directamente proporcionales y 5 inversamente proporcionales

- <u>Cuáles de las siguientes magnitudes pueden ser Directamente Proporcionales y cuales Inversamente Proporcionales</u>:

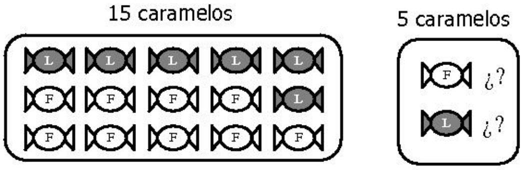
25) La cantidad de amigos que realizan un trabajo, con respecto al tiempo que tardan en realizarlo.
26) La cantidad de chicos que ponen dinero para comprar algo en común, con el dinero que pone cada uno.
27) El tiempo empleado para pintar una pared, con respecto a la superficie de la pared.
28) El tiempo que dura una provisión de comida respecto a las personas que comen de esa provisión.
29) La cantidad de alumnos de River de un curso, con respecto a la cantidad de alumnos total del curso.
30) El tiempo que tardo en llegar a Santa Fe, con respecto a la velocidad con la que viajo.
31) El tiempo que tardo en ahorrar 100 pesos, con respecto a la cantidad de plata que ahorro por día.
32) La cantidad de máquinas necesarias para hacer un trabajo, respecto del tiempo de trabajo.
33) La superficie de pasto que corto, respecto del tiempo que necesito para cortarlo.
34) La superficie de pasto que corto, respecto de la cantidad de gente que hace el trabajo.

- <u>Para los siguientes gráficos, plantear una razón, una proporción, e inventar con estos datos un problema de regla de tres simple:</u>

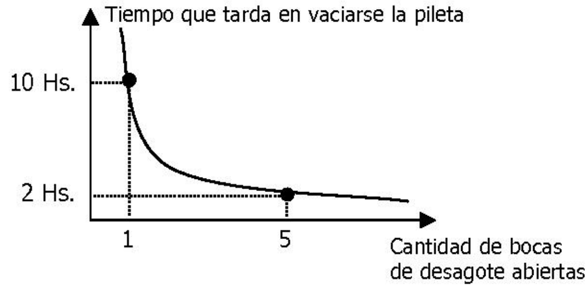
35)



36)



37) El siguiente Gráfico representa el tiempo que tarda en vaciarse una pileta en función de la cantidad de bocas de desagote abiertas. Analizar como son estas magnitudes entre si, y con los datos del gráfico inventar un problema de regla de tres simple y resolverlo:



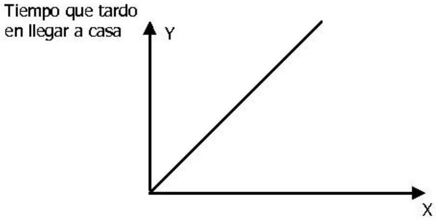
Lean los siguientes enunciados:

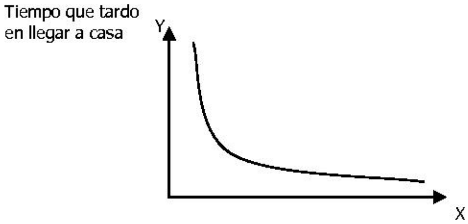
a) El gráfico representa como varía el tiempo que tardo para llegar a casa desde el colegio (Eje Y) en función de la velocidad con la que camino cada cuadra (Eje X)

b) El gráfico representa como varía el tiempo que tardo para llegar a casa desde el colegio (Eje Y) en función de la cantidad de cuadras de distancia que hay entre mi casa y el colegio (Eje X)

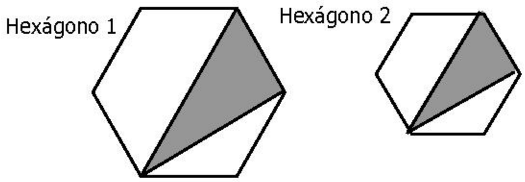
38) Decir para cada enunciado si las variables en cuestión son Directa o Inversamente Proporcionales.

39) Ahora identifiquen cada enunciado con los siguientes gráficos. Es decir, tienen que analizar qué gráfico le corresponde al enunciado "a" y qué gráfico le corresponde al enunciado "b"



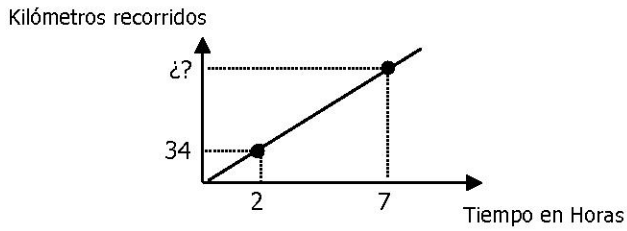


40) Observemos las siguientes figuras:



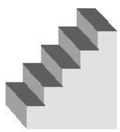
La superficie del Hexágono 1 es de 63 cm^2. Y la Superficie sombreada dentro del hexágono 1 es de 21 cm^2. Si Dibujamos un Hexágono como el hexágono 2, cuya área sea de 45 cm^2. ¿Cuánto valdrá el área sombreada dentro del hexágono 2?

41) El siguiente gráfico representa la distancia recorrida por un ciclista en función de las horas que hace que está pedaleando. Con los datos del gráfico calcular la distancia que habrá recorrido este ciclista a las 7 horas de haber empezado su recorrido.



42) Gabriel y sus amigos, comienzan a hacer un camino con piedras en el parque para ir desde un lugar a otro, al cabo de 1 hora de trabajo, cuentan la cantidad de piedras que utilizaron para el camino y son 240 piedras, cuando solo llegaron a completar 5 metros de camino. Si les faltan aún 3 metros más ¿Cuántas piedras en total tendrá el camino cuando lo terminen de hacer?

43) Un arquitecto está diseñando las escaleras de un edificio. Para las escaleras que van desde Planta Baja hasta el 6º piso, hay en total 90 escalones. El sabe que la cantidad de escalones de la escalera es proporcional a la altura de la escalera. De hecho, tiene que calcular cuantos escalones van a haber entre el 6 piso y el 10. Pero no le es tan simple, ya que el sabe que diseñó los primeros 6 pisos con una altura de 2,5 metros y que la altura con la que diseñó los otros pisos es de 3 metros. ¿Te animás a calcular la cantidad de escalones que le faltan para llegar hasta el piso 10?



44) El padre de Juan tiene un negocio de velas, en el último año y medio vendió 1500 docenas de velas. Ahora tiene en el negocio docenas de 250 velas y el padre de Juan le pregunta a Juan si el sabe calcular para cuánto tiempo le van a alcanzar, suponiendo que se vendan velas al mismo ritmo que en los últimos meses. Juan calcula esto y le dice al padre que supuestamente tienen que alcanzar para 3 meses exactos. ¿Está bien el cálculo de Juan?

45) En la remisería del barrio, tienen tarifas proporcionales a la distancia de los viajes. El dueño de la remisería le da la siguiente planilla al encargado para que la complete. Te proponemos que completes esta planilla vos mismo.

Kilometraje	3	5	10	15	20	50
Tarifa	$ 3,60					

46) Un ciclista profesional, hace un recorrido muy largo de varios días, parando para descansar todos los días. La primera vez que hizo este recorrido lo hizo en 18 días, y para ello andaba durante 8 horas por día y descansaba el resto. ¿Cuántos días hubiera tardado si descansaba una hora menos por día?

47) Vamos a hacer un crucigrama de números:

1					
				3	
		4			
	5				
2					7
		6			

Referencias:

Horizontales

1- Peso en gramos de un paquete con 120 galletitas, si un paquete de 50 galletitas iguales pesa 620 gramos.
2- Cantidad de minutos que tardo en pintar una pared de 5 metros si para pintar una de 3 metros tardo 1 hora.
3- Horas que tardo en llenar la pileta con 2 mangueras juntas, si con 3 mangueras tardo 8 horas.
4- Precio de 34 docenas de facturas si 8 facturas cuestan $2
5- Cantidad de cerámicas de 20 cm^2 que necesito para cubrir un patio, si con cerámicas de 24 cm^2 necesito 1420.
6- Distancia que recorro en auto a 80 Km/h, si, en el mismo tiempo, a 50 Km/h recorro 800 metros.

Verticales:

1- Cantidad de litros de pintura para pintar un paredón de 424 m^2. Si 3 litros de pintura alcanzan para $8m^2$.
2- Costo de una llamada de larga distancia de 1 hora y media, si cuestan $0,40 los 3 minutos.
3- EL cuádruple de 31.
4- El triple del triple del triple del triple del triple de 7.
5- La cantidad de meses del año que no empiezan con "j".
6- Cantidad de ventanillas de un tren de 4 vagones si un tren de 7 vagones tiene 140 ventanillas.

48) Responder Verdadero o Falso:

a) La regla de tres simple sirve solamente para resolver problemas en los que las variables son Directa o Inversamente proporcionales.
b) Cualquier problema que se nos ocurra se va a poder resolver con regla de tres simple.
c) Hay variables que no son ni Directa ni Inversamente Proporcionales.
d) La cantidad de asientos que hay en un cine es directamente proporcional al valor de cada entrada.
e) EL precio del boleto del colectivo es directamente proporcional a la cantidad de asientos que hay.
f) El tiempo que tardo en llegar a casa es inversamente proporcional a la velocidad con que voy.

49) Analizar la validez de esta frase: "La cantidad de diputados nacionales por cada partido político en el Congreso Nacional es Directamente proporcional a la cantidad de votos obtenidos por cada partido"
Si bien es "casi cierta" en realidad no es tan así. El tema está en el redondeo, ya que un partido no puede tener 7,3 diputados o 3,8 diputados. Pensá con tus compañeros algunos ejemplos similares a este.

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Regla de
Tres Compuesta

Número de Tema: **03**

Área: **Matemática**

✓ **La Regla De Tres Compuesta:** Es como la Regla De Tres Simple, pero con más magnitudes. O sea que es como una Regla De Tres Simple pero "más larga". En lugar de igualar dos razones para el planteo de la proporción, tendremos que igualar tres razones o, en algunos casos más de tres razones.

Como tenemos varias magnitudes unas pueden ser DIRECTAS y otras INVERSAS.

Vamos a ver como se resuelve una Regla De Tres Compuesta con un ejemplo

Ejercicio: Calcular cuánto tiempo tardan 5 obreros en hacer una pared de 6 metros si sabemos que 3 obreros tardan 45 minutos para hacer una pared de 2 metros de largo.

Acá **el tiempo** depende de **2 magnitudes** a la vez:

- **La cantidad de obreros**
- **El largo de la pared**

Ahora hay que ver cuales son DIRECTAS y cuales son INVERSAS

Analizaremos entonces, cuáles son directamente proporcionales y cuáles son inversamente proporcionales con respecto al tiempo que es lo que tengo que calcular.

Así que, vamos a analizar cada una para ver si son directa o inversamente proporcionales:

➢ **Cantidad de Obreros** / **Tiempo** en terminar el trabajo:

Nota: Analizaremos la relación entre la cantidad de obreros y el tiempo, sin tener en cuenta como varían las otras magnitudes. Es decir que hacemos de cuenta que las demás magnitudes, en nuestro caso el largo de la pared, no varían para nada, es más, para simplificar el análisis, en este punto, hacemos de cuenta que el largo de la pared ni está en el enunciado

MÁS OBREROS (+) ⇨ **MENOS** TIEMPO (−) ⇨ **INVERSA**

Ya que mientras mas sean para hacer el trabajo, menos van a tardar

Porque al **aumentar** una magnitud, **disminuye** la otra.

Ojo con esto: Si bien a más obreros se tarda menos tiempo, esto sólo no nos garantiza que sean Inversamente proporcionales. Pero en este caso, analizamos que: Se supone que por ejemplo el doble de obreros tardarían la mitad del tiempo, o el triple de obreros la tercera parte, etc. (obviamente que para esto se supone que todos los obreros trabajan "al mismo ritmo" porque si no fuera así no podríamos utilizar regla de tres para calcular esto).

➢ **Largo de la Pared** / **Tiempo** en terminar el trabajo:

Nota: Nuevamente, analizamos la relación entre el largo de lapared y el tiempo, sin tener en cuenta como varían las otras magnitudes. O sea, hacemos de cuenta que (La cantidad de obreros) no varía para nada, o lo que es lo mismo, se mantiene constante. Solo para analizar la relación entre la **Longitud de la pared** y el **Tiempo**

MÁS LARGA (+) ⇨ **MÁS** TIEMPO (+) ⇨ **DIRECTA**

Ya que mientras más larga es la pared, mas trabajo hay por hacer y mas tiempo requiere.

Porque al **aumentar** una magnitud, **aumenta** la otra.

Ojo aquí también: Si bien, mientras más larga es la pared mas tiempo se tarda, esto sólo no nos garantiza tampoco que sean realmente directamente proporcionales, Pero en este caso decimos que SI porque si la pared es el doble de grande se tardará el doble de tiempo y si fuera el triple de larga se tardaría el triple de tiempo y así sucesivamente.

Ahora queya sabemos cual es directa y cual inversa, planteamos la Regla de Tres con las dos magnitudes:

3 Obreros ⟶ 2 Metros ⟶ 45 minutos
5 Obreros ⟶ 6 Metros ⟶ X minutos

Esto es similar a lo que planteamos en la regla de tres simple, solo que acá tenemos más variables.

Y Ahora tenemos dos maneras diferentes de resolver este planteo.

- Por "reducción" o descomposición en regla de tres simple.
- Por planteo mecánico o de proporcionalidad.

- Resolución por Descomposición en regla de tres simple: Este método consta de separar la regla de tres compuesta en dos reglas de tres simples.

Veamos: Primero hago el planteo y supongo que una de las dos variables no está en el problema. Por ejemplo, hagamos el planteo y supongamos que no está la variable de la longitud de la pared.

3 Obreros ⟶ ~~2 Metros~~ ⟶ 45 minutos
5 Obreros ⟶ ~~6 Metros~~ ⟶ X minutos

Ahora tenemos una regla de tres simple. Entre la cantidad de obreros y el tiempo que tardan

Como ya habíamos planteado, la cantidad de obreros y el tiempo son **Inversamente Proporcionales**.

Resuelvo la regla de tres simple que nos quedó:

3 Obreros ⟶ 45 minutos

5 Obreros ⟶ X minutos

$$X = \frac{3\ \cancel{Obreros} \cdot 45\ Minutos}{5\ \cancel{Obreros}} = \frac{3 \cdot \overset{9}{\cancel{45}}\ Minutos}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 27\ Minutos$$

Y vuelvo a hacer el planteo original:

3 Obreros ⟶ 2 Metros ⟶ 45 minutos

5 Obreros ⟶ 6 Metros ⟶ X minutos

Y ahora cambiamos el planteo. Ya que como calculamos, 3 obreros en 45 minutos, es lo mismo que 5 obreros en 27 minutos

~~5 Obreros~~ ⟶ 2 Metros ⟶ 27 minutos

~~5 Obreros~~ ⟶ 6 Metros ⟶ X minutos

Como la cantidad de obreros queda igual en las dos líneas del planteo, significa que ya no nos interesa ni nos va a afectar el resultado. Esto pasa porque ya tuvimos en cuenta esta magnitud en el paso anterior.

Por Último, resuelvo la regla de tres simple que me queda y listo...

2 Metros ⟶ 27 minutos

6 Metros ⟶ X minutos

$$X = \frac{6\ \cancel{Metros} \cdot 27\ Minutos}{2\ \cancel{Metros}} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 27\ Minutos}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \boxed{81\ Minutos}$$

Como ya habíamos planteado, la longitud de la pared y el tiempo son **Directamente Proporcionales**.

Respuesta: Los 5 Obreros, harán la pared de 6 metros de largo en 81 Minutos.

- Resolución por planteo mecánico: Como ya se van a dar cuenta, este método es mucho más rápido que el otro, pero, al menos para mí, es mas probable confundirse con este método ya que es muy mecánico.

Escribimos nuestro planteo:

3 Obreros ⟶ 2 Metros ⟶ 45 minutos

5 Obreros ⟶ 6 Metros ⟶ X minutos

Acá no hay que olvidarse que hay que poner siempre la línea donde está la X abajo, si no, no sirve este método

Recordemos que:

✓ La **cantidad de obreros** respecto del tiempo que tardan son Magnitudes **Inversamente Proporcionales**

✓ La **longitud de la pared** con respecto al tiempo que tardan son Magnitudes **Directamente Proporcionales**

Entonces se resuelve así:

Se escribe X= y se completa de la siguiente manera:

El número que queda solo con la X va SIEMPRE ARRIBA

$$X = \frac{3\ Obreros \cdot 6\ Metros \cdot 45\ minutos}{5\ Obreros \cdot 2\ Metros} =$$

Las **INVERSAS "quedan como estaban"** Lo que estaba arriba queda arriba y lo que estaba abajo queda abajo.

Las DIRECTAS "se dan vuelta" Lo que estaba arriba queda abajo y lo que estaba abajo queda arriba.

Luego Simplifico y hago la cuenta y Listo!

$$X = \frac{3\ Obreros \cdot \overset{3}{\cancel{6}}\ Metros \cdot \overset{9}{\cancel{45}}\ minutos}{\underset{1}{\cancel{5}}\ Obreros \cdot \underset{1}{\cancel{2}}\ Metros} \boxed{= 81\ Minutos}$$

Como no podía ser de otra manera, llegamos al mismo resultado que por el otro método:

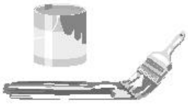
Respuesta: Los 5 Obreros, harán la pared de 6 metros de largo en 81 Minutos.

1) Una empresa de fletes cobró $ 480 por transportar 630 quintales de maíz unos 500 kilómetros de distancia. ¿Cuánto deberá cobrar para transportar 420 quintales de maíz a lo largo de 200 kilómetros?

2) Una hoja de papel de 37.5 cm. de largo por 22 cm. de ancho pesa 5 gramos ¿Cuánto pesará una resma de 500 hojas de papel de la misma calidad, pero si sus dimensiones son: 33 cm. de largo por 20 cm. de ancho?

3) Un ciclista recorre la mitad de un camino en 18 días andando 8 horas diarias a una velocidad de 20 kilómetros por hora. ¿A qué velocidad deberá ir para recorrer la otra mitad en 10 días andando 9 horas diarias?

4) La pileta de natación de la quinta de Fernando se llenó en 12 horas dejando abiertas 3 canillas por las que pasaban 10 litros de agua por minuto, ¿Cuánto tardará en llenarse la misma pileta si se dejan abiertas 5 canillas por las que pasan 8 litros por minuto?

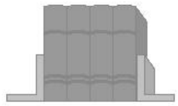


5)9 Obreros tardaron 8 días en pintar una pared de 2 metros de alto por 6 metros de ancho, trabajando a razón de 6 horas por día. ¿Cuánto tardarán 6 obreros en pintar una pared de 4 metros de alto por 8 metros de largo, trabajando a razón de 8 horas por día?

6) El agua contenida en un tanque de agua fue transportada en baldes de 9 litros por 2 chicos en 20 viajes cada uno, ¿Cuántos viajes tiene que hacer cada uno si los ayuda un chico más y usan baldes de 6 litros?

7) Dos cajas con 20 paquetes de 250 gramos de galletitas cuesta $ 18, ¿Cuánto costarán tres cajas con 25 paquetes cada una de 100 gramos de galletitas?

8) En una biblioteca de 3 metros de ancho y de 2 pisos entran 200 libros que en promedio tienen 120 hojas. ¿Cuántos libros de 100 hojas, entrarán en dos bibliotecas de 2 metros de ancho y de 4 pisos?



9) 14 hombres pavimentan 140 m. de un camino en 10 días trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántas horas diarias deben trabajar 20 hombres para pavimentar 180 m. en 15 días?

10) Diez trabajadores siembran un terreno de 15.000 m^2 en 9 días. ¿En cuántos días sembrarán 10.000 m^2, 12 trabajadores?

11) 20 lamparitas de 100W originan un gasto de $100 al mes, estando encendidas 6 horas diarias. ¿Qué gasto originarían 5 lamparitas de 120W en 45 días, encendidas durante 8 horas diarias?.

12) Para alimentar 8 cerdos durante 50 días se necesitan 140 kilos de alimento. ¿Cuántos kilos de alimento se necesitan para mantener 24 cerdos durante 25 días?

13) Una persona recorre 54 km. caminando 4 horas diarias durante 6 días. ¿Cuántas horas diarias tendría que andar para recorrer 126 km. en 14 días.

14) 35 gallinas consumen 8 kilos de alimento cada 4 días. ¿Cuántos kilos de alimento consumirán 60 gallinas en 7 días?

15) Completa la siguiente tabla, basada en el trabajo efectuado para abrir una zanja, en las mismas condiciones de trabajo:

Nro. de Trabajadores	Metros de la Zanja	Hs de Trabajo por día	Días que dura el trabajo
10	140 metros	8 horas	14 Días
	180 metros	6 horas	12 Días
16		6 horas	20 Días
16	250 metros	5 horas	
6	90 metros		15 Días

16) En una casa de fotografías, tienen 3 máquinas para revelar fotos. A su vez, el negocio está abierto durante 6 horas diarias. En promedio se revelan en este negocio unas 1200 fotografías por día. La dueña del negocio se da cuenta que no da a basto para revelar todas las fotos que les traen los clientes ya que le traen para revelar por día unas 2100 fotos y quiere tomar una decisión. Tiene dos posibilidades:

La primera es comprar 2 máquinas reveladoras más. La segunda es comprar una sola máquina mas y mantener el negocio abierto durante 3 horas más por día. ¿Cuál de las dos posibilidades le sirve?

17) En una panadería venden sueltas "gomitas masticables de fruta" y lo venden por peso. Florencia y su amiga Noelia van a la panadería que queda a 8 cuadras de su casa a comprar estas gomitas y compran 200 gramos, por el camino van comiendo gomitas y cuando llegan a la casa cuentan las de color amarillo. Habían 15 amarillas cuando llegaron a la casa de Florencia. A la siguiente semana vuelven a ir a la panadería y esta vez compran 600 gramos de gomitas, y de la panadería las van comiendo pero esta vez van a la casa de Noelia. La casa de Noelia queda a 6 cuadras de la panadería. ¿Cuántas gomitas de color amarillo habrán cuando lleguen a la casa de Noelia?

18) El depósito de la calefacción de un Shopping tiene capacidad para 1500 litros de combustible. El rendimiento de esos 1500 litros es de 24 días, teniendo en cuenta que se prende la calefacción del lugar durante 5 horas por día (todos los días) El 1 de Junio a la noche se queda sin combustible y el dueño del Shopping llena el depósito con los 1000 litros de combustible que tenía en ese momento el 2 de Junio. Ese mismo día se da cuenta que (como son los días mas fríos del año) que va a tener que dejar la calefacción prendida durante 8 horas por día, para que la temperatura del Shopping sea agradable. ¿En qué fecha tiene que volver a cargar el depósito cuando se vacíe?

19) 6 Amigos, cada uno con su auto, preguntan en un Estacionamiento pago cuanto les cuesta estacionar sus autos durante 3 horas y les dicen que en total costaría $42. Cuando les dicen esto, 3 de ellos deciden irse a buscar un estacionamiento mas barato y los restantes dejan sus autos en este estacionamiento pero deciden dejarlo una hora mas para tener mas tiempo. ¿Cuánto va a ser el total que tienen que pagar estos 3 amigos que dejaron sus autos en este estacionamiento cuando vuelvan?

20) Marcelo se quedó en la ruta porque le falló su auto y llama a la grúa. El dueño de la Grúa le dice que el precio es proporcional al peso del auto y a la distancia que lo tiene que remolcar hasta el lugar de asistencia automotor mas cercano. En primer lugar el dueño de la grúa le dice un precio estimativo y Marcelo acepta que le lleve el auto. Una Vez en el camión remolcador y en camino, el dueño de la grúa le da a Marcelo una tabla de valores en función del peso y la distancia y Marcelo lee en la primera línea:

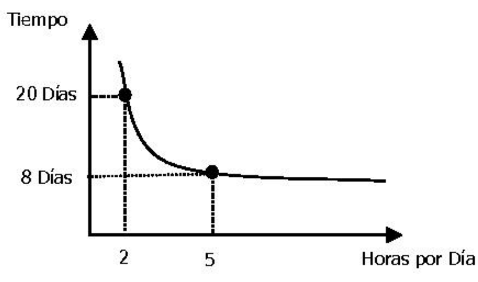
Peso del Automotor: 700 Kg. ----- Distancia a Remolcar: 60 Km. -------- Precio: 140

El precio estimativo que le dijo el dueño de la grúa a Marcelo fue de $80.
¿Es cercano el valor estimativo que dijo el dueño de la grúa al valor real? Para saber esto: Calcular exactamente cuánto le va a costar el remolque a Marcelo, si sabemos que su auto pesa 630 Kg. y que la distancia a la que lo tiene que remolcar es de 40 Km.

21) Volvamos un rato al pasado. Los Discos de música que se usaban antes, giraban a distintas velocidades, por ejemplo, Había discos que giraban a 78 RPM (Las RPM es la velocidad con que gira el disco, a mas RPM, mas rápido gira) y había otros discos que giraban mas lentamente, a 33 RPM. Si un disco de 78 RPM en 10 segundos daba 13 Vueltas, ¿Cuántas vueltas dará un disco de 33 RPM en 20 segundos?

22) 5 Packs de 7 gaseosas cada uno de una determinada marca cuestan $35. Si compro Otros Packs de la misma marca pero que vienen de a 8 Gaseosas Cada uno, ¿Para cuántos Packs me alcanza con 48?

23) El siguiente Gráfico muestra el tiempo que tardan 9 Personas para realizar un trabajo, según la cantidad de horas diarias que trabajen. Rehacer el gráfico y colocar los nuevos valores, si en lugar de 9 personas fueran 12.



Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Porcentajes

Número de Tema: **04**

Área: **Matemática**

✓ **¿Qué es un Porcentaje?** Es una forma de expresar una fracción o parte del entero, tomando como entero al 100%

Por ejemplo si quiero decir que una determinada parte de los chicos de 7º A son de RIVER, puedo decir, que el 36% de los chicos de 7º A son de RIVER. Si en 7º A fueran todos de RIVER, entonces diría que el 100% de los chicos de 7º A es de RIVER. Si ninguno fuera de RIVER, entonces diría que el 0% es de RIVER.

¿Cómo se calculan los Porcentajes? Hay dos maneras de calcular un Porcentaje.
Vamos a usar este ejemplo: Calcular cuánto es el 25% de 120

Primera manera: Remplazando el "%" por una fracción de 100 y el "de" por un "por"

Calcular cuánto es el 25% de 120

El 25% se transforma en la fracción "25 sobre 100"

$$\frac{25}{100} \cdot 120 =$$

La palabra "de" se transforma en un signo de multiplicación.

haciendo las cuentas....

$$\frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{100}_{\cancel{10}_{\cancel{5}_{1}}}} \cdot \cancel{120}^{\cancel{12}^{6}} = \boxed{30}$$

Y decimos como respuesta que el 25% de 120 nos dio como resultado 30.

Segunda Manera: "Usando una Regla de Tres Simple"
Calcular cuánto es el 25% de 120

Planteamos:

100 % ⟶ 120 ⟶ 120 es el total, el 100%

25 % ⟶ X ⟶ El 25 % es lo que tengo que calcular que es X

En este caso es DIRECTA

$$X = \frac{25 \cdot 120}{100} = \boxed{30}$$

Y vemos que al final de todo nos dio el mismo resultado que antes, que lo habíamos calculado de otra manera.

- Ahora lo que vamos a ver es cómo se calculan los valores porcentuales, como que porcentaje es tal número de tal otro.

Por ejemplo: Calcular que Porcentaje de 160 es 40.

Que dicho de otra forma puede ser: *"en tal escuela hay 160 alumnos en el turno tarde, de esos 160 alumnos, 40 son de RIVER. Calcular qué Porcentaje es de RIVER"*

Este porcentaje lo vamos a calcular por Regla de Tres Simple:
Primero planteamos la regla de tres: ⇒

160 ⟶ 100 %
40 ⟶ X

Luego escribimos la cuenta que tenemos que hacer para calcular la X
Recordemos que **Toda Regla de Tres Simple para hacer Porcentajes es DIRECTA**

$$X = \frac{40 \cdot 100\%}{160}$$

Por último resolvemos las cuentas...

$$\frac{\cancel{40}^{5} \cdot \cancel{100}^{\cancel{10}^{5}}\ \%}{\cancel{160}_{\cancel{16}_{\cancel{8}_{1}}}} = 25\ \%$$

$$\boxed{X = 25\ \%}$$

Y la respuesta es que 40 de 160 es el **25%.**

- **<u>Fracciones y Porcentajes</u>:** Como ya dijimos tanto una fracción como un porcentaje, son maneras de expresar "una parte del entero". Por lo tanto, cuando veamos un porcentaje, podemos escribirlo como fracción y cuando veamos una fracción, podemos escribirla como porcentaje. A continuación vamos a ver como se pasa una fracción a porcentaje y viceversa:

  - <u>Pasaje de Fracción a Porcentaje</u>: Si queremos pasar una fracción a un valor porcentual, tenemos que hacer la división (Numerador dividido denominador) y luego multiplicar por 100.

Veamos un ejemplo:
Si observamos la siguiente figura, vemos que la región sombreada representa 3/8 partes del entero. Pasemos entonces a porcentaje 3/8 para expresar que porcentaje de la región es la que está sombreada, en lugar de decirlo como una fracción.

Hacemos la cuenta 3 dividido 8

$$\begin{array}{l|l} 3 & 8 \\ \hline 30 & 0{,}375 \\ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

⇨ Y ahora multiplicamos al resultado por 100

$$\begin{array}{r} 0{,}375 \\ \times\ 100 \\ \hline 37{,}5 \end{array}$$

Y listo!! Podemos decir que 3/8 es lo mismo que 37,5%

Por lo tanto el área sombreada es el 37,5% del área total de la figura.

  - <u>Pasaje de porcentaje a Fracción</u>: Esto es más simple todavía. Lo que tenemos que hacer es escribir el porcentaje como una fracción de denominador 100 ya que el símbolo "%" representa a un denominador de 100. O lo que es lo mismo a las 100 partes de un entero.

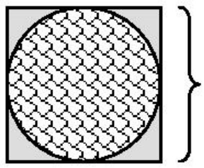
Veamos un ejemplo. Pasemos a fracción el valor 40%

Escribimos entonces al 40% como: $\frac{40}{100}$ Simplificamos: $\frac{\overset{2}{\cancel{40}}}{\underset{5}{\cancel{100}}}$

Y nos queda que el 40% equivale en fracción a: $\frac{2}{5}$

- **<u>Problemas de Aplicaciones Geométricas</u>:** Vamos a resolver este problema:

¿Qué porcentaje del área del cuadrado es el área del círculo que hay dentro?



20 cm

- Primero calculamos el área del círculo y del cuadrado por separado:

  - Área del cuadrado: $L^2 = (20 \text{ cm})^2 = \boxed{400 \text{ cm}^2}$
  - Área del Círculo: $\pi \,.\, R^2 = \pi \,.\, (10 \text{ cm})^2 = 3{,}14 \,.\, 100 \text{ cm}^2 = \boxed{314 \text{ cm}^2}$

- Ahora tengo que calcular que porcentaje es 314 de 400:

400 cm^2 .... 100 %

314 cm^2 .... X %

$$X = \frac{314\ cm^2 \cdot 100\,\%}{400\ cm^2} = \frac{314\ \cancel{cm^2} \cdot 1\cancel{00}\,\%}{4\cancel{00}\ \cancel{cm^2}} = \boxed{78{,}5\ \%}$$

Entonces, el área del círculo es el **78,5 %** del área del cuadrado

Completar los espacios en blanco

1) El 58% de 4800 es .....
2) El 73% de 4400 es .....
3) El 12% de 1700 es .....
4) El 81% de 2315 es .....
5) El 78% de 5200 es .....
6) El 75% de 2200 es .....
7) El 68% de 210 es .....
8) El 90% de 4100 es .....
9) El 77% de 7200 es .....
10) El 3% de 4400 es .....
11) El 48% de 9512 es .....
12) El 7% de 9300 es .....
13) El 93% de 2300 es .....
14) El 9% de 215 es .....
15) El 39% de 7600 es .....
16) El 86% de 122 es .....
17) El 58% de 7800 es .....
18) El 17% de 140 es .....
19) El 32% de 4300 es .....
20) El 1% de 710 es .....

21) 7505 es el 79% de .....
22) 850 es el 17% de .....
23) 3312 es el 46% de .....
24) 2460 es el 41% de .....
25) 4392 es el 72% de .....
26) 368 es el 92% de .....
27) 1829 es el 59% de .....
28) 1980 es el 55% de .....
29) 3337 es el 71% de .....
30) 682 es el 11% de .....
31) 1352 es el 26% de .....
32) 297 es el 9% de .....
33) 528 es el 12% de .....
34) 56 es el 7% de .....
35) 2380 es el 68% de .....
36) 3608 es el 41% de .....
37) 456 es el 8% de .....
38) 896 es el 64% de .....
39) 2226 es el 42% de .....
40) 4095 es el 45% de .....

41) 460 es el .....% de 9200
42) 516 es el .....% de 600
43) 9021 es el .....% de 9700
44) 7047 es el .....% de 8100
45) 3618 es el .....% de 5400
46) 2160 es el .....% de 3600
47) 17 es el .....% de 100
48) 1998 es el .....% de 5400
49) 713 es el .....% de 3100
50) 1260 es el .....% de 7000
51) 5226 es el .....% de 7800
52) 1080 es el .....% de 6000
53) 0 es el .....% de 4500
54) 2400 es el .....% de 8000
55) 1298 es el .....% de 2200
56) 396 es el .....% de 1800
57) 3036 es el .....% de 6900
58) 792 es el .....% de 2400
59) 5568 es el .....% de 5800
60) 3050 es el .....% de 5000

<u>Empecemos con los problemas</u>:

61) Si en una compra de $ 120, me hacen un 5% de descuento ¿Cuál es el monto final de la compra?

62) Si en una compra de $ 160, me hacen un 10% de descuento por pago en efectivo, y un 5% de descuento por ser cliente del negocio. ¿Cuál es el monto final de la compra?

Voy a una Disquería a comprar CDs y me dicen que el precio de cada uno es de $22, a su vez, si compro 10 o más de 10 me hacen un 8% de descuento, y si compro más de 15, me hacen un 12 % de desc.

63) Si compro 11 CDs. ¿Cuánto me costarían?
64) ¿Cuál sería el precio final unitario de cada CD si compro 20?
65) ¿Qué descuento me tienen que hacer, como mínimo, para la compra de más de 10 CDs para que comprar 11 me salga menos que comprar 10 cds?

66) ¿Qué descuento me tendrían que hacer en una compra de $160, para que el monto final sea $120?

67) Si tengo que comprar libros, cuyo precio de lista es de $ 8. Tengo en total $ 490. ¿Qué descuento me tendrían que hacer para que me alcance para comprar 70 libros?

68) El día 7 de marzo, el precio del kilo de harina era de $0,90. El día 7 de mayo, el precio del kilo de harina ya era de $1,20. ¿Qué porcentaje aumentó el kilo de harina en esos 2 meses?

69) Si el último mes el kilo de arroz aumentó un 20%, y ahora está $ 1,50¿Cuánto estaba el mes pasado?

70) Si este mes el kilo de fideos aumentó un 10%, y ahora está $ 1,20¿Cuánto estaba el mes pasado?

71) Si dicen que en el último mes el kilo de azúcar aumentó un 10% y el anterior había aumentado un 20%. Ahora está $ 0,66. ¿Cuánto estaba hace dos meses?

72) Si dicen que en el último mes el kilo de yerba aumentó un 25% y el anterior había aumentado un 20%. Ahora está $ 0,60. ¿Cuánto estaba el mes pasado?

73) En 8º A, hay 5 chicos de Boca, si en total hay 20 chicos y de ellos 18 chicos son hinchas de algún club. ¿Qué porcentaje de los chicos de 8º A son hinchas de Boca?

74) En 8º A, hay 6 chicos de River, si en total hay 20 chicos y de ellos 18 chicos son hinchas de algún club. ¿Qué porcentaje de los chicos de 8º A, que son hinchas de algún club, son hinchas de River?

75) Mariano juega al fútbol, todos los sábados, y un miércoles por medio. ¿Cuál es el porcentaje de días en el año que Mariano juega al fútbol?

76) ¿Qué porcentaje de efectividad tiene que tener un jugador de Basket como mínimo, para embocar por lo menos 16 tiros libre de cada 18 que tira?

77) ¿Qué porcentaje de efectividad tiene que tener un jugador de Fútbol como mínimo, para hacer por lo menos 6 goles de cada 9 penales que patea?

78) ¿Qué porcentaje de partidos ganados sobre el total tiene un equipo que de 20 partidos perdió 11 y empató 9?

Ahora vamos a hacer uno con una tabla de posiciones
Mirá bien la tabla de posiciones (Es la tabla Final de las Eliminatorias para el mundial de fútbol de 2002)

Selección	PTS	PJ	PG	PE	PP	GF	GC
Argentina	**43**	18	13	4	1	42	15
	31	18	9	4	5	23	20
	30	18	9	3	6	31	17
	30	18	9	3	6	29	23
	27	18	7	6	5	19	13
	27	18	7	6	5	20	15
	18	18	4	6	8	21	33
	16	18	4	4	10	14	25
	16	18	5	1	12	18	44
	12	18	3	3	12	15	27

79) Calcular para cada equipo el Porcentaje de **partidos ganados** respecto del total de pj

80) Calcular para cada equipo el Porcentaje de **partidos empatados** respecto del total de pj

81) Calcular para cada equipo el Porcentaje de **partidos perdidos** respecto del total de pj

82) Verificar que **la suma** de los Porcentajes calculados en los ejercicios 79, 80 y 81 , para cada equipo dan justo **100%** **¿Por qué es así?**

Seguimos con los problemas:

83) José tiene que pagar $4.200, si le rebajan el 5% de su deuda, ¿cuánto le resta por pagar?
84) Ariel tenía $400 y gastó el 10%. Le dio a su hermano el 15% del resto, ¿cuánto le queda?
85) Un artículo se rebaja de $40 a $32. ¿Cuál es el porcentaje de rebaja?
86) De las 96 figuritas que tiene Abel, 36 están repetidas. ¿Qué % de figuritas están repetidas?
87) Matías gastó $45, lo que equivale al 20% de su dinero. ¿Cuánto dinero tenía?
88) Si a 60 se le resta el 60% de su mitad. ¿Cuánto se obtiene?
89) ¿A cuánto hay que vender lo que ha costado $60 para ganar el 40% de la venta?
90) Un artículo sube su precio de $120 a $180. ¿Cuál es el porcentaje de suba?
91) ¿Qué porcentaje de rebaja se hace en una deuda de $5.000 que se reduce a $3.600?
92) Mariano leyó el 60% de las 240 páginas de un libro. ¿Cuántas ha leído?
93) De los 600 alumnos de un colegio, el 44% son mujeres. ¿Cuántos varones tiene el colegio?
94) ¿A cuántos minutos corresponde el 45% de una hora?
95) Si compro 90 CDs y luego vendo el 30% de ellos. ¿Cuántos CDs me quedaron?
96) Si al invertir $6.000 se pierde el 12%, ¿A cuánto asciende la pérdida?
97) ¿Cuál es el 80% del inverso multiplicativo de 0,4?
98) La diferencia entre el 90% y el 75% de un número es 3 ¿Cuál es el número?
99) El 75% de la mitad de un número es 3 ¿Cuál es el número?
100) Un camión que lleva 6.750 kilos de carga pesa (con carga incluida) 9.000 kilos. ¿Qué porcentaje del peso total corresponde al peso del camión?

101) Completar el siguiente Cuadro:

Subtotal de la Compra	Subtotal Con descuento del 10%	Subtotal Con recargo del 5%
$ 120		
$ 48		
	$ 90	
	$ 54	
		$ 189
		$ 147

Completar:

102)	80	$+15\ \%$		$-10\ \%$		$+ \ldots\ldots\ \%$	124,2
103)	1000	$+5\ \%$		$-8\ \%$		$+ \ldots\ldots\ \%$	917,7
104)	250	$-1\ \%$		$-20\ \%$		$+ \ldots\ldots\ \%$	227,7
105)	35	$+40\ \%$		$-20\ \%$		$+ \ldots\ldots\ \%$	49
106)	260	$+50\ \%$		$-33,\overset{\frown}{3}\ \%$		$+ \ldots\ldots\ \%$	327,6
107)	184	$+20\ \%$		$-16,\overset{\frown}{6}\ \%$		$- \ldots\ldots\ \%$	128,8

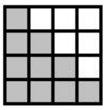
Más Problemas:

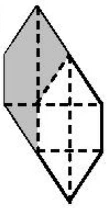
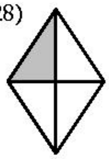
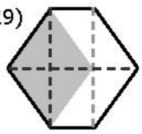
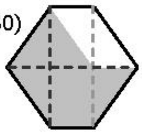
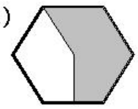
108) ¿Cuánto vale la diferencia entre el 80% y el 90% de 200?
109) ¿Cuánto es el 10% del 10% de 1000?
110) ¿Cuánto vale el 40% del 60% del 70% de 6000?
111) ¿Cuánto vale la diferencia entre el 70% del 80% del 30% de 6000 y el 0,8% de 1000 ?
112) ¿Vale lo mismo el 10% del 30% de 500 qué el 30% del 10% de 500?
113) Si me dicen que el 25% de los alumnos de una escuela tiene 2 hermanos y en la escuela hay 648 alumnos ¿Cuántas son las familias que tienen en la escuela 3 hermanos?
114) ¿Cuánto es el 20% de la tercera parte de la mitad de 60?
115) ¿Cuánto la novena parte del 75% de los dos quintos de las tres octavas partes de 640?
116) ¿Cuánto vale la mitad del 20% de la mitad del 40% de 50?

Pasar los siguientes porcentajes a fracción:

117) 20%	119) 25%	121) 28%	123) 4%
118) 30%	120) 35%	122) 92%	124) 5%

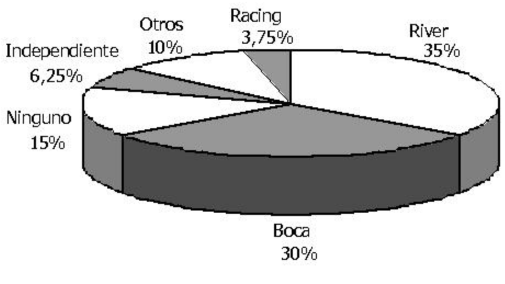
- Indicar, para cada una de las siguientes figuras, que porcentaje representa la parte sombreada (Sugerencia, pensarlo primero como una fracción, dividiendo, cuando haga falta, la figura)

125)

126)

127)

128)

129)

130)

131)


132) En un colegio, los alumnos de 8º año, hicieron un gráfico estadístico con los porcentajes de alumnos que son hinchas de cada club de fútbol. El gráfico es el que está a continuación. El colegio tiene 400 alumnos en total y participaron de la encuesta el 80% de los alumnos del colegio.

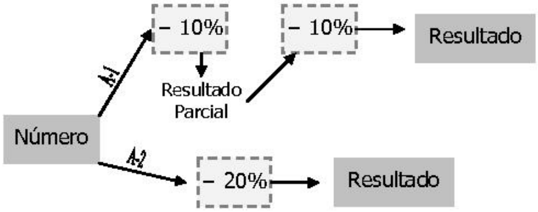
El ejercicio consta de, a partir de los datos y del gráfico, que Hallen la Cantidad de alumnos de ese colegio de cada cuadro de fútbol (Obviamente de los que participaron en la encuesta)



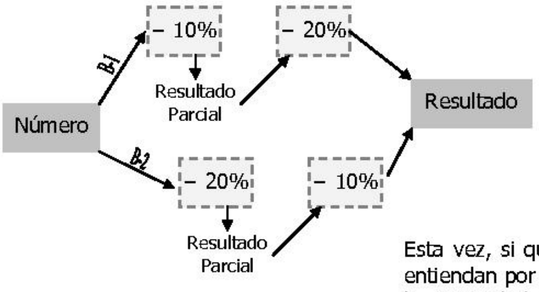
133) Hagamos las siguiente experiencias:

A-1) Elijan un número cualquiera. Luego Réstenle su 10%. Con el resultado obtenido, vuelvan a calcular el 10% y réstenlo a este resultado. Anoten el número

A-2) Ahora hagan directamente lo siguiente. Al mismo número que habían elegido, réstenle directamente el 20%



Como podrán observar, haciendo estos dos cálculos distintos, pero partiendo del mismo número, los resultados obtenidos son diferentes. Ahora el ejercicio está en que ustedes razonen por qué es así…



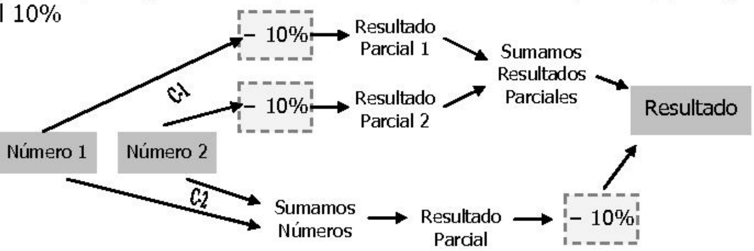
B-1) Elijan un número cualquiera. Primero réstenle su 10%, luego al resultado obtenido, réstenle el 20% (de este resultado obtenido)

B-2) Con el mismo número que eligieron recién, primero réstenle su 20%, luego al resultado obtenido, réstenle el 10% (de este resultado obtenido)

Esta vez, si que dio lo mismo no? Sería muy bueno para ustedes que entiendan por qué es así, yo les puedo dar una pista, tiene que ver con la propiedad conmutativa del producto ¿Se acuerdan que es eso? Bueno, queda como desafío para aquellos alumnos muy despiertos que deduzcan el por qué de esta coincidencia…

C-1) Elijan ahora 2 números cualesquiera. A cada uno de ellos réstenle su 10%. Y luego sumen ambos resultados.

C-2) Con los mismos dos números que eligieron antes, vamos ahora a sumarlos primero, y luego a la suma obtenida, le restamos el 10%



¿Llegaron al mismo resultado por los dos caminos? Espero que sí, porque si no les dio lo mismo es porque hicieron algo mal, ya que siempre tiene que dar lo mismo, elijan el número que elijan. Esto está interesante para que piensen un ejemplo en que puedan aplicar este conocimiento.

Como todo lo que se afirma en matemática, esto tiene una demostración, o dicho de otra manera, tiene un "por qué" Sé que puede ser difícil para ustedes razonarlo, pero para aquellos que les interese, les puedo decir que el por qué de esta afirmación, tiene que ver con la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

En un colegio hay 64 profesores, de los cuales el 18,75% son hombres y el resto mujeres. Dentro de las Profesoras mujeres sabemos que el 75% de ellas usa anteojos. Y por otro lado sabemos que de los profesores hombres, solo 4 usan anteojos.

134) ¿Cuántas profesoras mujeres hay en el colegio?
135) ¿Cuántas de esas profesoras usan anteojos?
136) ¿Qué porcentaje dentro de los profesores hombres usan anteojos?
137) ¿Qué porcentaje del total de profes (entre hombres y mujeres) son hombres y además no usan anteojos?

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Conjuntos

Número de Tema: **05**

Área: **Matemática**

Conjuntos: Vamos a ver en principio, las dos cosas más importantes con respecto a los conjuntos:

- Como se definen.
- Como se grafican. O como se representan.

A continuación vamos a ver qué significa exactamente cada una de estas dos cosas. Y luego comprenderemos por qué es tan útil definir y graficar conjuntos.

- Definiendo conjuntos: Definir un conjunto es algo que tiene que dejar perfectamente claro cuáles son los elementos que lo forman, ya sea enumerando dichos elementos o citando las características de los mismos. Quedando bien definido, sin ambigüedades, y pudiendo decidir con la definición cuando un elemento pertenece o no al conjunto. Hay dos maneras distintas de definir un conjunto, ellas son:

  - Por extensión: Nombrando, uno por uno, a todos los elementos del conjunto.
  - Por Comprensión: Diciendo las "condiciones" que deben cumplir los elementos del conjunto.

Ejemplo: Supongamos un conjunto formado por los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Y llamemos a este conjunto "A"

Este conjunto, lo podemos definir por ambas maneras:

- Por Extensión: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Por comprensión: Las condiciones que definen a este conjunto son: Que son números naturales y que son menores que 10, por lo tanto, si lo escribimos con símbolos matemáticos sería así: $A = \{ x/x \in N, x < 10\}$

Notación Simbólica de conjuntos: Aquí están los símbolos más usados para escribir conjuntos:

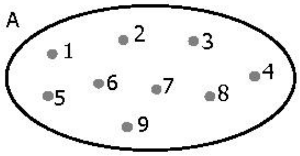
x/x: Esto significa "Todos los valores de x tal que….."	
N: Es el "Conjunto de los números naturales"	
$\in$: Significa "Pertenece a…. "	$\subset$: "Está incluido en."
$>$: "Es mayor que"	$<$: "Es menor que"
$\geq$: "Es mayor o igual que"	$\leq$: "Es menor o igual que"
$\wedge$: Esto significa "y"	$\vee$: Esto significa "o"
$\cup$: Unión	$\cap$: Intersección

- Graficando conjuntos: La manera más utilizada de graficar conjuntos es con *Diagramas de Venn*

  Diagramas de Venn: Un diagrama de Venn, es la forma de graficar un conjunto y sus elementos, que vamos a usar, ya que es la más simple de todas.

  - ¿Cómo se dibuja? Se dibuja una curva cerrada, o cualquier figura cerrada, dentro de ella se anotan los valores del conjunto, y junto a cada valor se dibuja un pequeño puntito o cruz.

  Ejemplo: Si graficamos el conjunto "A" que definimos anteriormente, mediante el diagrama de Venn. El gráfico sería este:

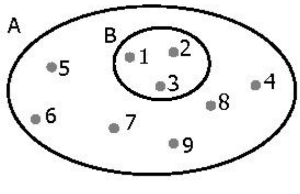


Inclusión de Conjuntos:

Muchas veces, nos vamos a encontrar con que hay conjuntos que están incluidos dentro de otros. Por ejemplo, si yo armara un conjunto con "todos los varones de 7º A", ese conjunto estará incluido dentro del conjunto "todos los alumnos del colegio". Lo mismo pasa con los números. Pongamos un ejemplo:

En este ejemplo, el conjunto "B" está incluido dentro del "A"
$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ $B = \{ 1, 2, 3 \}$ ⇒ Esto se simboliza así: $B \subset A$

Y si yo graficara esto en diagramas de Venn quedaría un conjunto "dentro" del otro como vemos en la figura:

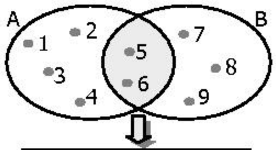


Intersección de Conjuntos:

Definición: Dados los conjuntos "A" "B", la Intersección entre "A" y "B": $A \cap B = \{x/x \in A \wedge \in B\}$

Llamaremos intersección de dos o más conjuntos, a los elementos en común entre dichos conjuntos.

Veamos un ejemplo: A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } B = { 5, 6, 7, 8, 9 }
En este caso, vemos que entre "A" y "B" hay dos elementos en común que son el 5 y el 6, Entonces la intersección entre "A" y "B" serán esos dos elementos



$A \cap B = \{ 5, 6 \}$

Unión de conjuntos:

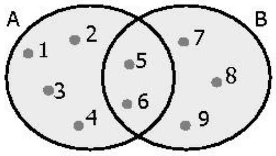
Definición: Dados los conjuntos "A" y "B" llamamos unión $A \cup B = \{x/x \in A \vee \in B\}$

La unión, entonces, son todos los elementos que pertenecen a uno u otro conjuntos.

La unión, es el conjunto resultante de "juntar" todos los elementos de los conjuntos "A" y "B"

Ejemplo. Tomemos los mismos conjuntos "A" y "B" que en el ejemplo anterior.

A={1, 2, 3, 4, 5, 6} B={5, 6, 7, 8, 9}
La unión de los conjuntos "A" y "B" sería el conjunto formado por los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9



$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

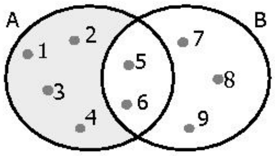
Diferencia o Resta de conjuntos:

Definición: Dados los conjuntos "A" y "B", llamamos Resta entre "A" y "B" a: $A - B = \{ x/x \in A \wedge \notin B \}$

La diferencia A−B, son los elementos que **pertenecen a "A"** y **a su vez <u>No</u> pertenecen a "B"**

Ejemplo. Tomemos los mismos conjuntos "A" y "B" que en el ejemplo anterior.

A={1, 2, 3, 4, 5, 6} B={5, 6, 7, 8, 9}
La Diferencia A−B sería el conjunto formado por los números: 1, 2, 3 y 4.

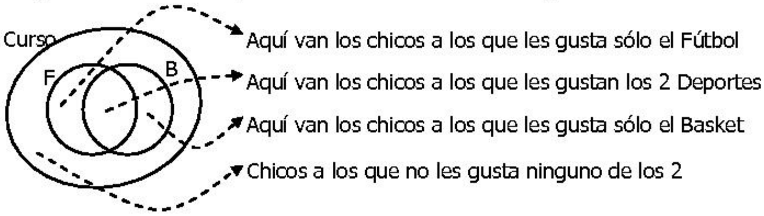


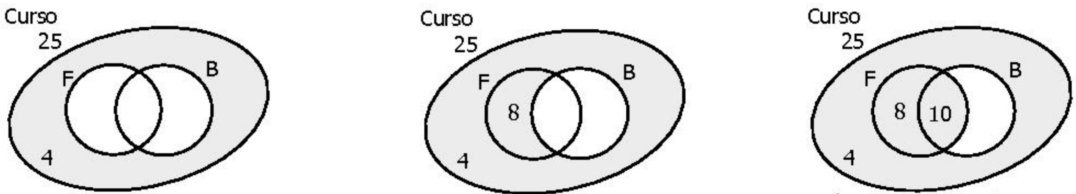
$A - B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

Resolución de problemas de conteo mediante conjuntos:

Resolvamos este problema: En un curso de 25 chicos. A 8 chicos les gusta sólo el fútbol, a 10 les gusta el fútbol y el basket, a 4 no les gusta ninguno de los dos deportes. ¿A cuántos chicos les gusta sólo el basket?

En primer lugar, planteamos el gráfico del conjunto de todos los chicos del curso y graficamos dentro los conjuntos "F" y "B" que son los chicos que les gusta el fútbol y el Basket, respectivamente.





Ponemos el total del curso y los 4 que no les gusta ninguno de los 2 deportes ⇨ Acá agregamos a los que les gusta solo el fútbol ⇨ Acá agregamos a los que les gustan los 2 deportes

Como vemos, el único espacio que queda por completar es el de los que les gusta solo el basket, que es lo que tengo que responder. Para saber ello, tendría que restarle al total (25 chicos) las cantidades que están dentro de ese conjunto. ⇨ $25 - 4 - 8 - 10 = 3$

Por lo tanto esos 3 chicos que faltan para el total son los que van en el espacio de los que les gusta solo el Basket. Respuesta al ejercicio: La cantidad de chicos a los que les gusta solo el basket es 3.

➢ Definir por extensión los siguientes conjuntos:

1) A = { Vocales de la palabra "Cuento" }
2) A = { Dígitos del número 125.842 }
3) A = { Números de dos cifras cuyos dígitos sean iguales }
4) A = { Nombres de los chicos de este curso que empiecen con "M" }
5) A = { Nombres de las chicas de este curso que terminen con "a" **y** tengan mas de 3 vocales }
6) A = { Consonantes que estén en la palabra "Matemática" **o** en la palabra "Ciencia" }
7) A = { Vocales que estén en la palabra "Cierto" **y** en la palabra "Verdad" }
8) A = { Nombres de colores que empiecen con "a" **o** terminen con "e" }

➢ Dar alguna definición por comprensión que pueda representar a cada uno de los siguientes conjuntos

9) A = { A, E, O }
10) A = { M, S, T, R }
11) A = { 1, 2, 7, 9 }
12) A = { Rojo, Negro }
13) A = { A, E, O, S, C, L }
14) A = { 5 }

➢ Graficar en un Diagrama de Venn los siguientes pares de conjuntos:

15) $A=\{1, 2, 3, 4\}$ $B=\{3, 4, 5\}$
16) $A=\{1, 3, 5, 7\}$ $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
17) $A=\{2, 4, 6, 8\}$ $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
18) $A=\{2, 3, 4, 5\}$ $B=\{6, 7, 8\}$
19) $A=\{4, 6, 8, 10\}$ $B=\{x/x \in N, x < 5\}$
20) $A=\{1, 2\}$ $B=\{x/x \in N, x \leq 7\}$
21) $A = \{ x/x \in N, x < 6 \}$ $B=\{x/x \in N, 6 \leq x \leq 9\}$
22) $A = \{ x/x \in N, 2 \leq x \leq 4 \}$ $B = \{ 3, 4 \}$
23) $A = \{ x/x \in N, x \leq 4 \}$ $B = \{ 1, 5, 10 \}$
24) $A = \{ x/x \in N, x < 3 \}$ $B = \{ 1, 4, 7 \}$
25) $A = \{ x/x \in N, 7 < x \leq 11 \}$ $B = \{ 5, 8, 11 \}$

➢ Graficar en un diagrama de Venn las siguientes ternas de conjuntos:

26) A = { 1, 2, 3, 4, 5 }
B = { 4, 5, 6, 7 }
C = { 3, 4, 6, 8 }

27) A = { 1, 3 }
B = { 5, 6, 7 }
C = { 3, 5, 7, 9 }

28) A = { 1, 2, 3, 4 }
B = { 2, 4, 6, 8 }
C = { 3, 4, 5, 6 }

29) A = { 1, 2, 3 }
B = { 2 }
C = { 3, 4, 5 }

30) A = { a, b, c, d }
B = { c, d, e, f }
C = { d, f, g }

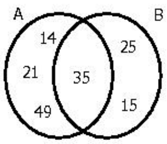
31) A = { 9, 12, 15, 18, 21 }
B = { 15, 20, 25, 30, 35 }
C = { 7, 14, 21, 35 }

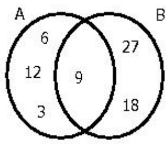
32) A = { 7, 11, 77, 111, 777 }
B = { 11, 13, 31, 33 }
C = { 11, 33, 55, 77 }

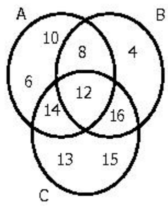
33) A = { 1, 2, 3, 4 }
B = { 1, 2, 11, 12, 21, 22 }
C = { 1, 4, 11, 14, 41, 44 }

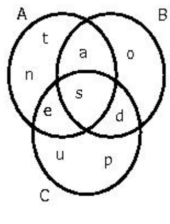
34) A = { 1, 2, 3 }
B = { 3, 4, 5 }
C = { 6, 7, 8 }

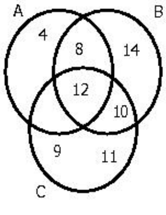
➢ Dados los siguientes diagramas de Venn, Definir por extensión los conjuntos:

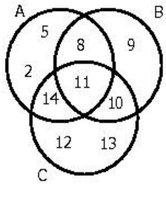
35)


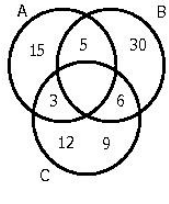
36)


37)


38)


39)


40)


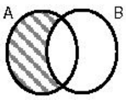
41)


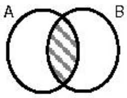
- Dados los conjuntos "A", "B" y "C". Graficar en un diagrama de Venn y expresar "S " (el conjunto Solución) de las siguientes operaciones:

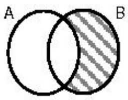
$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$
$B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$
$C = \{ 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

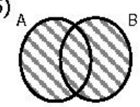
42) $A \cap B$
43) $A \cup B$
44) $A - B$
45) $C - B$
46) $B - C$
47) $C \cap B$
48) $C \cap A$
49) $B \cup C$
50) $(A \cap B) - C$
51) $(A \cup B) - C$
52) $(A - B) - C$
53) $(A \cap B) \cap C$
54) $(A \cup B) \cap C$
55) $(A - B) \cap C$
56) $(B - A) \cap C$
57) $(A \cap B) \cup C$
58) $(A \cup B) \cup C$
59) $(A - B) \cup C$
60) $(A \cap B) \cup (A \cup C)$
61) $(A \cup B) \cap (A - B)$
62) $(A \cup B) \cap (A - C)$
63) $(A \cup B) - (A \cap C)$
64) $(A \cup B) - (B \cup C)$
65) $A - (B \cup C)$
66) $C \cap (B - C)$
67) $C \cap (A - C)$
68) $C \cap (C - A)$
69) $[A - (B \cup C)]$
70) $[A - (B \cup C)] \cup B$
71) $[A - (B \cup C)] \cap B$

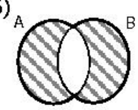
- En los siguientes diagramas de Venn, Indicar la operación realizada: **El área sombreada es el resultado de la operación**

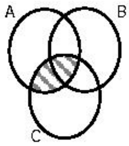
72)


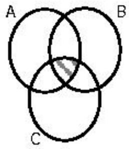
73)


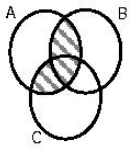
74)


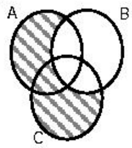
75)


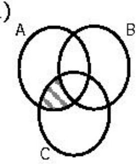
76)


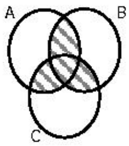
77)


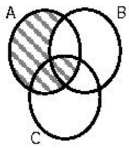
78)


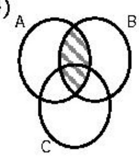
79)


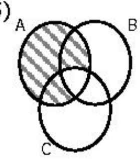
80)


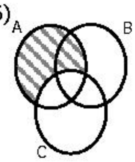
81)


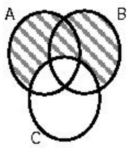
82)


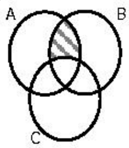
83)


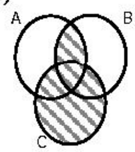
84)


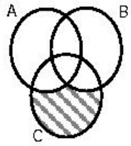
85)


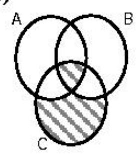
86)


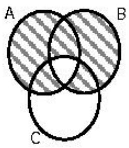
87)


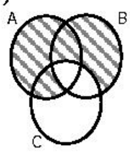
88)


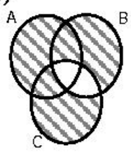
89)


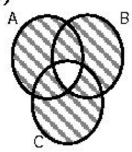
90)


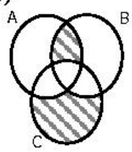
91)


92)


93)


94)


95)


96)


- Con los mismos conjuntos del ejercicio anterior, o si lo prefieren con conjuntos genéricos “A”, “B” y “C” y con diagramas de Venn. Verificar que se cumplan las siguientes Igualdades. Para verificar esto, les recomiendo que hagan las operaciones que hay de ambos lados de los signos “=” y verifiquen que el resultado sea el mismo

97) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

98) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$

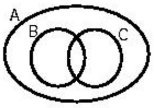
99) $(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$

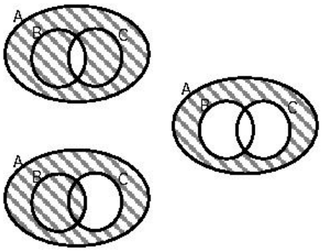
100) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

101) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

102) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

103) Dado el siguiente diagrama de Venn que representa a los conjuntos “A” , “B” y “C”:
Unir con flechas cada diagrama a la operación que le corresponde:



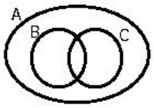


$(A - C) \cup B$

$A - (C \cup B)$

$A - (C \cap B)$

Con el mismo diagrama del ejercicio anterior, Responder Verdadero o Falso:



104) $B \subset A$

105) $C \subset A$

106) $B \subset C$

107) $(B \cup C) \subset A$

108) $(B \cap C) \subset A$

109) $(B - C) \subset A$

110) $(A - C) \subset A$

111) $(B - C) \subset C$

112) $(B - C) \subset B$

113) $(B - C) \subset (A - C)$

114) $(B - C) \subset (A - B)$

115) $(A \cap B) \subset A$

116) $(A \cap B) \subset (A \cap C)$

117) $(A \cap B) \subset (A - C)$

118) $(A \cap C) \subset (A - B)$

119) $(A - C) \subset A$

120) $(B \cap C) \subset (A - B)$

- **Problemas de Conteo:** *Resolver los problemas usando un Diagrama de Venn y luego responder las preguntas que se plantean en cada problema.*

121) De las 18 alumnas de 7º A, a 10 les gustan los Back Street Boys, y a 12 le gustan los FIVE, Si hay 6 a las que les gustan los Back Street Boys pero no les gustan los FIVE, ¿Cuántas hay que les gustan sólo los FIVE y no los Back Street Boys?

122) De los 23 alumnos de 8º B, a 9 les gusta jugar al tenis y a 20 les gusta jugar al fútbol. Si hay 6 a los que les gusta jugar a los dos deportes,

a. ¿Cuántos hay que prefieren jugar sólo al Tenis?
b. ¿Cuántos sólo al fútbol?

123) La profesora de 8º A hizo una encuesta en el curso recolectando los siguientes datos: Hay en total 14 alumnos que vieron la película TERMINATOR I, sin embargo hay 21 que vieron la segunda parte (TERMINATOR II) y por ejemplo hay 15 que vieron sólo la segunda parte sin ver la primera. Y no hay ningún alumno que no haya visto ninguna de las dos películas. ¿Cuántos alumnos hay en ese 8º A?

124) En un grado del colegio hay 21 alumnos que aprobaron la primera prueba de matemáticas del trimestre, en cambio hay sólo 16 que aprobaron la segunda prueba, y 5 de estos 16 que aprobaron la segunda prueba, no habían aprobado la primera. Además hay 6 alumnos que no aprobaron ninguna de las dos pruebas. ¿Cuántos alumnos hay en ese grado?

125) En el mismo grado que el problema anterior hubo 16 alumnos que aprobaron la primera prueba de lengua y 18 que aprobaron la segunda, de esos 18 hubo 12 que no habían aprobado la primera. ¿Cuántos alumnos aprobaron las dos pruebas?

126) De los 28 chicos de un equipo de basket, hay 15 que jugaron aunque sea unos minutos en la primera fecha del torneo, mientras en la segunda fecha sólo 12 jugadores tuvieron la oportunidad de jugar. Hubo 5 jugadores que jugaron en las dos fechas

A) ¿Cuántos jugadores jugaron sólo la primera fecha?
B) ¿cuántos jugaron sólo la segunda?
C) ¿Cuántos no jugaron en ninguna de las dos fechas?

127) De todos los jugadores de un plantel de fútbol, los lunes podemos encontrar a 9 jugadores, en el club. En cambio si vamos al club un miércoles, podemos encontrar a 17 jugadores. De estos 17 jugadores que podemos ver el miércoles en el club, a 6 también los podemos ver si vamos el lunes. Si vamos al club un lunes ¿A cuántos jugadores voy a ver, que no puedo ver el miércoles? ¿Cuántos jugadores tiene el plantel?

128) De los 7 integrantes de una familia 3 miran siempre "Fútbol de Primera" . Uno de los integrantes de la familia mira "Fútbol de Primera" y también mira "Los Roldán". Hay uno de los miembros de la familia que no mira ninguno de los dos programas. ¿Cuántos integrantes de esa familia miran "Los Roldán" y no miran "Fútbol de Primera" ?

129) De los 11 titulares de la primera de BOCA, 6 dijeron que les gusta la cumbia, 3 dijeron que les gusta la cumbia y el Rock And Roll, Uno dijo que no le gusta ni la cumbia ni el Rock And Roll. ¿A cuántos de los jugadores de la primera de BOCA, le gusta el Rock And Roll y no le gusta la cumbia?

130) En un colegio se hizo una encuesta preguntando a los alumnos si habían visto cada una de las partes de la trilogía "**El señor de los anillos**". Una vez recolectados los datos se armó el siguiente cuadro con los resultados:

Solo la Parte I:	19
Solo la Parte II:	8
Solo la Parte III:	32

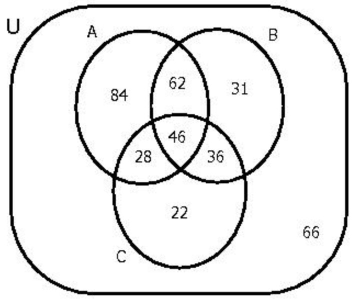
Parte I y II:	81
Parte I y III:	35
Parte II y III:	62

Las 3 Partes:	156
Ninguna de las Tres:	36

a. ¿Cuántos alumnos en total participaron de la encuesta?
b. ¿Cuál de las tres partes fue la más vista?

131) El siguiente diagrama de Venn, muestra las cantidades de alumnos de un colegio, que vieron cada una de las partes de la película "**MATRIX**". En el conjunto "A" están los que vieron la parte I, en el conjunto "B" los que vieron la parte II; y en el conjunto "C" lo que vieron la Parte III. El conjunto "U" representa a todos los alumnos del colegio. Con estos datos, responder:

b) ¿Cuántos alumnos vieron solo una parte (cualquiera de ellas) de las tres?
c) ¿Cuántos alumnos vieron más de una parte?
d) ¿Cuántos alumnos NO vieron la última parte?
e) ¿Cuántos alumnos vieron la última parte y una sola de las otras dos?



by Dal-Or para TARINGA!

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Operaciones con Decimales

Número de Tema: **06**

Área: **Matemática**

Suma y Resta de Números con coma:

- En la **suma**, como en la **resta,** de lo único que tenemos que tener cuidado, es en como acomodamos los números a sumar o restar antes de empezar... Veamos un ejemplo, supongamos que queremos hacer la siguiente suma: **4,5723 + 13,917**

$$\begin{array}{r} \overset{1}{4},5723 \\ +\ 13,917 \\ \hline 18,4893 \end{array}$$

La manera de sumar es la misma que si no tuviéramos la coma, se empieza desde la derecha y cuando nos pasamos de 10 se escribe la unidad y se "llevan" las decenas como unidades para el espacio de al lado... y así hasta terminar con el último número a la izquierda de todo.

De lo que hay que tener cuidado, es de colocar ambos números a sumar de manera correcta. La mejor manera para no equivocarse es tomar como referencia las comas, poner primero las comas (una debajo de la otra) y luego los números.

- Con la resta pasa exactamente lo mismo, veamos un ejemplo: **18,467 – 5,936**

$$\begin{array}{r} 1\overset{7}{\cancel{8}},\overset{14}{\cancel{4}}67 \\ -\ 5,936 \\ \hline 12,531 \end{array}$$

Una vez que pusimos los números uno debajo de otro, en forma correcta, que quede una coma debajo de la otra, después resto como si la coma no existiera, obviamente que **en el resultado, coloco la coma en el mismo lugar que estaba...**

Fíjense que la coma no se movió para nada.

Multiplicación de números con coma:

La multiplicación también es muy simple y muy parecida a la multiplicación de números sin coma... Vamos a ver un ejemplo. Multipliquemos: 4,71 x 1,3

Primero multiplico a todo por el 3 ⇨ Luego multiplico a todo por el 1, y lo corro un lugar para la derecha. ⇨ Sumo, los números que obtuve ⇨ Pongo la coma

$$\begin{array}{r} \overset{2}{4,71} \\ \times\ 1,3 \\ \hline 1413 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4,71 \\ \times\ 1,3 \\ \hline 1413 \\ 471\ - \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4,71 \\ \times\ 1,3 \\ \hline 1413 \\ +\ 471\ - \\ \hline 6123 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4,\boxed{71} \\ \times\ 1,\boxed{3} \\ \hline 1413 \\ +\ 471\ - \\ \hline 6,\boxed{123} \end{array}$$

Como había **3 lugares** después de la coma en los números que multipliqué: El resultado tendrá **3 lugares** después de la coma.

Divisón de números con coma:

Con coma sólo en el numerador o dividendo: Ejemplo: 235,42 ÷ 13

Tomo el 23

$$\begin{array}{r|l} 235,42 & 13 \\ \cline{2-2} \boxed{13} & \boxed{1} \end{array}$$

El 13 en el 23 "entra" **1** vez

13 . 1 = 13

⇨

$$\begin{array}{r|l} 235,42 & 13 \\ \cline{2-2} -\ 13 & 1 \\ \hline 105 & \end{array}$$

Resto

Y bajo el **5**

⇨

$$\begin{array}{r|l} 235,42 & 13 \\ \cline{2-2} -\ 13 & 1\boxed{8} \\ \hline 105 & \\ \boxed{104} & \end{array}$$

El 13 en el 105 "entra" **8** veces.

13 . 8 = 104

$$\begin{array}{r|l} 235,42 & 13 \\ \cline{2-2} -\ 13 & 18\boxed{,} \\ \hline 105 & \\ -\ 104 & \\ \hline 14 & \end{array}$$

Resto

Atención: Bajo el "4", pero como está la coma, pongo también la coma en el cociente.

⇨

$$\begin{array}{r|l} 235,42 & 13 \\ \cline{2-2} -\ 13 & 18,\boxed{1} \\ \hline 105 & \\ -\ 104 & \\ \hline 14 & \\ \boxed{13} & \end{array}$$

El 13 en el 14 entra "**1**" vez

13 . 1 = 13

⇨

$$\begin{array}{r|l} 235,42 & 13 \\ \cline{2-2} -\ 13 & 18,1 \\ \hline 105 & \\ -\ 104 & \\ \hline 14 & \\ -\ 13 & \\ \hline 12 & \end{array}$$

Resto

Y bajo el **2**

$$\begin{array}{r|l} 235,42 & 13 \\ \cline{2-2} -\ 13 & 18,1\boxed{0} \\ \hline 105 & \\ -\ 104 & \\ \hline 14 & \\ -\ 13 & \\ \hline 12 & \\ \boxed{0} & \end{array}$$

El 13 en el 12 entra "**0**" veces

13 . 0 = 0

⇨

$$\begin{array}{r|l} 235,42 & 13 \\ \cline{2-2} -\ 13 & 18,10 \\ \hline 105 & \\ -\ 104 & \\ \hline 14 & \\ -\ 13 & \\ \hline 12 & \\ -\ 0 & \\ \hline 120 & \end{array}$$

Resto

Como no quedan números para "Bajar" bajo un "0"

Y así, una vez que se me acaban los números, si me sigue dando resto distinto de cero, podría seguir la cuenta bajando ceros, hasta llegar a un resultado con la cantidad de decimales que me interese llegar.

- **<u>Divisón de números con coma</u>: Con coma en el dividendo y en el divisor:** Hay varias maneras de resolver una división en la que el dividendo y el divisor tienen coma, yo les muestro la mas simple: Esta manera, que yo creo que es la mas simple, consiste en <u>multiplicar por 10, 100, 1000, etc (dependiendo de la cantidad de decimales que tenga el divisor) al divisor y al dividendo al mismo tiempo, hasta que el divisor quede sin coma</u>. Una vez que el divisor queda sin coma, se resuelven como vimos en el ejemplo anterior, se va haciendo la división, hasta que bajo un número del dividendo que está después de la coma, justo en ese momento, pongo la coma en el cociente y sigo hasta terminar la cuenta.

Veamos ejemplos de divisiones con coma en el dividendo y en el divisor:

- **72,943 ÷ 45,6** ⇨ Aquí si multiplicamos a ambos por 10 (Lo que equivale correr un lugar ambas comas), el divisor queda sin coma. Y me queda la división: ⇨ **729,43 ÷ 456**

- **24,345 ÷ 4,26** ⇨ En este caso (Como el divisor tiene dos decimales), tenemos que multiplicar por 100 para que el divisor quede sin coma. Y me queda esta división: ⇨ **2434,5 ÷ 426**

- **85,3 ÷ 7,13** ⇨ En este caso, tenemos que multiplicar por 100 para que el divisor quede sin coma. ⇨ **8530 ÷ 713**

- **583 ÷ 2,013** ⇨ En este caso, como el divisor tiene 3 posiciones decimales, debemos multiplicar por 1000 ambos números antes de hacer la división. ⇨ **583.000 ÷ 2013**

Habíamos dicho entonces que si tenemos coma en el divisor, hay que multiplicar por potencias de 10 al mismo tiempo en el divisor y en el dividendo hasta que el divisor quede sin coma y después resolver la cuenta como si fuera uno de los casos que vimos en el primer ejemplo. Ahora, para que quede claro vamos a ver un ejemplo resuelto completamente:

- **39,54 ÷ 2,4** ⇨ Corremos la coma **un lugar** para que el divisor quede sin coma. Corro entonces un lugar y me queda esta división: ⇨ **395,4 ÷ 24**

Resolvemos entonces esta cuenta que nos queda: 395,4 ÷ 24

```
  395,4 |24
- 24    16,475
  155
- 144
   114
 -  96
Resto 180
    - 168
Resto  120
     - 120
         0
```

Si en algún momento después de bajar un número que esta después de la coma, el resto de la división da CERO, (como en este caso) se termina ahí la cuenta.

Por lo tanto:
39,54 ÷ 2,4 = 16,475

✎ <u>Nota</u>: **Con respecto a la cantidad de decimales**

Muchas veces, la cantidad de decimales es "interminable" o sea que si hacemos la cuenta y seguimos siempre que el resto sea diferente de CERO no terminaríamos nunca.. La pregunta es entonces: **¿hasta cuando sigo una división, cuando me doy cuenta que la cantidad de decimales no termina nunca?**

✎ **En general** se hace la división hasta obtener **2 posiciones decimales**, o sea dos números después de la coma... Pero este es un criterio general, o sea que no siempre se toman 2 posiciones decimales

✎ Otras veces se toma la misma **cantidad de decimales que tenía el dividendo o el divisor, o la mayor de las dos.**

✎ Por último está el criterio del profesor o el enunciado del ejercicio, ahí hacemos la división hasta llegar a **la cantidad de decimales que nos pidan en el ejercicio**.

➢ Efectuar las siguientes Sumas y Restas de números con coma, sin usar calculadora:

1) 692,362 + 446,83	2) 99,907 - 23,042	3) 44,021 + 86,496	4) 359,404 - 119,022	5) 309,902 - 226,448
6) 440,387 - 127,674	7) 67,725 + 90,668	8) 23,713 + 271,331	9) 884,137 - 41,386	10) 849,922 - 59,58
11) 528,802 - 286,441	12) 92,042 + 136,001	13) 14,147 + 144,141	14) 309,546 - 34,605	15) 983,941 - 99,34
16) 580,396 - 141,939	17) 20,226 + 123,05	18) 11,71 + 217,829	19) 540,602 - 59,78	20) 476,741 - 57,455
21) 624,606 - 231,57	22) 78,905 + 100,711	23) 6,95 + 158,83	24) 855,202 - 19,472	25) 169,362 - 103,872
26) 840,151 - 169,313	27) 21,169 + 47,36	28) 22,306 + 116,964	29) 422,021 - 114,136	30) 701,684 - 89,119
31) 16,789 + 47,379	32) 77,991 + 150,205	33) 9,359 + 292,411	34) 723,741 - 9,532	35) 847,927 - 140,342
36) 925,423 - 395,943	37) 32,506 + 134,604	38) 21,162 + 24,594	39) 952,919 - 107,795	40) 823,883 - 112,631
41) 667,476 - 245,712	42) 99,431 - 60,879	43) 15,407 - 11,51	44) 700,832 - 10,911	45) 321,228 - 198,381
46) 152,337 + 162,211	47) 15,484 + 180,554	48) 7,419 + 146,015	49) 664,13 - 81,989	50) 46,008 - 10,415

Algunos Problemas:

51) Martín va a comprar al almacén 3 gaseosas que cuestan cada una $ 1,49 ¿Cuánto tiene que gastar? Si paga con un billete de $5, ¿Cuánto le tienen que dar de vuelto?

52) Ariel compra en el kiosco de la escuela un paquete de papas fritas que cuesta $0,85 y dos helados que cuestan cada uno $ 0,70, si paga con un billete de $10 ¿Cuánto le tienen que dar de vuelto?

53) Mariano sacó fotocopias para sus compañeros, si sacó 23 juegos de fotocopias de 3 hojas doble faz cada una, y el precio de la fotocopia simple es de $0,07 (siete centavos) ¿Cuánto cuestan todos los juegos de fotocopias completos?

➢ Efectuar las siguientes Multiplicaciones de números con coma, sin usar calculadora:

54) 73,51 x 1,8	55) 12,3 x 1,2	56) 29,92 x 1,5	57) 64,34 x 6,5	58) 91,63 x 7,3
59) 769,27 x 7,3	60) 21,419 x 2,8	61) 19,972 x 10,2	62) 770,503 x 6,2	63) 991,063 x 8,4
64) 306,284 x 12,5	65) 35,167 x 14,9	66) 13,152 x 34,4	67) 216,105 x 32,32	68) 286,635 x 12,12
69) 985,5 x 42,2	70) 12,765 x 2,338	71) 8,676 x 2,257	72) 464,195 x 3,14	73) 312,15 x 2,712

- Efectuar las siguientes Divisiones de números con coma, sin usar calculadora:
  Expresar el resultado con **dos posiciones decimales**:

74) 85,12 ⌊ 2	75) 45,32 ⌊ 5	76) 45,52 ⌊ 7	77) 841,31 ⌊ 6
78) 201,5 ⌊ 5	79) 91,123 ⌊ 13	80) 81,564 ⌊ 14	81) 34,814 ⌊ 16
82) 94,713 ⌊ 34	83) 37,371 ⌊ 41	84) 98,134 ⌊ 31	85) 54,541 ⌊ 23

- Expresar el resultado con **tres posiciones decimales**:

86) 148,21 ⌊ 2,12	87) 267,63 ⌊ 3,14	88) 781,21 ⌊ 7,123	89) 954,51 ⌊ 2,214
90) 136,36 ⌊ 3,12	91) 124,231 ⌊ 8,12	92) 542,041 ⌊ 32,12	93) 314,547 ⌊ 2,712
94) 4563 ⌊ 2,22	95) 318,54 ⌊ 3,12	96) 794,21 ⌊ 5,1	97) 731,2 ⌊ 4,6
98) 4123 ⌊ 5,2	99) 4556 ⌊ 9,12	100) 1476 ⌊ 3,123	101) 1322 ⌊ 8,124

- Problemas de Aplicación:

102) En un club, se cuenta la recaudación del último partido, cuyo total fue de $1093,05. Se separa ese total en partes iguales de $156. ¿Cuántas partes de $156 se pudieron armar con la recaudación total? ¿Cuánta plata sobró aparte, luego de separar en esas partes el total?

103) Si un Kiwi de 108 gramos contiene 11,34 Kcal.
¿Cuántas Kcal contiene cada gramo de Kiwi?

104) Ana y Cecilia, juntaron sus ahorros para comprarle un regalo al padre. Una tenía $\$25,^{\underline{70}}$ y la otra tenía $\$19,^{\underline{35}}$. Entre ambas deciden comprarle dos discos de Queen que cuestan $\$ 21,^{\underline{40}}$ uno, y $\$20,^{\underline{50}}$ el otro. Con lo que les sobra, le compran unos bombones que cuestan $\$0,^{\underline{35}}$ cada uno ¿Para cuántos bombones les alcanzó?

105) La madre de julián le da $14,6 y le dice que lo reparta entre el y sus tres hermanos de modo que todos reciban la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno de ellos?

106) Las notas de Marcela en matemáticas son $7^{\underline{50}}$, $6^{\underline{20}}$ y $8^{\underline{20}}$ La maestra le dice que su nota final es el promedio de esas tres notas, para lo cual tiene que sumar las tres notas y dividir al resultado por 3. ¿Cuál es la nota final de Marcela tomando 2 posiciones decimales?

- Resolver los siguientes cálculos combinados: (No se olviden de separar bien en términos!!!)

107) 1,13 . 2,5 – 0,825
108) 32,15 ÷ 1,25 + 4,28
109) 4 . 539,34 ÷ 3,56
110) 135 ÷ 2,16 – 46,5
111) (7,5 . 2,4) ÷ (1,44 ÷ 0,4)
112) (4,15 + 13,41) – (0,234 + 7,326)
113) (9,32 + 10,476) – (14,116 – 2,32)
114) (15,57 ÷ 3,46) . (12,348 ÷ 2,058)
115) 11,34 . 5.56 – 1,56 + 1,5096
116) 13.62 ÷ 57,885 + 2,3925 ÷ 0,638

- Responder Verdadero o Falso:

117) 4,5 es lo mismo que 4,50
118) 0,6 es lo mismo que 0,60
119) 1,06 es lo mismo que 1,6
120) 1,06 es lo mismo que 1,006
121) 13 ÷ 2,14 es lo mismo que 1300 ÷ 214
122) 0,56 ÷ 0,012 es lo mismo que 56 ÷ 12
123) 0,56 ÷ 0,012 es lo mismo que 560 ÷ 12
124) 2 ÷ 1,02 es lo mismo que 20 ÷ 102
125) 2 ÷ 1,02 es lo mismo que 20 ÷ 1020
126) 2 ÷ 1,02 es lo mismo que 200 ÷ 102
127) La cuenta 3 ÷ 8 no se puede hacer porque 3 es más chico que 8.

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

MCM - DCM

Divisibilidad

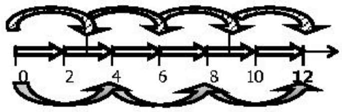
Número de Tema: **07**

Área: **Matemática**

Mínimo Común Múltiplo -> **MCM**

El MCM, nos va a servir para sumar y restar fracciones, así que atención. Supongamos que en la cuadra de tu casa hay 3 coches estacionados. De repente, como suele ocurrir en la mayoría de los casos, comienzan a sonar en el mismo momento las 3 alarmas... Una suena cada 2 segundos, otra cada 3 segundos y la otra cada 4 segundos... la pregunta es: **¿Después de cuanto tiempo sonarán las 3 alarmas a la vez?**

Mirá el siguiente gráfico:



Esta flecha representa la alarma que suena cada 2 segundos.

Esta la que suena cada 3 seg. Y esta la que suena cada 4 seg.

La 1º alarma, suena a los 0, 2, 4, 6, 8, 10, **12**, 14, 16, 18, 20, 22, 24.. segundos.
La 2º alarma, suena a los 0, 3, 6, 9, **12**, 15, 18, 21, 24.... segundos.-
La 3º alarma, suena a los 0, 4, 8, **12**, 16, 20, 24... segundos.-

Y este es un ejemplo típico del MCM, ya que el **12 es el MCM entre 2, 3 y 4**

Como se calcula el MCM: Es el producto de los factores primos **comunes y no comunes** elevados al **MAYOR** exponente.

Vamos a verlo con un ejemplo: Hallemos el MCM entre 15, 18 y 24. El primer paso es factorear los números:

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 15 = 3^1 . 5^1 \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 18 = 2^1 . 3^2 \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 24 = 2^3 . 3^1$$

Entonces, los factores **comunes y no comunes** son todos o sea:

Los comunes: **3** (es común porque este factor está en los tres números)

Los no comunes: **5** y **2** (en el caso del 5 está solo en el 15 y el 2 está en el 18 y el 24)

Y tienen que estar elevados al **mayor exponente**.. a ver eso....

Teníamos: $15 = 3^1 . 5^1$ $18 = 2^1 . 3^2$ $24 = 2^3 . 3^1$

El mayor exponente del 3 es $\mathbf{3^2}$ (que está en el 18)
El mayor exponente del 5 es $\mathbf{5^1}$ (que está en el 15)
El mayor exponente del 2 es $\mathbf{2^3}$ (que está en el 24)

Entonces el MCM sería el producto:

$3^2 . 5^1 . 2^3 = 9 . 5 . 8 = \boxed{360}$

Divisor Común Mayor -> **DCM**

El DCM, entre varios números, es el número más grande que exista que sea divisor de todos a la vez.

Como se calcula el DCM: El DCM es el producto de los factores **comunes** elevados al **MENOR** exponente.

Hallemos el DCM entre 15, 18 y 24 (el primer paso es factorear todos los números)

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 15 = 3^1 . 5^1 \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 18 = 2^1 . 3^2 \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 24 = 2^3 . 3^1$$

A ver.... entonces, los factores **comunes** son: El único que se repite en todos: **3**
Y tienen que estar elevados al **menor exponente**.. a ver eso....
El menor exponente del 3 es $\mathbf{3^1}$
Entonces el DCM sería simplemente: $3^1 = \boxed{3}$

Criterios de Divisibilidad

Divisibilidad por 2: *Un número es divisible por 2 cuando termina en cero o termina en número par.*
Ejemplo: Podemos decir que 1184 es divisible por 2, ya que termina en número par.

Divisibilidad por 3: *Un número será divisible por 3 cuando la suma de sus dígitos sea múltiplo de 3.*
Ejemplo, con 6345, hacemos 6+3+4+5= 18, como 18 es múltiplo de 3, 6324 es divisible por 3.

Divisibilidad por 4: *Un número es divisible por 4 cuando sus 2 últimas cifras son 0 o múltiplos de 4*
Ejemplo: El número 4548 es divisible por 4, porque sus dos últimas cifras forman 48 que es múltiplo de 4.

Divisibilidad por 5: *Un número es divisible por 5 cuando termina en cero o cinco.*
Por ejemplo, el número 530 es divisible por 5, ya que termina en 0.

Divisibilidad por 6: *Un número es divisible por 6 cuando es divisible a la vez por 2 y por 3.*
Ejemplo: El número 2484. Como termina en número par podemos decir que es divisible por 2. Y al sumar sus cifras 2+4+8+4= 18 vemos que es divisible por 3. Como es divisible por 2 y por 3, es divisible por 6.

Divisibilidad por 7: (lo vemos directamente con un ejemplo)

Vamos a ver si el número **2058** es divisible por 7:	2 0 5 8
Primero al último dígito (**8**) lo multiplicamos por 2	8 x 2 = 16
Al resultado lo restamos de la parte del número que no hemos utilizado, restamos 16 de **205**.	205 – 16 = 189
Seleccionamos el último dígito de lo que nos va quedando (de 189) y lo multiplicamos por 2	9 x 2 = 18
El resultado lo restamos de la parte del número que no hemos utilizado, restamos 18 de 18.	18 – 18 = 0
Si el residuo al final es cero (como este caso) o múltiplo de siete, el número será divisible por 7.	

Nota: Nadie le hace mucho caso a este criterio, ya que es muy difícil de acordárselo. En cambio, si queremos saber si un número es múltiplo de 7, a veces es más fácil, directamente, dividir al número por 7 y ver si el resto es cero.

Divisibilidad por 8: *Un número es divisible por 8 cuando sus 3 últimas cifras son 0 o múltiplo de 8.*
Por ejemplo, el número 86064, es divisible por 8, ya que sus ultimas tres cifras forman 064 que es igual a decir 64, y este número es múltiplo de 8.

Divisibilidad por 9: *Un número es divisible por 9 cuando la suma de sus dígitos da como resultado múltiplo de 9....*
Podemos decir entonces que el número 7893 es divisible por 9, ya que 7+8+9+3= 27 y dicho número es múltiplo de 9.

Números Primos: Un Número Natural Primo es aquel que solamente es divisible por sí mismo y por la unidad. Los números que no son primos se denominan "compuestos". (Excepto el 0 y el 1 que no son ni primos ni compuestos).

Algunos ejemplos son: El número 2, solo es divisible por 2 y por 1. El número 17, solo es divisible por 17 y por 1
A continuación te mostramos una tabla de números primos entre 1 y 150:

Nota: Definimos el conjunto dentro de los números Naturales, por ello obviamos la explicación de la divisibilidad de los números primos por sus opuestos.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100
101	102	**103**	104	105	106	**107**	108	**109**	110
111	112	**113**	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	**127**	128	129	130
131	132	133	134	135	136	**137**	138	**139**	140
141	142	143	144	145	146	147	148	**149**	150

- Escribir Los siguientes Números Factoreados:

1) 36	5) 8	9) 450	13) 350	17) 1890
2) 14	6) 60	10) 1350	14) 1575	18) 1155
3) 18	7) 300	11) 1400	15) 5040	19) 2340
4) 54	8) 30	12) 315	16) 4200	20) 2040

- Hallar MCM y DCM de los siguientes números:

21)	15	18	
22)	15	21	
23)	16	6	
24)	18	4	
25)	24	8	
26)	20	8	
27)	24	12	
28)	32	8	4
29)	8	20	4
30)	12	18	6

31)	15	10	5
32)	16	8	24
33)	18	4	24
34)	25	5	20
35)	28	12	8
36)	21	14	7
37)	24	12	4
38)	22	11	33
39)	14	11	7
40)	14	10	2

41)	16	4	8	
42)	18	12	20	
43)	20	15	25	
44)	24	8	32	30
45)	32	12	48	16
46)	36	16	96	24
47)	36	18	63	27
48)	30	20	36	40
49)	20	24	48	72
50)	18	16	64	72

- <u>Problemas</u>:

51) Dos letreros se encienden con intermitencias de 48 segundos y 54 segundos, respectivamente, y lo hacen simultáneamente a las 21 h 24 m. ¿A qué hora vuelven a encenderse juntos?

52) Se quiere alambrar un terreno que tiene forma de cuadrilátero irregular cuyos lados miden: 320 m, 208 m, 396 m y 168 m. Se desea que los postes estén equidistantes y que en cada vértice haya un poste. ¿Cuál es la mayor distancia a que pueden colocarse y cuántos postes se utilizarán?

53) Hallar el menor número posible que sea divisible por 42, 48 y 56.
54) Hallar el menor número posible que sea divisible por 162 y 9.
55) Hallar el menor número posible que dividido por 198, 210 y 42 da resto 7.
56) Hallar el número más chico posible que al dividirlo por 24, 36 y 16 de resto 5.
57) Hallar el número mas chico posible que al dividirlo por 72, 48 y 15 de resto 1.

58) Tres empresas de transporte a larga distancia cumplen el recorrido Buenos Aires - Mendoza, siendo la longitud del trayecto de 1000 km. La frecuencia de salida es de 10, 12 y 15 días respectivamente. Si el 14 de marzo tuvieron una partida simultanea, hallar la fecha en que vuelvan a coincidir en su partida.

59) Diego va a al club a jugar al basket exactamente cada 16 días y Federico cada 18 días, si los dos se encontraron el 16 de marzo ¿Cuándo se van a volver a encontrar?

60) Tenemos tres cajas con monedas, una con 342, otra con 180 y la tercera con 261 monedas, se quiere fraccionar o separar cada caja en paquetitos de igual cantidad de monedas y que todos los paquetes sean todos de la misma cantidad de monedas. ¿De cuántas monedas como máximo puede ser cada paquetito? ¿Cuántos paquetitos tenemos que armar como mínimo?

61) Mariano compró 1428 ml de pintura cerámica suelta de color rojo y 756 ml de color verde. Quiere fraccionar ambas en partes exactamente iguales. ¿Cuántos ml van a tener como máximo esas partes iguales de pintura roja y verde? Aclaremos que la cantidad de mililitros de cada parte debe ser un número exacto.

62) Martín Va al videoclub a alquilar una película siempre cada 12 días, a su vez, Mariano va cada 8 días y Analía va cada 18 días. Ambos se encontraron en el Videoclub el 22 de Agosto. ¿Cuándo se volverán a encontrar?

Completar el cuadro de la siguiente manera, hay que tildar los recuadros para los cuales un número es divisible, por ejemplo, nosotros completamos la primera fila para que te orientes como hacer, fijate que tildamos el casillero del 3 y del 7 porque el número 21 es divisible solo por esos dos números de los que están en el cuadro:

		Múltiplo de...							
		2	3	4	5	6	7	8	9
Ejemplo ->	21		X				X		
63)	12								
64)	25								
65)	50								
66)	42								
67)	324								
68)	84								
69)	324								
70)	455								
71)	765								
72)	218								
73)	228								
74)	232								
75)	200								
76)	210								
77)	225								
78)	456								
79)	1842								
80)	1350								
81)	1267								
82)	1424								
83)	1264								
84)	2520								
85)	3216								
86)	3213								
87)	4160								
88)	5250								
89)	6450								
90)	7630								

91) Buscar un número primo que termine en 3, que tenga de 3 cifras y sea menor que 150, de manera que la suma de sus cifras sea igual a 5.

92) María tiene 186 figuritas y las quiere dividir en partes iguales sin que le sobre ninguna figurita. A su vez, no quiere separarlas en **no** mas de 5 partes. ¿En cuántas partes puede separarlas?

93) Ariel tiene una colección de 529 CDs. Los quiere poner en cajas para una mudanza. En cada caja le entran bien entre 15 y 20 CDs. Ariel quiere que en todas las cajas entren la misma cantidad de CDs. Pero prueba de todas las formas y no hay caso, siempre le sobran o le faltan para completar las cajas exactamente. Luego piensa y decide llevar un CD en la mano y así poder hacer esto. ¿Cuántos CDs tiene que poner en cada caja?

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Operaciones con Números Naturales

Número de Tema: **08**

Área: **Matemática**

- ✓ **<u>Números Naturales</u>**: Los números Naturales son aquellos números "exactos", o sea aquellos que no poseen partes decimal ni fraccionaria, y además son solo los positivos. O sea que los números naturales son el 1, el 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8... Y así sucesivamente...

<u>Operaciones y Propiedades</u>: Hay varias propiedades para una de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), de las cuales, vamos a ver las más importantes a modo de ejemplos.

Ejemplo 1: $\left.\begin{array}{l} 5 + 8 = 13 \\ 8 + 5 = 13 \end{array}\right\}$ ✓ Propiedad conmutativa de la suma

Ejemplo 2: $\left.\begin{array}{l} 5 \,.\, 8 = 40 \\ 8 \,.\, 5 = 40 \end{array}\right\}$ ✓ Propiedad conmutativa del Producto

Ejemplo 3: $\left.\begin{array}{l} 1 + (4 + 7) = 1 + 11 = 12 \\ (1 + 4) + 7 = 5 + 7 = 12 \end{array}\right\}$ ✓ Propiedad asociativa de la Suma

Ejemplo 4: $\left.\begin{array}{l} 2 \,.\, (3 \,.\, 5) = 2 \,.\, 15 = 30 \\ (2 \,.\, 3) \,.\, 5 = 6 \,.\, 5 = 30 \end{array}\right\}$ ✓ Propiedad asociativa del Producto

Ejemplo 5: $\left.\begin{array}{l} 2 \,.\, (3 + 5) = 2 \,.\, 8 = 16 \\ 2 \,.\, (3 + 5) = 2 \,.\, 3 + 2 \,.\, 5 = 6 + 10 = 16 \end{array}\right\}$ ✓ Propiedad Distributiva del Producto
Con respecto a la suma

Ejemplo 6: $\left.\begin{array}{l} 3 \,.\, (8 - 3) = 3 \,.\, 5 = 15 \\ 3 \,.\, (8 - 3) = 3 \,.\, 8 - 3 \,.\, 3 = 24 - 9 = 15 \end{array}\right\}$ ✓ Propiedad Distributiva del Producto
Con respecto a la Resta

Importante!!!

- ✓ <u>Separar en Términos</u>: Separar en términos una expresión, nos sirve para saber que cuentas tengo que hacer primero y que cuentas tengo que hacer después. Es más que nada para no cometer errores en el orden en que vamos operando.

Supongamos que tenemos que resolver la siguiente cuenta: $5 \,.\, 3 + 4 =$

Lo primero que tenemos que hacer para no equivocarnos es separar en términos, sabiendo que los "signos" que separan un término de otro son los "+" y los "–"

En nuestro ejemplo, si separamos en términos nos quedaría así: $5 \,.\, 3 \oplus 4 =$

Por lo tanto para resolver la cuenta, tengo primero que multiplicar 5 . 3, y de ninguna manera puedo sumar al 3 con el 4 y luego multiplicar por el 5.

Otro Ejemplo: Separemos en términos la siguiente operación:

$5 \,.\, 3 + 2 + 5 - 3 \,.\, 2 - 1 + 5 \,.\, 4 =$

Primero identificamos todos los signos "+" y "–" que son los que van a separar un término de otro:

$5 \,.\, 3 \oplus 2 \oplus 5 \ominus 3 \,.\, 2 \ominus 1 \oplus 5 \,.\, 4 =$

Luego separamos en términos:

$\overbrace{5 \,.\, 3} \oplus \overbrace{2} \oplus \overbrace{5} \ominus \overbrace{3 \,.\, 2} \ominus \overbrace{1} \oplus \overbrace{5 \,.\, 4} =$

Y ahora que está todo separado en términos puedo operar:

$\overbrace{5 \,.\, 3} \oplus \overbrace{2} \oplus \overbrace{5} \ominus \overbrace{3 \,.\, 2} \ominus \overbrace{1} \oplus \overbrace{5 \,.\, 4} =$

$15 + 2 + 5 - 6 - 1 + 20 = 35$

- Potencias de números naturales: Las potencias de un número son operaciones que hacen multiplicar a un número por sí mismo. Si la potencia es un cuadrado se multiplica el número por si mismo 2 veces. Si la potencia es un cubo se multiplica por si mismo 3 veces... y así sucesivamente...

Por ejemplo: 5^2 = Esto es 5 al cuadrado. Es como multiplicar al 5 por si mismo 2 veces, o como hacer: 5 . 5
5^3= Esto es 5 al cubo. Es como multiplicar al 5 por si mismo 3 veces, o sea: 5 . 5 . 5

Entonces: $5^2 = 5 . 5 = 25$
$5^3 = 5 . 5 . 5 = 125$
$8^2 = 8 . 8 = 64$
$3^3 = 3 . 3 . 3 = 27$

- Raíces de números naturales: La raíz de un número es la operación inversa al producto. Es decir, por ejemplo, la raíz cuadrada de un número, es encontrar otro número que multiplicado por si mismo dé por resultado el número original que quiero calcular su raíz. Por ejemplo:

$\sqrt{36} =$ ⇒ Ahora tengo que encontrar un número que multiplicado por si mismo me dé 36

$\sqrt{36} =$ ⇒ Como 6 . 6 = 36 ⇒ $\sqrt{36} = 6$

Acá tenemos una tabla con las raíces cuadradas y cúbicas más comunes

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt[3]{216} = 6$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt[3]{27} = 3$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{225} = 15$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

- Ecuaciones: La manera de resolver una ecuación es despejar. Despejar significa "Dejar a la X sola" de un lado del igual y pasar todo lo demás para el otro lado... Veamos que significa esto con un ejemplo:

Resolvamos la siguiente ecuación: $2 . X + 5 = 13$

$2 . X + 5 = 13 \; -5$

Acá tenemos que pasar primero el 5. Como está sumando, lo pasamos para el otro lado del igual, con la operación contraria a la suma, que sería la resta: Por lo tanto la ecuación nos quedaría así:

$2 . X = 13 - 5$

$2 . X = (13 - 5) \; :2$

Luego tenemos que pasar el 2 que está multiplicando a la X. Por lo tanto, como está multiplicando, pasa dividiendo:

$X = (13 - 5) : 2$

Y ahora que ya despejamos, resolvemos la ecuación: $X = 8 : 2$ ⇒ $X = 4$

Veamos las "reglas básicas" para pasar de términos

- **Lo que está sumando pasa restando**. Ejemplo: $X + 2 = 5$ ⇨ Despejando: ⇨ $X = 5 - 2$
- **Lo que está restando pasa sumando**. Ejemplo: $X - 3 = 9$ ⇨ Despejando: ⇨ $X = 9 + 3$
- **Lo que está multiplicando pasa dividiendo**. Ejemplo: $3 . X = 12$ ⇨ Despejando: ⇨ $X = 12 : 3$
- **Lo que está dividiendo pasa multiplicando**. Ejemplo: $X : 2 = 7$ ⇨ Despejando: ⇨ $X = 7 . 2$
- **Las raíces cuadradas pasan como cuadrados**. Ejemplo: $\sqrt{X} = 4$ ⇨ Despejando: ⇨ $X = 4^2$
- **Los cuadrados pasan como raíces cuadradas**. Ejemplo: $X^2 = 16$ ⇨ Despejando: ⇨ $X = \sqrt{16}$

➢ Responder Verdadero o Falso. En caso de ser verdadero, nombrar la propiedad que se aplicó:

1) 3 + 8 + 7 = 3 + 7 + 8
2) 3 + 8 – 7 = 3 + 7 – 8
3) 3 . 5 + 2 = 5 . 3 + 2
4) 3 . 5 + 2 = 3 . 2 + 5
5) 9 – (2 + 4) = (9 – 2) + 4
6) 9 + (2 + 4) = (9 + 2) + 4
7) 5 . (2 + 3) = (5 . 2) + 3
8) 5 . (2 . 3) = (5 . 2) . 3
9) 5 . (2 +7) = (5 . 2) + (5 . 7)
10) 5 + (2 + 7) = (5+2) + (5+7)
11) 7 . (5 – 3) = (7 . 5) – (7 . 3)
12) 9 . 8 + 1 = 8 . 9 + 1

➢ Resuelve:

13) 10 + 5 –2 + 1=
14) 23 + 9 – 2 – 1 =
15) 45 – 5 + 6 – 8 =
16) 53 – 19 + 15 – 13=
17) 100 –15 – 36 – 0=
18) 71 – 39 + 0 +2 + 12 =
19) 84 + 12 – 50 + 6=
20) 40 – 15 – 7 + 8=
21) 150 – 80 – 5 + 23 =
22) 85 – 36 + 15 – 7=
23) 200 – 29 – 46 + 10=
24) 189 – 45 + 33 – 17=
25) 999 – 52 + 19 + 5=
26) 5102 - 42 + 38 – 17=
27) 1029 - 65 + 12 – 28 =
28) 2717 - 59 - 345 – 98=
29) 1205 - 328 + 29 – 333=
30) 3419 - 289 - 301 – 26 =
31) 8999 - 379 - 107 + 41=
32) 15. 0 + 10. 3 – 25 : 5=

Resuelve aplicando propiedad distributiva cuando corresponda:

33) (27+15): 3 +8.(4+3) –10 =
34) (90+30).6 – 7. 3. 0 +(10^2+5^2) :5=
35) (35+17). 2 + 700: 100. 32 =
36) (1500–24): 3 – (312+624): 2 + 15=
37) (720+3728): 9 – 68 – 15:5 :3 =
38) (68+85) : 17 + (10^2 – 6^2) : 2=
39) (91+119) : 7 – 2 . (4 + 3) + 1 =
40) (8000+900) : 4 – 10. 10. 3 – 1899 =

Separar en términos y resolver:

41) 4060 – (12^2 – 6^2) + 102. 0 – 990:99=
42) (45+ 18+ 6^2): 3^2 + (15 - 3). 5 =
43) (48 – 12): 6 + (31+ 69 – 72). 4=
44) 12. 15: 10 + (13 + 17 – 3^2). 3=
45) 102:2 – (6^2 + 7 . 2^3). 0 + (990 –87):3=
46) (15+ 23). 17 – (709 –512 –99): 98=
47) (300 –15^2): 15 + (320+ 2^9): 32 =
48) (990 –330): 110 + (645 +387 –516):129=
49) 15 + 7^2 – 1 + (2^3 + 47 – 19): 12=
50) 2000: 20: 2 + (2000+ 20+ 2): 2 - 2=
51) 300: 30. 3 + (3+ 30+ 300). 3 - 3=
52) (555+ 55+ 5):5 – (555 –55 –5): 5 + 555=

➢ Ejercicios combinados con potencia y raíz:

53) $(2)\cdot\left(79-8.(3)^2+\sqrt{16}\right)-10=$

54) $\{3+\sqrt{\left(4^3\div 4-13\right)+1}\}\div 5=$

55) $3+\sqrt[3]{3^2-\left(\sqrt{16}-3\right)}-4\div 2^2=$

56) $1+\left\{\ 9-\left(\sqrt{2\cdot 5^2-1}+1\right)+1-\sqrt{3^2-\left(2^2+1^3\right)}\ \right\}$

57) $3^2\div\sqrt{9}-2^3+2^2\div\sqrt{4}+4^2\div\sqrt[3]{8}=$

58) $\sqrt[3]{6^2-5^2+2^3+2^2\cdot\sqrt[3]{8}}=$

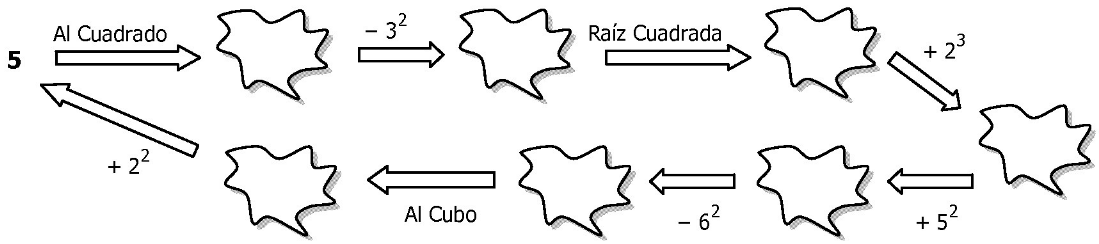
59) $\sqrt{9^2-2^3\cdot\left[5^2-\left(2\cdot\sqrt[3]{27}\right)\cdot\sqrt{9}\right]}=$

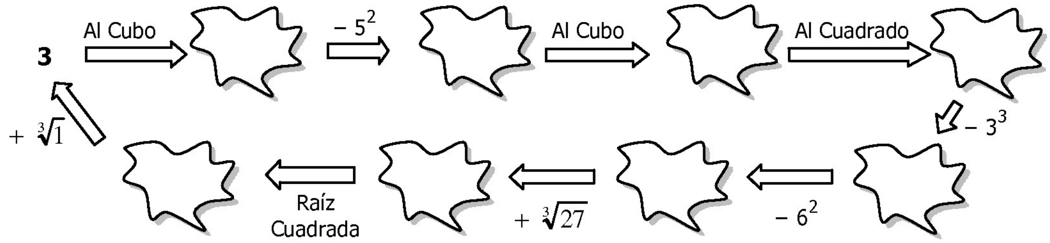
60) $2^5-\sqrt[3]{64}\cdot\left[7^2-\sqrt{11+5^2}\cdot(2)^3+1\right]^3=$

61) $2^3-\sqrt[3]{5^2+\left[5^2-\left(0^2+2^4\right)-2^3\right]^5+1^5}=$

62) $\sqrt{\left(2^6+6^2\right)\div\left(2\cdot 3^3-7^2\right)-2^2}\div\sqrt[3]{\left(5^2+15\right)\div\left(2^2+1^4\right)}=$

63) Completar los cuadros aplicando las operaciones y verificar que dé por resultado el mismo número del que partimos.





➢ Resolver las siguientes ecuaciones:

64) 15= x + 5
65) 2 + x = 33
66) 27 = 7 + x
67) x - 22 = 34
68) 16 = 54 - x
69) x - 2 = 16
70) 32 - x = 18
71) 30 = x - 5
72) X+6 = 324: 3: 2 - 48
73) X + 5 –1 = 26 – 14
74) X - 6 = 79 – 20
75) 52 - 25 - 3 = x + 7
76) 5 2 - 12 = x - 19 + 20
77) 5. X + 1 = 36
78) 2. X - 9 = 2. 3. 5 + 23
79) 3. X + 1 = 90 - 4. 5
80) 8. X - 11 = 93 + (5 +3).10
81) 2. X + 5. (25 – 20) = 7. 7+10
82) X + 15 =225: 15
83) X - 8 = 80: 10
84) X + 2 . 2 . 8 =7. 5
85) 3.X - 2.(18-3) =(400-100+84):4
86) X = (80 - 66) : 2
87) 5. X - 54:2 = 32:4
88) 4.X +1= (450 – 325 - 100) :5
89) 7. X - 6 = (65+26+104): 13
90) 2.X +2 = (54 –38).2

➢ Calcular X

94) X + 5 = 6
95) X – 1 = 1
96) X + 2 = 5
97) X + 9 = 11
98) 2 . X – 2 = 4
99) 5 . X – 27 = 8
100) 4 . X + 3 = 23
101) 7 . X + 2 = 9
102) 2 . (X + 1) = 18
103) 3 . (X – 1) = 3
104) 8 . (X + 6) = 88
105) 5 . (X – 4) = 15
106) 7 . (X + 2) = 21
107) 4 . (X – 5) = 16
108) 3 . (X + 4) = 24
109) 9 . (X – 2) = 27
110) 2 . (X+2) + 3 . (X – 1) = 11
111) 3 . (X– 2) + 2 . (X – 1) = 27
112) 4 . (X+2) + 5 . (X–5) = 37
113) 7 . (X+3) + 4 . (X–1) = 72
114) 6 . (X+1) – 5 . (X–2) = 20
115) 2 . (X–5) + 3 . (X–1) = 32
116) 3 . (X+3) – 2 . (X–1) = 17
117) 2 . (X–4) + 9 . (X–1) = 49
118) 5 . (X+2) – 7 . (X–1) = 1

➢ Aplicar la propiedad distributiva:

119) 3 . (X + 2)
120) 8 . (X + 5)
121) 5 . (X – 6)
122) 4 . (X – 3)
123) 3 . (2X – 2)
124) 6 . (5X + 1)
125) 3 . (3X – 9)
126) 2 . (4X + 1)
127) 9 . (8X – 7)
128) 8 . (2X + 5)

129) Buscar un número entero cuya raíz cúbica dé 2^2.

130) Buscar un número, al cual, sumándole la raíz cúbica de 8, me dé por resultado la raíz cúbica de 64.

131) ¿Cuántos números hay mayores de 7 y menores que la raíz cúbica de 1000?.

132) ¿Cuántos números hay que sean mayores que la raíz cúbica de 216 y menores que 4^3? (Sin contarlos)

133) ¿Cuántos números hay mayores que la raíz cúbica de 27 y menores que 7^3?

134) Si al triple del cuadrado de 6 le resto el cubo de un determinado número, obtengo como resultado 9 elevado al cuadrado. ¿De qué número se trata?

➢ Ecuaciones para hallar X:

135) $\sqrt{X}+1=5^2-7\cdot\sqrt{9}$

136) $X^3-\left(\sqrt{144}+3^2\right)\div\left(2^2-1\right)=1$

137) $\sqrt[3]{1}+2^3+X-\sqrt[3]{8}\div\sqrt{4}=15$

138) $1+\sqrt[3]{X+1}+\sqrt[3]{2^5-\sqrt[3]{8^2+6^2+5^2}}-\left(1+\sqrt[3]{4^2-2^3}\right)=3$

139) $(X-1)\div\sqrt[3]{5+\sqrt{9}}=3\cdot\left(5-\sqrt[3]{2^2+3^2+4^2-2}\right)-2^2$

140) $(X-3)^2-\sqrt{5^2-4^2-\sqrt{5^2-3^2}-5}-\sqrt[3]{1}=5\cdot\left(\sqrt[3]{64}-1^3\right)$

141) $\sqrt{25-\left(1+\sqrt{9}\right)^2}+\sqrt{X}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt{6\cdot2^2+3^2+4^2}-3^2$

142) $1+\sqrt[3]{X}+\sqrt[3]{2^3+2^3\cdot\sqrt[3]{1^2+2^2+4^2+5^2+9^2+6^3}}=7$

143) $\sqrt[3]{7+X\div3-2}+2^4-\sqrt[3]{3^2+5^2+6^2+7^2+2^3+3^3+4^3+5^3}=\sqrt{2^2+6^2+9^2}$

144) $X+\sqrt{144}-\sqrt[3]{3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+9^2}=\sqrt{1^3+2^3+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2}$

➢ Problemas:

145) Si a un número "X" le sumo 3 y al resultado lo multiplico por 2, me da 14 ¿Cuál es ese número X?

146) Si a un número le resto 3 y al resultado lo multiplico por 5, me da 20 ¿Cuál es ese número?

147) Si a un número lo multiplico por 5 y al resultado le resto 7, me da 23, ¿De qué número estoy hablando?

148) Hallar un número, tal que si le sumo 4 y al resultado lo multiplico por 6 me de 30.

149) Si a la suma entre un número X y 3, la multiplico por 4, me da 32, ¿de qué número se trata?

150) Si multiplico a un número por 5 y al resultado le resto 23, me da por resultado 22, ¿Cuál es el número?

➢ Ecuaciones redactadas:

151) Hallar la raíz cúbica de la suma de los cubos de 1, 6 y 8.

152) Hallar la raíz cúbica de la suma de los cuadrados de 2, 3, 6, 7, 8, 9 y 10.

153) Hallar la raíz cúbica de la suma de los cuadrados de 4, 6, 8 y 10.

154) Hallar un número tal que la raíz cúbica de la suma de dicho numero y 3 dé por resultado la raíz cuadrada de 4.

155) Si a un número le resto 4 y al resultado lo elevo al cuadrado, me da por resultado la raíz cuadrada de 81, ¿De qué número se trata?

156) Me dicen que un determinado número cuando lo elevo al cubo, me dá por resultado lo mismo que la suma de los cubos de 3, 4 y 5. ¿De qué número se trata?

➢ <u>Resolver los siguientes Problemas</u>:

157) En el supermercado, Melina compró 1 caja de hamburguesas, 2 panes de hamburguesas y 3 Gaseosas. El precio de cada producto es de $3 , $1 y $2. Si ella pago con un billete de $ 20, ¿cuál es su vuelto?

158) La mamá de Marina le dio $120 para que se comprara ropa para una fiesta. Se compró un sombrero y un vestido. Si en total gasto $ 80 y sabemos que el sombrero tiene un precio de $ 35. ¿Cuál es el precio del vestido?

159) Una fábrica de tortas hizo para el mes de abril 48 tortas de chocolate negro, 52 tortas de chocolate blanco, 34 tortas con crema y frutas. Si durante ese mes se vendieron 39 tortas de chocolate negro, 49 de chocolate blanco y 29 de crema y frutas, Cuantas tortas quedaron en total para vender en el mes próximo?

160) En una biblioteca hay 120 libros y tiene 5 estantes. Si se distribuyen igual cantidad de libros en cada estante, ¿Cuántos libros hay por estante?.

161) Andrea tiene $ 254 en el Banco, si retira $99 un día, $25 otro día y 50 otro día: ¿Cuánto le queda en el banco?

162) Hay 3 cursos de 7º año en un colegio: cada aula empezó el año con 1 caja de tizas azules y 1 caja de tizas blancas, conteniendo cada caja 30 tizas. Si por día se usan 2 tizas blancas y 1 azul. El martes de la tercera semana de clases la maestra cuenta las tizas al final del día. ¿Cuántas tizas contó en total ese martes?

163) Martín tiene 56 caramelos y los reparte por igual entre 12 amigos. Se da cuenta que le sobran algunos caramelos, luego de repartirlos de manera que le queden la misma cantidad a cada uno. ¿Cuántos caramelos le sobran?

164) Luís se compró una bicicleta por $ 120 y la pagó en tres cuotas mensuales de igual valor. Por pagar en cuotas, le recargan al valor original $ 15. ¿Cuánto pagó en cada cuota?

165) Se separan 427 libros y se llenan por igual 15 cajas, de modo que sobraron 7 libros. ¿Cuántos libros hay en cada caja?

166) <u>Crucigrama de números</u>: Hay que ir llenando los espacios, sabiendo, en las filas (horizontales) las sumas de los cuadrados y en las columnas (verticales) la suma de los cubos.

3	4	7		⟹ 99
	2	8		⟹ 108
			4	⟹ 83
5	6		6	⟹ 106
⇓ 395	⇓ 631	⇓ 909	⇓ 413	

Sumatoria de los cuadrados de cada fila

Sumatoria de los cubos de cada columna

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Conjuntos Numéricos

Número de Tema: **09**

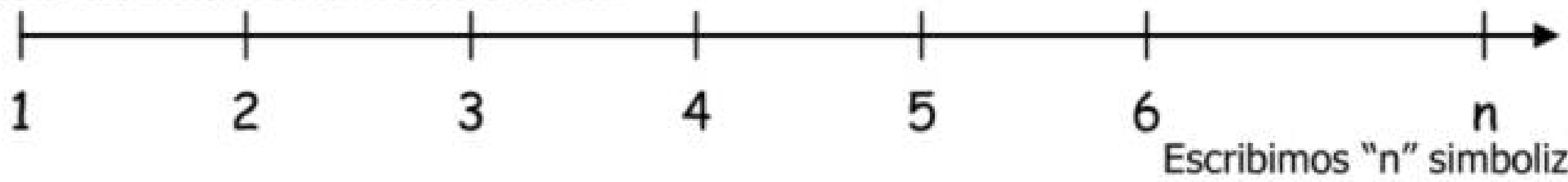
Área: **Matemática**

- <u>Los Números Naturales</u>: Hace muchísimo tiempo, el hombre solo conocía los <u>Números Naturales</u>. Así podía conversar de, por ejemplo:

  - ➪ "Hoy vi **2** leones"
  - ➪ "Con esos **13** caracoles, hice **1** collar"
  - ➪ "Hoy pinté **4** dibujos nuevos en la caverna"

  Por ese entonces, con estos números era suficiente para desenvolverse bien.

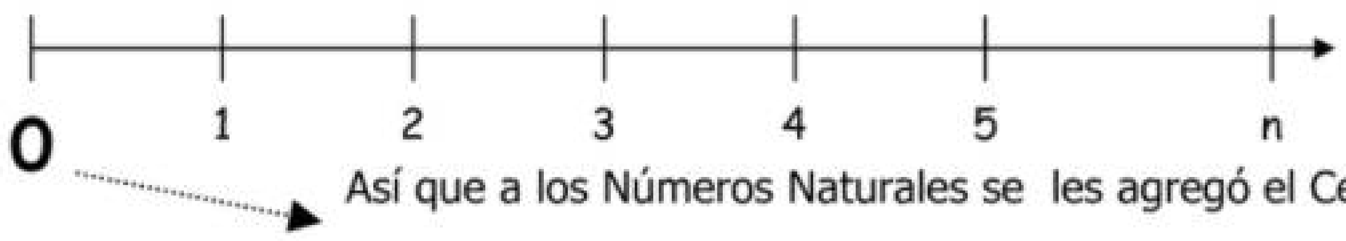
Esta era entonces la recta numérica



Escribimos "n" simbolizando que los Números NATURALES "siguen hasta el infinito"

- <u>Los Números Naturales y el Cero</u>: Con el tiempo surgió la necesidad de utilizar también <u>el CERO</u>, ya que se dieron cuenta que necesitaban expresar la ausencia de unidades.

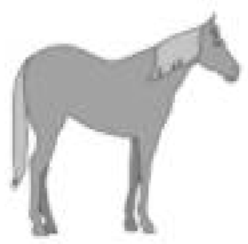
La historia del número cero es una larga historia, en realidad, el 0, es uno de los números mas modernos de todos, no hace tantos años que se empezó a utilizar, hubo muchas culturas que tenían sistemas de numeración en los que no hacían falta utilizar el 0, por ejemplo los romanos tenían su sistema de numeración romano y no tenían un símbolo que represente al cero, es decir que no tomaban al 0 en cuenta como un número mas.. El principal motivo que hizo a la necesidad de contar con un símbolo que represente al cero fue el tema de las operaciones, ya que es mucho mas fácil poder sumar, restar, multiplicar, dividir, etc. Cuando contamos con un símbolo para poder expresar la ausencia de la unidad.



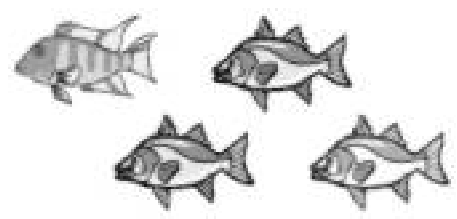
Así que a los Números Naturales se les agregó el Cero.

- <u>Los Números Negativos</u>:

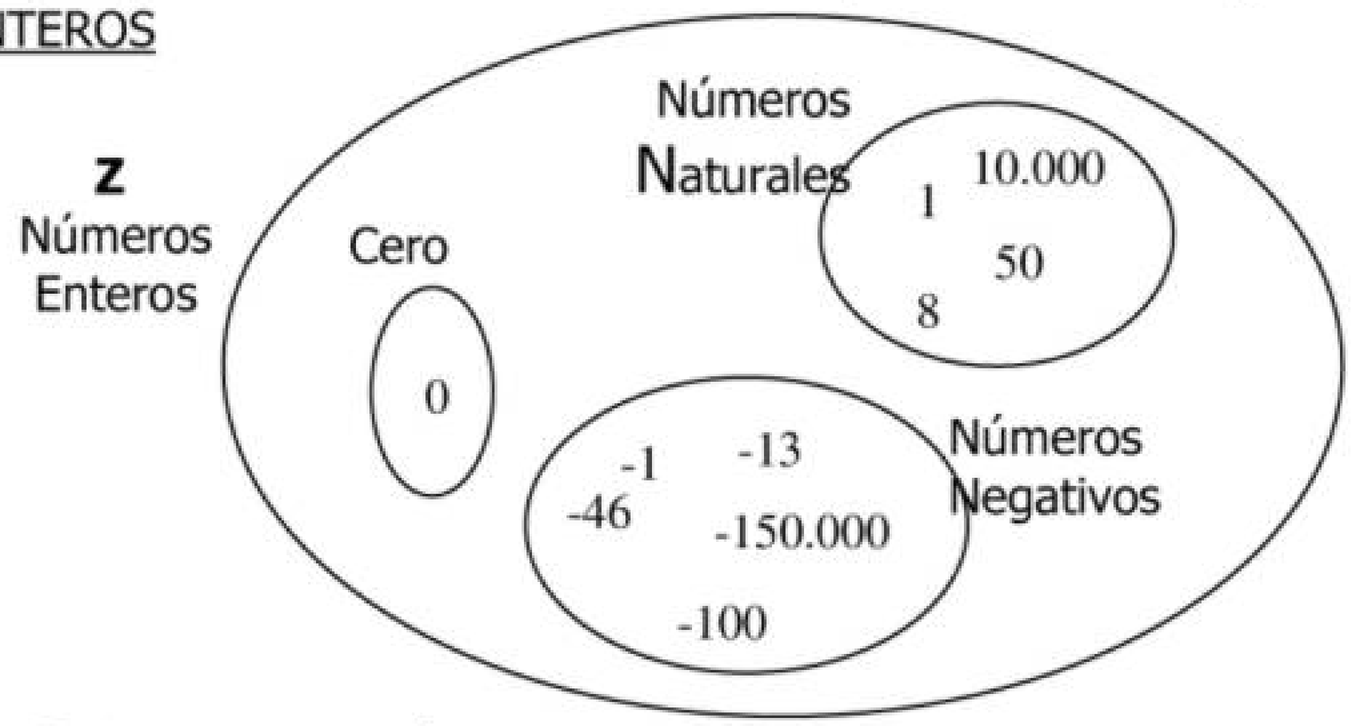
  <u>Los Números Negativos</u> Un problema cotidiano en el que resulta útil utilizar números negativos, es cuando por ejemplo, se prestan cosas entre personas y alguna termina "debiendo" que sería como terminar con un saldo "Negativo" Veamos un ejemplo: Tenía 4 pescaditos y Tito me dijo que me cambiaba un caballo por 7 pescaditos, me dio el caballo y yo le di los 4 pescaditos, entonces le <u>"debo 3 pescaditos"</u>, es como si tuviera *(−3) pescaditos*.



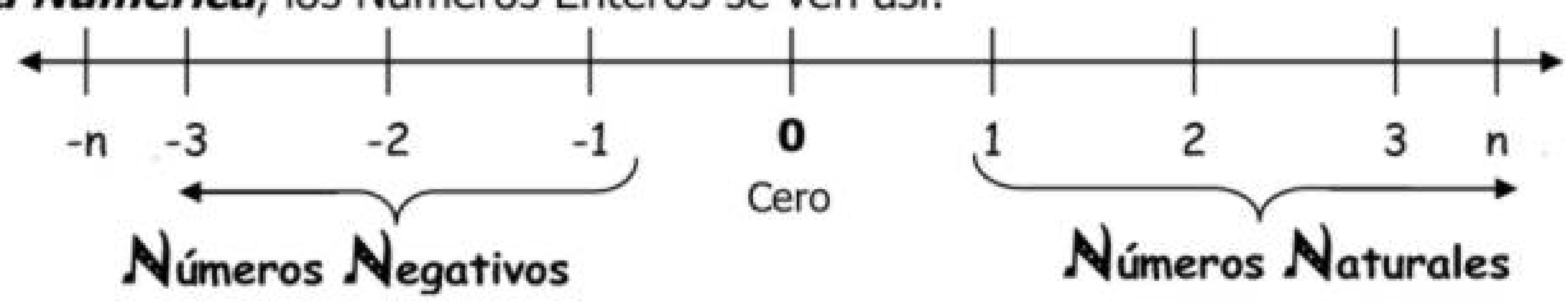
Tenía.......... $-$ 4
"Le doy" 7



- <u>El Conjunto de los Números Enteros</u>: Si juntamos los Números Naturales, los Números Negativos y el Cero, tenemos... <u>LOS NÚMEROS ENTEROS</u>



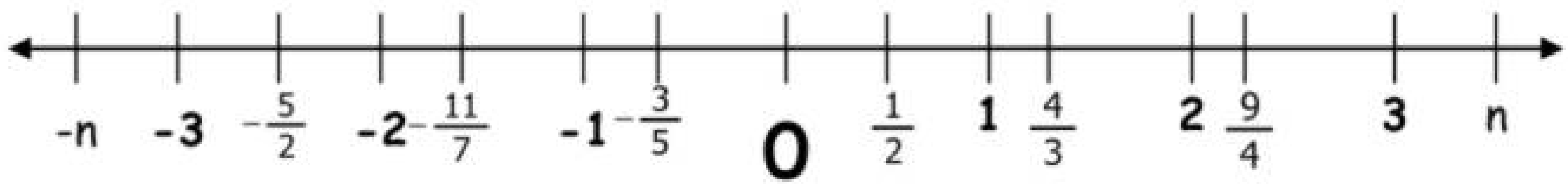
En la ***Recta Numérica***, los Números Enteros se ven así:



- Los Números Racionales: Los Números Racionales están formados por una "parte entera" y una "parte no entera" a la que se llama fracción o parte decimal. Los Números Racionales son todos aquellos números con o sin "parte no entera", siempre y cuando se puedan expresar como una fracción

Por ejemplo: $2{,}25 = \dfrac{9}{4}$ o $-0{,}6 = -\dfrac{3}{5}$ o $1{,}3 = \dfrac{4}{3}$

Así queda la Recta Numérica con los Números Racionales:

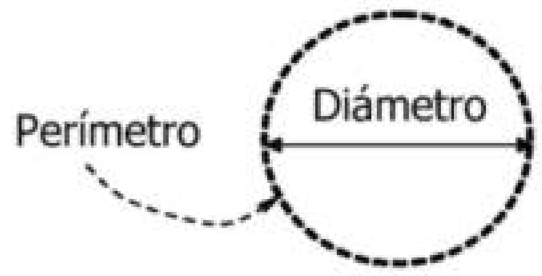


Ojo: También hay fracciones negativas

Hay números con coma que son fracciones, la gran pregunta es si cualquier número con coma se puede escribir como una fracción, y la respuesta es **NO** ⇨ Entonces, si hay números decimales que no se pueden expresar como fracciones, todavía falta un conjunto de números, que son esos decimales que no se pueden expresar como fracciones.. y... **¿Cuáles son esos números?**

- Subconjunto de los IRRACIONALES: Tienen infinitos decimales no periódicos, y NO se los puede expresar como fracción.

Ejemplos:



Como sabemos, los griegos se dieron cuenta que el perímetro de cualquier circunferencia equivale a 3,1415926... veces su diámetro.

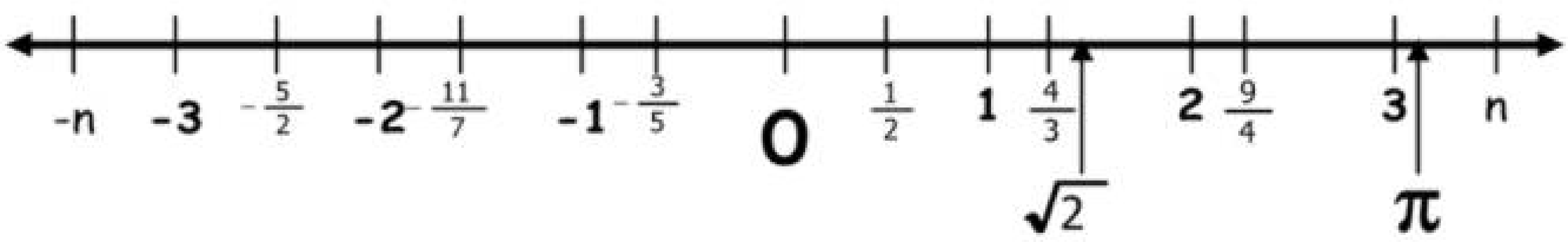
El número π = **3.14159265358979323846264**.. etc, etc. tiene infinitos decimales no periódicos!!! (y NO se lo puede representar mediante fracción) entonces es un número IRRACIONAL

Veamos otro ejemplo, Pitágoras se preguntaba esto: ¿Cuánto vale la diagonal de un cuadrado de lado 1?

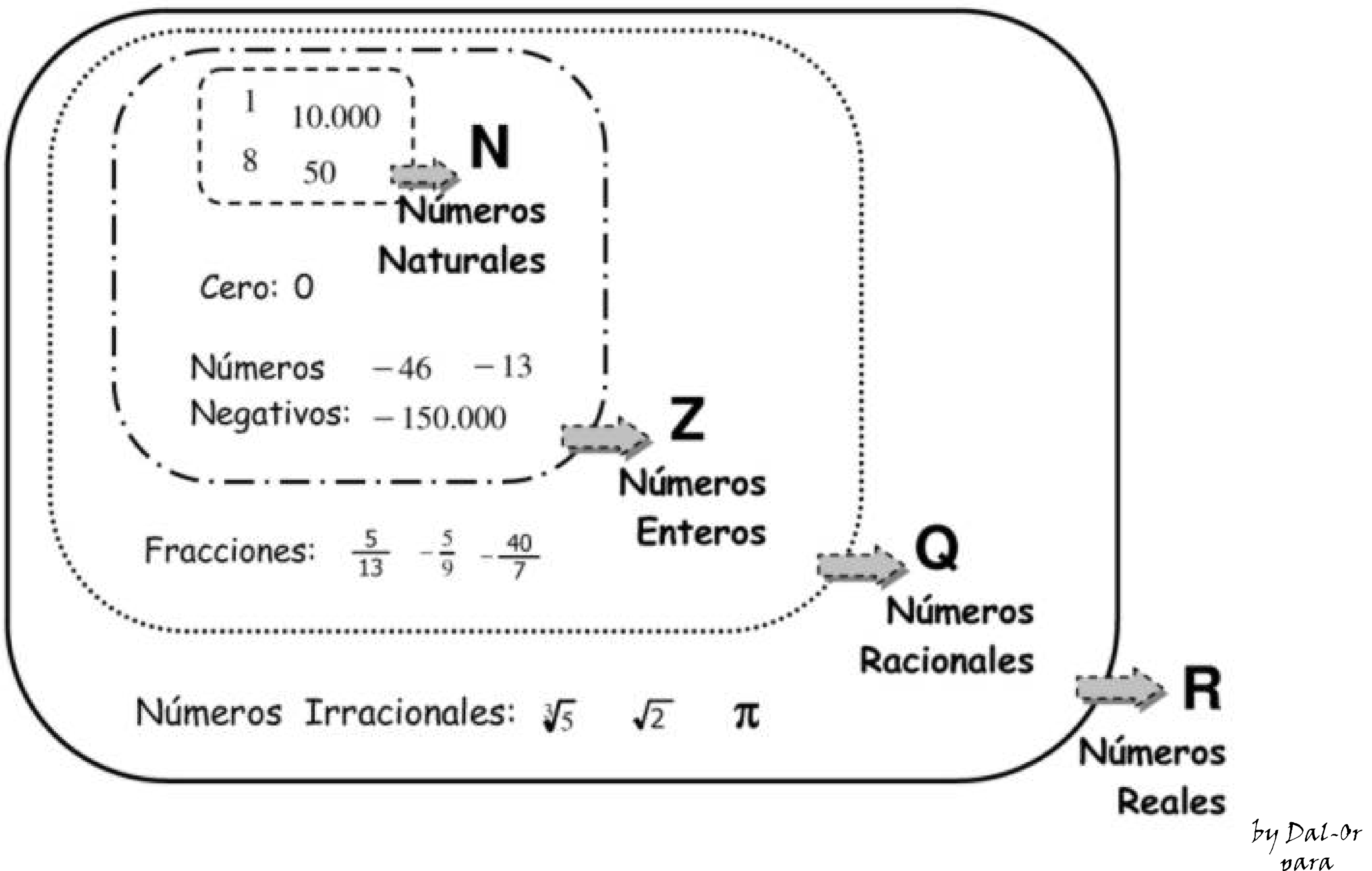
...así calculando llegó a la acertada conclusión que esa diagonal vale:

$\sqrt{2} =$ 1,4142134523730950488016887242097

- Los Números Reales: El conjunto de los Números Reales incluye a todos los que veníamos estudiando, inclusive los IRRACIONALES..



Esquema Integral de los Conjuntos Numéricos



Nota: Fijate que los conjuntos que quedan "encerrados" adentro de otro conjunto es porque están **INCLUIDOS** en ellos.

➢ Responder Verdadero o Falso:

1) El 0 es un Entero.
2) 1/2 es una fracción, y por lo tanto pertenece a los Irracionales.
3) El 2, es un número racional porque pertenece al conjunto de los Racionales.
4) Las raíces cuadradas inexactas, son todos números Irracionales.
5) $\pi/2$ pertenece a los Racionales, pues es una fracción.
6) Todos los Naturales son números Reales.
7) Todos los Reales son números Naturales.
8) Los Enteros Negativos son números Naturales.
9) Los Números Naturales pueden tener como máximo 20 cifras.
10) 5,4 es un número racional.

➢ Preguntas para pensar y/o discutir en clase:

11) ¿Nos alcanza el conjunto de números naturales para medir las temperaturas? ¿por qué no nos alcanza?

12) ¿Nos alcanza el conjunto de números racionales para medir la temperatura?

13) Si queremos medir un parámetro muy importante y necesitamos una precisión de un milésimo, que es como decir que nos interesan tres lugares después de la coma... ¿Nos alcanza el conjunto de los racionales o necesitamos el de los reales?

14) A que conjunto numérico se asemeja el conjunto de años que forman la historia escrita.. que sin ponernos en detallistas con esas cuestiones, consideremos por ahora que va desde los 4.000 antes de Cristo hasta hoy..

15) Si tenemos los siguientes números: 11 -1 2 50 -23 9 0 -3 y queremos definir un conjunto numérico que los contenga a todos... cual elegirías? Y porque?

16) Si con los números del ejercicio anterior: 11 -1 2 50 -25 9 0 y –3 alguien eligiera el conjunto de los reales, diciendo que es un conjunto que los incluye a todos.. ¿Está bien? ¿Qué observación harías?

17) Supongamos la lista de precios de un supermercado.. ahora busquemos el conjunto numérico más pequeño de todos que incluya a todos los precios... ¿Cuál es?

18) En el ejercicio anterior, si no se hubiera aclarado que había que encontrar al conjunto "más pequeño" ¿qué otra respuesta hubiera sido válida?

19) ¿En que campo de la matemática pensás que puede ser muy útil el conjunto de los números reales? (Acordate de los ejemplos de Pi y de la diagonal del cuadrado)

20) Un número que pertenezca al conjunto de los Números Racionales ¿puede tener infinitas posiciones decimales (infinitos números después de la coma)?

21) ¿Cuántos números racionales pensás que hay que sean mayores a 1 y menores que 2?

22) ¿Se pueden sumar, restar, multiplicar o dividir, números que pertenecen a distintos conjuntos numéricos? Dar ejemplos de varios casos.

23) En general, al multiplicar dos números irracionales, obtengo como resultado, otro número irracional, pero hay casos en que multiplicando dos números irracionales, obtengo un número entero como resultado Dar tres ejemplo en que se cumpla esto último.

24) Si multiplico dos números naturales, ¿A que conjunto numérico pertenece el resultado que obtengo?

25) Si divido un número natural por otro número natural, de manera que la división no sea exacta. ¿A qué conjunto numérico pertenece el resultado de la división?

26) Ubicar en la recta numérica los siguientes números:

$1 \quad -1{,}2 \quad 3 \quad 0 \quad -0{,}5 \quad 2{,}5 \quad -1 \quad -1{,}3 \quad 4 \quad 1{,}4 \quad 1{,}44 \quad 1{,}7 \quad 2{,}45$

27) Ubicar en la recta numérica los siguientes Números Reales:

$1 \quad -\frac{1}{2} \quad \pi \quad 3 \quad \frac{4}{3} \quad 0 \quad \sqrt{3} \quad 5 \quad \sqrt{5} \quad -3 \quad \frac{9}{2} \quad 4 \quad \frac{5}{8} \quad 2{,}4 \quad \sqrt{6} \quad \frac{4}{5}$

$2\frac{2}{5} \quad -\sqrt{2} \quad -1 \quad 2{,}3 \quad \frac{23}{10} \quad -\frac{5}{6} \quad -\frac{5}{7} \quad \sqrt{7} \quad \frac{11}{3} \quad -0{,}5$

28) Unir con Flechas:

$\sqrt{5} \quad \sqrt{6} \quad 1 \quad 100 \quad 1{,}5 \quad \frac{7}{2} \quad \frac{7}{4} \quad \frac{4}{7} \quad \sqrt{9} \quad \sqrt{70} \quad \frac{14}{4}$

- Números Reales mayores que 2 y menores que 5
- Números Racionales menores que 3
- Números mayores a 5 y menores a 10

- <u>Contando Números</u>:

29) ¿Cuántos números naturales hay entre 1/5 y 18/5?
30) ¿Cuántos números naturales hay entre −37/5 y 18/5? (Sin contar al cero)
31) ¿Cuántos números naturales hay entre 5/4 y 194/3?
32) ¿Cuántos números enteros hay entre −7/2 y 29/3?
33) ¿Cuántos números enteros hay entre −711/2 y 2993/4?
34) ¿Cuántos números racionales (fracciones) hay mayores que 0 y menores que 1, tal que el denominador de la fracción sea un número de una sola cifra? (Ojo, tengan cuidado con las fracciones que no son irreducibles, ya que por ejemplo, 4/8 es lo mismo que ½)
35) ¿Cuántos números naturales hay entre $\sqrt{50}$ y $\sqrt{60}$?
36) ¿Cuántos números naturales hay entre $\sqrt{30}$ y $\sqrt{90}$?
37) Dar 10 ejemplos de números racionales que sean mayores a 5 y menores a 6.
38) Para el problema anterior, ¿Será cierto que hay más de 1000 ejemplos posibles? ¿Cuántos ejemplos distintos se pueden poner?

39) Si quiero expresar $\sqrt{2}$ como un número racional (de la manera más aproximada posible) de modo que el denominador sea un número de 1 sola cifra. ¿Cuál es el número racional que se aproxima más al número real?

40) Colocar dentro de cada conjunto, los números que le pertenezcan.. (Aclaración: puede ser que haya números que pertenezcan a más de un conjunto, es más, los hay)

$3 \quad -2 \quad 1{,}22 \quad \frac{1}{2} \quad 2{,}1 \quad \pi \quad -\frac{3}{4} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{9} \quad \sqrt{1}$

$\sqrt{-1} \quad -\frac{566}{11159} \quad 9 \quad \frac{8}{4} \quad 2{,}0 \quad 2{,}01 \quad -1{,}00$

$3{,}1155998412\,354 \quad \sqrt{2{,}4323} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \frac{\pi}{5} \quad 2.000.000.000.000.000$

Números Naturales

Números Racionales

Números Reales

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Operaciones con Números Enteros

Número de Tema: **10**

Área: **Matemática**

- <u>Qué es un Número Entero? Los números Enteros son todos los Naturales y los Negativos, incluyendo también al Cero.</u>

  A un número entero, lo "podemos separar" en dos partes para estudiarlo:
  - El valor absoluto del número: Es su distancia al Cero.
  - <u>El SIGNO</u>. **El signo es muy importante**. Fijate que <u>no</u> es lo mismo: **tener** 100 pesos (o sea **+100**) que **deber** 100 pesos (**–100**)

Ojo: Separamos a los números enteros en estas dos partes sólo para estudiarlos, ya que las dos partes son una sola cosa inseparable que es el número entero.

- **<u>Comparación de Números Enteros</u>**

Cuando comparamos números Naturales para saber cuál de ellos es Mayor, es muy fácil porque solo miramos y comparamos los números y la simplicidad de esto está en que en los números naturales el número y su valor absoluto da siempre lo mismo.

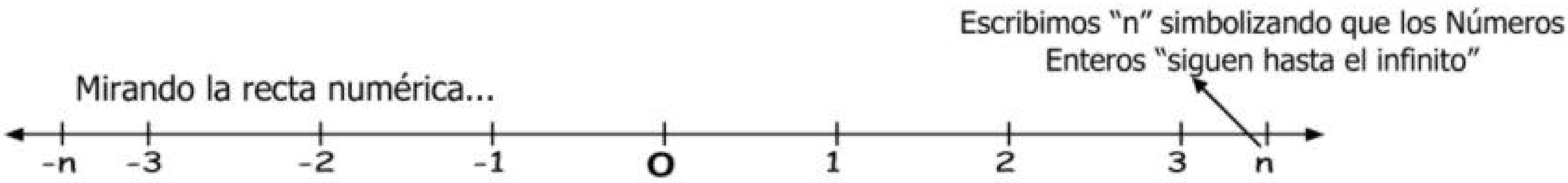
Con los números enteros nos aparece una primera dificultad que antes no teníamos. Veamos:
Si tomamos el número: –5
Vemos que el valor absoluto de –5 es 5 (Obviamente no son iguales)

Cuando comparábamos por ejemplo los números 1 y 5, era fácil decir que el 5 es mayor.
Pero si comparamos –1 con –5 ya no es lo mismo ya que en este caso el mayor es –1

<u>¿Qué pasa entonces si comparamos dos números Enteros?</u>
Para ello tenemos que guiarnos por la RECTA NUMÉRICA
Y el número mayor será el que esté más a la derecha ubicado en la recta

<u>En realidad podemos tener tres tipos de comparaciones:</u>

- ✓ <u>Caso 1: Dos números positivos: Aquí el mayor es el de Mayor Valor Absoluto.</u>
- ✓ <u>Caso 2: Un Positivo y Un Negativo: Aquí el mayor es siempre el positivo.</u>
- ✓ <u>Caso 3: Dos Números Negativos: Aquí el mayor es el de MENOR valor absoluto.</u>



Veamos tres ejemplos de comparación de dos Números Enteros:

Caso 1: Comparemos 3 y 1 (Como vimos antes es mayor el 3 porque es mayor su valor absoluto)
Y por ello vemos que el número 3 está más a la derecha ubicado en la recta numérica.

Caso 2: Comparemos –3 y 1 (Como vimos antes es mayor el 1 porque es el positivo)
Y por ello vemos que el número 1 está más a la derecha ubicado en la recta numérica.

Caso 1: Comparemos –3 y –1 (Aquí es mayor el –1 porque es MENOR su valor absoluto)
Y siempre pasa que entre los números negativos los de menor valor absoluto son los que están más cerca del Cero, o sea más a la derecha ubicados en la recta numérica.

	3 "es mayor que" **1**	**–1** "es mayor que" **–3**	**1** "es mayor que" **–3**
Y se escribe:	$3 > 1$	$-1 > -3$	$1 > -3$

- **<u>Suma y Resta de Números Enteros</u>:** A comparación de lo que sucedía con los Números Naturales, cuando sumemos o restemos enteros también nos aparece otra dificultad. El tema es que más allá del signo de la operación "+" o "–" vamos a tener los signos de los números. Y para hacer las cuentas primero tenemos que dejar un solo signo por cada número.

Veamos Ahora como lograr esto

Supongamos que tenemos que realizar la cuenta: Al número 5 le queremos sumar el número –4
Nos quedaría: 5 + (–4)

O supongamos que tenemos que realizar la cuenta: Al número 3 le queremos restar el número –2
Nos quedaría: 3 – (–2)

Lo primero que tenemos que razonar aquí es lo siguiente:

Con Sumas:

- ✓ Sumar un número positivo es **Agregar** una cantidad. Ejemplo: 5 + (+1) = 5 **+** 1
- ✓ Sumar un Número negativo es **Quitar** una cantidad. Ejemplo: 5 + (–1) = 5 – 1

Con Restas:

- ✓ Restar un número positivo es **Quitar** una cantidad. Ejemplo: 5 – (+1) = 5 – 1
- ✓ Restar un Número negativo es **Agregar** una cantidad. Ejemplo: 5 – (–1) = 5 **+** 1

Nótese que "Agregar" es sinónimo de Suma y "Quitar" es sinónimo de Resta

<u>Pasemos Ahora a una regla práctica para hacer cuentas de sumas y restas con Números enteros</u>:

Vamos a aprender a sumar y restar números enteros tomándolos de a dos..

Cuando hablamos de sumar o restar "los números" estamos hablando en realidad de **sus valores absolutos**.

Cuando los **signos** son **IGUALES** ⇨ Hay que **SUMAR** "los Números" o Valores Absolutos ⇨ Y queda el signo que tenían ambos números...

Cuando los **signos** son **DISTINTOS** ⇨ Hay que **RESTAR** "los Números" o Valores Absolutos ⇨ Y **queda el signo del número de MAYOR valor absoluto**...

Veamos un ejemplo: **+ 4** – **6 =**

- ➢ El Valor Absoluto: Como tienen **Signos Distintos**, se **Restan** los números: 6 – 4 = **2** ⇨ +4 – 6 = – 2
- ➢ El Signo: Y Como 6 es mayor que 4. Que el signo del 6 que es un "**–**"

Otro ejemplo = – 3 – 4

- ➢ El Valor Absoluto: Como tienen **Signos Iguales**, se **Suman** los números: 3 + 4 = 7 ⇨ –3 – 4 = – 7
- ➢ El Signo: Como son los dos negativos, el resultado queda con signo menos.

<u>Multiplicación y división de Números Enteros</u>: Para multiplicar o dividir números enteros, vamos a multiplicar o dividir <u>por un lado "los números"</u> (sus valores absolutos) y <u>por el otro los signos</u>. Ya saben dividir o multiplicar números, eso lo saben desde 4º Grado, por ejemplo saben que 4x7 es 28. Lo que vamos a aprender ahora, es a multiplicar también números negativos, para ello utilizaremos una regla práctica.

<u>Multiplicación y división de Signos</u>:

Ojo: La regla de los signos es solo para multiplicar o dividir. Es muy común el error de aplicar esta regla en la suma o resta.

A continuación veremos por qué pasa esto en las multiplicaciones con una explicación con un ejemplo cotidiano.

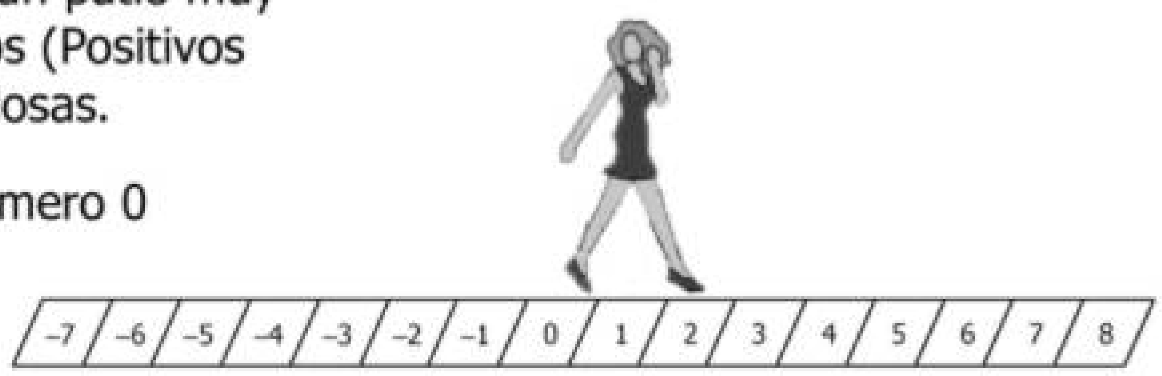
Regla de los Signos

+	Por o Dividido	+	es	+
+	Por o Dividido	–	es	–
–	Por o Dividido	–	es	+
–	Por o Dividido	+	es	–

<u>Explicación de la Regla de Los signos</u>:

Vamos a Suponer que una persona va caminando por un patio muy largo con Baldosas numeradas con los números Enteros (Positivos y Negativos) y que camina al ritmo de 1 Paso = 2 Baldosas.

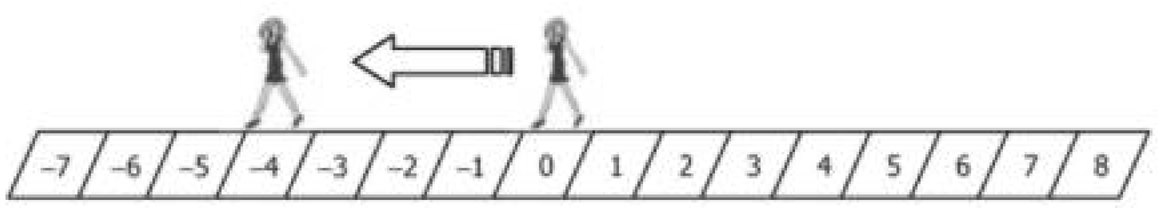
La persona inicialmente está siempre en la baldosa Número 0



Caso 1: + Por +
La Persona Camina 3 Pasos Para Adelante
La cuenta es sencilla: Como por cada paso recorre Hacia Adelante 2 Baldosas:
En 3 pasos recorrerá: 3 x 2 = **6 Baldosas hacia Adelante**. Quedará en la baldosa número 6

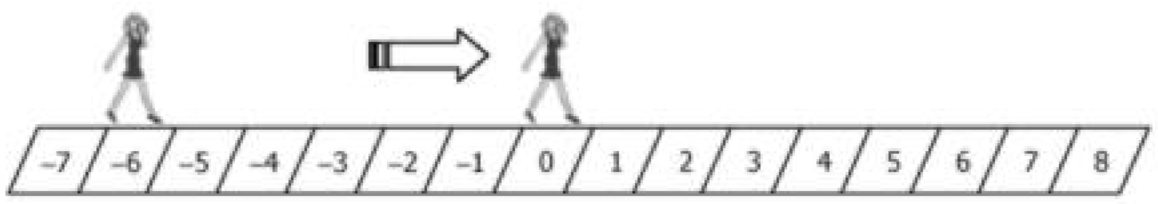
La cuenta que hicimos fue: (+3) . (+2) = **+**6 ⟹ MAS por MAS nos dio MAS

Caso 2: + Por –
La Persona Camina 2 Pasos Para Atrás
La cuenta es sencilla: Como por cada paso recorre Hacia Atrás 2 Baldosas:
En 2 pasos recorrerá: 2 x 2 = **4 Baldosas hacia ATRAS**. Y quedará en la baldosa número –4



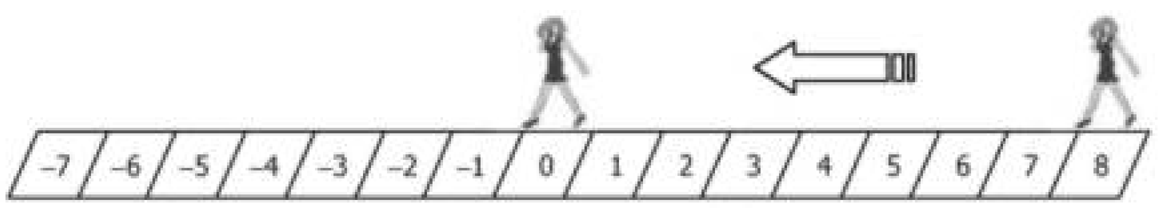
La cuenta que hicimos fue: (+3) . (–2) = –6 ⟹ MAS por MENOS nos dio MENOS

Caso 3: – **Por +**
La Persona venía caminando Para Adelante ¿En qué baldosa estaba antes de dar los últimos 3 pasos?
La cuenta es sencilla: Como por cada paso recorrió hacia adelante 2 Baldosas:
En 3 pasos recorrió: 3 x 2 = **6 Baldosas hacia ADELANTE**. O sea que estaba en la baldosa número –6



La cuenta que hicimos fue: (–3) . (+2) = –6 ⟹ MENOS por MAS nos dio MENOS

Caso 4: – **Por** –
La Persona venía caminando Para Atrás ¿En qué baldosa estaba antes de dar los últimos 4 pasos?
La cuenta es sencilla: Como por cada paso recorrió hacia atrás 2 Baldosas:
En 4 pasos recorrió: 4 x 2 = **8 Baldosas hacia ATRAS**. O sea que estaba en la baldosa número 8



La cuenta que hicimos fue: (–4) . (–2) = 8 ⟹ MENOS por MENOS nos dio MAS

<u>Veamos entonces algunos ejemplos de multiplicación de números enteros</u>:

Ejemplo de Multiplicación: (−6) . (−5) =
- El signo: Menos por Menos = **+**
- El Valor Absoluto: 6 . 5 = **30**

⟹ (−6) . (−5) = + 30

Ejemplo de División: (−42) : (+7) =
- El signo: Menos dividido Mas = **–**
- El Valor Absoluto: 42 : 7 = **6**

⟹ (−42) : (+7) = −6

Cuando multiplicamos "los números" en realidad multiplicamos sus valores absolutos.

Separando en Términos: Vamos a ver que es separar en términos.

Cundo tenga que separar en términos, tengo que prestar atención a los signos "+" y "–"

Los signos + **y** – SEPARAN TÉRMINOS

Veamos un ejemplo: **9 . 6 + 3 – 2 . 4 =**

¿Por dónde empiezo a resolver? ⇒ **Primero separo en términos**

Como ya sabemos que los signos **+** y **–** separan términos: Quedan 3 términos

Después de separar en términos resolvemos "término por término"

$$\underbrace{9\cdot 6}_{1}-\underbrace{3}_{2}+\underbrace{2\cdot 4}_{3}=$$
$$54 - 3 + 8 =$$

Ahora hay 2 maneras distintas de resolver y llegar al resultado final:

Agrupando positivos y negativos:

$$54 - 3 + 8 =$$
$$\underbrace{54 + 8}_{\text{Positivos}} - \underbrace{3}_{\text{Negativos}} =$$
$$62 - 3 = 59$$

Agrupando de a 2 números:

$$\underbrace{54 - 3}_{} + 8 =$$
$$51 + 8 = 59$$

Paréntesis ( ) Corchetes [ ] y Llaves { }: Por lo general, por cuestiones de notación, a la hora de escribir cálculos como los que vamos a resolver, se sacan Primero los Paréntesis ( ), luego los Corchetes [ ] y por último las Llaves { }

Método para Suprimir o Sacar ( ) [ ] y { }

SI Delante del paréntesis [o { **hay un signo "mas"** (+) — "Saco" el paréntesis, corchete o llave, y dejo todo igual.

SI Delante del paréntesis [o { **hay un signo "menos"** (-) — "Saco" el paréntesis, corchete o llave, y cambio TODOS los signos de los números que hay dentro

Ejemplo, Resolvamos: $8-\{9+[10-(2-6)+7+2-4]+1+12\}=$

Primero, sacamos los paréntesis: Como delante del paréntesis hay un "**menos**", le **cambiamos** el signo al +2 y al –6 ⟹ $8-\{9+[10-2+6+7+2-4]+1+12\}=$

Sacamos ahora los corchetes. Como delante del corchete tenemos un signo "+" lo sacamos y no cambiamos nada. ⟹ $8-\{9+10-2+6+7+2-4+1+12\}=$

Por último sacamos las llaves... Como delante tiene un signo "–", vamos a cambiar todos los signos "de adentro" de la llave. ⟹ $8-\{9+10-2+6+7+2-4+1+12\}=$

$$8-9-10+2-6-7-2+4-1-12=$$

Ahora resolvemos las cuentas, agrupando positivos y negativos

$$\underbrace{8+2+4}_{\text{Positivos}}\underbrace{-9-10-6-7-2-1-12}_{\text{Negativos}}=$$
$$14 - 47 = \boxed{-33}$$ Resultado final !!!

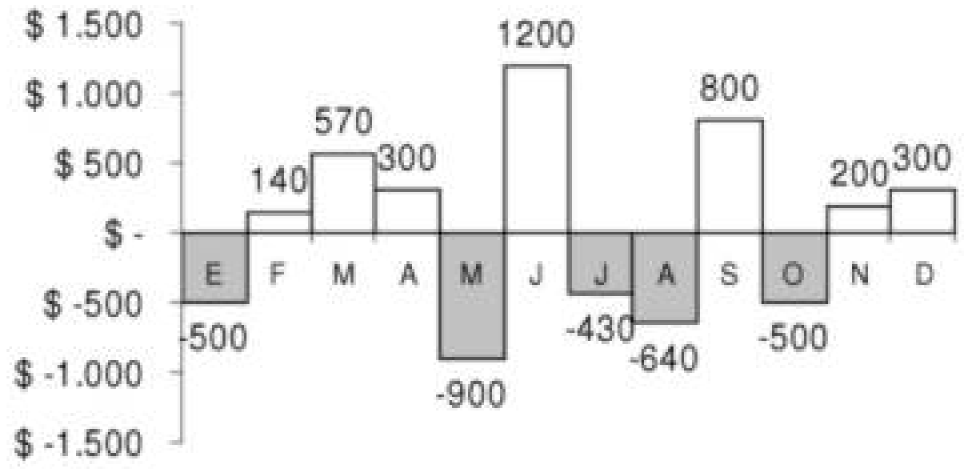
Nota: Otra Manera de hacer estos cálculos, es ir resolviendo antes lo que hay dentro de los paréntesis y luego sacar los paréntesis, y lo mismo con los corchetes y las llaves.

- Resolver los siguientes cálculos de sumas y restas:

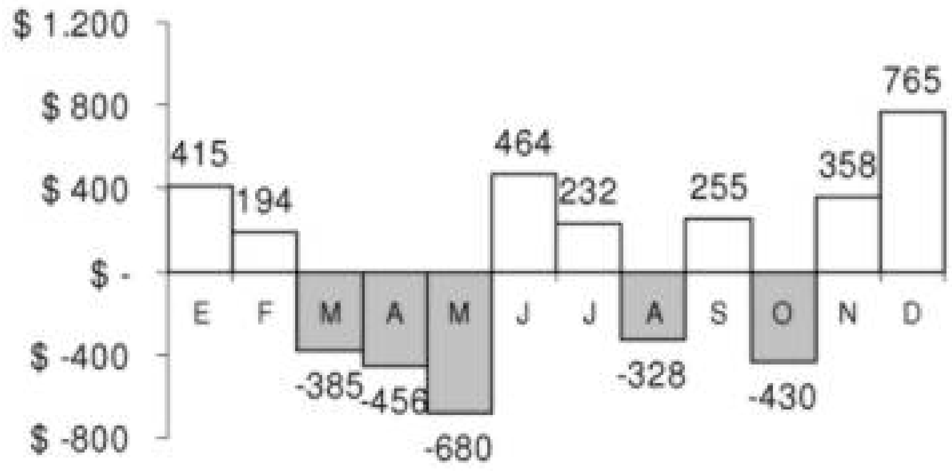
1) 13 −17 + 24 =
2) 7 − 23 + 15 −36 =
3) 4 −52 − 63 + 39 =
4) −2 − 35 + 3 −7 −2 =
5) 3 −18 −12 + 5 + 3 =
6) −15 −9 + 2 + 7 −13 =
7) 2 −31 + 89 − 39 − 8 =
8) 8 −5 − 34 + 15 − 1 =
9) 2 − 6 − 7 − 5 + 3 + 6 =
10) 12 −3 + 5 −8 + 1 − 10 =
11) −32 − 1 − 17 − 10 =
12) −3 − 1 − 5 + 15 − 12 =
13) − 1 + 36 − 45 − 11 −5 =
14) −7 − 52 + 7 + 28 − 9 =
15) −33 − 7 − 19 + 39 + 26 =
16) −15 + 12 + 3 + 2 − 2 =
17) − 6 + 7 − 8 − 5 + 12 − 17 =
18) − 9 − 35 + 22 − 9 + 8 − 11 =
19) 48 −8 + 31 − 9 + 7 −9 −8 =
20) −27 −11 +16 + 67 +15 −31 =

- Los siguientes Gráficos representan las ganancias o pérdidas de una determinada empresa por mes.

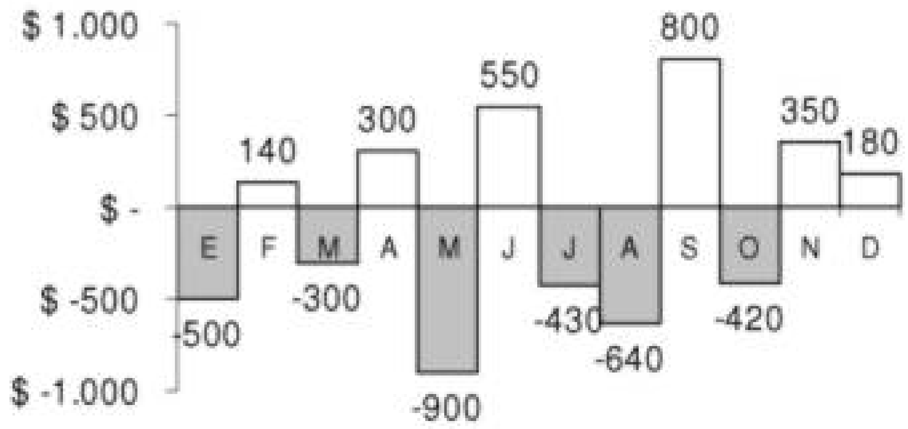
21)



22)



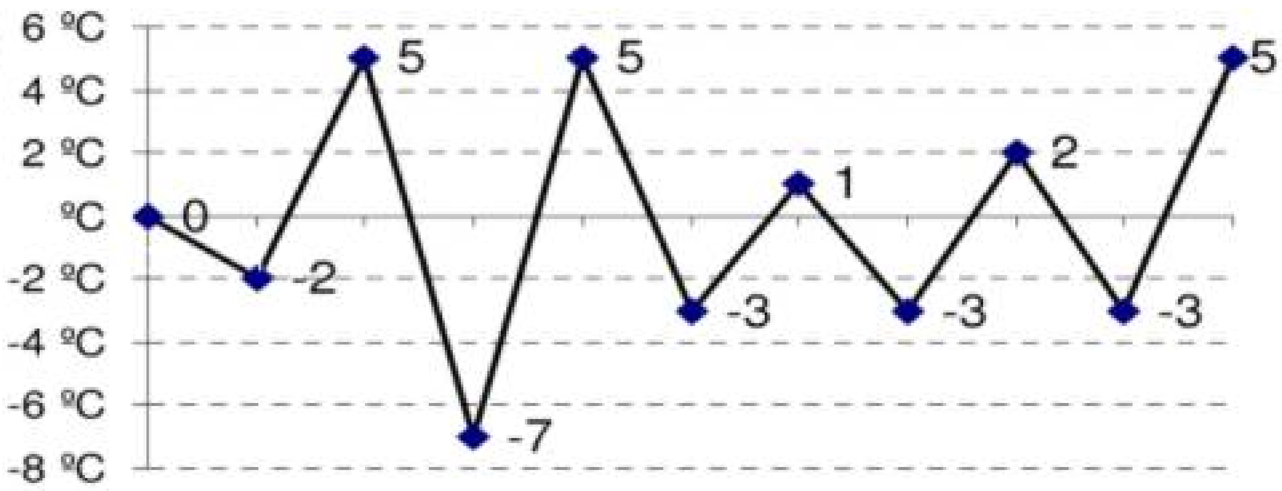
23)



Cada barra es la ganancia o pérdida mensual. Si la barra es positiva, es ganancia y si es negativa es pérdida. Calcular en cada caso, la ganancia o pérdida anual.

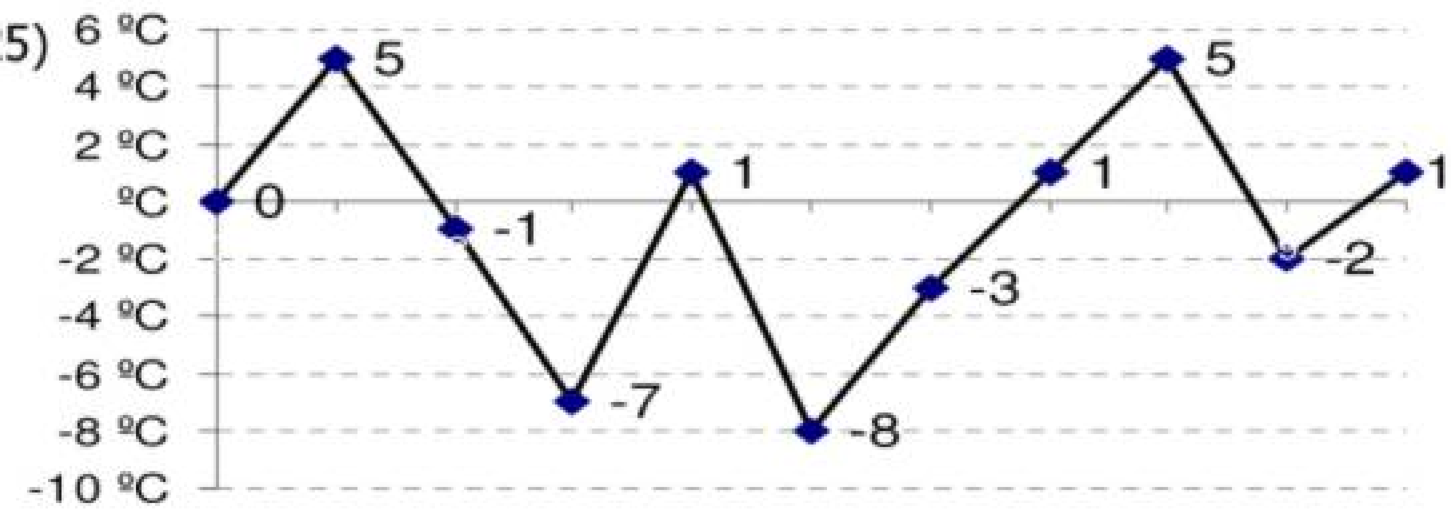
- En dos ciudades del País, se tomó nota de las variaciones de temperatura cada 60 minutos de diferencia y se hizo esto durante 10 horas. En el momento inicial la temperatura en ambas ciudades era de 25 ºC. Los datos de variación de temperatura se volcaron en los gráficos siguientes. Calcular con estos datos, cuál fue la temperatura de cada ciudad al finalizar las mediciones.

24)



Recuerden que los datos de los gráficos son y representan variaciones, no confundir con valores de temperaturas.

25)



- **Suma y Resta de enteros** - <u>Realizar los siguientes cálculos</u>:

26) + 4 − (+5) =
27) − 3 + (− 8) =
28) − 9 − (− 7) =
29) + 5 + (− 11) =
30) − 4 + (− 9) =
31) + 3 − (− 5) =
32) − 8 + (−8) =
33) + 8 + (− 8) =
34) + 8 − (− 8) =
35) − 8 − (− 8) =
36) + 0 − (− 1) =
37) 0 + (− 4) =

➢ **Producto y División de enteros** - Realizar los siguientes cálculos:

38) $+ 5 . (-3) =$

39) $-2 . (+4) =$

40) $-5 . (-6) =$

41) $+3 . (+7) =$

42) $-9 . (-6) =$

43) $-5 . (+8) =$

44) $+2 . (-4) . (-5) =$

45) $-2 . (-4) . (-5) =$

46) $-2 . (+4) . (+5) =$

47) $+7 . (-3) . (-4) =$

48) $-7 . (+3) . (-4) =$

49) $-7 . (-3) . (+4) =$

50) $+7 . (-6) : (-2) =$

51) $-5 . (-6) : (+2) =$

52) $+5 . (-6) : (+2) =$

53) $-5 . (+6) : (-2) =$

54) $-3 . (-4) + 5 =$

55) $+3 . (-4) + 5 =$

56) $-3 . (-4) + (-3) =$

57) $-8 . (+3) - (-2) =$

58) $+9 . (-4) + (-7) =$

59) $+7 . (-9) - (-8) + 1 =$

60) $-5 . (-3) + (-8) + (-1) =$

61) $+6 . (-5) - (-8) - 3 =$

➢ Separar en términos y resolver:

62) $-2 + 5 . (-3) =$

63) $7 + 3 . (-5) =$

64) $7 - 2 . (-4) =$

65) $5 + (-3) . 2 =$

66) $6 - (-2) . 4-2 =$

67) $5-(-3) . 7-4 =$

68) $-4 . 6 - 3 =$

69) $-5 . 4 - 7 =$

70) $-3 . 5 + 8 =$

71) $-6 . 6 + 39 =$

72) $-4 . (-6) -3 . 4 =$

73) $-6 . (-4) -8 . 3 =$

74) $-5 . (-7) -5 . 6 =$

75) $-7 . (-3) -4 . 2 =$

76) $4 . (+5) -6 . 4 +4 =$

77) $2 . (-5) +3 . (-5) -(-25) =$

78) $6 . (-3) -7 . (-4) -5 +3 =$

79) $5 . 2 +8 . (-2) + 8 - 2 =$

80) $4 . (-5) -5 . (-6) -14 =$

81) $-2 . (-4) -4 . 5 -7 +15 =$

➢ Ejercicios Combinados con Sumas, Restas, productos y Divisiones:

82) $3 - [3-(-1) -2 +3 . (-1)]$

83) $7 - \{ 6 + [-1 + 7] - 3) \}$

84) $- 5 + \{- [- 6 + 9] \} + 8$

85) $- 2 . \{-4 + [- 4 + (-4) : (-2)] \} +1$

86) $(-7 + 2 . 4) + (-4) : (-4) - (-8) . 2$

87) $- [1 + (-9) : 3] - (-1) : (-3 . 3 +8)$

88) $-12 + -4 . (-1) + 3 . (-10) + 6$

89) $-3 - 6 . (-1) . 5 -12 : (+3) - 24$

90) $-2 -3 . \{1 - 4 + (-5) . [- 13] +6\}$

91) $20 - 4 . (-6) - 2 . 9 - (-2) - 18$

92) $3 . (-2) - [-3 . 8 + 28] - (-3) + 10$

93) $-6 . 3 - 5 . (-4) -1 +9 : [-3] . (-2)$

➢ Sumas y Restas con paréntesis, corchetes y llaves:

94) $12 -11 - \{ 4 - [-8 + (-10) - 7] - 13 \} - 7$

95) $5 - 18 + \{ 2 - [-11 +3 - (-7) +3] +8 \} + 4$

96) $4 - \{ - 4 - [- 9 -7 - (- 8 - 3) - 4] + 2 \} - 1$

97) $-5 + \{ - 9 - [- 9 + (- 9 +5) + 5] + 5 \} - 8$

98) $- 11 - \{ +5 - [- 11 - (- 14) - 9] - 17 \} + 3$

99) $- 6 + 2 - \{ - 6 - 7 + 2 - [- 8 - 3] - 2 \} - 3$

100) $3 - \{ +5 - [- 11 - (- 2 - 1) + 2] + 8 \} + 9$

101) $- 6 - \{ - 17 - [6 - (-2 + 5) - 5] - 8 \} - 2$

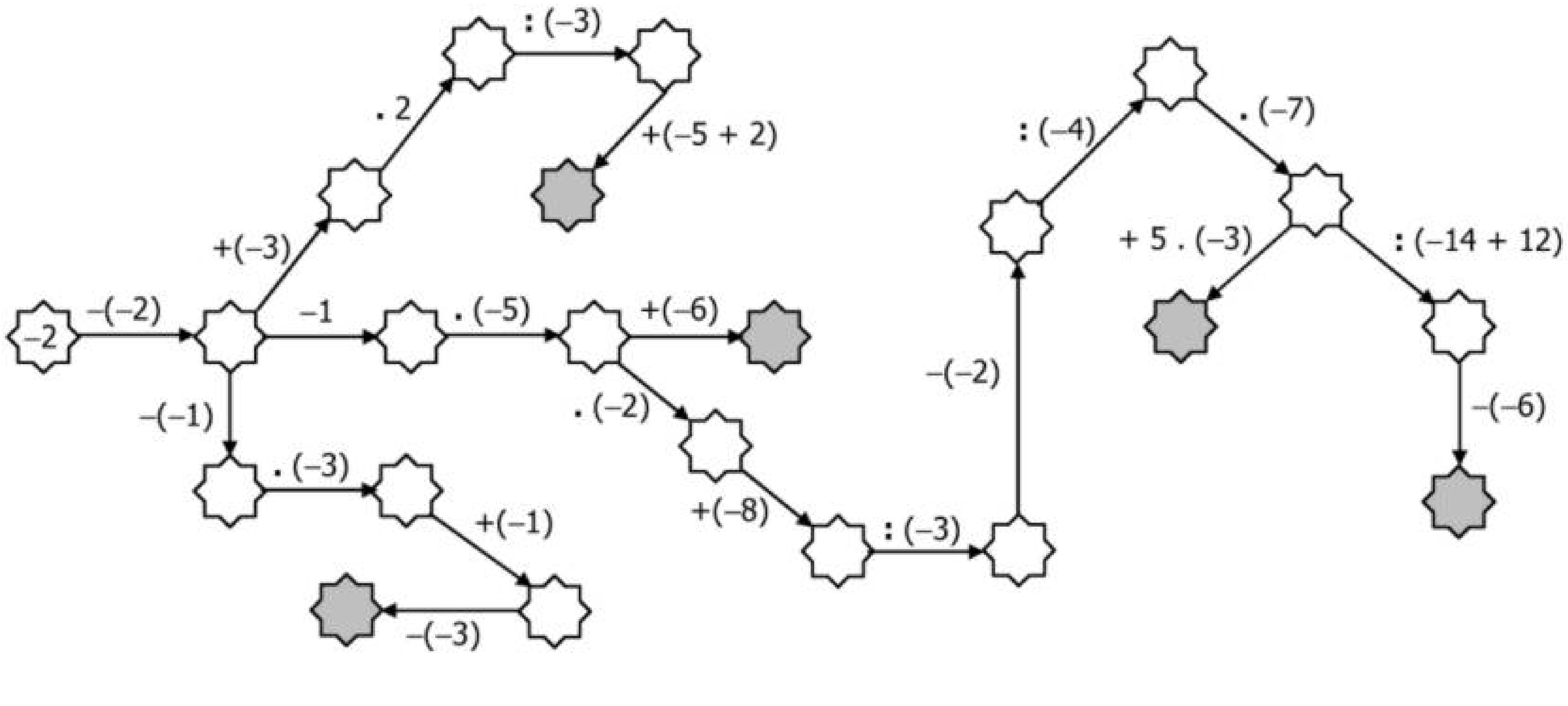
102) $- 2 + \{ - 11 +2 - [- 3 - 4 + 1] - 8 \} + 1$

103) $- 9 - \{ 1- [- 2 + 2 - 10] - 2 \} - 5$

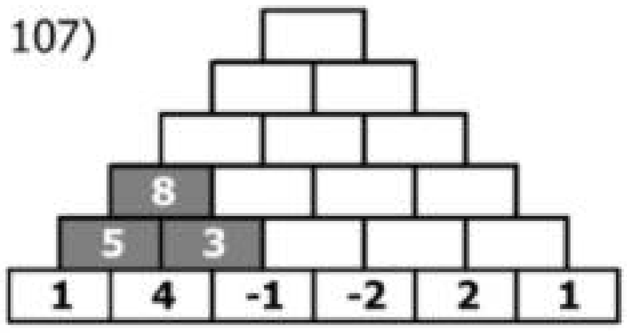
104) $- 16 + 4 + \{ - 4 - [+ 2 - 8 + 10] - 5 \} + 1$

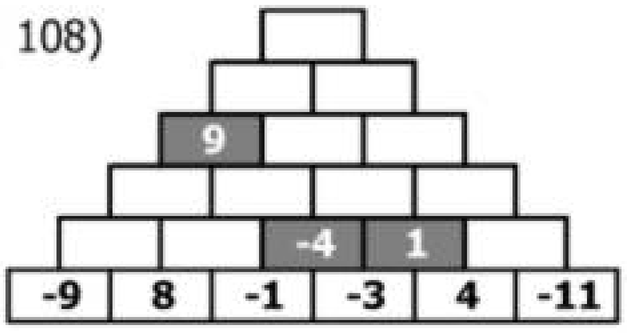
105) $- 2 + 3 -1 - \{ - 1 + [- 5 - 1] - 5 \} - 6$

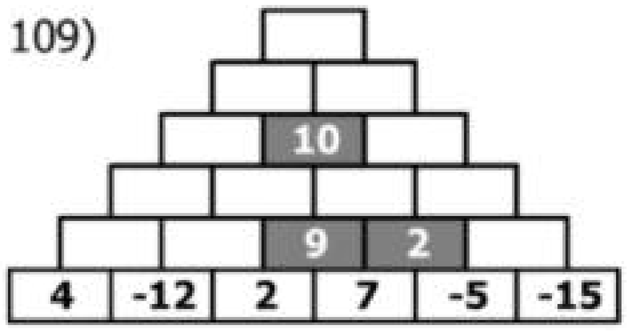
106) Completar el siguiente Circuito:
Y verificar que las estrellas pintadas tengan los mismos resultados

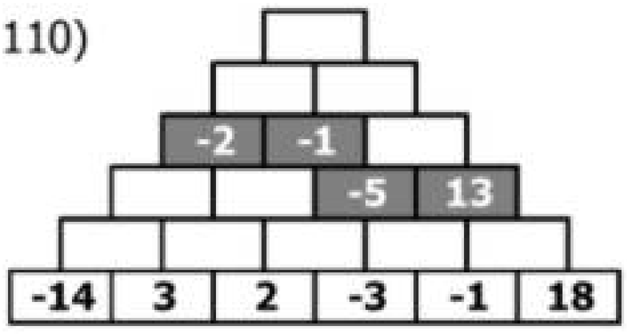


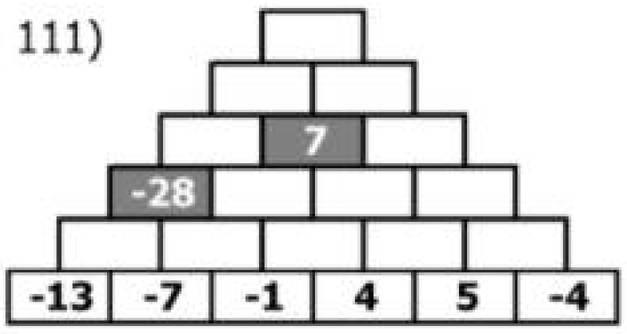
➢ Completar las siguientes pirámides de la siguiente manera hasta llegar a la cima. Cada par de ladrillos que están uno al lado del otro se suman los números de estos ladrillos y su resultado se coloca encima de estos dos ladrillos.
Te dejamos algunos valores completados para que vayas verificando que vas bien y para facilitar un poco el ejercicio.

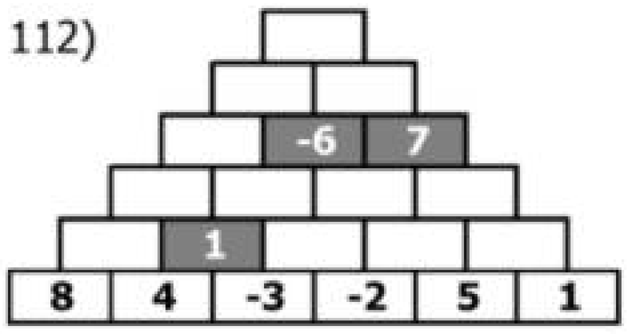
107)


108)


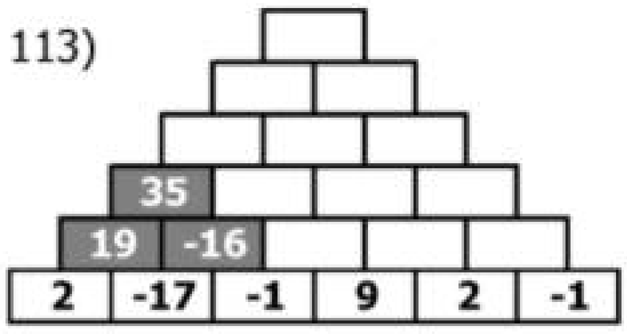
109)


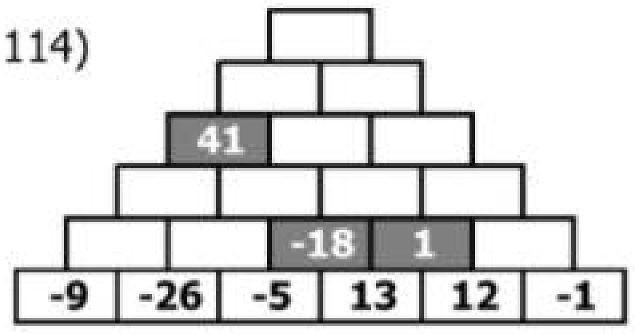
110)


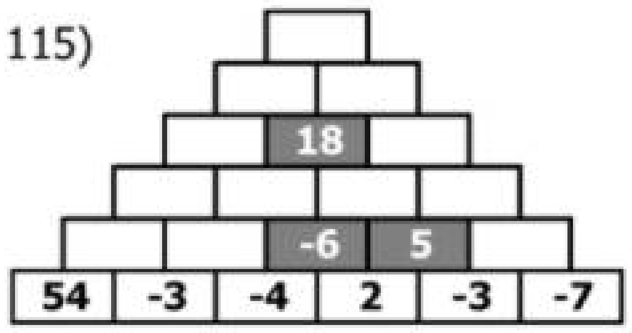
111)


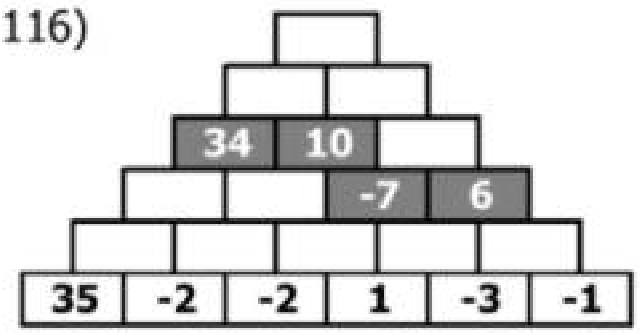
112)


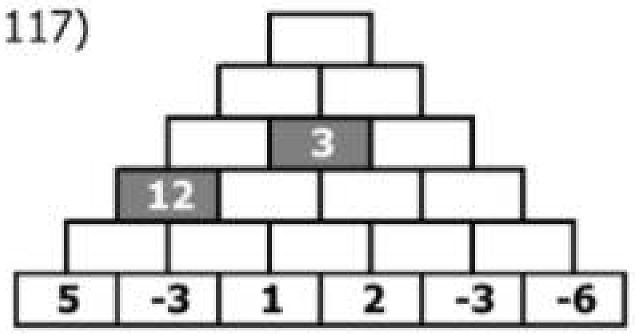
Estas otras pirámides son similares. Sólo que en lugar de sumar los ladrillos contiguos, hay que restarlos
(El de la Izquierda menos el de la derecha = El ladrillo que está por encima)

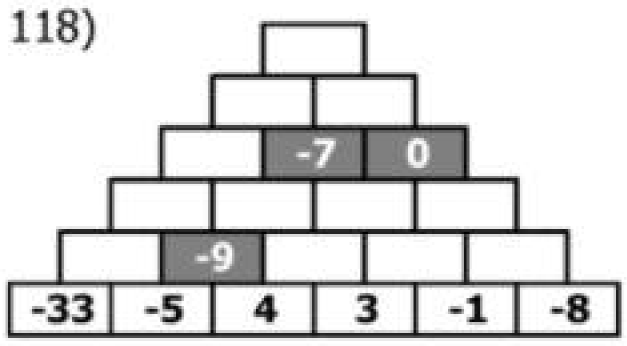
113)


114)


115)


116)


117)


118)


119) Ordenar **de menor a mayor** los siguientes números enteros: -4 8 -2 9 0 1 -1 -6 7 y 3

120) Ordenar **de mayor a menor** los siguientes números: -5 3 -12 4 0 1 -2 -6 5 -3 y 2

121) Ordenar **crecientemente** las temperaturas: 16ºC; -12ºC; 17ºC; -18ºC; 0ºC; 13ºC; -17ºC; 9 ºC y -10ºC

122) Ordenar **en forma decreciente**: 15ºC -13ºC 11 ºC -19 ºC 6 ºC -3 ºC -18ºC 10 ºC y -9ºC

123) Ordenar **cronológicamente** los siguientes años: 1.208 dC 756 aC 915 dC 1009 aC 205 dC 307 aC

124) Completar con el signo "<" o ">" Según corresponda

a)	-4	-13	f)	-3	5	k)	-2	1	p)	-1	9	u)	12	9
b)	-6	3	g)	11	17	l)	9	6	q)	8	13	v)	1	-4
c)	-6	15	h)	-1	3	m)	13	4	r)	-11	-6	x)	-5	-9
d)	-5	8	i)	0	7	n)	5	-4	s)	10	-11	y)	15	23
e)	15	0	j)	-4	-8	o)	-4	-2	t)	-4	14	z)	9	-1

125) Dada una temperatura inicial, calcular la temperatura final, luego de producirse los enfriamientos y calentamientos de los siguientes cuadros:

Temperatura Inicial	Enfriammiento de 15ºC	Calentamiento de 16 ºC
15 ºC		
-18 ºC		
-2 ºC		
55 ºC		
-13 ºC		

Temperatura Inicial	Enfriammiento de 15ºC	Calentamiento de 16 ºC
17 ºC		
-1 ºC		
0 ºC		
-12 ºC		
28 ºC		

✓ <u>Problemas</u>:

126) Una persona nació en el año 123 antes de Cristo y murió en el año 87 antes de Cristo ¿Cuántos años vivió?

127) Una persona que nació en el año 22 antes de Cristo y murió en el año 13 después de Cristo ¿Cuántos años vivió?

128) Supongamos que hacemos un experimento en el que logramos congelar una sustancia que inicialmente estaba a 129 ºC y la llevamos a 52 ºC bajo cero, ¿Cuántos grados centígrados tuvimos que enfriar a la sustancia?

129) Supongamos que en otro experimento calentamos una sustancia que se encontraba a 107 ºC bajo cero y la llevamos a 34 ºC ¿Cuántos grados centígrados tuvimos que calentar esta vez a la sustancia?

130) El primer día de Enero en Comodoro Rivadavia, la temperatura media fue 8 grados bajo cero, el 2 de enero aumentó 3 grados la temperatura promedio, el 3 de enero bajó 2 grados, el 4 de enero volvió a subir, esta vez 7 grados, el 5 de enero, subió 6 grados más y el 6 de enero permaneció constante. ¿Qué temperatura promedio hubo el 6 de enero?

131) José le debía al almacenero $3, le pagó $5 y dejó lo que quedaba a cuenta a su favor, después llevó durante 4 días una latita de gaseosa que vale 1$, y un paquete de galletitas del mismo valor, cada día...luego le pagó otros $2.. ¿Le debe plata José al almacenero todavía? ¿Cuánta?

✓ Completar los recuadros en blanco, según las operaciones indicadas en las flechas:

132) $\boxed{-16} \xrightarrow{+19} \square \xrightarrow{-11} \square$

133) $\boxed{-36} \xrightarrow{:(-4)} \square \xrightarrow{+12} \square$

134) $\boxed{+2} \xrightarrow{.(-7)} \square \xrightarrow{-3} \square$

135) $\boxed{-1} \xrightarrow{-9} \square \xrightarrow{:(-5)} \square$

136) $\boxed{-6} \xrightarrow{-8} \square \xrightarrow{+15} \square$

137) $\boxed{-4} \xrightarrow{+9} \square \xrightarrow{:(-5)} \square$

138) $\boxed{-2} \xrightarrow{-3} \square \xrightarrow{:5} \square$

139) $\boxed{-4} \xrightarrow{.(-3)} \square \xrightarrow{-(-7)} \square$

Completar los óvalos, con los números (positivos o negativos) **que hay que restar, sumar, multiplicar o dividir** *(según se indica en cada óvalo)* **para llegar al número indicado en la estrella siguiente:**

140) $3 \xrightarrow{+\dots} 9 \xrightarrow{+\dots} 2 \xrightarrow{+\dots} -1$

141) $2 \xrightarrow{-\dots} 6 \xrightarrow{-\dots} 4 \xrightarrow{+\dots} 1$

142) $5 \xrightarrow{-\dots} -1 \xrightarrow{+\dots} 3 \xrightarrow{-\dots} -4$

143) $-1 \xrightarrow{+\dots} 2 \xrightarrow{-\dots} 4 \xrightarrow{+\dots} 3$

144) $-2 \xrightarrow{+\dots} 2 \xrightarrow{-\dots} -1 \xrightarrow{-\dots} -1$

145) $-48 \xrightarrow{:\dots} -8 \xrightarrow{:\dots} +2 \xrightarrow{\cdot\dots} -6$

146) $-4 \xrightarrow{\cdot\dots} +20 \xrightarrow{:\dots} +5 \xrightarrow{\cdot\dots} -15$

147) $+81 \xrightarrow{:\dots} -9 \xrightarrow{:\dots} +3 \xrightarrow{\cdot\dots} -6$

148) $+2 \xrightarrow{\cdot\dots} -14 \xrightarrow{:\dots} +7 \xrightarrow{\cdot\dots} -42$

149) $-8 \xrightarrow{:\dots} +8 \xrightarrow{:\dots} -2 \xrightarrow{\cdot\dots} +2$

Completar la siguiente tabla, con las operaciones indicadas:

Fijate que la expresión: "a−b−c" da lo mismo que "a−c−b"

Pero sin embargo, "a−b−c" es distinto a "a−(b−c)"

Y además "a−b−c" que es lo mismo que "a−c−b" es distinto a "a−(c−b)"

¿Te animás a deducir por qué pasa esto?

	a	b	c	a−b−c	a−(b−c)	a−(c−b)
150)	2	−3	−4			
151)	−2	6	−3			
152)	1	−4	−1			
153)	8	−3		10		
154)	9		−4		12	
155)	5	−5		9		
156)		4	−6			3

157) Supongamos un juego de dados con las siguientes reglas:

a- Cada jugador tira de a dos dados.
b- Los números pares son positivos y los impares son negativos
c- El puntaje en cada tiro es igual al producto de los números que saca el jugador (tener en cuenta sus signos!).
d- El partido consta de 10 tiros y gana el jugador con mayor puntaje al final.

Mariano y Analía juegan un partido y los tiros de ambos son:

¿Quién ganó el juego?

¿Qué puntaje final obtuvo cada uno?

	1º Tiro		2º Tiro		3º Tiro		4º Tiro		5º Tiro	
	Dado 1	Dado 2	Dado 1	Dado 2	Dado 1	Dado 2	Dado 1	Dado 2	Dado 1	Dado 2
Mariano	2	3	1	3	2	5	2	2	5	4
Analía	3	5	4	4	3	4	6	3	4	2

	6º Tiro		7º Tiro		8º Tiro		9º Tiro		10º Tiro	
	Dado 1	Dado 2	Dado 1	Dado 2	Dado 1	Dado 2	Dado 1	Dado 2	Dado 1	Dado 2
Mariano	1	3	3	5	1	6	4	1	3	3
Analía	3	5	5	6	2	3	2	3	2	4

Yo propongo, a criterio del profesor, una evaluación de matemática basada en este juego. Se divide a la clase en dos equipos (supongamos varones y mujeres) y cada equipo hace sus 10 tiros, todos los alumnos van anotando en una planilla los resultados y luego cada alumno hace su prueba, que consta de calcular el puntaje de los dos equipos.

158) Juego de Ingenio: La siguiente figura, se puede armar de varias formas utilizando las partes que tenemos a su izquierda, pudiendo repetir varias veces cualquier parte. El valor que tiene cada parte es, digamos su puntaje y cuando armen con esas partes la figura, el valor de la figura será la suma de los puntajes de sus partes. El objetivo es armar la figura de modo tal que la suma de sus partes sea (−49).

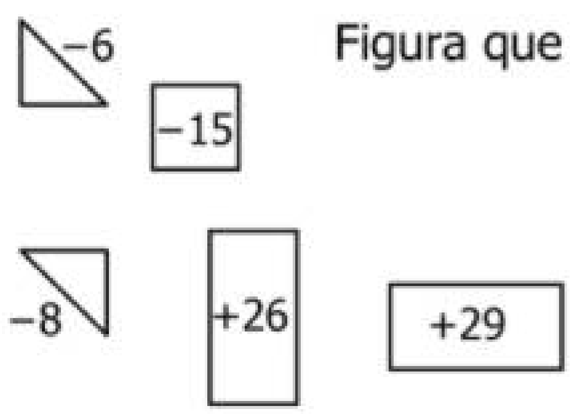
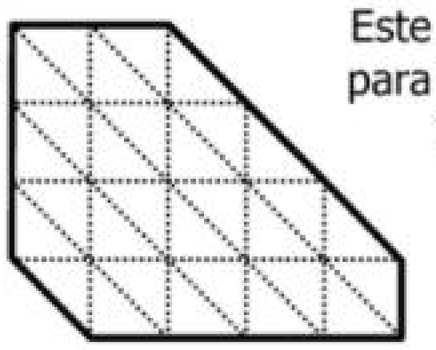
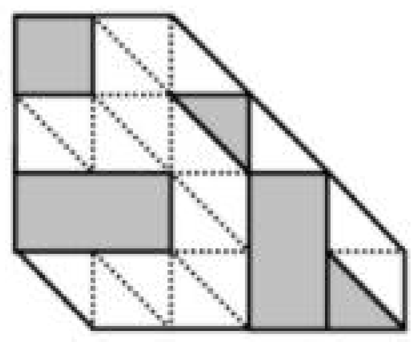


Figura que hay que armar:



Este gráfico es solo un ejemplo para que vean como se pueden ir poniendo las piezas:



Observación: Hay dos formas distintas de formar la figura, mas allá del orden en que se pongan las partes. Es decir, hay dos soluciones, sin contar todas las combinaciones que surgen de intercambiar las piezas de lugar.

159) Completar el siguiente cuadro:

Por	−2				
4	−8	−16			
			−15		
		20		5	
6			30		
				8	
	−14				
			−10		0

Resolver:

160) $(-3)\cdot 5-\sqrt{4}.(-3)+6-1=$

161) $-5-3\cdot 2-2^2.(-1)+5-2\cdot(-3)=$

162) $-3^2-6\div 3-2.5-3\cdot(-7)=$

163) $-5-3^3\div 3-5.(-3)+4=$

164) $(-1)\cdot 4+\sqrt{9}\ .5-8=$

165) $3\cdot(-2)+1-3.(-1)+2=$

166) $-7-4^3\div 8-6.(-5)-9=$

167) $(-3)\cdot(-2)-\sqrt{1}\ .4-1^3=$

168) $-2\cdot(-1)+2-1.(-2)+1=$

Realizar las siguientes sumas algebraicas con potencias:

169) $3^2-2^5+4^3-6^2+(-1)^2=$

170) $3^2-4^3+5^4-6^5-7^4-8^4-9^3=$

171) $-4^5-(-2)^6+(-5)^4-(-6)^3-(-7)^3=$

172) $5^5-(-6)^6-(-7)^5-(-4)^4+13^4-11^3=$

✓ Ejercicios Combinados con Potencias y Raíces de Números Enteros:

173) $(-2)\cdot\left[12-8.(-3)+(-4)\right]-1=$

174) $\left\{3+\left[(-4)\cdot\left(4\cdot(-2)^2-13\right)+1\right]\right\}\div(-4)=$

175) $\left\{3+(-4)\cdot\left[3^2-\left(\sqrt{16}-1\right)\right]+9\right\}\div 4=$

176) $-1-\left\{-6+12\div\left[3^2-\left(4+(-1)^3\right)\right]-1\right\}=$

177) $-5-\left\{2-2^2\div\left[1^2+\left(2-(-1)\right)\right]\cdot 2\right\}\div 3=$

178) $1+\left\{-1+1\div\left[-(-1)^2-\left(-1+(-1)^3\right)\right]-1\right\}=$

179) $-3-(-1)\cdot\left[(-5)^2-(-3-1)\cdot(-2)\right]=$

180) $-2-(-3)\cdot\left[(-4)^2-(-2+1)\cdot(-3)-3^2\right]=$

181) $2^3-\sqrt[3]{-2+\left[-5+\left(0^2-2\right)+1\right]}=$

182) $\sqrt{-2+6-\left(-2\cdot3+2^2\right)^0-(-1)^3}=$

Más Ejercicios combinados con potencias y Raíces:

183) $-(-1)^3-\sqrt{-2^2+5-\left(-2^2+2\right)^3}=$

184) $(-4)^3-(-2)^5-(-2)^2\cdot\left(-2^4-(-2)^3\right)^3\div4^3=$

185) $\sqrt{\sqrt{(-5)^2-(-5)^2\cdot\left(-2^3\right)}-(-2)^3\div\left(3^2-1\right)}=$

186) $\sqrt{(-2)^0+(-2)^2\cdot\sqrt{(-3)^3-(-4)^3-1}}=$

187) $\sqrt{-2\cdot(-4)^3-(-2)^5\div4^2-5\cdot\sqrt{(-3)^2+(-3)^3\cdot\left(3^4-4^3-4^2\right)^2}}=$

188) $-1\cdot(-2)^3-\sqrt{(-3)^5\div\left(-2^3+6^2-(-5)^2\right)}\cdot\sqrt{1-7\cdot\sqrt{3^2+3^3-\left(4^3-4^2-2\cdot3^3\right)^2}}=$

Unir Con Flechas las expresiones que dan el mismo resultado:

189) $-\sqrt{-(-2)^3\cdot\left(-2^3+6^2\right)+1}=$

190) $\sqrt{5^3-2\sqrt{-(-2)^3-2^2}}=$

191) $\sqrt{-7^5-(-4)^7+8^3+(-2)^3}$

192) $\sqrt{19^2-(-3)^4+(-3)^2}+1$

193) $\sqrt{-6^4+9^4+10^4+(-19)^2-1^{19}}$

194) $\sqrt[5]{6^4+6^2+(-11)^3-(-1)^6}$

a) $(-1)^2+\sqrt{7^3-3^5}$

b) $\sqrt{11^3-(-6)^4+17^2}$

c) $\sqrt{3^2+(-4)^2}+(-3)^2+1=$

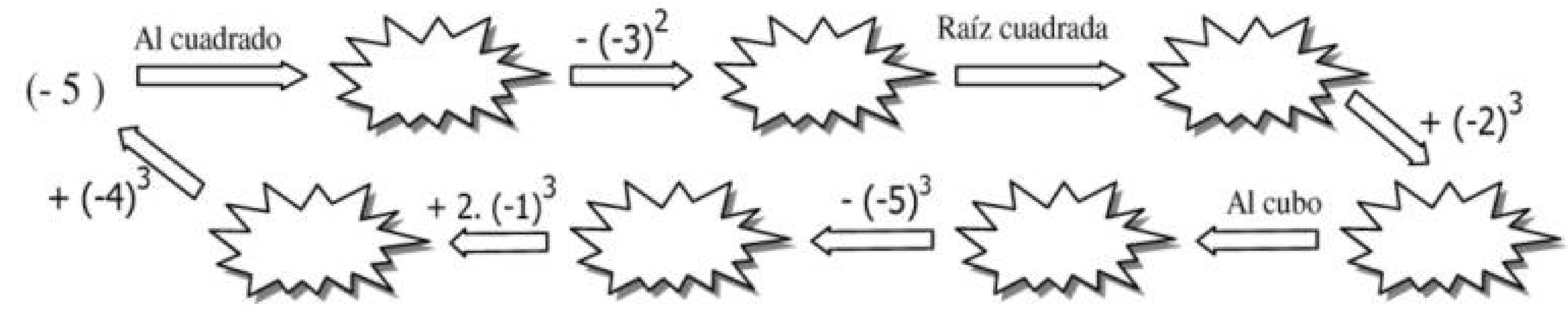
d) $\sqrt[3]{9^4-11^3-11^2-17^3-14^2}$

e) $\sqrt{6^4+(-6)^5+(-3)^8}$

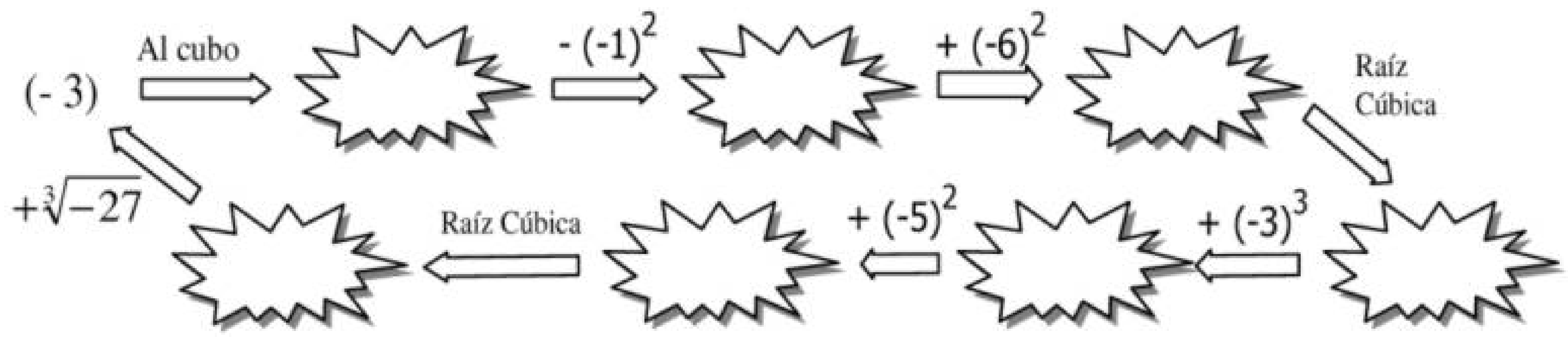
f) $-(-5)^3$

195) Completar los recuadros aplicando las operaciones correspondientes en cada caso y verificar que al final de cómo resultado el mismo número del que partimos:

a)



b)



✓ Problemas:

196) Buscar un número entero cuya raíz cúbica dé: $-(-2)^2$

197) Buscar un número, al cual, sumándole la raíz cúbica de (–8), dé por resultado la raíz cúbica de (– 64).

198) ¿Cuántos números enteros hay comprendidos entre 7 y la raíz cúbica de –8? (contando al cero)

199) ¿Cuántos números enteros hay comprendidos entre –27 y la raíz cúbica de –27?

200) Si a un número entero lo elevo al cubo y le sumo la mitad del cuadrado de –4, obtengo como resultado –19. ¿De qué número entero se trata?

201) Un crucigrama de números: Hay que ir llenando los espacios, sabiendo, en las filas (horizontales) las sumas de los cuadrados y en las columnas (Verticales) la suma de los cubos

					Sumatoria de los cuadrados de cada fila
-5	-3	-4	-7		124
-3	6		8	-2	117
7		7		-4	127
		-6	-3		107
-6	-4			-2	106
-26	-27	-70	9	11	Sumatoria de los cubos de cada columna

Este Repaso nos va a servir parea los próximos ejercicios // Recordemos que:

Cuando se **Multiplican** dos números iguales que están elevados al mismo exponente:
Los exponentes se Suman ⟹ $n^a \cdot n^b = n^{a+b}$

Cuando se **Dividen** dos números iguales que están elevados al mismo exponente:
Los exponentes se Restan ⟹ $n^a \div n^b = n^{a-b}$

Cuando un número está elevado a un exponente, y el resultado está elevado a otro exponente: Los exponentes se Multiplican ⟹ $\left(n^a\right)^b = n^{a \cdot b}$

➢ Ejercicios Combinados con Propiedades de las potencias:

202) $9 \div \left[\left(2^5 . 2^{-3}\right) + 5 \right] + \left((-2)^2 \right)^3 =$

203) $-\left(3^5 \div 3^2\right) + \left((-2)^3 \right)^2 =$

204) $2^4 \div 2^2 + 2^9 \div 2^7 =$

205) $3^5 \cdot 3^{-3} - 2^5 \div 2^2 =$

206) $2^{14} \cdot 2^{-11} - (-2)^{15} \cdot (-2)^{-13} =$

207) $-2 + 2^5 \div 2^4 - 2 =$

208) $\left(2^4\right)^2 \cdot 2^{-4} - 13 =$

209) $\left(3^5\right)^6 \div \left(3^{13}\right)^2 - 2 \cdot 3^3 =$

210) $\left(2^5\right)^3 \div \left(2^4\right)^3 - \left(2^4\right)^0 =$

211) $\left(7^8\right)^6 \div \left(7^{12}\right)^4 + 7^{12} \div 7^{11} =$

➢ Unir con flechas las operaciones con sus resultados:

212) $-3+5-2 \cdot 2-(-5)\cdot(-2)=$

213) $2-4+3 \cdot 5+(-4)\cdot(-3)=$

214) $-6\div 3-1 \cdot 4-(-1)-1\cdot(-4)=$

215) $-4-3-2 \cdot (-5)-(-1)\cdot 2-(-3)=$

216) $-3-5+2 \cdot 2+(-5)\cdot(-2)=$

217) $-8\div(-2)+3 \cdot (-2)-(-3)\cdot(-2)=$

a) $(-1)^{11}$

b) $(2)^3$

c) $(-5)^5 \div (-5)^3$

d) $(-2)^3$

e) $-(-2)^7 \div (-2)^5 + (-2)^3$

f) $(2)^3 - 2$

En un edificio de matemáticos que tiene 100 pisos hay un ascensor con solamente 5 botones:

- Botón Azul, sube 2 pisos
- Botón Blanco, sube 3 Pisos
- Botón Verde, sube 7 Pisos
- Botón Amarillo, baja 4 Pisos
- Botón Rojo, baja 5 Pisos

Todas las mañanas el ascensor está a primera hora en Planta baja. Responder entonces en que piso se encuentra a la noche si la cantidad de botones de cada color que se han presionado durante el día fueron:

218) 15 Veces el Amarillo, 18 Veces el Rojo, 9 Veces el Verde, 27 Veces el Azul y 12 veces el Blanco.

219) 39 Veces el Amarillo, 55 Veces el Rojo, 24 Veces el Verde, 92 Veces el Azul y 43 veces el Blanco.

220) 107 Veces el Amarillo, 82 Veces el Rojo, 95 Veces el Verde, 54 Veces el Azul y 29 veces el Blanco.

221) 76 Veces el Amarillo, 34 Veces el Rojo, 51 Veces el Verde, 25 Veces el Azul y 23 veces el Blanco.

➢ Decir cuales de las siguientes desigualdades son VERDADERAS y cuales FALSAS:

222) $2^3 < 2^4$

223) $(-2)^3 < (-2)^4$

224) $2^3 > 2^2$

225) $(-2)^3 > (-2)^2$

226) $(-2)^3 > -(2)^2$

227) $2 . (-2)^2 > -2 . (2)^2$

228) $2 . (-2)^2 > -2 . (-2)^2$

229) $1 - (-2)^2 > (-2)^2 : (-2)$

230) $(-2)^2 + (-2)^3 > -2 . (-2)$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Fracciones

Número de Tema: **11**

Área: **Matemática**

<u>Qué es una fracción?</u> Una fracción es una "parte" de un entero. Por ejemplo, si tengo la mitad de un chocolate, esa mitad es una fracción... Las fracciones se expresan de la siguiente manera:

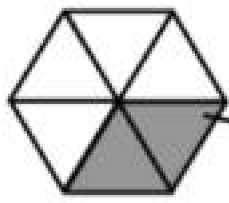
$\frac{1}{8}$

$1 \longrightarrow$ Numerador: Es la cantidad de "partes que tengo"

$8 \longrightarrow$ Denominador: Cantidad de partes, es que está "partido" el entero

Por ejemplo, la fracción que anotamos recién, que se lee, un octavo, podría representar, por ejemplo, una porción de pizza, ya que está partida en 8 partes y tenemos una porción..

<u>Veamos un ejemplo Gráfico:</u>

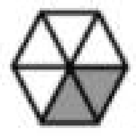


$\rightarrow \frac{2}{6}$ Por ejemplo, esta figura está partida en 6 partes, y de las seis partes tomamos 2

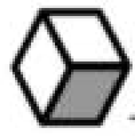
<u>Fracciones equivalentes:</u> Las fracciones equivalentes son dos fracciones representan la misma cantidad. Dada una fracción cualquiera se obtiene una equivalente a ésta multiplicando numerador y denominador por le mismo número. Por ejemplo si a la fracción 1/3 multiplico numerador y denominador por 2, obtengo la fracción 2/6 que es equivalente a 1/3.

Muy Importante: Para verificar si dos fracciones dadas son equivalentes, simplificando una de ellas se tiene que obtener la otra fracción...

Por ejemplo, $\frac{2}{6}$ y $\frac{1}{3}$ son fracciones equivalentes...



$\frac{2}{6}$



$\frac{1}{3}$

Como vemos ambas áreas son iguales

$\Rightarrow \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{1}{3}$

<u>Fracciones Propias e Impropias:</u>

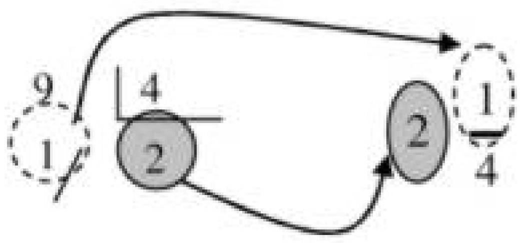
- Las **fracciones Propias** son las que tienen el **NUMERADOR más CHICO** que el denominador $\Rightarrow$ Ejemplos: $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{16}$
- Las **fracciones Impropias** son las que tienen **el NUMERADOR más GRANDE** que el denominador $\Rightarrow$ Ejemplos: $\frac{6}{5}$ $\frac{9}{4}$

<u>Fracciones Puras e Impuras:</u>

- **Fracciones Puras:** Son las que tienen sólo parte fraccionaria $\Rightarrow$ Ejemplos: $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{16}$
- **Fracciones Impuras:** Son las que tienen una parte fraccionaria y una entera $\Rightarrow$ Ejemplos: $1\frac{2}{3}$

Nota: Las fracciones impropias se pueden escribir como fracciones impuras y viceversa...

<u>Pasando una fracción impropia a fracción impura:</u> $\frac{9}{4} \Rightarrow$ Dividir al numerador por el denominador $\Rightarrow$



<u>Pasaje de fracción impura a impropia:</u> $2\frac{1}{4} \Rightarrow$ Multiplicar la parte entera por el denominador y sumar al numerador $\Rightarrow 2 \cdot 4 + 1 = 9 \longrightarrow \frac{9}{4}$

<u>Suma</u> <u>y</u> **<u>Resta</u>** <u>de Fracciones</u> La mecánica para sumar y restar fracciones es la misma, igualmente vamos a ver un ejemplo para cada caso... Primero Resolvamos una suma de fracciones: $\frac{1}{3} + \frac{4}{5} =$

- <u>Paso 1</u>: Hallar el denominador común, éste es el "MCM" entre 3 y 5. o sea "15" $\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{4}{5} = \frac{\quad}{15}$
  Si las fracciones a sumar tienen el mismo denominador, el MCM es éste mismo.
- <u>Paso 2</u>: Operar. "Del otro lado del igual", hacemos una raya de fracción, y en el denominador escribimos el denominador común....

<u>Primero</u>, dividimos el MCM **por el denominador** de la primera fracción: $15:3=5 \Leftarrow \frac{1}{3} + \frac{4}{5} = \frac{\quad}{15}$ $\div$

<u>Segundo</u>, multiplicamos ese resultado **por el numerador** de la fracción:

$15 : 3 = 5 \quad \times \quad 5 \cdot 1 = 5$

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{5} = \frac{5}{15}$$

<u>**Por último**</u>, repetimos los mismos pasos para la segunda fracción...
... dividimos el MCM por el denominador de la segunda fracción...

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{5\qquad}{15} \qquad 15:5=3$$

... y volvemos a multiplicar el resultado por el numerador de la fracción:

$$15:5=3 \qquad 3\cdot 4=12 \qquad \frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{5+12}{15}$$

<u>Paso 3</u>: Sumar el numerador del resultado.-
Ahora sólo queda sumar los valores del numerador... **Y ya está !!** ⇨ $\frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{5+12}{15}=\boxed{\frac{17}{15}}$

Resolvamos ahora <u>una resta</u> de fracciones: ⇨ $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=$
(la manera de hacer el ejercicio es la misma)

Hacemos los mismos pasos que en el caso de la suma... Primero hallamos el MCM que es 12.
Si las fracciones a sumar tienen el mismo denominador, el MCM es éste mismo.

Operamos: Primero dividimos al denominador común (12) por el denominador de la primera fracción (4)... Luego multiplicamos al resultado (3) por el numerador de esta primera fracción (3) , y escribimos el resultado final (9)

$$12:4=3 \qquad \frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{\qquad}{12}$$

$$12:4=3 \qquad 3\cdot 3=9 \qquad \frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{9\qquad}{12}$$

Luego hacemos lo mismo con la segunda fracción: Dividimos al denominador común (12) por el denominador de la segunda fracción (6)... Luego multiplicamos al resultado (2) por el numerador de esta segunda fracción (1) , y escribimos el resultado final (2)

$$12:6=2 \qquad 2\cdot 1=2 \qquad \frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{9-2}{12}$$

La única diferencia que hay con la suma, es que <u>**como ahora estamos restando**</u>, ponemos un signo menos en el numerador del resultado...

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{9-2}{12}$$

Así que el resultado nos quedaría: ⇨ $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{9-2}{12}=\frac{7}{12}$

<u>**Multiplicación de Fracciones**</u>: Hay que multiplicar, numerador con numerador, y denominador con denominador. ⇨ Ejemplo: $\frac{9}{7}\cdot\frac{5}{8}=\frac{9}{7}\cdot\frac{5}{8}=\boxed{\frac{45}{56}}$

<u>**División de Fracciones** La división **es como** la multiplicación</u>, con una diferencia: Tenemos que **"dar vuelta"** la segunda fracción y hacer una **multiplicación**...

Ejemplo: $\frac{6}{5}:\frac{7}{11}=$ ⇨ $\frac{6}{5}:\frac{7}{11}=\frac{6}{5}\cdot\frac{11}{7}=\boxed{\frac{66}{35}}$

Atención : Vamos a ver lo que llamo "<u>la **Regla del Colectivo**</u>". Esta regla sirve para dividir fracciones: $\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{7}{11}}$

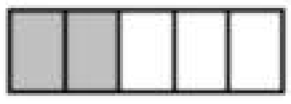
"Los de afuera quieren subir, y los de adentro quieren bajar"

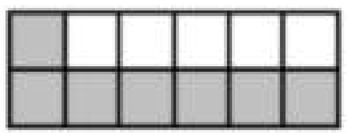
"Los de Afuera" → 6, 11: $\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{7}{11}}=\dfrac{6\cdot 11}{\cdots\cdots}$ → "Quieren Subir"

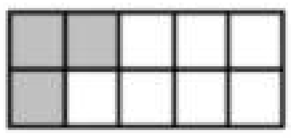
"Los de Adentro" → 5, 7: $\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{7}{11}}=\dfrac{\cdots\cdots}{5\cdot 7}$ → "Quieren Bajar"

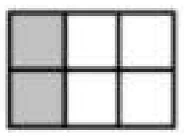
$$\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{7}{11}}=\frac{6\cdot 11}{5\cdot 7}=\boxed{\frac{66}{35}}$$

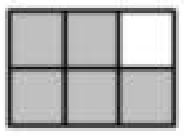
➤ Escribir la fracción que representa cada gráfico:

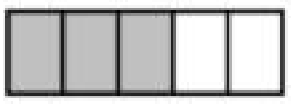
1) 

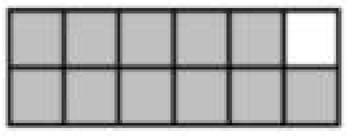
2) 

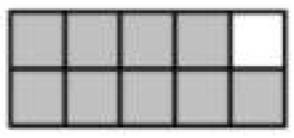
3) 

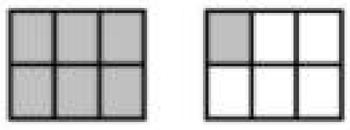
4) 

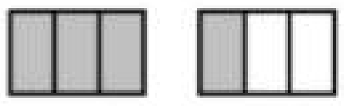
5) 

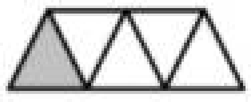
6) 

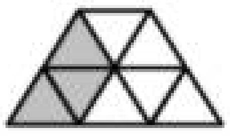
7) 

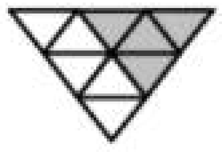
8) 

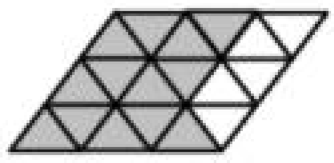
9) 

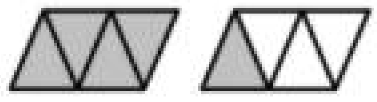
10) 

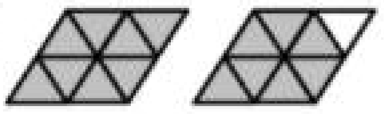
11) 

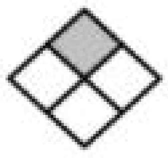
12) 

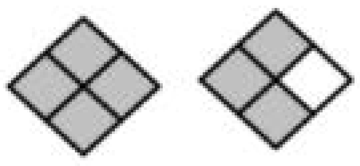
13) 

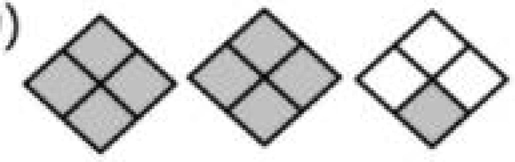
14) 

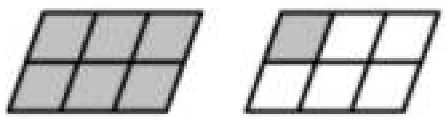
15) 

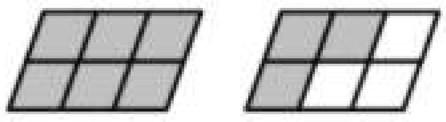
16) 

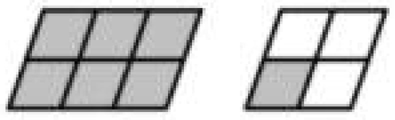
17) 

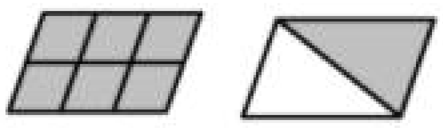
18) 

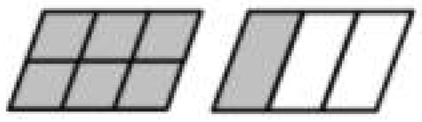
19) 

20) 

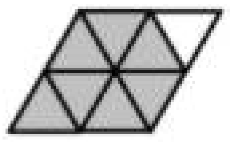
21) 

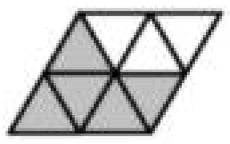
22) 

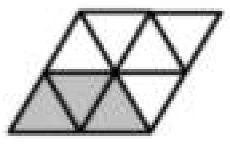
23) 

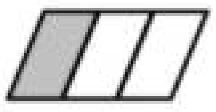
24) 

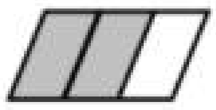
➤ Decir en cada caso la fracción que falta para llegar al entero:

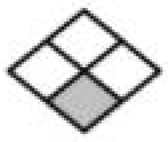
25) 

26) 

27) 

28) 

29) 

30) 

31) $\frac{2}{7}$

32) $\frac{9}{11}$

33) $\frac{2}{13}$

34) $\frac{3}{5}$

35) $\frac{19}{31}$

36) $\frac{12}{43}$

➤ Simplificar las fracciones hasta obtener la fracción equivalente más chica posible:

37) $\frac{3}{9}$

38) $\frac{2}{6}$

39) $\frac{12}{16}$

40) $\frac{22}{44}$

41) $\frac{3}{12}$

42) $\frac{9}{18}$

43) $\frac{12}{18}$

44) $\frac{20}{50}$

45) $\frac{30}{50}$

46) $\frac{40}{50}$

47) $\frac{480}{480}$

48) $\frac{12}{15}$

49) $\frac{7}{49}$

50) $\frac{28}{35}$

51) $\frac{15}{21}$

52) $\frac{12}{21}$

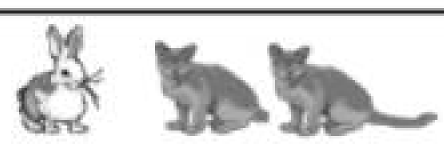
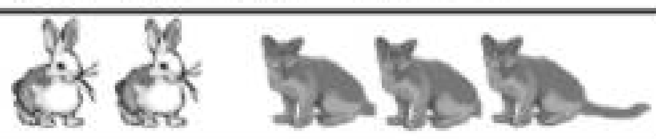
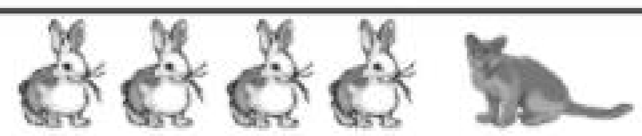
53) $\frac{18}{48}$

54) $\frac{16}{36}$

55) $\frac{15}{35}$

56) $\frac{18}{42}$

57) Completar el siguiente cuadro:

	Cantidad de Conejos	Cantidad de Gatos	Total	Fracción de Conejos	Fracción de Gatos
					
					
					
					
					

58) Fijate que pasa en el ejercicio anterior si sumamos en cada línea la fracción de conejos y la fracción de gatos.. Siempre da una fracción equivalente a la unidad.. Ahora la pregunta es ¿Por qué pasa siempre eso?

- Problemas teóricos de fracciones:

59) Si un curso está compuesto por 18 varones y 14 mujeres, entonces ¿cuál es la fracción que representa el número de varones del curso?
60) Martín faltó al colegio el lunes y el miércoles, esta semana ¿Qué fracción de semana hábil estuvo Martín ausente esta semana?
61) ¿Qué fracción del día ha transcurrido cuando son las siete de la tarde?
62) ¿Qué fracción del día duerme una persona que duerme 8 hs por día?
63) ¿Cuántos octavos hay en 2 unidades?
64) ¿Cuántos quintos en 3 unidades?
65) ¿Qué fracción de un siglo son 40 años?
66) En un curso de 31 alumnos, 11 saben jugar al truco. ¿Qué fracción representa a los que **no** saben jugar al truco?
67) Diego tarda un cuarto de hora en hacer una tarea y Analía 4/15 de hora en hacer la misma actividad. ¿Quién tarda menos?

- Comparación de Fracciones:

68) Completar los cuadros:

Fracción Nº1	Fracción Nº2	**Fraccion Mayor**
2/3	1/5	
1/4	2/5	
12/17	3/5	
3/5	4/5	
1/8	9/2	
7/15	3/4	
6/11	1/12	
4/9	3/16	
3/4	7/8	
1/3	3/20	
1/2	6/11	

Fracción Nº1	Fracción Nº2	**Fraccion Menor**
1/5	5/6	
2/7	4/7	
3/8	3/8	
4/9	2/9	
5/11	1/10	
7/12	7/8	
8/13	2/3	
9/14	1/2	
10/11	7/8	
1/3	13/20	
2/5	7/12	

- Mas problemas teóricos con fracciones:

70) ¿Qué fracción representa la cantidad de letras "a" en la palabra "armario" ?
71) ¿Qué fracción representa la cantidad de letras "e" en la palabra "creer" ?
72) ¿Qué fracción representa la cantidad de letras "i" en la palabra "milicia" ?
73) ¿Qué fracción representa la cantidad de letras "o" en la palabra "moldeo" ?
74) ¿Qué fracción representa la cantidad de letras "u" en la palabra "futurista" ?
75) ¿Qué fracción representa la cantidad de vocales en la palabra "matemática" ?
76) ¿Qué fracción representa la cantidad de consonantes en la palabra "ser" ?
77) ¿Qué fracción es mayor: la que representa la cantidad de vocales de la palabra "mayor" o la que representa la cantidad de consonantes de la palabra "amanecer"?
78) ¿Qué fracción representa la cantidad de dígitos menores de 5 del número 236841?
79) ¿Qué fracción representa la cantidad de dígitos mayores de 8 del número 29981 ?
80) ¿Qué fracción representa la cantidad de "cuatros" del número 24484 ?
81) ¿Qué fracción es mayor, la que representa la cantidad de dígitos menores a 6 en el número 1.139.578 o la que representa la cantidad de dígitos mayores a 3 en el número 15.112.457?

- Decir cuáles de los siguientes pares son fracciones equivalentes:

82) $\frac{2}{9}$ y $\frac{3}{8}$ 85) $\frac{5}{7}$ y $\frac{20}{28}$ 88) $\frac{4}{15}$ y $\frac{28}{105}$ 91) $\frac{2}{11}$ y $\frac{18}{99}$ 94) $\frac{1}{2}$ y $\frac{31}{62}$ 97) $\frac{50}{7}$ y $\frac{200}{28}$

83) $\frac{4}{15}$ y $\frac{12}{45}$ 86) $\frac{2}{5}$ y $\frac{22}{66}$ 89) $\frac{4}{15}$ y $\frac{28}{90}$ 92) $\frac{8}{9}$ y $\frac{9}{8}$ 95) $\frac{40}{15}$ y $\frac{8}{3}$

84) $\frac{2}{9}$ y $\frac{14}{63}$ 87) $\frac{4}{15}$ y $\frac{28}{48}$ 90) $\frac{2}{7}$ y $\frac{6}{21}$ 93) $\frac{5}{7}$ y $\frac{7}{5}$ 96) $\frac{200}{90}$ y $\frac{80}{36}$

- Pasar a fracción impropia:

98) $3\frac{2}{9}$ 101) $1\frac{3}{5}$ 104) $1\frac{14}{17}$ 107) $2\frac{4}{13}$ 110) $1\frac{10}{11}$ 113) $8\frac{3}{4}$

99) $2\frac{1}{5}$ 102) $2\frac{12}{19}$ 105) $1\frac{13}{35}$ 108) $1\frac{14}{15}$ 111) $1\frac{8}{9}$

100) $1\frac{4}{7}$ 103) $2\frac{11}{15}$ 106) $1\frac{2}{15}$ 109) $1\frac{15}{16}$ 112) $6\frac{4}{5}$

- Pasar a fracción impura:

114) $\frac{10}{3}$ 117) $\frac{17}{4}$ 120) $\frac{24}{7}$ 123) $\frac{21}{10}$ 126) $\frac{80}{7}$ 129) $\frac{453}{76}$ 132) $\frac{4121}{702}$

115) $\frac{15}{4}$ 118) $\frac{23}{4}$ 121) $\frac{13}{6}$ 124) $\frac{104}{15}$ 127) $\frac{78}{9}$ 130) $\frac{802}{95}$ 133) $\frac{8453}{976}$

116) $\frac{9}{2}$ 119) $\frac{11}{5}$ 122) $\frac{41}{4}$ 125) $\frac{151}{12}$ 128) $\frac{412}{53}$ 131) $\frac{781}{8}$

- **Para discutir en clase:** ¿Es cierto que toda fracción tiene infinitas fracciones equivalentes? ¿Por qué?

- Realizar las siguientes sumas de fracciones con igual denominador:

134) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$ 137) $\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=$ 140) $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=$ 143) $\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{5}{12}=$

135) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=$ 138) $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=$ 141) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=$ 144) $\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}=$

136) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=$ 139) $\frac{3}{10}+\frac{7}{10}=$ 142) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{1}{7}=$ 145) $\frac{3}{29}+\frac{4}{29}+\frac{5}{29}+\frac{6}{29}=$

- Realizar las siguientes Sumas y Restas de fracciones:

146) $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=$ 149) $\frac{7}{12}-\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=$ 152) $\frac{9}{19}-\frac{2}{19}+\frac{1}{19}=$

147) $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=$ 150) $\frac{9}{15}-\frac{2}{15}-\frac{3}{15}-\frac{1}{15}=$ 153) $\frac{10}{11}-\frac{2}{11}-\frac{7}{11}+\frac{1}{11}=$

148) $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=$ 151) $\frac{13}{20}-\frac{1}{20}-\frac{3}{20}-\frac{7}{20}=$ 154) $\frac{17}{21}-\frac{4}{21}-\frac{1}{21}+\frac{2}{21}=$

- Realizar las siguientes restas y sumas con distinto denominador:

155) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=$ 158) $\frac{5}{7}+\frac{3}{5}=$ 161) $\frac{8}{15}-\frac{2}{5}=$ 164) $\frac{3}{4}+\frac{5}{12}=$ 167) $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=$

156) $\frac{4}{5}-\frac{2}{15}=$ 159) $\frac{5}{9}+\frac{5}{12}=$ 162) $\frac{5}{16}+\frac{3}{10}=$ 165) $\frac{9}{10}+\frac{2}{15}+\frac{1}{20}=$ 168) $\frac{7}{2}+\frac{3}{8}-\frac{5}{6}=$

157) $\frac{5}{7}-\frac{3}{10}=$ 160) $\frac{2}{5}+\frac{4}{9}=$ 163) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}=$ 166) $\frac{1}{8}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=$ 169) $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=$

- Algunos problemas:

170) ¿Qué fracción representa la suma de un medio y cinco sextos?
171) ¿Qué fracción representa la suma de tres cuartos y dos quintos?
172) ¿Qué fracción representa la resta entre tres cuartos y un quinto?
173) ¿Qué fracción representa la resta entre ocho novenos y dos tercios?

- Realizar los siguientes productos de fracciones:

174) $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=$ 176) $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{4}=$ 178) $\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{8}=$ 180) $\frac{7}{3}\cdot\frac{9}{21}=$ 183) $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{5}=$ 184) $\frac{9}{16}\cdot\frac{4}{27}=$

175) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=$ 177) $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{16}=$ 179) $\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{4}=$ 181) $\frac{12}{17}\cdot\frac{1}{6}=$ 182) $\frac{4}{19}\cdot\frac{5}{2}=$ 185) $\frac{16}{21}\cdot\frac{7}{8}=$

- Realizar las siguientes divisiones de fracciones:

186) $\frac{1}{3}\div\frac{5}{6}=$ 188) $\frac{5}{8}\div\frac{15}{4}=$ 190) $\frac{6}{5}\div\frac{4}{10}=$ 192) $\frac{1}{8}\div\frac{3}{4}=$ 194) $\frac{7}{9}\div\frac{14}{15}=$ 196) $\frac{4}{7}\div\frac{32}{35}=$

187) $\frac{3}{5}\div\frac{9}{15}=$ 189) $\frac{2}{9}\div\frac{4}{3}=$ 191) $\frac{6}{9}\div\frac{5}{12}=$ 193) $\frac{4}{7}\div\frac{8}{21}=$ 195) $\frac{8}{5}\div\frac{4}{15}=$ 197) $\frac{8}{9}\div\frac{36}{81}=$

- Realizar los siguientes cocientes:

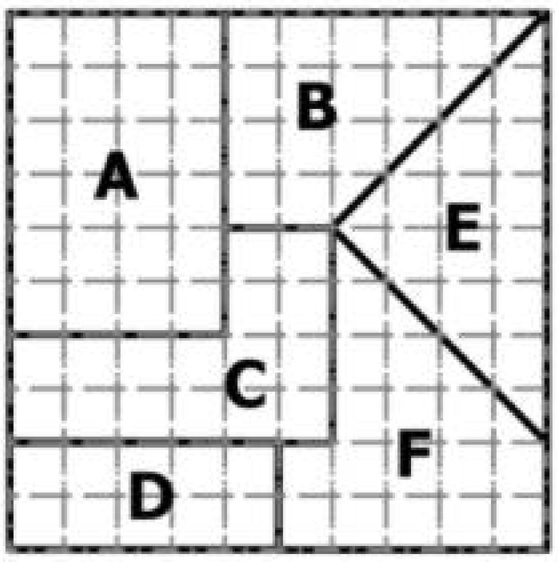
198) $\dfrac{1/4}{3/8}=$ 199) $\dfrac{5/6}{15/12}=$ 200) $\dfrac{3/5}{11/10}=$ 201) $\dfrac{9/14}{3/7}=$

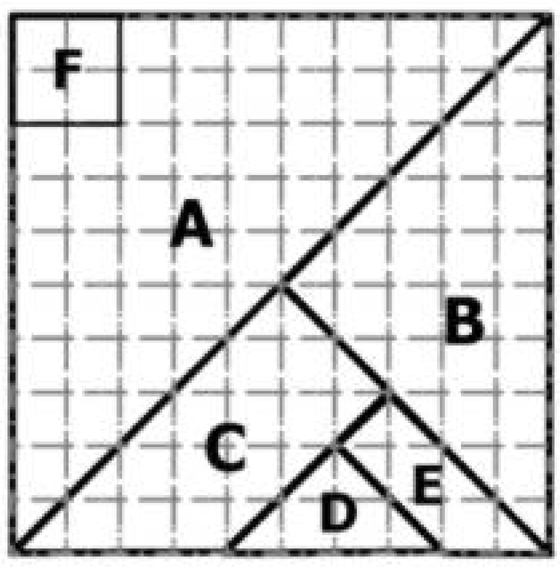
202) $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{15}}=$ 203) $\dfrac{\frac{33}{7}}{\frac{6}{21}}=$ 204) $\dfrac{\frac{33}{5}}{\frac{11}{10}}=$ 205) $\dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{90}}=$

206) ¿Qué fracción de tres quintos es un cuarto? (aclaración: hay que hallar una fracción... esta fracción, a su vez, resulta de una división de fracciones...)

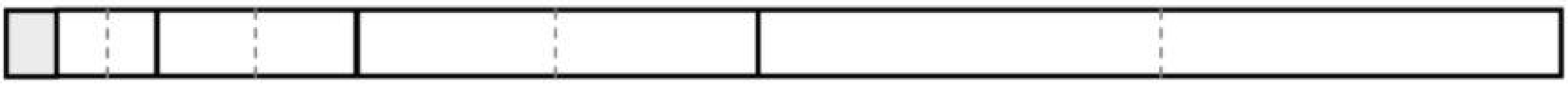
- ¿Qué fracción del cuadrado representan las partes "A" , "B", "C", "D" , "E" y "F"?

Si calculamos la suma de dichas fracciones, si están bien calculados, da por resultado el entero. ¿Por qué pasa esto?

207)


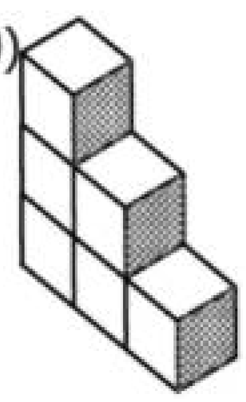
208)


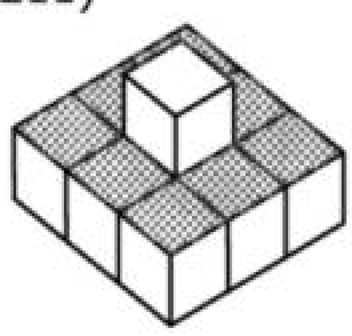
209) Dibujamos un rectángulo, a continuación, otro rectángulo del doble de largo, luego otro, del doble de largo que el anterior, y así hasta el 5º rectángulo. ¿Qué fracción de la figura formada es el 1º rectángulo?

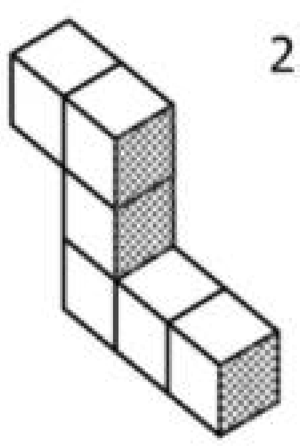


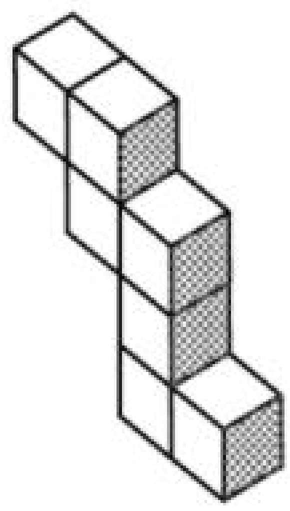
- Fracciones en 3D

Indicar, en cada caso: Qué fracción representa un solo cubo del cuerpo

210)


211)


212)


213)


Repaso: No te olvides de separar correctamente en términos

Acordate que las operaciones de suma y de resta separan términos, por ejemplo vamos a resolver: $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=$

En este caso, la operación de suma separa en dos términos de modo que nos queda: $\overbrace{\frac{3}{5}}+\overbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=$

Por lo tanto el primer término es solo el 3/5 y en el segundo término debo resolver el producto
Pero no puedo sumar primero 3/5 con 2/3, ya que el signo + está separando ambas fracciones en distintos términos.

Por ejemplo en este otro caso: $\frac{1}{4}\div\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=$

Si separamos en términos para saber qué cuenta hacer primero nos quedaría: $\overbrace{\frac{1}{4}\div\frac{3}{5}}^{1^{\circ}\text{ Término}}-\overbrace{\frac{2}{3}}^{2^{\circ}\text{ Término}}+\overbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}^{3^{\circ}\text{ Término}}=$

Ejercicios combinados con fracciones positivas

Resolver y expresar el resultado como una fracción irreducible:

214) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=$

215) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}=$

216) $\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=$

217) $\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=$

218) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=$

219) $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=$

220) $1+\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}=$

221) $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=$

222) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$

223) $\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}+1=$

224) $\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=$

225) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=$

226) $\frac{1}{3}\div\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=$

227) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}-1=$

228) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+1=$

229) $\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{10}=$

230) $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\div\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=$

231) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=$

232) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$

233) $3-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=$

234) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=$

235) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=$

236) $\frac{1}{3}\div\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}=$

237) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{9}\cdot 2=$

238) $\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=$

239) $\frac{2}{15}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}=$

240) $\frac{1}{15}\div\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}=$

241) $\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=$

242) $\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=$

243) $1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=$

244) $\frac{1}{5}\div\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{10}=$

245) $\frac{1}{3}\div\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=$

246) $\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2}=$

247) $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=$

248) $\frac{1}{8}\div\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}\div\frac{2}{3}=$

249) $\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\cdot 2=$

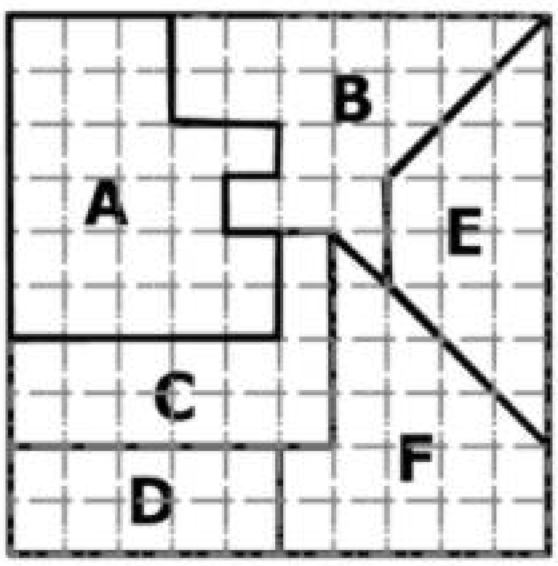
250) $2-\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\div\frac{3}{8}=$

251) $\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{14}+\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{20}+\frac{1}{15}\cdot 3=$

252) $\frac{7}{15}\cdot\frac{5}{14}+\frac{10}{9}\cdot\frac{18}{25}-\frac{5}{9}\div\frac{10}{3}=$

253) $\frac{3}{4}\div\frac{3}{8}+\frac{10}{21}\div\frac{5}{14}-\frac{1}{3}=$

Dado el siguiente gráfico donde "A" "B" "C" "D" "E" y "F" son las fracciones de la figura representada hallar:



254) $A+B$

255) $A+B-C$

256) $C+D-F$

257) $D+A-B$

258) $B+D-E$

259) $B+D+F$

260) $B+C+E$

261) $A+(E-D)$

262) $A-(E-D)$

263) $B-(C-D)$

264) $4A\cdot E+D$

265) $A\div B\cdot C$

266) $C\div D-5\cdot A$

267) $6A-B\div C$

268) $A+D\div C$

Resolver los siguientes ejercicios combinados con paréntesis:

269) $\frac{2}{3}+\frac{5}{17}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{10}\right)=$

270) $\frac{5}{7}+\frac{1}{4}\div\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{4}\right)=$

271) $2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}=$

272) $\left(2-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$

273) $1-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)=$

274) $\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{10}=$

275) $\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{6}=$

276) $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{10}\right)+\frac{5}{6}=$

277) $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\div\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=$

278) $\frac{1}{5}\cdot\left(2-\frac{4}{7}\right)-\frac{1}{7}=$

279) $\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{2}{5}=$

280) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}=$

281) $1-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)=$

282) $\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{4}=$

283) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{6}=$

284) $\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=$

285) $1-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\right)=$

286) $1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=$

Problemas:

Mariano tiene que juntar $240 para irse de vacaciones con sus amigos, primero juntó 1/3 del total y luego los padres le dieron 1/4 del total por haber aprobado todas las materias.
287) ¿Qué fracción del total necesario para las vacaciones juntó?
288) ¿Qué fracción le falta?
289) Si luego le dan $12 por hacer los mandados ¿Qué fracción tendrá entonces acumulada?

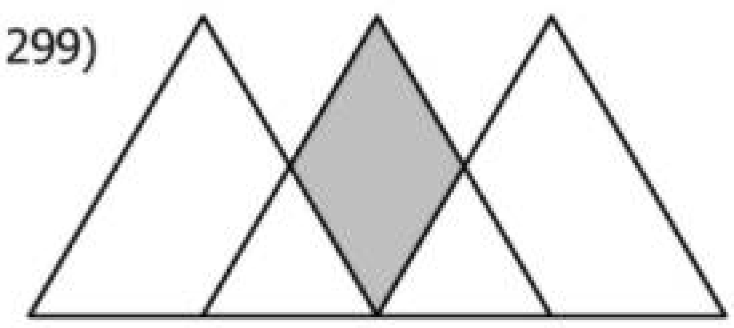
En una bolsa tenemos: 24 caramelos de frutilla, 36 caramelos de naranja y 18 de limón.
290) ¿Qué fracción representan los caramelos de frutilla sobre el total de caramelos?
291) ¿Qué fracción representan los caramelos de naranja sobre el total de caramelos?
292) ¿Qué fracción representan los caramelos de limón sobre el total de caramelos?
Si ahora saco 6 caramelos de limón
293) ¿Qué fracción representarán ahora los caramelos de limón?
294) y ¿Qué fracción representarán ahora los caramelos de naranja?

Emiliano tiene un libro de 144 páginas, y en la primera semana luego de comprarlo leyó 1/12 del libro, luego a la otra semana leyó 1/6 del libro y en la tercera semana leyó 5/8 del libro.
295) ¿Cuál de las tres semanas leyó mayor cantidad de páginas?
296) ¿Qué fracción le falta leer?
297) ¿Qué fracción leyó en las primeras dos semanas juntas?
298) ¿Le queda menos de la quinta parte?

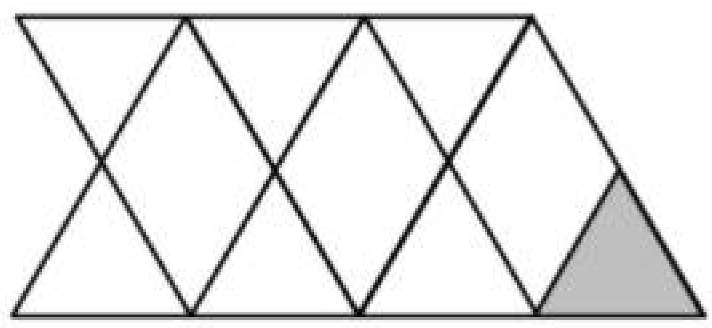
Indicar en las siguientes figuras que fracción está sombreada:

Todos los triángulos de las figuras son equiláteros.

299)



300)



Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Operaciones con Números Racionales

Número de Tema: **12**

Área: **Matemática**

by Dal-0r para TARINGA!

Concepto de Fracción Pura: Se llama número fraccionario puro, a aquellos cocientes (O divisiones) de números enteros distintos de cero tales que el dividendo no sea múltiplo del divisor.

Aclaración: $\frac{1}{3}$ $\begin{matrix}\longrightarrow \text{Dividendo} \\ \longrightarrow \text{Divisor}\end{matrix}$

Como en el ejemplo que pusimos: al ser tanto 1 como 3 distintos de cero y además, 1 no es múltiplo de 3, entonces podemos decir que: $\Rightarrow$ $\frac{1}{3}$ Es un número fraccionario puro

- **Numerador y Denominador:** De ahora en adelante, llamaremos

Numerador: Al **dividendo** de un cociente (El número o expresión que está **arriba** de la línea de fracción)
Denominador: Al **divisor** de un cociente (El número o expresión que está **debajo** de la línea de fracción)

¿Qué pasa cuando el Dividendo es múltiplo del divisor? (O cuando el numerador es múltiplo del denominador)
En estos casos no se cumple la condición para ser un número fraccionario puro, veamos que pasa:

En el caso de la fracción: $\frac{6}{3}$ Como 6 es múltiplo de 3, la fracción se reduce a la cuenta 6:3 = 2, por lo tanto, estamos hablando de un número entero.

- **¿Qué pasa con los signos de un número fraccionario puro?**
Si nos fijamos bien cuando definimos número fraccionario puro, hablamos de cociente de números enteros
Y como bien sabemos hasta ahora, los números enteros pueden ser positivos o negativos

Por ejemplo: $\frac{2}{5}$ $\frac{-3}{4}$ $\frac{1}{-2}$ Son números fraccionarios puros.

Signo de los números fraccionarios: El signo de una fracción es el que surge de aplicar la regla de los signos entre numerador y denominador.

- ✓ Si ambos son positivos, o ambos son negativos, el signo de la fracción es positivo.
- ✓ Si uno de ellos es negativo y el otro positivo, el signo de la fracción es negativo.

Ejemplos:
$\frac{2}{3} \Rightarrow$ Es positivo $\quad \frac{-4}{-5} \Rightarrow$ Es positivo $\frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$ $\quad \frac{-3}{4} \Rightarrow$ Es negativo $\frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$ $\quad \frac{1}{-2} \Rightarrow$ Es negativo $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

El Conjunto de los Números Racionales

Si al conjunto de los números enteros que conocíamos hasta ahora, le agregamos el conjunto de los números fraccionarios puros, obtenemos el conjunto de los números RACIONALES.

Resumen:

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\text{Números Naturales (Positivos)} \\ \text{Cero} \\ \text{Números Negativos}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{Números Enteros} \\ \textbf{“Z”}\end{matrix} \\ \text{Números fraccionarios puros}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{Números Racionales} \\ \textbf{“Q”}\end{matrix}$$

Valor decimal de un número racional: Si quisiéramos comparar los números $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{10}$ debemos conocer su valor decimal.

Para saber cuál de ellos es mayor, debemos conocer su valor decimal, para ello tenemos que hacer la cuenta de dividir y comparar ambos resultados. En nuestro ejemplo:
$$\begin{cases}\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0{,}75 \\ \frac{7}{10} = 7 \div 10 = 0{,}7\end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4} > \frac{7}{10}$$
Porque 0,75 es mayor que 0,7

En el ejemplo que pusimos, $\frac{3}{4} > \frac{7}{10}$ se lee: $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{7}{10}$

- Vamos a repasar ahora las operaciones básicas con fracciones.

- **Suma** y **Resta** de Fracciones La mecánica para sumar y restar fracciones es la misma, lo que cambia es que hay que tener en muy cuenta los signos.

Ejemplo: Sumemos: $\frac{1}{3}+\frac{4}{5}=$

- Paso 1: Averiguar el denominador común.
El Denominador común (MCM) entre 3 y 5 es: 15 $\Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{\quad}{15}$

- Paso 2: Operar. "Del otro lado del igual", hacemos una raya de fracción, y en el denominador escribimos el denominador común....

Primero, **dividimos** el MCM **por el denominador** de la primera

$$15:3=5 \Leftarrow \frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{\quad}{15}$$

Segundo, **multiplicamos** ese resultado **por el numerador** de la fracción:

$$15:3=5 \qquad 5\cdot 1=5 \qquad \frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{5}{15}$$

Por último, repetimos los mismos pasos para la segunda fracción... dividimos el MCM por el denominador de la segunda fracción...

$$15:5=3 \qquad \frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{5}{15}$$

... y volvemos a multiplicar el resultado por el numerador de la fracción:

$$15:5=3 \qquad 3\cdot 4=12 \qquad \frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{5+12}{15}$$

- Paso 3: Sumar el numerador del resultado.-
Ahora sólo queda sumar los valores del numerador... **Y ya está !!**

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{5+12}{15}=\boxed{\frac{17}{15}}$$

- Producto de Números Racionales:
Hay que multiplicar, numerador con numerador, y denominador con denominador.

Ejemplo: $\frac{9}{7}\cdot\frac{5}{8}=\frac{9}{7}\cdot\frac{5}{8}=\boxed{\frac{45}{56}}$

- **División de Fracciones** La división **es como** la multiplicación, con una diferencia: Tenemos que **"dar vuelta"** (Intercambiar numerador con denominador) la segunda fracción y hacer una **multiplicación**...

Ejemplo: $\frac{6}{5}:\frac{7}{11}= \Rightarrow \frac{6}{5}:\frac{7}{11}=\frac{6}{5}\cdot\frac{11}{7}=\boxed{\frac{66}{35}}$

- Potenciación de Números Racionales: Cuando un número racional está elevado a una potencia, esta potencia afecta tanto al denominador como al numerador de la fracción.

Ejemplos: $\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{3^2}{7^2}=\frac{9}{49}$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1^3}{2^3}=\frac{1}{8}$

- Radicación de Números Racionales: Cuando un número racional está afectado por una raíz, esta raíz afecta tanto al denominador como al numerador de la fracción.

Ejemplos: $\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}=\frac{5}{3}$ $\qquad \sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{1}{3}$

Propiedades de las operaciones en Q

Propiedades de la suma:

❶ *Propiedad conmutativa*: Si en una suma de Números Racionales, se cambia el orden, el resultado no varía.

Simbólicamente: Si $a + b = s \Rightarrow b + a = s \Rightarrow \mathbf{a + b = b + a}$

Ejemplo: si $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Longrightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4} \Longrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$

❷ *Propiedad Asociativa*: En una suma de varios Números Racionales, podemos remplazar a 2 o más sumandos cualesquiera por el resultado de su suma parcial (Y obviamente el resultado final es el mismo).

Simbólicamente: $\mathbf{a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)}$

Ejemplo: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \frac{20+15+12}{60} = \boxed{\frac{47}{60}}$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{5} = \left(\frac{4+3}{12}\right)+\frac{1}{5} = \frac{7}{12}+\frac{1}{5} = \frac{35+12}{60} = \boxed{\frac{47}{60}}$$

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3}+\left(\frac{5+4}{20}\right) = \frac{1}{3}+\frac{9}{20} = \frac{20+27}{60} = \boxed{\frac{47}{60}}$$

Propiedades de la Resta: Ojo! Que la resta de números Racionales no es ni conmutativa ni asociativa.

$a - b \neq b - a$ y también $a - b - c \neq a - (b - c)$

Propiedades del Producto:

❶ *Propiedad conmutativa*: Cambiando el orden de los factores del producto, no varía el resultado.

Simbólicamente: Si $a . b = s \Rightarrow b . a = s \Rightarrow \mathbf{a . b = b . a}$

Ejemplo: si $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8} \Longrightarrow \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8} \Longrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}$

❷ *Propiedad Asociativa*: En un producto de varios Números Racionales, podemos remplazar a 2 o más factores cualesquiera por el resultado de su producto parcial (Y obviamente el resultado final es el mismo).

Simbólicamente: $\mathbf{a . b . c = (a . b) . c = a . (b . c)}$

Ejemplo: $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{60} = \boxed{\frac{1}{10}} \Longrightarrow \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{12}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{60} = \boxed{\frac{1}{10}} \Longrightarrow \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{20} = \frac{6}{60} = \boxed{\frac{1}{10}}$

❸ *Propiedad Distributiva del producto respecto de la suma o resta de Números Racionales*: El Producto por una suma o resta de números racionales es igual a la suma o resta de los productos por cada término de la suma o resta.

Simbólicamente: $\mathbf{a . (b \pm c) = a . b \pm a . c}$

Ejemplo: $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} \Longrightarrow \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10} = \boxed{\frac{3}{10}}$ O Bien $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{6}+\frac{2}{15} = \frac{15+12}{90} = \frac{27}{90} = \boxed{\frac{3}{10}}$

Propiedades de la División:

La División No es Conmutativa: Ojo ya que $a:b \neq b:a$

❶ *Propiedad Distributiva de la división respecto de la suma o resta de Números Racionales*: El Cociente de una suma o resta de números racionales por un factor es igual a la suma o resta de los cocientes de cada término de la suma o resta con dicho factor.

Simbólicamente: $\mathbf{(b \pm c) : a = b : a \pm c : a}$

Ejemplo: $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\div\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\div\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\div\frac{2}{3}$

Ojo con confundirse con expresiones como: $\mathbf{a : (b \pm c)}$

Ya que en este caso **no** se puede aplicar la propiedad Distributiva!!

Operaciones Combinadas

Ejemplo de ejercicio tipo: $\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\frac{7}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{9}\right)\right]+\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\right\}=$

Antes que nada: Separar en Términos ⇒ $-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\frac{7}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{9}\right)\right]+\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\right\}=$

Separar en términos nos ayuda a ver por dónde podemos comenzar a operar...
... por ejemplo, acá vemos que podemos empezar aplicando la Propiedad Distributiva en este término...

$$-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\frac{7}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{9}\right)\right]+\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\right\}=$$

Aplicamos la Propiedad Distributiva en este término y nos queda: $-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\frac{7}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{9}\right)\right]+\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\right\}=$

Resolvemos los productos..

$$-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\frac{7}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{9}\right)\right]+\left(\frac{6}{15}-\frac{1}{9}\right)\right\}=$$

⇒ Simplificamos el $\frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{15}_{\,5}}$ ⇒ $-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\frac{7}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{9}\right)\right]+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{9}\right)\right\}=$

Fijate que si separamos en términos adentro del corchete... Vemos que podemos aplicar otra vez la propiedad distributiva:

$$-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\frac{7}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{9}\right)\right]+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{9}\right)\right\}=$$

Nos queda:

$$-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{4}-\frac{7}{5}\cdot\frac{2}{9}\right)\right]+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{9}\right)\right\}=$$

Resolvemos los productos..

$$-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{7}{20}-\frac{14}{45}\right)\right]+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{9}\right)\right\}=$$

Y ahora que ya hicimos todas las multiplicaciones, sólo queda sumar y restar fracciones...

$$-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{7}{20}-\frac{14}{45}\right)\right]+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{9}\right)\right\}=-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{63-56}{180}\right)\right]+\left(\frac{18-5}{45}\right)\right\}=-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{7}{180}\right)\right]+\left(\frac{13}{45}\right)\right\}=$$

$\frac{....-....}{180}$ $\frac{....-....}{45}$

Saco el común denominador en cada caso para hacer estas sumas

Como delante de los corchetes había un signo "–" lo que estaba dentro del corchete cambia de signo

Saco los paréntesis... $-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\frac{7}{180}\right]+\frac{13}{45}\right\}=$ ... después los corchetes... $-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\frac{1}{3}-\frac{7}{180}+\frac{13}{45}\right\}=$

... y por último las llaves: $-\frac{13}{4}+\frac{3}{7}-\frac{1}{3}-\frac{7}{180}+\frac{13}{45}=$

Calculo el denominador común, sumo y resto las fracciones: $-\frac{13}{4}+\frac{3}{7}-\frac{1}{3}-\frac{7}{180}+\frac{13}{45}=\frac{-4095+540-420-49+364}{1260}=\frac{-3660}{1260}$

Simplificamos el resultado.. y listo $\frac{-3660}{1260}=-\frac{366}{126}=-\frac{183}{63}=\boxed{-\frac{61}{21}}$

Nota: No hay una sola manera de resolver ningún cálculo combinado. El ejemplo que vimos es sólo una manera, la que creo yo más directa, rápida y fácil de entender y explicar, pero siempre que respeten las "reglas básicas" o propiedades que aprendieron hasta ahora, sirve cualquier camino para llegar al resultado. Además en los cálculos combinados se van a encontrar con miles de variantes, imposibles de ver una por una, pero ahí está su razonamiento para asimilar los conceptos básicos que están explicados en este ejemplo y aplicarlos a la resolución de otros cálculos.

Ordena de mayor a menor:

1) 2/3 y 3/4
2) 3/5 y 5/9
3) 1/2, 4/7 y 3/8

Ordena de menor a mayor:

4) 4/5 y 7/9
5) 3/4 y 6/7
6) 2/5, 4/9 y 3/7

Colocar el Signo de "<" o ">" Según corresponda:

7) $\frac{1}{2}$ ..... $\frac{1}{4}$
8) $\frac{2}{3}$ ..... $\frac{5}{8}$
9) $\frac{2}{5}$ ..... $\frac{4}{9}$
10) $\frac{1}{25}$ .... $\frac{3}{10}$
11) $\frac{5}{4}$ 1
12) $\frac{3}{4}$ 1
13) $\frac{9}{4}$ 2

14) $\frac{-1}{2}$ ..... $\frac{1}{2}$
15) $\frac{2}{-3}$ ..... $\frac{1}{3}$
16) $\frac{2}{-3}$ ..... $\frac{-1}{3}$
17) $\frac{1}{-4}$ .... $\frac{-1}{2}$
18) $\frac{1}{2}$ 0
19) $\frac{-1}{3}$ 0
20) $\frac{1}{2}$ .... -1

21) -1 ..... $\frac{-1}{2}$
22) $\frac{-3}{4}$ ..... $\frac{-7}{10}$
23) $\frac{1}{-5}$ ..... $\frac{-1}{6}$
24) $\frac{4}{-5}$ .... -1
25) $\frac{-3}{2}$ .... -2
26) $\frac{-6}{5}$ .... -1
27) $\frac{-10}{11}$ .... $-\frac{8}{9}$

28) $\left(\frac{-1}{2}\right)^2$ ..... $\frac{1}{3}$
29) $\left(\frac{2}{-3}\right)^2$ ..... $\frac{2}{3}$
30) $\left(\frac{-1}{3}\right)^2$ ..... $\frac{-1}{9}$
31) $-\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ..... $\frac{-1}{8}$
32) $\frac{-1}{3}+2$ .... $\frac{-1}{3}\cdot 2$
33) $\frac{-1}{3}+2$ .... $\frac{2}{3}\cdot 2$

34) $\frac{1}{2}-3$ .... $\frac{1}{2}\div 3$
35) $\frac{1}{2}+0$ .... $\frac{1}{2}\cdot 0$
36) $\frac{-1}{2}+0$ .... $\frac{-1}{2}\cdot 0$
37) $-\left(\frac{-1}{2}\right)$ .... $-\left(\frac{-2}{3}\right)$
38) $-\left(\frac{-3}{5}\right)$ .... $-\left(\frac{-5}{9}\right)$
39) $-\left(\frac{-2}{3}\right)^2$ .... $-\left(\frac{2}{5}\right)$

Resolver las siguientes sumas y restas:

40) $\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=$
41) $\frac{1}{4}+\frac{4}{7}=$
42) $0+\frac{2}{3}=$
43) $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}=$
44) $\frac{2}{5}+\frac{4}{9}=$

45) $1+\frac{1}{3}=$
46) $\frac{2}{3}+2=$
47) $\frac{-2}{3}+1=$
48) $\frac{-2}{3}+\frac{4}{9}=$
49) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$

50) $\frac{-2}{3}+\frac{5}{6}=$
51) $\frac{2}{-5}+\frac{7}{10}=$
52) $\frac{-1}{2}-\frac{3}{4}=$
53) $1-\frac{2}{7}=$
54) $\frac{-2}{9}-2=$

55) $\frac{-1}{2}-1=$
56) $\frac{2}{5}+\frac{4}{9}+\frac{4}{15}=$
57) $\frac{-1}{3}+\frac{5}{6}+\frac{1}{4}=$
58) $\frac{2}{3}+\frac{-1}{6}-\frac{1}{2}=$
59) $\frac{-2}{3}-\frac{-4}{9}+\frac{5}{6}=$

60) $\frac{1}{-3}-\frac{-4}{5}+\frac{-3}{10}=$
61) $\frac{-1}{2}+\frac{4}{-3}+2=$
62) $\frac{-1}{4}-\frac{-1}{8}+\frac{1}{2}=$
63) $\frac{-11}{12}-\frac{-5}{7}-\frac{1}{21}=$
64) $\frac{-7}{13}+\frac{9}{14}+\frac{1}{26}=$

Resolver:

65) $\frac{2}{3}+\left(-\frac{8}{5}\right)=$
66) $\frac{25}{3}-\left(+\frac{9}{22}\right)=$
67) $\frac{1}{11}-\left(\sqrt{\frac{1}{25}}\right)=$

68) $\frac{23}{4}+\left(-\frac{5}{11}\right)=$
69) $-\frac{20}{17}-\left(-\frac{12}{8}\right)=$
70) $-\frac{18}{15}-\left(-\frac{22}{3}\right)=$

71) $\frac{1}{2}-\left(-\frac{8}{21}\right)=$
72) $-2-\left(-\frac{14}{9}\right)=$
73) $\frac{6}{5}+\left(-\frac{2}{11}\right)=$

74) $\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{6}\right)=$
75) $\frac{-1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)=$
76) $\frac{4}{9}-\left(\frac{-1}{3}\right)=$

77) $0-\left(\frac{1}{-2}\right)=$
78) $0-\left(\frac{1}{-2}\right)^2=$
79) $1+\left(\frac{-1}{3}\right)^2=$

Resolver:

80) $\frac{2}{5}+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\right)=$
81) $\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)=$
82) $\frac{-2}{3}+\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)=$

83) $\frac{-1}{2}-\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=$
84) $\frac{2}{-3}-\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=$
85) $-\frac{7}{8}+\left(\frac{13}{6}-\frac{1}{3}\right)=$

86) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{5}=$
87) $-\left(-\frac{4}{7}+\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{21}=$
88) $-\left(-2+\frac{1}{3}\right)-\frac{11}{12}=$

89) $\frac{1}{6}-\left(-\frac{4}{7}+\frac{1}{21}\right)-\frac{71}{42}=$
90) $\frac{1}{2}-\left(-\frac{4}{5}+\frac{1}{15}\right)-\frac{7}{30}=$
91) $\frac{3}{4}-\left(\frac{4}{7}+\frac{1}{8}\right)-\frac{31}{56}=$

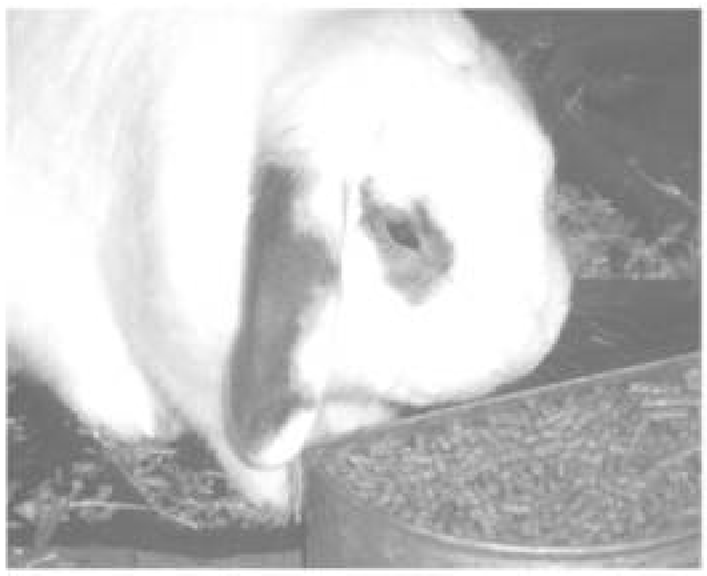
Problemas:

92) Emiliano hace las 2/5 partes de su tarea, y luego hace las 3/7 partes. ¿Qué parte de su tarea le queda por hacer?

93) Un ciclista recorre una carrera en cuatro etapas, en la primera recorre 1/6 del total, en la segunda etapa recorre 1/5 del total, en la tercera etapa recorre 1/3 del total ¿Qué parte del recorrido tiene que ser la cuarta etapa?

94) Amalia gasta 1/5 de sus ahorros en el regalo de cumpleaños de su prima, luego, gasta 1/3 de sus ahorros en un CD que se compró y luego la madre de premio por aprobar matemática le da el equivalente a 1/2 de los ahorros que tenía al principio. Luego de todo esto ¿Tiene más dinero ahorrado que al principio?

El Conejito "Saviola"
El recipiente de alimento balanceado de un conejo está parcialmente lleno hasta sus 5/6 partes. Si el conejo come las 3/10 partes del total del recipiente primero, y luego come la cuarta parte del mismo



95) ¿Qué fracción del recipiente tiene aún para comer?

96) ¿Qué fracción del recipiente debe ser repuesta para llenar el mismo?

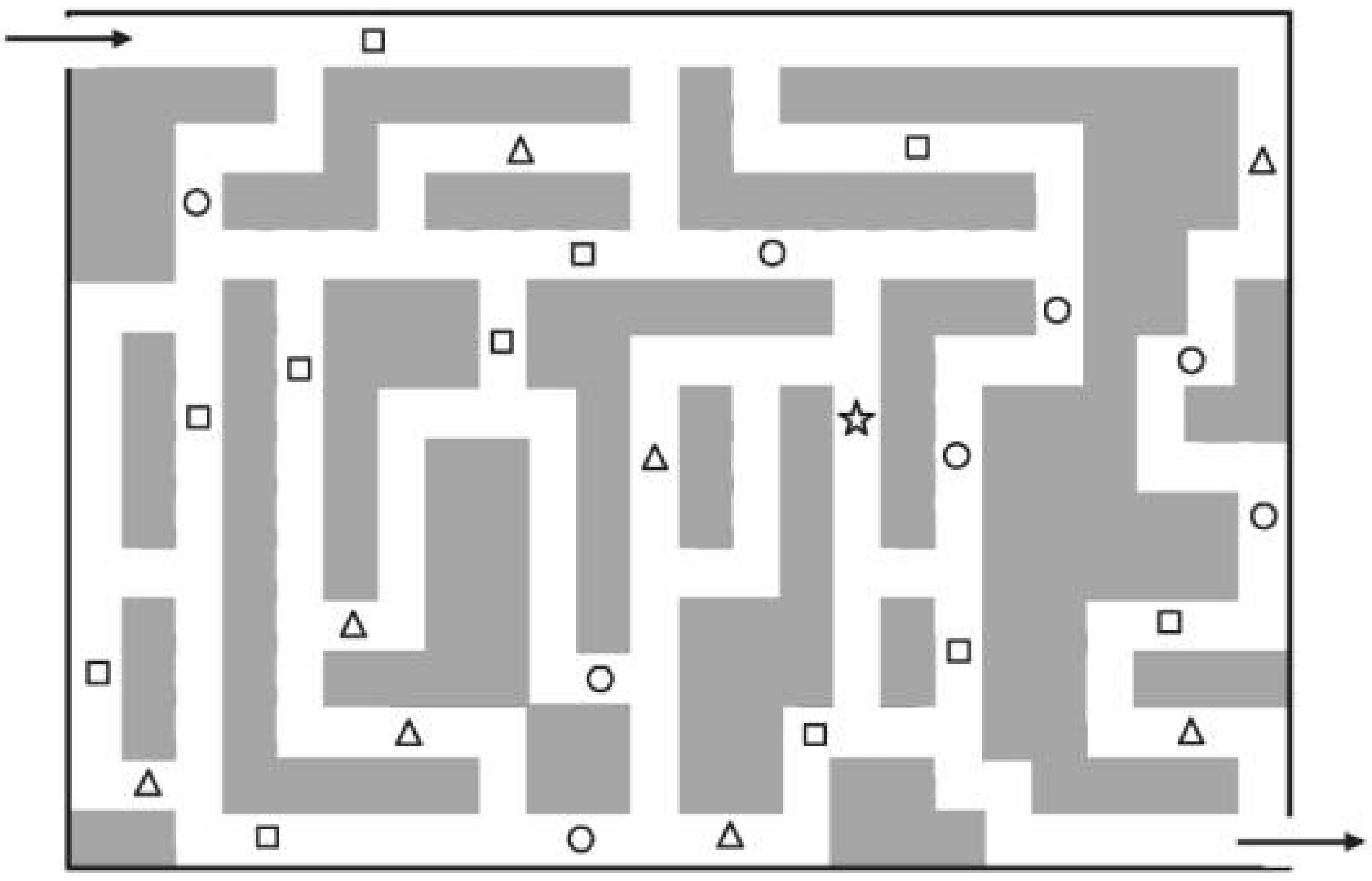
97) ¿Qué fracción del recipiente debe ser repuesta para darle la mitad del mismo?

98) Si con un paquete de esta comida balanceada se pueden llenar exactamente 2 veces el recipiente completo cuando este está vació ¿Qué fracción de un paquete debo usar ahora para completarle al conejo su recipiente?

99) Un pintor termina de pintar una pared en 72 minutos, otro lo hace en 48 minutos y otro pintor lo hace en 36 minutos ¿Qué fracción de la pared pueden pintar los tres juntos, trabajando en equipo, en 12 minutos?

El Laberinto de los Números Racionales
100) Tenemos que sortear el siguiente laberinto. El laberinto tiene "obstáculos" que hacen que vayamos perdiendo una cierta parte de la energía con la que empezamos el laberinto, según las referencias a continuación. Por ejemplo, si pasamos por el símbolo □ perdemos 2/25 de nuestra energía inicial. De los diferentes caminos que hay para salir del laberinto, hay dos que hacen que terminemos con la mayor cantidad de energía posible, el ejercicio consta de encontrar alguno de esos caminos y decir cuál es la fracción máxima de energía posible con que se puede sortear el laberinto.

Símbolo	Acción
□	$-\frac{2}{25}$
△	$-\frac{2}{15}$
○	$-\frac{1}{5}$
☆	$-\frac{1}{3}$



Responder Verdadero o Falso:

101) El número 7/5 es una fracción pura.
102) El número 10/5 es una fracción pura.
103) Las fracciones puras pueden ser negativas.
104) El conjunto de los Números Racionales son todas las fracciones puras.
105) El conjunto de los Números Racionales son todas las fracciones puras mas todo el conjunto de Números Naturales.
106) El conjunto de los Números Racionales son todas las fracciones puras mas todo el conjunto de Números Enteros.
107) El número –3 forma parte del conjunto de los Números Racionales.
108) El denominador de la fracción 5/6 es 5.
109) El divisor de la fracción 3/4 es 4.
110) El conjunto de los Números Racionales tiene muchos más elementos que el de los Números Enteros.

Expresar de dos formas fraccionarias diferentes los siguientes números:

111) 3   112) –2   113) 1   114) –1

115) Expresar el número 4 como fracción con denominador 3.
116) Expresar el número 6 en quintos.

Decir cuáles de las siguientes afirmaciones son Verdaderas y cuáles son Falsas.
Para las expresiones Verdaderas, nombrar la propiedad utilizada.

117) $\frac{1}{6}\div\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\div\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\div\frac{1}{3}$

122) $\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}$

118) $\frac{2}{5}+\frac{1}{7}+\frac{4}{9} = \frac{2}{5}+\left(\frac{1}{7}+\frac{4}{9}\right)$

123) $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)$

119) $\left(\frac{3}{2}+2\right)\div\frac{1}{3} = \frac{3}{2}\div\frac{1}{3}+2\div\frac{1}{3}$

124) $\frac{4}{7}-\frac{1}{3}-\frac{4}{5} = \frac{4}{7}-\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right)$

120) $\frac{1}{3}\div\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\div\frac{1}{3}$

125) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$

121) $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{3}{5}$

126) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{2}$

<u>Resolver</u>:

127) $\frac{2}{3}+\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\right]=$

129) $-\frac{2}{9}-\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)\right]+\frac{17}{36}=$

131) $-\frac{2}{9}-\frac{2}{7}+\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{3}{4}\right)\right]+\frac{23}{252}=$

128) $-1-\left[\frac{3}{5}-\left(-2-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{15}\right]=$

130) $1-\frac{2}{5}-\left(\frac{5}{6}-\frac{4}{9}\right)+\frac{1}{18}=$

132) $-\frac{2}{9}-\frac{2}{7}+\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{3}{4}\right)\right]+\frac{23}{252}=$

Completar las fracciones que faltan en los óvalos, para obtener el resultado indicado en cada caso:
Ojo, Indicar siempre la fracción irreducible que corresponda.

133) $\frac{1}{5}+\frac{\dots}{\dots}=\frac{4}{5}$

135) $\frac{1}{6}+\frac{\dots}{\dots}=\frac{5}{6}$

137) $\frac{1}{5}-\frac{\dots}{\dots}=-\frac{1}{5}$

139) $\frac{\dots}{\dots}-\frac{2}{9}=-\frac{5}{9}$

134) $\frac{2}{9}+\frac{\dots}{\dots}=\frac{5}{9}$

136) $\frac{1}{8}+\frac{\dots}{\dots}=\frac{5}{8}$

138) $\frac{1}{3}-\frac{\dots}{\dots}=-\frac{4}{3}$

140) $\frac{1}{2}-\frac{\dots}{\dots}=1$

Realizar las siguientes multiplicaciones y divisiones:

141) $\frac{2}{3}\quad\frac{1}{4}=$

147) $\frac{4}{7}\quad\frac{-35}{26}\quad\left(-\frac{3}{10}\right)=$

153) $\frac{1}{6}\div\left(\frac{-1}{2}\right)\div\frac{1}{2}=$

159) $\frac{2}{5}\div\left(\frac{-77}{105}\div\frac{-154}{21}\right)=$

142) $\frac{2}{5}\quad\left(\frac{-1}{2}\right)=$

148) $\frac{-3}{11}\cdot\frac{-132}{5}\quad\left(\frac{-5}{9}\right)=$

154) $\frac{2}{9}\div\left(-\frac{1}{6}\right)\div\frac{2}{3}=$

160) $2\div\left(3\div\frac{-15}{4}\right)=$

143) $\frac{-2}{9}\quad\left(-\frac{3}{4}\right)=$

149) $\frac{2}{3}\div\frac{4}{9}=$

155) $\frac{2}{9}\div\left(-\frac{1}{6}\div\frac{2}{3}\right)=$

161) $0\div\left(1\div\frac{-5}{8}\right)=$

144) $-\frac{1}{3}\quad\left(-\frac{3}{5}\right)=$

150) $\frac{4}{15}\div\frac{-8}{5}=$

156) $\frac{14}{15}\div\frac{-21}{8}\div\frac{16}{9}=$

162) $1\div\left(\frac{3}{8}\div\frac{-3}{8}\right)=$

145) $-\frac{5}{6}\quad\frac{3}{10}\quad\frac{4}{7}=$

151) $\frac{-3}{8}\div\left(\frac{-9}{8}\right)=$

157) $\frac{3}{4}\div\frac{-7}{5}\div\frac{-60}{21}=$

163) $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{-3}{5}\right)=$

146) $\frac{-2}{3}\quad\left(\frac{-1}{5}\right)\quad\frac{15}{14}=$

152) $\frac{13}{15}\div\left(-\frac{52}{5}\right)=$

158) $\frac{3}{4}\div\left(\frac{-7}{5}\div\frac{-60}{21}\right)=$

164) $\frac{-3}{7}\div\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{-5}{3}\right)=$

Completar las siguientes cuentas y verificar luego el resultado rehaciendo la cuenta.

165) $\frac{1}{2}+\frac{...}{5}=\frac{...+6}{10}=\frac{...}{10}$

166) $\frac{4}{....}-\frac{2}{3}=\frac{...-10}{15}=\frac{2}{15}$

167) $\frac{5}{....}+\frac{2}{3}=\frac{...+...}{6}=\frac{3}{2}$

168) $\frac{5}{....}\quad\frac{....}{3}=\frac{10}{21}$

169) $\frac{5}{....}\div\frac{3}{....}=\frac{20}{21}$

170) $\frac{1}{....}+\frac{2}{3}-\frac{....}{7}=\frac{...+28-12}{42}=\frac{37}{42}$

Completar las fracciones que faltan en los óvalos, para obtener el resultado indicado en cada caso:

171) $\frac{3}{2}\left(\frac{...}{...}\right)=\frac{9}{8}$

172) $-\frac{1}{2}\left(\frac{...}{...}\right)=\frac{3}{10}$

173) $-\frac{2}{7}\left(\frac{...}{...}\right)=-\frac{6}{35}$

174) $\frac{2}{3}\left(\frac{...}{...}\right)=-\frac{4}{9}$

175) $\frac{1}{4}\div\left(\frac{...}{...}\right)=-\frac{5}{8}$

176) $-\frac{2}{3}\div\left(\frac{...}{...}\right)=-\frac{4}{9}$

177) $\frac{-1}{2}\div\left(\frac{...}{...}\right)=\frac{-3}{8}$

178) $-\frac{2}{5}\div\left(\frac{...}{...}\right)=-\frac{7}{5}$

<u>Resolver</u>: Resolver primero haciendo la cuenta dentro del paréntesis y luego multiplicando o dividiendo. Luego resolver aplicando propiedad distributiva y verificar que el resultado sea el mismo.

179) $\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)$

180) $\frac{-5}{3}\left(\frac{7}{10}-1\right)$

181) $\frac{-5}{3}\left(-1-\frac{7}{10}\right)$

182) $-3\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{9}\right)$

183) $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)$

184) $\frac{15}{11}\left(-\frac{3}{5}+\frac{7}{30}\right)$

185) $\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}+\frac{7}{8}\right)$

186) $\frac{6}{37}\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{9}\right)$

187) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{7}{5}\right)\frac{-5}{3}$

188) $\left(-\frac{5}{6}-\frac{3}{11}\right)\frac{-132}{73}$

189) $\frac{10}{11}\left(\frac{-1}{4}-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)$

190) $\frac{-7}{5}\left(\frac{7}{6}-\frac{5}{7}+\frac{13}{21}\right)$

191) $\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{8}\right)\div\frac{11}{8}$

192) $\left(\frac{-6}{14}-\frac{15}{28}\right)\div\frac{9}{-7}$

193) $\left(\frac{13}{-25}+\frac{1}{15}\right)\div\frac{17}{15}$

194) $\left(\frac{3}{10}-\frac{17}{30}\right)\div\frac{4}{-3}$

195) $\left(-1+\frac{3}{13}\right)\div\frac{5}{13}$

196) $\left(\frac{15}{-22}+1\right)\div\frac{7}{-11}$

197) $\left(\frac{7}{-12}+\frac{9}{10}+\frac{1}{2}\right)\div\frac{7}{-120}$

198) $\left(-1+\frac{5}{16}+\frac{3}{8}\right)\div\frac{-1}{32}$

Problemas: Repartiendo la Torta 

199) Martín toma los 3/16 de la torta y le da los 3/5 de lo que tomó a Diego. ¿Qué fracción de la torta tiene Diego?

200) Martín toma los 2/7 de la torta y le da las 4/5 partes de lo que tomó a Diego ¿Con que parte de la torta se quedó Martín?

201) Martín toma primero los 2/9 de la torta y luego toma 1/5 de la misma torta, luego le da las 5/19 partes de lo que tiene a Diego. ¿Con qué parte de la torta se quedó Diego?

202) Martín toma primero los 2/7 de la torta y luego toma 3/8 de la misma torta, luego le da las 8/37 partes de lo que tiene a Diego. ¿Con qué parte de la torta se quedó Martín?

203) Martín toma primero la 1/4 parte de la torta, luego le da 5/7 de lo que tomó a Diego, luego toma 3/7 más de la misma torta ¿Con qué parte de la torta se quedó Martín?

204) Martín toma los 5/18 de la torta, luego le da a Diego las 3/5 partes de lo que tomó y luego diego le devuelve las 6/7 partes de lo que Martín le dio a él. ¿Con qué parte de la torta se quedó Martín?

205) Martín toma primero los 3/8 de la torta, luego Diego toma de la torta las 7/12 partes de lo que tomó Martín. Luego Martín toma las 4/7 partes de lo que tomó Diego ¿Qué fracción queda de la torta?

<u>Calcular</u>:

206) Las 5/24 partes de un Día

207) Las 7/60 Partes de una hora

208) Las 29/365 partes de un año

209) Las 5/12 partes de 2 docenas de facturas.

210) La tercera parte, de las 2/5 partes de una quincena.

211) Las 4/7 partes de $84

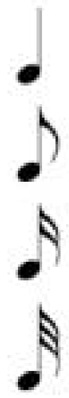
212) Las 5/12 partes de los 3/5 de los 4/19 de $95.

213) Las 3/7 partes de $1701 mas las 5/12 partes de $876

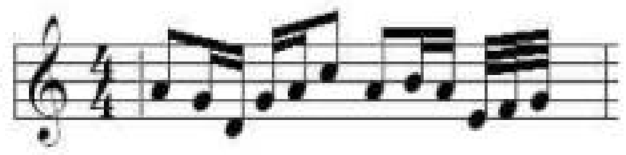
214) ¿Qué fracción de una semana son 6 Días menos la sexta parte de días del mes de abril?
215) ¿Qué fracción de una hora son 15 minutos más las 5/48 partes de un día?
216) ¿Cuántos días son las 3/7 partes de una semana más las 4/73 partes de un año no bisiesto?

Sabemos que según la notación musical, las figuras llamadas "negras" equivalen a un tiempo entero, las "corcheas" equivales a 1/2 , las "semicorcheas" a 1/4 .. y las "fusas" 1/8. A su vez hay compases de 2 tiempos, de 3 tiempos, de 4 tiempos por compás y hay muchos tipos de compases más...

Decir para cada uno de los siguientes compases, la fracción del compás que está incompleta, teniendo en cuenta que para los compases que se simbolizan con 4/4 la duración es de 4 tiempos y para los que se simbolizan con 3/4 es de 3 tiempos.


Negra: 1 Tiempo
Corchea: 1/2 Tiempo
Semicorchea: 1/4 Tiempo
Fusa: 1/8 Tiempo

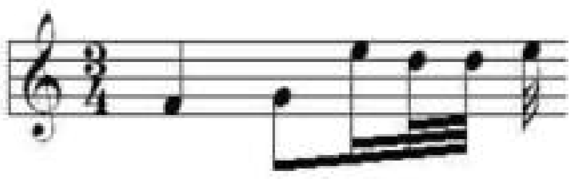
217) 

218) 

219) 

220) 

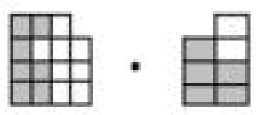
221) 

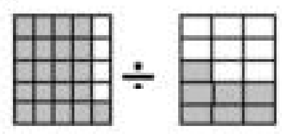
222) 

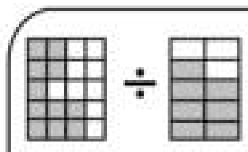
223) Ordenar los siguientes Números Racionales de menor a mayor: (Representarlos en la recta numérica)

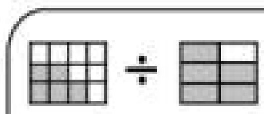
$$-\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad -\frac{7}{9} \quad -\frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{3}{4}$$

Completar:

224) 
$\cdot$ $=$
$\frac{....}{....} \cdot \frac{....}{....} = \frac{....}{....}$

225) 
$\div$ $-$
$\frac{....}{....} \div \frac{....}{....} - \frac{....}{....}$

226) 
$\div$ $=$
$\frac{....}{....} \div \frac{....}{....} = \frac{....}{....}$

227) 
$\div$ $=$
$\frac{....}{....} \div \frac{....}{....} = \frac{....}{....}$

Más para completar...

228) $\frac{....}{....}+\frac{1}{2} = \frac{5}{4}\cdot\frac{....}{....} = \frac{1}{2}$

229) $\frac{....}{....}-\frac{3}{4} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{....}{....} = -\frac{3}{8}$

230) $\frac{....}{....}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{....}{....}\right) = \frac{-3}{20}$

231) $\frac{1}{5}-\frac{1}{4} = \frac{....}{....}\cdot\frac{3}{10} = -\frac{...}{...}$

232) $\frac{....}{....}\cdot\frac{3}{4} = \frac{15}{16}\cdot\frac{....}{....} = -\frac{1}{2}$

233) $\frac{....}{....}\cdot -\frac{5}{6} = -\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{....}{....}\right) = 1$

234) $\frac{....}{....}\div\frac{3}{7} = \frac{7}{6}\cdot\frac{....}{....} = \frac{1}{2}$

235) $\frac{....}{....}-\frac{3}{5} = 1-\left(-\frac{....}{....}\right) = \frac{23}{20}$

Con este ejercicio vamos a ver la importancia de separar en términos: **Resolver**: (comparar los resultados)

236) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+1=$

237) $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+1=$

238) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}+1=$

239) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)+1=$

240) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+1\right)=$

241) $\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}+1=$

242) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)=$

243) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+1\right)=$

244) $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)=$

245) $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)=$

246) $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}+1=$

247) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)=$

Operaciones combinadas con fracciones:

248) $2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)+\left\{3-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\cdot\left[-3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-1+\frac{1}{5}\right]+4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}=$

249) $1-\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{2}{5}\cdot\left(-10+\frac{15}{4}\right)-1\right]\right\}=$

250) $\frac{1}{9}:\frac{4}{11}-1:\frac{3}{2}+\frac{4}{9}\cdot(-2)+\frac{4}{3}:(-1)-\left(\frac{5}{18}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}=$

251) $-\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{9}+\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}-1+3\right)-\frac{1}{6}\right]=$

252) $\frac{125}{4}\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)\cdot\frac{1}{10}-\frac{4}{3}:(-2)-\frac{5}{8}-\left(-\frac{5}{12}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)=$

253) $\frac{8}{15}+\frac{15}{8}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)+1.\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$

Más operaciones combinadas con fracciones:

254) $\frac{1}{12}-\frac{1}{21}\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)-\frac{1}{5}:\frac{2}{5}-\left[3+\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1\right)\right]+\frac{31}{6}$

255) $-\frac{1}{4}-\left[\frac{7}{4}-\frac{3}{5}\right]:\frac{1}{5}-\left[-3+\left(-1\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}\right)\right]+7\frac{1}{3}$

256) $-1\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}-\left[-\frac{5}{3}+\frac{3}{5}\right]-\frac{1}{5}-\left[-1-\left(-1\frac{1}{2}\right)-1\right]+3\frac{23}{60}=$

257) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\left[-\left(\frac{2}{3}+1\right)+1-\left(1-\frac{1}{2}\right)+1\right]-\left[-1+\frac{1}{4}:\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]+\frac{9}{4}=$

258) $\frac{5}{2}:\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right]-1\right\}=$

259) $-\frac{1}{2}:\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right\}:\frac{1}{2}=$

260) $\frac{1}{5}+\frac{4}{9}-\left[-\left(\frac{2}{3}-1\right)\div\frac{1}{6}-\left(\frac{71}{45}-2\,\frac{7}{18}\right)-2\right]-\left[-1+\frac{2}{3}:\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]+\frac{9}{4}=$

261) $-\frac{3}{7}:\left\{\frac{5}{7}+\frac{5}{19}\cdot\left[\frac{5}{7}:\frac{5}{14}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{2}:\frac{1}{2}\right\}=$

262) $\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{5}\div\left[\frac{1}{20}+\left(\frac{9}{8}-\frac{3}{4}\div\frac{5}{3}\right)-\frac{7}{10}+\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{8}\right]+\frac{2}{5}\div\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}=$

Siguen las Operaciones combinadas con fracciones:

263) $\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-5\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)}{-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}=$

264) $\dfrac{\frac{1}{4}+\left[-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\right]}{1+\frac{1}{2}}=$

265) $\dfrac{2-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{10}}=$

266) $\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{17}{20}\right)}{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{7}{10}\right)}=$

267) $\dfrac{-\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)+\frac{1}{2}}{\frac{-13}{6}}=$

268) $\dfrac{-\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}-1\,\frac{3}{4}\right)}{\frac{19}{36}}=$

269) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{-\left(\frac{7}{11}-\frac{7}{8}\right)\div\frac{3}{22}}=$

270) $\dfrac{\frac{1}{17}}{4\cdot\left[-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\div\left(\frac{17}{6}\right)\right]}=$

271) $\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-1}{\frac{13}{48}\div\left(\frac{-17}{36}+1\frac{5}{9}\right)}=$

272) $-\dfrac{58+\frac{1}{2}}{-\frac{9}{10}-\frac{9}{16}}-\dfrac{\frac{41}{3}}{\frac{5}{6}+\frac{7}{8}}=$

273) $\frac{11}{12}-\dfrac{\frac{2}{3}}{-\frac{6}{7}+\frac{5}{14}}+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\frac{2}{3}}=$

274) $\dfrac{-2}{\frac{7}{10}-\frac{4}{5}}\div\left(\dfrac{\frac{1}{3}+1}{\frac{2}{5}}-\frac{10}{21}\right)=$

275) $\dfrac{6-\frac{7}{2}}{\frac{3}{10}}-\frac{13}{3}-1\div\left(\dfrac{1-\frac{1}{3}}{\frac{5}{8}}\div\dfrac{1}{\frac{1}{3}}-\frac{1}{45}\right)=$

276) $\dfrac{\frac{-5}{6}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{10}}\cdot\left(\frac{10}{11}-\dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{8}{9}+\frac{7}{18}}+\frac{9}{5}\cdot\dfrac{1}{\frac{11}{3}}\right)+1=$

277) $\dfrac{\frac{1}{2}-\left[-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)+\frac{5}{21}\right]}{2\quad\frac{1}{84}+\frac{1}{84}}=$

Calcular los siguientes cuadrados:

278) $\left(\frac{2}{3}\right)^2=$

279) $\left(\frac{1}{4}\right)^2=$

280) $\left(\frac{1}{2}\right)^2=$

281) $\left(\frac{2}{5}\right)^2=$

282) $\left(\frac{3}{7}\right)^2=$

283) $\left(\frac{1}{3}\right)^2=$

284) $\left(\frac{11}{12}\right)^2=$

285) $\left(\frac{3}{10}\right)^2=$

286) $\left(\frac{6}{7}\right)^2=$

287) $\left(-\frac{1}{4}\right)^2=$

288) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2=$

289) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2=$

290) $\left(\frac{7}{9}-\frac{2}{3}\right)^2=$

291) $\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=$

292) $\left(\frac{1}{8}-1\right)^2=$

293) $\left(\frac{3}{10}-1\right)^2=$

294) $\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{9}\right)^2=$

295) $\left(\frac{16}{11}-2\right)^2=$

Recordando que: $a^{-1}=\frac{1}{a}\quad\forall a\neq 0$ y que $a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad\forall a\neq 0$ Calcular:

296) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=$

297) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=$

298) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-1}=$

299) $(-2)^{-3}=$

300) $\left(\frac{-1}{3}\right)^{-3}=$

301) $(-3)^{-2}=$

302) $\left(\frac{-1}{2}\right)^{0}=$

303) $(-1)^{-4}=$

304) $\left(\frac{-1}{2}-\frac{-1}{3}\right)^{-2}=$

305) $\left(\frac{1}{3}+\frac{-5}{6}\right)^{-3}=$

Realizar las siguientes operaciones combinadas:

306) $2^{-2}+2=$

307) $3\cdot 2^{-2}-1=$

308) $2\cdot\left(3^{-2}+1\right)=$

309) $5\cdot 3^{-1}-9\cdot 3^{-2}=$

310) $2\div 3^{-2}-3\div 2^{-3}=$

311) $\frac{4}{3}\cdot 2^{-2}-2\cdot\frac{-1}{3}=$

312) $\frac{3}{4}\cdot\left(3^{-2}-1\right)=$

313) $\frac{3}{2}\cdot 3^{-2}+\frac{2}{3}\cdot 2^{-3}=$

314) $\frac{1}{4}\div 2^{-3}-2\div\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=$

315) $\sqrt{-2\cdot\left(3^{-2}-1\right)}=$

316) $\sqrt{2^{-2}+2}=$

317) $\sqrt{-\frac{1}{2}\cdot\left(3^{-2}-1\right)}=$

318) $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{2}{3}-1\right)^{-2}=$

Calcular los valores positivos de las siguientes raíces:

319) $\sqrt{\frac{25}{9}}=$

320) $\sqrt{\frac{81}{100}}=$

321) $\sqrt{\frac{16}{49}}=$

322) $\sqrt{\frac{1}{36}}=$

323) $\sqrt{\frac{49}{121}}=$

324) $\sqrt{\frac{25}{144}}=$

325) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=$

326) $\sqrt[3]{\frac{8}{1000}}=$

327) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}=$

328) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=$

329) $\sqrt{1-\frac{5}{9}}=$

330) $\sqrt{1-\frac{3}{4}}=$

331) $\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=$

332) $\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=$

333) $\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2+\left(\frac{1}{7}\right)^2}=$

Resolver:

334) $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2^3}{3^2}}=$

335) $\sqrt{\frac{12}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2}-\sqrt{\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=$

336) $\sqrt[3]{\frac{7}{27}+\left(\frac{1}{3}\right)^3}\div\sqrt{\frac{5}{4}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}}}}-\left(\sqrt{\frac{9}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3=$

Pasar todo a fracción y resolver (Expresar el resultado como fracción)**:**

337) $\sqrt{0{,}04}=$

338) $\sqrt{0{,}25}=$

339) $\sqrt[3]{0{,}027}=$

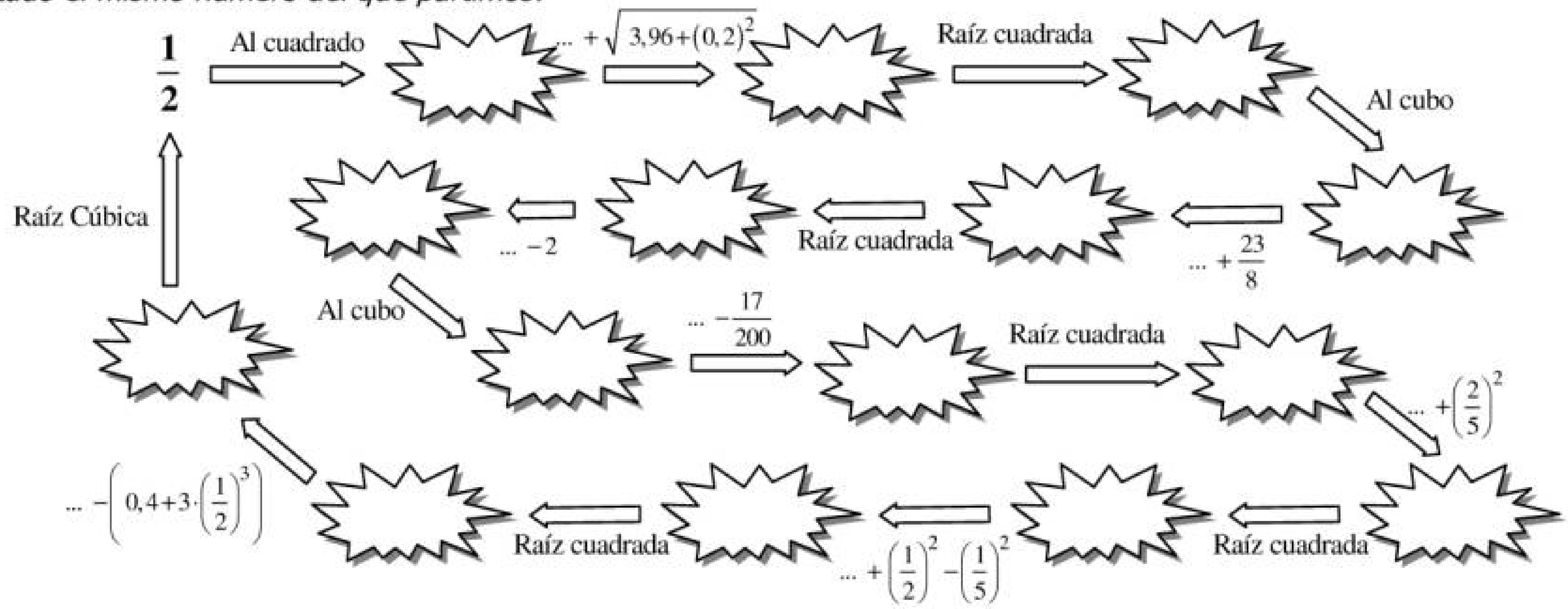
340) $\sqrt[3]{0{,}008}=$

341) $\sqrt{\sqrt[3]{0{,}12+0{,}005}+0{,}31}=$

342) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{0{,}36}-(0{,}3)^2-0{,}02}-0{,}06}=$

343) $\sqrt{\sqrt[3]{0{,}45\cdot 0{,}7+0{,}028}-\left[(0{,}9)^2-\sqrt{0{,}04}\right]}=$

344) *Completar los recuadros aplicando las operaciones correspondientes en cada caso y verificar que al final de cómo resultado el mismo número del que partimos:*



Ahora más operaciones combinadas y con potencias y raíces:

345) $1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{7}\cdot\left[-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1+\frac{1}{5}\right]^2-\frac{5}{63}=$

346) $1-\left(\frac{2}{3}+1\right)^2-\left(\frac{2}{7}-1\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{349}{588}=$

347) $2\cdot\left(\frac{2}{5}+1\right)^2\div\left(\frac{7}{10}-\frac{1}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{5}{9}-\frac{1}{2}\right)^2\cdot 6^4\right]^3$

348) $\left(3^3\div\left(\frac{3}{4}\right)^2-5\right)+\left[-3\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{4}}-1\right)\right]^2+\sqrt{\frac{25}{144}}=$

349) $1-\left\{\frac{1}{2}+\left[\left(3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-6\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^3=$

... Y siguen las operaciones combinadas y con potencias y raíces:

350) $\dfrac{\sqrt{24+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\frac{39}{8}+\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

351) $\dfrac{\frac{1}{4}\div\sqrt{-\left(\frac{1}{6}\right)^2+5\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^2}}{\frac{8}{9}\div\left(\frac{2}{3}\right)^3}=$

352) $\dfrac{2}{\frac{1}{\sqrt{4}}}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2}=$

353) $\dfrac{3\sqrt{4}-\frac{9}{\sqrt{4}}}{\frac{13}{8}-\frac{3^2}{8}}=$

354) $\dfrac{\frac{7}{2}+\sqrt{49\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2}}{\frac{5}{2}}$

355) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\cdot\frac{\sqrt{49\cdot 36\div 144}}{2}}{\frac{1}{3}}=$

356) $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{7}+\frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}}{7}}=$

357) $\dfrac{\frac{7}{5}+\frac{\sqrt{\frac{9}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{2}}}{5}}{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{3}}=$

358) Completar los espacios en blanco:
La primera línea está como ejemplo (Nos vamos preparando para las ecuaciones)

Fracción	Tercera Parte	Tres quintas partes	Duplo	Cuadrado	Le sumo 1	Le resto 1/2
5/3	*5/9*	*1*	*10/3*	*25/9*	*8/3*	*7/6*
1/2						
5/9						
3/4						
2/3						
	10/9					
	1/15					
	5/18					
			4/9			
			1/2			
			11/6			
				49/64		
				36/49		
				9/25		
					19/10	
					23/16	
					26/15	

359) Último Problema: Melina tiene tres hermanas. La Madre de Melina le da a ella \$300 y le dice que lo reparta entre ella y sus hermanas de la siguiente manera:
- Que le dé 1/4 del total a una de sus hermanas, 1/3 a otra, 1/5 a otra y que se quede con el resto ella.
- Luego le dice que la que recibió más plata de las cuatro hermanas, le dé 1/10 de lo que le tocó a la que recibió menos.

¿Con cuánto dinero se quedó Melina al final?

Resolver:

360) $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-2}-\dfrac{\left(1+2\cdot 2^{-4}\right)^{-1}}{\left(2-\frac{3}{2}\right)^{-3}}$

361) $\sqrt[3]{\dfrac{-\left(-1-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{(-2)^{-2}}+\dfrac{2\left(1+2^{-3}\right)^{-2}}{\left(1-2^{-2}\right)^{-1}}}$

362) $\sqrt{1+\dfrac{\left(-1+\frac{1}{2}\right)^{-2}}{\left(1-2^{-2}\right)^{-1}}+\dfrac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+2\left(2^{-3}\right)^{-2}}}{-\left(\frac{-1}{3}\right)^{-1}}}$

363) $\sqrt{\dfrac{\left(1-\sqrt{5^{-2}+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}}\right)^{-2}}{(-2)^4-7}}$

364) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{(2{,}3)^{-1}+\left(1+\frac{3}{4}\right)^{-1}}-2}{(-1)^3\cdot(-2)^{-4}}}$

365) $\left(1+\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(1-2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^{-1}\div\dfrac{\left(1+\frac{2}{3}\cdot 2^{-3}\right)^{-1}}{\left(1-\frac{3}{2}\right)^{-2}}$

366) $\sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-\frac{5}{2}\right)^{-2}+(-3)^{-1}}+\sqrt{\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{(-3)^2}+\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2}}{3}}$

367) $\dfrac{\left(1-\frac{3}{5}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}{1+\sqrt{2\cdot\left(1+2^{-3}\right)^{-1}}}-\dfrac{\sqrt{\left(\frac{-1}{5}\right)^{-2}-\left((-3)^{-1}\right)^{-2}}}{-\left(\frac{-1}{2}\right)^{-3}}$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Expresiones Decimales

Número de Tema: **13**

Área: **Matemática**

Una Expresión Decimal es un número cuya parte "NO ENTERA" se expresa mediante el uso de la coma.

Las expresiones decimales se usan para expresar cualquier tipo de número "no entero" en nuestro caso vamos a estudiar las expresiones decimales que se pueden expresar como fracciones o como números racionales.

Ejemplo: **0,489**

Parte Entera — Coma — Parte Decimal

Las expresiones decimales son muy usadas y hay que tener mucho cuidado con algunas cuestiones que veremos a continuación ya que hay expresiones finitas e infinitas, cuya diferencia radica en que en el primer caso se puede expresar el número exacto escribiendo el número y la coma con sus decimales, pero en el segundo caso, al ser infinita cantidad de decimales, nunca va a ser exacta la expresión del modo típico en que la escribíamos, sino que vamos a tener que usar una nueva simbología para las expresiones infinitas para no tener que escribir infinitos decimales (Cosa que por otro lado sería imposible)

Clasificación de Números Decimales

- Decimales FINITOS: Son los que tienen una "cantidad fija" de decimales después de la coma.

Ejemplos: **0,489** **2,53** **50,4587912** **0,0000912**

- Decimales INFINITOS PERIÓDICOS: Son todos aquellos que poseen una parte decimal que se repite infinitamente-

Periódicos Puros:
Toda la parte decimal se repite indefinidamente

$$1,32 = 1,3232323232$$

Periódicos Mixtos:
Hay una parte decimal que no se repite periódicamente

$$0,4216 = 0,4216666666$$

Como decíamos antes, tenemos que usar una nueva simbología para expresar una cantidad infinita de decimales. Esta nueva simbología es por medio de "un arquito" que dibujamos "arriba" de los decimales que se repiten infinitamente.

Nota: Hay un tercer tipo, que son expresiones decimales infinitas, pero que no siguen un patrón de repetición, son casos de números reales que tienen infinita cantidad de decimales, pero son siempre decimales diferentes. Estos casos no son parte de esta guía de estudio, por lo que no le dedicaremos tiempo a este tema por ahora, pero es bueno ir sabiendo que existen estos otros números.

Como sabemos hasta ahora, los números racionales pueden escribirse como fracciones o como expresiones decimales. Por ejemplo el número 0,6 lo podemos escribir como fracción: 3/5
También, una fracción como por ejemplo 1/2 la podemos escribir como expresión decimal 0,5.

Lo que vamos a estudiar a continuación es la manera de, dada una fracción, escribirla como expresión decimal, y por otro lado, dada una expresión decimal, escribirla como una fracción.

Para ello, vamos a comenzar pasando de la escritura como expresión decimal a fracción, con lo cual vamos a tener que dividir este tema en tres casos:

- Decimales No Periódicos
- Decimales Periódicos Puros
- Decimales Periódicos Mixtos

<u>Pasaje de decimales a fracciones</u> *Veamos la forma de escribir un número decimal como una fracción.*

- <u>Caso 1</u>: <u>Decimales No Periódicos</u> *(este es el caso mas simple)*

Ejemplo: Pasemos 5,47 a fracción

<u>En el Denominador</u> escribimos un **1** seguido de tantos ceros como decimales tengamos
(En el ejemplo del 5,47 son 2 posiciones decimales)

$$\frac{547}{100}$$

<u>En el Numerador</u> escribimos el número "sin la coma"

- <u>Caso 2</u>: <u>Decimales Periódicos Puros</u>

Ejemplo: *Pasemos* $3,\overset{\frown}{956}$ *a fracción*

Todo el número sin la coma − La parte Entera → <u>En el Numerador</u> RESTAMOS todo el número menos la parte entera

$$3,\overset{\frown}{956} = \frac{3956 - 3}{999}$$

<u>En el Denominador</u> escribimos tantos **9 (nueves)** como decimales tengamos "debajo del arquito"

Entonces nos queda:

$$3,\overset{\frown}{956} = \frac{3956 - 3}{999} = \boxed{\frac{3953}{999}}$$

Una buena!
Verificamos si está bien lo que hicimos haciendo la cuenta con la calculadora

Entonces: 3953 ÷ 999 = 3 , 956 956 956 = $3,\overset{\frown}{956}$

Por lo tanto verificamos que está bien lo que hicimos porque volvimos a la expresión decimal del principio.

- <u>Caso 3</u>: <u>Decimales Periódicos Mixtos</u>

Ejemplo: Pasemos $1,42\overset{\frown}{3}$ a fracción

Todo el número sin la coma − **Todo** lo que **NO** está "debajo del arquito"

<u>En el Numerador</u> RESTAMOS todo el número menos todo lo que no está "debajo del arquito"

$$1,42\overset{\frown}{3} = \frac{1423 - 142}{900}$$

<u>En el Denominador</u> escribimos

Tantos **9 (nueves)** como decimales tengamos "debajo del arquito"
En el ejemplo es uno solo: el 3

Tantos **0 (ceros)** como decimales tengamos "fuera del arquito"
En el ejemplo son dos: el 4 y el 2

Entonces nos queda:

$$1,42\overset{\frown}{3} = \frac{1423 - 142}{900} = \frac{1281}{900}$$

Simplificando por tres: $1,42\overset{\frown}{3} = \frac{1281}{900} = \frac{427}{300}$ Verificamos que está bien lo que hicimos porque volvimos a la expresión decimal del principio.

Ahora verificamos con la calcu... Entonces: 427 ÷ 300 = 1,423333 = $1,42\overset{\frown}{3}$

Nota: Así como pasamos los números decimales a fracciones, se puede hacer a la inversa, en cuyo caso lo único que hay que hacer es la división. Por ejemplo si queremos pasar la fracción 3/5 a su correspondiente número decimal lo que hay que hacer es 3 dividido 5, con lo que nos queda: **3/5 = 3 ÷ 5 = 0,6**

Aproximación: Truncamiento y Redondeo

Se recurre a la aproximación por una cuestión de comodidad, el fin de aproximar una expresión decimal es escribir una expresión más corta y por ende más cómoda, mas teniendo en cuenta que hay números con muchos decimales y "a veces" es muy engorroso trabajar con tantos decimales y no vale la pena. Lo que nunca debemos olvidar es que al aproximar un valor, el valor resultante aproximado no es exactamente igual al original, sino que es "parecido".

Esto, si bien como decíamos nos genera un número diferente (O no exactamente igual) al original, por otro lado nos da la ventaja de sin tener que ser tan precisos, podemos tener un valor muy parecido que a fines prácticos para un cálculo nos son más útiles los valores aproximados.

Concepto de Valores Reales y valores Aproximados

Hay muchas cosas cotidianas cuyos valores reales son expresiones decimales infinitas (Y no periódicas) Poniendo un ejemplo, podemos citar "El peso" de una persona.

Si yo voy a una farmacia y me peso en la balanza, probablemente salga de allí diciendo "Peso 70,5 Kilos" o bien "Peso 70 kilos y medio". Esto puede ser muy cómodo para decirlo, pero en realidad no es cierto, ya que mi peso es muy poco probable que sea exactamente igual a 70,5 Kg, en realidad probablemente sea: 70,512324564679843219884321654984 Kg

El tema es que no tiene mucho sentido todos los decimales que siguen luego del primer decimal en este caso, por lo que es más práctico decir que peso 70,5 Kg y simplemente olvidarme de que existen muchos más decimales luego porque no tienen mucha importancia.

Este es un caso de aproximación, ya que la balanza no me indica el número exacto con los decimales infinitos que debe tener el valor de mi peso, sino que me indica uno o dos decimales, depende la balanza (Siempre y cuando sea digital, es decir que tenga un display con los números y no sea de agujas)

Imagínense que debemos hacer cuentas con por decir algo 50 decimales para hablar del peso de una persona ¿Qué sentido tendría tanta exactitud? Absolutamente ninguno. Es por ello que cotidianamente se recurre a la aproximación de valores, con lo cual, repito, sacrificamos la exactitud del valor real por otro valor que no es igual, pero que es muy parecido y a fines prácticos es útil.

Veremos entonces cuáles son a continuación los dos procesos que hay para aproximar un valor decimal.

Básicamente hay dos maneras de aproximar una expresión decimal estas son:

- ***Truncamiento:*** Se suprimen los decimales que no nos interesan. En este caso si queremos truncar una expresión de infinitos decimales y escribirla como otra expresión de solo 2 decimales, lo que hacemos es olvidarnos de todos los decimales que están después del segundo decimal.

- ***Redondeo:*** Se eliminan los decimales que no nos interesan y el último decimal se aproxima según la parte truncada. Por lo cual si queremos redondear una expresión de infinitos decimales a otra de 2 decimales, escribimos la expresión con el primer decimal y luego:
  - ✓ El segundo lo podemos dejar igual (Si el tercer decimal es menor a 5)
  - ✓ Al segundo decimal le subimos una unidad (Si el tercer decimal es mayor o igual a 5)

Obviamente es más cómodo el truncamiento, pero es más exacto el redondeo...
Vamos a truncar y redondear 23,486753 **con dos** posiciones decimales:

Expresión Truncada: 23,48

Directamente sacamos la parte decimal que nos sobra, o sea como truncamos con 2 posiciones, todo lo que está después del 2º número después de la coma, lo sacamos

Expresión Redondeada: 23,49

Como el primer decimal de la parte que sacamos es mayor o igual que 5 (En nuestro caso un 6) subimos una unidad el último número. Si no hubiese sido mayor o igual que 5 hubiera quedado igual que en el truncamiento.

Vamos a ver mejor un cuadro en donde truncamos y redondeamos varias expresiones para que se vea bien la diferencia entre ambas operaciones:

Se va a entender mejor observando el siguiente cuadro de ejemplos:

Expresión Original	Nº de decimales a aproximar	Truncamiento	Redondeo
1.56865445	2	1.56	1.57
5.12894520	3	5.128	5.129
3.12315580	4	3.1231	3.1232
0.12345440	3	0.123	0.123
1.00021210	4	1.0002	1.0002
4.0048	2	4	4
4.0054	2	4	4.01
4.9006	3	4.9	4.901
0.70000210	5	0.7	0.7
0.50000088	6	0.5	0.500001

Errores: Si bien no está para nada mal aproximar valores, como lo explicamos antes, en realidad al aproximar un valor por otro valor diferente, al ser diferentes los valores decimos que hay un "ERROR"

No es que hayamos hecho nada mal, sino que el ERROR corresponde a la diferencia que hay entre el "valor real" y el "valor aproximado" Vamos a ver a continuación una fórmula para calcular el ERROR

Definiciones de Error:

En Cálculo: **El error es el valor absoluto de la resta entre el "valor real" y el "valor aproximado"** $Ea = |Valor\ real - Valor\ aproximado|$

En Mediciones: **El error es el valor absoluto de la diferencia entre una medición y su valor más probable** (Siendo el valor más probable, el promedio de todas las mediciones que tenemos) $Ea = |X_i - \bar{X}|$

Por ejemplo veamos cual es el error de aproximar el valor 56/11 como 5,09
Como bien sabemos 56/11 es equivalente a la expresión: 5,090909090909 o bien $5,\overline{09}$

Aplicando la fórmula: $Ea = |Valor\ real - Valor\ aproximado| = |5,\overline{09} - 5,09| = 0,0009$

Error Relativo: Es el cociente entre el error y el valor real.
Error Porcentual: Es el cociente entre el error y el valor real multiplicado por 100.

En el ejemplo anterior, el error relativo es de: $Er = \dfrac{0,0009}{5,09} = 0,000178$

Y en el mismo ejemplo el error porcentual es de: $E_{\%} = \dfrac{0,0009}{5,09} \cdot 100 = 0,0178\ \%$

Como vemos al aproximar el valor, cometemos un error más bajo del 0,02 % (Algo muy despreciable para cálculos cotidianos) Para tener en cuenta que tan despreciable es este error, fíjense que por ejemplo para el peso de una persona de 50 Kg, ese error equivale menos de 9 gramos (Lo que pesa el más pequeño sobre de mayonesa) – Con esto nos damos cuenta de por qué es despreciable cometer ese error para simplificar las cosas.

by Dal-0r
para
TARINGA!

Ordenar de mayor a menor:

1) 0,03, 0,035 y 0,16
2) 0,01, − 0,2 y 0,006
3) − 0,018, − 0,01 y − 0,009
4) − 0,06, − 0,03 y 0,02
5) 0,0508, 0,05082 y 0,05009

Ordenar de menor a mayor:

6) 0,06, 0,061 y 0,1
7) 4,06, − 2,3 y 1,06
8) −1,25, − 2,79 y 6,45
9) 1,304, 1,3061 y 1,3009
10) − 2,008, − 2,0009 y − 2,0076

Pasar de decimal a fracción:

11) $5{,}75$
12) $12{,}9$
13) $8{,}042$
14) $-2{,}\overset{\frown}{8}$
15) $3.\overset{\frown}{356}$
16) $5{,}\overset{\frown}{04}$
17) $-1{,}\overset{\frown}{5943}$
18) $-1{,}857$
19) $-4{,}9\overset{\frown}{35}$
20) $3{,}564\overset{\frown}{1}$
21) $9{,}63\overset{\frown}{75}$
22) $11{,}5\overset{\frown}{139}$
23) $14{,}106\overset{\frown}{74}$
24) $-2{,}04\overset{\frown}{437}$
25) $3{,}\overset{\frown}{30}$
26) $3{,}30$
27) $13{,}\overset{\frown}{06}$
28) 1
29) $8{,}3\overset{\frown}{7}$
30) $11{,}5\overset{\frown}{72}$
31) $74{,}9\overset{\frown}{9}$
32) $41{,}\overset{\frown}{4}$
33) $65{,}761$
34) $63{,}\overset{\frown}{6}$
35) $51{,}\overset{\frown}{961}$
36) $28{,}\overset{\frown}{52}$
37) $64{,}\overset{\frown}{3}$
38) $41{,}9$
39) $36{,}\overset{\frown}{36}$
40) $33{,}2\overset{\frown}{47}$
41) $50{,}0\overset{\frown}{8}$
42) $1{,}\overset{\frown}{18}$
43) $63{,}05$
44) $28{,}0\overset{\frown}{3}$
45) $0{,}\overset{\frown}{76}$
46) $4{,}81\overset{\frown}{8}$
47) $0{,}000\overset{\frown}{90}$
48) $0{,}00\overset{\frown}{624}$
49) $0{,}00\overset{\frown}{05}$
50) $3{,}10\overset{\frown}{01}$

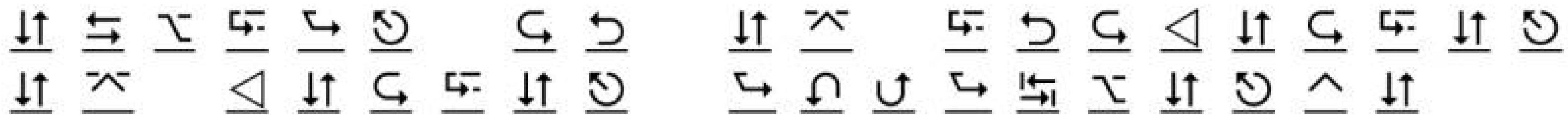
Calcular: (expresar el resultado como una fracción)

51) $0{,}04 + 0{,}\overset{\frown}{2}$
52) $0{,}31 + 2{,}\overset{\frown}{2}$
53) $0{,}05 + 4{,}12\overset{\frown}{5}$
54) $0{,}48 - 0{,}\overset{\frown}{3}$
55) $2{,}40 - 3{,}\overset{\frown}{5}$
56) $-0{,}\overset{\frown}{26} + 0{,}\overset{\frown}{18}$
57) $-3{,}\overset{\frown}{45} - 8{,}70$
58) $5{,}03 + 2{,}\overset{\frown}{58} - 4{,}93$
59) $3{,}6 - 9{,}\overset{\frown}{05} + 5{,}\overset{\frown}{71}$
60) $0{,}\overset{\frown}{03} \times 0{,}4$
61) $-0{,}\overset{\frown}{21} \times 0{,}5$
62) $2{,}3 \times (-1{,}4)$
63) $-0{,}0\overset{\frown}{06} \div (-0{,}0\overset{\frown}{05})$
64) $0{,}\overset{\frown}{36} \div 0{,}\overset{\frown}{6}$

Calcular: (expresar el resultado como una fracción)

65) $-0{,}2\overset{\frown}{5} \div 0{,}\overset{\frown}{05}$
66) $2 \div (-0{,}4)$
67) $-0{,}6 \div (-3)$
68) $0{,}0625 \div 0{,}\overset{\frown}{25}$
69) $0{,}1\overset{\frown}{96} \div (-2{,}8)$
70) $-25{,}6 \div 0{,}0\overset{\frown}{32}$
71) $2{,}\overset{\frown}{43} \div 0{,}\overset{\frown}{027}$
72) $0{,}5 \times (0{,}\overset{\frown}{08} + 0{,}\overset{\frown}{21})$
73) $(0{,}\overset{\frown}{41} - 0{,}\overset{\frown}{83}) \times (-0{,}\overset{\frown}{6})$
74) $(0{,}\overset{\frown}{36} - 0{,}\overset{\frown}{21}) \div 1{,}\overset{\frown}{5}$
75) $-(0{,}\overset{\frown}{02} + 0{,}\overset{\frown}{1}) \div 0{,}0\overset{\frown}{006}$
76) $(0{,}\overset{\frown}{2} + 0{,}\overset{\frown}{05}) \div (0{,}\overset{\frown}{3} + 0{,}\overset{\frown}{01})$

77) Descifrar la frase oculta: Con los códigos de cada letra, haciendo los cálculos, podrás descifrar la frase escrita, seguida del nombre del poeta argentino autor de la frase.



Códigos:

↻ $= 0{,}11\,6 \quad (0{,}945 + 1{,}027)$

◁ $= (1 - 0{,}\,2)^2 \div 0{,}0\,7 - 7{,}2\,1$

↶ $= \left(0{,}1\,6 \quad \frac{6}{5}\right)^2 + 0{,}70\,6$

⇆ $= (0{,}1\,3 + 0{,}4\,6)^2 - 0{,}00\,8$

↩ $= 0{,}1\,65 - (0{,}\,225 + 0{,}\,108)^2$

⇅ $= 0{,}29 - 0{,}087$

↲ $= 0{,}82323232323$

⇄ $= 0{,}2\,14 \quad 3$

↳ $= 0{,}2\,3 - \frac{19}{90}$

↺ $= \sqrt{0{,}\,44} - 0{,}\,369$

Letras:

A = 1/45	L = 56/75
E = 7/33	M = 11/37
O = 5/33	N = 3/55
U = 11/30	R = 7/30
C = 163/198	S = 23/45
D = 106/165	T = 3/110
F = 79/225	V = 17/30

⌅ $= \frac{2}{15} + (0{,}2\,45 + 0{,}0\,27) \div 0{,}\,45 - 0{,}\,2$

⤺ $= 0{,}12121212 + 0{,}0303030303.....$

^ $= 0{,}3\,24 - 0{,}5\,09 \quad (0{,}\,3 + 0{,}2\,3 \div 0{,}9\,3)$

⌥ $= \sqrt{\dfrac{(0{,}\,6 + 0{,}27) \quad \frac{209}{93}}{19} + 0{,}0233333333333...}$

Resolver los siguientes cálculos combinados, y expresar el resultado como Número Entero o Fracción según corresponda:

78) $\dfrac{0{,}\,2 + 1{,}\,1}{0{,}\,6} - 1$

79) $\dfrac{0{,}\,4 \cdot \frac{3}{5}}{0{,}\,3} + 1{,}2$

80) $\dfrac{\sqrt{0{,}\,04 \cdot \frac{11}{8} - 0{,}01\,5}}{0{,}\,2}$

81) $\sqrt{2 \cdot \dfrac{0{,}1\,4 \cdot \frac{9}{13}}{0{,}\,5}}$

82) $\dfrac{(0{,}1\,2 + 0{,}\,1)^2}{0{,}00\,7}$

83) $\dfrac{\left(0{,}5\,4 \cdot \frac{3}{5}\right)^2}{0{,}10\,8}$

84) $\sqrt{\dfrac{0{,}\,8}{(0{,}00\,7)^3}}$

85) $\sqrt{2{,}\,6 \quad \cdot \sqrt{(0{,}02\,7)}}$

86) $\sqrt[7]{1{,}0\,6 \quad \div (0{,}0\,2)^2 + 3^3}$

87) $\dfrac{0{,}13\,4 \cdot 0{,}\,81}{0{,}005} \cdot 0{,}\,27$

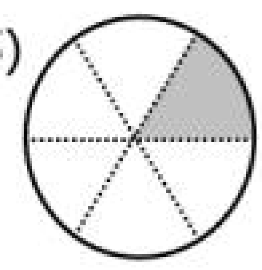
88) $\sqrt{\dfrac{\left(0{,}2\,4 + \frac{3}{5} + 0{,}1\,5\right)^3}{0{,}2\,3 + \frac{1}{10}} + 1}$

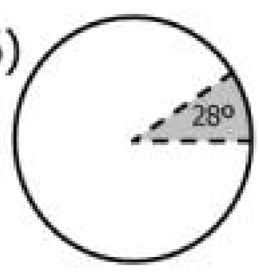
89) $\sqrt{\dfrac{0{,}3\,2 + 2{,}2\,1}{0{,}2\,1} \cdot \dfrac{2{,}7\,8 - 1{,}02\,5}{48{,}\,09} + 1}$

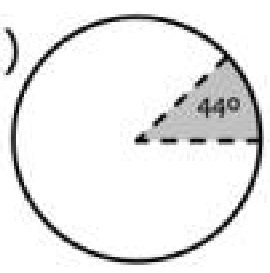
Completar el siguiente cuadro de truncamiento y redondeo:

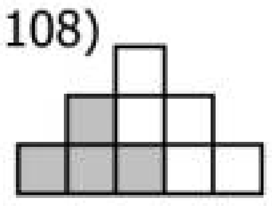
	Número	Nº de decimales a aproximar	Truncamiento	Redondeo
90)	0,50242299	2		
91)	0,88761746	3		
92)	0,92808027	3		
93)	0,23701423	4		
94)	0,20056455	3		
95)	0,19308942	4		
96)	0,19468308	2		
97)	0,86854530		0,86854	
98)	0,50088530		0,5	
99)	0,00051832		0,0005	
100)	0,02200733			0,02201
101)	0,74634066			0,75
102)	0,61533			0,615
103)	0,25097	3		
104)	0,00007392	7		

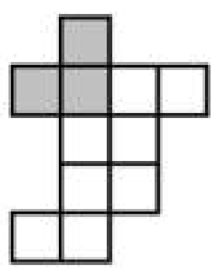
Decir el porcentaje que representa la parte sombreada de la figura. Aproximar el resultado con 3 posiciones decimales, mediante redondeo. Y Expresarlo de manera exacta como porcentaje periódico de infinitos decimales.

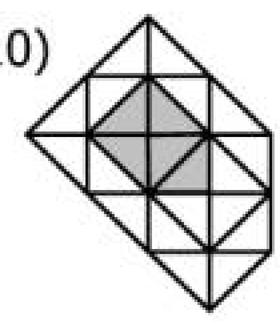
105)


106)


107)


108)


109)


110)


111) Si calculan en una inmobiliaria la superficie cubierta de un Duplex y les da por resultado 156,152 m^2 Pero por cuestiones de practicidad, publican el anuncio de la venta del Duplex y ponen que tiene 156 m^2 cubiertos de superficie ¿El error porcentual cometido es menor al 0,1%?

Aproximaciones con π

Primeros decimales de π = 3,141592654...

Como todos sabemos el valor de π tiene infinitos decimales, y para usar su tan importante valor en cuentas, lo que hacemos comúnmente es aproximar su valor con 2 decimales para facilitar las cuentas y porque tampoco es necesario en general mas justeza o exactitud que la de 2 decimales.

112) Si aproximamos el valor de π con 3 decimales y nos queda π=3,141 ¿Qué método utilizamos para la aproximación: Truncamiento o Redondeo?

113) Si queremos hacer una cuenta muy rápida y aproximada con el valor de π y tomamos el valor de π como π = 3 Para hacer las cuentas mentalmente y más rápido ¿Qué error porcentual cometemos tomando ese valor de π ?

114) Si queremos calcular el área de un círculo y queremos que el error porcentual sea menor al 0,06 % ¿Cuántos decimales tenemos que tomar para π como mínimo?

Problemas de Aplicación:

En una fábrica de Automóviles calculan el peso que tendrá un auto para diseñar los amortiguadores. Calculando todos los componentes del auto, el valor del peso del auto es de 746 Kg.

Estiman para el diseño de los amortiguadores que en promedio lo usará un conductor con un acompañante cuyos pesos promedio serían de 70 Kg cada uno. Y estiman además que en el baúl habrá una carga de 15 Kg. Luego de todos estos cálculos, diseñan los amortiguadores para un peso promedio superior al estimado (Por las dudas) en un 2%.

El problema es que no tuvieron en cuenta que la mayoría de las personas que compran ese auto le colocan un tubo de GNC que pesa 35 Kg en el baúl.

115) ¿Cuál es el error porcentual cometido al estimar el peso que deben soportar los amortiguadores?

116) Con el error porcentual cometido en el cálculo de los 20 Kg de menos que estimaron para la carga del baúl ¿Servirá el porcentaje de resguardo que previeron al diseñar los amortiguadores?

En una fábrica de Ropa, mandan a cortar trozos de tela para confeccionar unos pantalones de jeans. La medida de ancho de la tela para los jeans de un talle debe ser de 40 cm. En donde mandan a cortar las telas usan para medir los cortes una regla milimetrada.

Es por ello que en las especificaciones del corte la fábrica le indica para cortar la tela que la medida debe ser de 40cm $\pm$ 1mm. Esto se debe a que el error absoluto cometido en el corte no debe superar 1 milímetro (Ya que es la apreciación del instrumento de medida que se usa)

117) ¿Cuál es el error porcentual máximo permitido para realizar los cortes?

En las multas de una localidad por exceso de velocidad, se tolera un exceso del máximo permitido de solo un 3%, siendo el máximo permitido de 110 Km/h. Si un conductor marcha con su vehículo y su velocímetro le indica exactamente 107 Km/h, y el radar de la policía detecta 113,2 Km/h

118) ¿Cuál es el error porcentual del velocímetro del conductor? (Suponiendo que el radar de la policía es exacto)

119) ¿Evitará la multa el conductor por estar dentro de la tolerancia permitida?

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Ecuaciones con Números Enteros

Número de Tema: **14**

Área: **Matemática**

Ecuaciones: Una forma práctica de resolver una ecuación es despejar *(Aunque no es la manera más formal de resolverlas, sí es la más práctica y sencilla).* Despejar significa "Dejar a la X sola" de un lado del igual y pasar todo lo demás para el otro lado… Veamos que significa esto con un ejemplo:

Resolvamos la siguiente ecuación: $-2 . X + 5 = -13$

$-2 . X + 5 = -13 \quad -5$

Acá tenemos que pasar primero el 5. Como está sumando, lo pasamos para el otro lado del igual, con la operación contraria a la suma, que sería la resta: Por lo tanto la ecuación nos quedaría así: $-2 . X = -13 - 5$

$-2 . X = (-13 - 5) \quad :-2$

Luego tenemos que pasar el 2 que está multiplicando a la X. Por lo tanto, como está multiplicando, pasa dividiendo: $X = (-13 - 5) : -2$

Y ahora que ya despejamos, resolvemos la ecuación: $X = -18 : -2 \Longrightarrow X = +9$

Veamos las "reglas básicas" para pasar de términos

- **Lo que está sumando pasa restando**. Ejemplo: $X + 2 = -5$ ⇨ Despejando: ⇨ $X = -5-2$
- **Lo que está restando pasa sumando**. Ejemplo: $X - 3 = -9$ ⇨ Despejando: ⇨ $X = -9+3$
- **Lo que está multiplicando pasa dividiendo**. Ejemplo: $-3.X = 12$ ⇨ Despejando: ⇨ $X = 12 : -3$
- **Lo que está dividiendo pasa multiplicando**. Ejemplo: $X : (-2) = 7$ ⇨ Despejando: ⇨ $X = 7 . -2$
- **Las raíces cuadradas pasan como cuadrados**. Ejemplo: $\sqrt{X} = 4$ ⇨ Despejando: ⇨ $X = 4^2$
- **Los cuadrados pasan como raíces cuadradas**. Ejemplo: $X^2 = 16$ ⇨ Despejando: ⇨ $X = \sqrt{16}$

<u>De todos modos veremos cómo se resuelve una ecuación utilizando propiedades</u>:

Este método si bien es mas engorroso que el de "despejar la x" que vimos antes, en realidad es el método formal que se enseña. Lo bueno de este método es que nos permite familiarizarnos con las propiedades más importantes, pero es un poco más trabajoso. Lo ideal que recomiendo es que lo vean y estudien las propiedades y que sepan resolver las ecuaciones de esta manera aplicando propiedades, aunque luego por practicidad prefieran directamente aplicar las "reglas" para "despejar la x"

<u>Antes de ver cómo se resuelve una ecuación formalmente, veremos unas propiedades muy importantes</u>:

<u>Ley Uniforme</u>: La adición de dos Números Enteros es uniforme ya que su resultado es único. Si a ambos miembros de una igualdad se le suma un mismo número se obtiene otra igualdad.

$$\left.\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c = b + d$$

Por ejemplo si tenemos la igualdad: **5 = x**

Podemos sumar a ambos miembros de la igualdad un número y la igualdad se mantendrá
Supongamos que en el ejemplo "x" significa la cantidad de pesos que tengo en el bolsillo.
Sumamos a ambos miembros un valor cualquiera, por ejemplo 3, y nos quedaría: **5 + 3 = X + 3**

Que es lo mismo que decir: **8 = X + 3**

Analizando lo que me queda, vemos que es la misma igualdad, porque si "X" significaba la cantidad de pesos que tengo en el bolsillo y digo que $5 (Que es lo que tengo) + $3 debe ser igual a $8. Por lo tanto la nueva igualdad que nos quedó es válida.

Importante: La ley uniforme anunciada para número enteros, nos hace decir que vale para la resta también (Ya que por ejemplo la suma de dos enteros negativos es equivalente a la resta de dos enteros positivos.

Ley Cancelativa

La ley cancelativa es la propiedad recíproca de la ley uniforme.

$$\boxed{a + c = b + c \Rightarrow a = b}$$

Por lo tanto si yo tengo por ejemplo la siguiente ecuación: $\mathbf{x + \cancel{3} = 5 + \cancel{3}}$
Puedo cancelar a ambos miembros el mismo Número Entero

Y nos quedaría la ecuación: **x = 5**
Que como vemos es el paso inverso a la propiedad uniforme.

Lo mismo pasa con el producto: $\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d$ $\quad a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$

(Si "c" es distinto de Cero)

Veamos unos ejemplos:

Propiedad Uniforme **Propiedad Cancelativa**

Propiedad Uniforme:
Si tenemos la ecuación: **x = 5**
Sigamos con el mismo ejemplo
Podemos multiplicar a ambos miembros por un número entero cualquiera, por ejemplo 3
Entonces nos quedaría la ecuación: **3 x = 3 . 5** ⇨ O sea ⇨ **3 x = 15**
Y su significado es el mismo, ya que siguiendo con el ejemplo que la "x" significaba el dinero que tengo en el bolsillo, decir que el triple de lo que tengo (3x) es igual a 15, es la misma igualdad que antes, ya que esto significa que tengo $5. (Ya que el triple de 5 es 15)

Propiedad Cancelativa: Como habíamos dicho antes es la inversa de la propiedad uniforme.
Si tenemos la ecuación por ejemplo: **3 x = 3 . 5**, podemos cancelar lo mismo que esté multiplicando a ambos miembros ya que su efecto sería nulo y las ecuaciones serían equivalentes. Con lo cual nos quedaría la ecuación: **x = 5**

Otro Ejemplo: $5 \cdot (x+1) = 5 \cdot 8 \xrightarrow{\text{Aplicando la propiedad Cancelativa}} \cancel{5} \cdot (x+1) = \cancel{5} \cdot 8 \Rightarrow x + 1 = 8$

Y también con la División: $\left.\begin{array}{l} a = b \\ c \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ $\quad \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \Rightarrow a = b$

Si "c" es distinto de Cero

Propiedad Uniforme **Propiedad Cancelativa**

Sigamos con el ejemplo
Teníamos la ecuación: X = 5
En la que "x" significaba el dinero que tengo en el bolsillo

Si divido a ambos miembros por 2
Me quedaría ⇨ X : 2 = 5 : 2 ⇨ X : 2 = 2,5

Que significaría que la mitad de lo que tengo en el bolsillo (x:2) es $2,5, lo cual es cierto ya que si tengo $5, la mitad de ello es $2,5. Por lo tanto las ecuaciones obtenidas son equivalentes.

Explicación Alternativa: Todo esto que parece muy simbólico, lo podemos ver desde el punto de vista de lo que significa una balanza. En una ecuación, ambos miembros son como los platillos de una balanza, el signo igual "=" significa que la balanza está equilibrada.

- Ley uniforme en la suma: Significaría que si yo en una balanza equilibrada agrego a ambos platillos el mismo peso, la balanza seguirá igualada.
- Ley Uniforme en el producto: Significaría que si yo duplico o triplico los pesos de ambos platillos a la vez, la balanza también seguirá equilibrada.
- Ley Uniforme en la División: Significaría que si tengo el mismo peso en los dos platillos y luego dejo solo la mitad en cada uno, los platillos también seguirían equilibrados.

Resolución de Ecuaciones aplicando propiedades:

Resolvamos la siguiente ecuación: $-2 \cdot X + 5 = -13$

$-2 \cdot X + 5 - 5 = -13 - 5$ Aplicando la propiedad uniforme, sumamos en ambos miembros el mismo número (En este Caso "−5")

$-2 \cdot X \cancel{+5} \cancel{-5} = -13 - 5$ Aplicando la propiedad cancelativa, se "simplifican" los términos "+5" con "-5"

$-2 \cdot X = -18$

$(-2 \cdot X) / (-2) = -18 / (-2)$ Volvemos a aplicar la propiedad uniforme (En este Caso "con el -2")

Y nos queda resuelta la ecuación: $X = -18 : -2 \Rightarrow X = 9$

Del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico. Vamos a ver en ejemplos, como escribir una ecuación, dado un problema redactado.

Ejemplo 1

Lenguaje Coloquial	Lenguaje Simbólico
Un chico gasta \$15 de sus ahorros en un CD, luego la madre le da \$3 por portarse bien y hacer toda su tarea. Luego, gasta \$1 en una gaseosa. Le quedan luego de esto \$13 ¿Cuánto tenía antes de comprar el CD?	$X - 15 + 3 - 1 = 13$

Paso a Paso

La incógnita es lo que tenía al principio. Lo llamamos "X"	X
Luego Gasta \$15 en el Cd. Como lo gasta, se lo restamos a sus ahorros	$X - 15$
Luego le dan \$3. Como aumenta sus ahorros se lo sumamos.	$X - 15 + 3$
Luego vuelve a gastar. Esta vez \$1. Como lo gasta, se lo restamos	$X - 15 + 3 - 1$
Luego dice, que al final de todo esto le quedan \$13, entonces lo igualamos a 13	$X - 15 + 3 - 1 = 13$

Ejemplo 2

Lenguaje Coloquial	Lenguaje Simbólico
Al Doble de un número le resto 4. Luego al resultado lo multiplico por (-3) y obtengo como resultado 30. ¿De qué número se trata?	$(2X - 4) \cdot (-3) = 30$

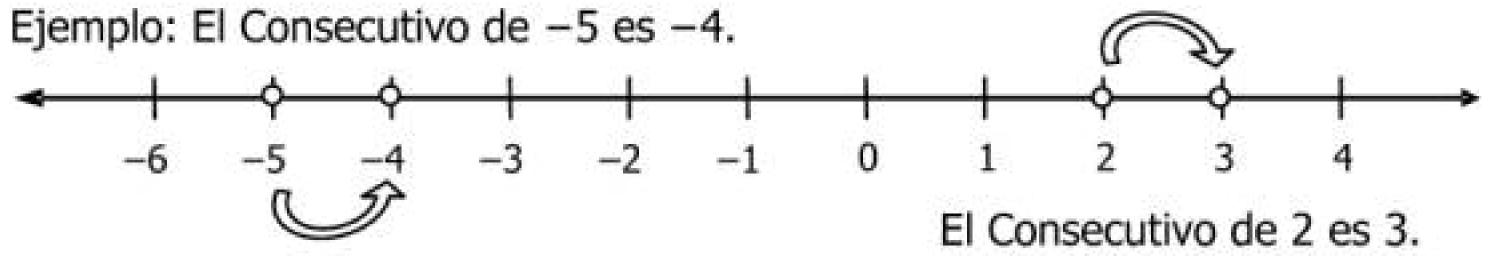
Paso a Paso

Si la incógnita es el número que llamamos "X", el doble de este número es 2 X	$2X$
A esto le tengo que restar 4. Entonces queda:	$2X - 4$
Luego dice que al resultado de esa resta la multiplico por (-3). Entonces tengo que poner a la resta entre paréntesis y luego multiplicar por (-3). Si no pusiera los paréntesis estaría mal ya que el (-3) debe multiplicar a toda la resta y si no pusiéramos los paréntesis, multiplicaría sólo al 4.	$(2X - 4) \cdot (-3)$
Ahora dice que toda esa cuenta da como resultado 30. Por lo tanto, debo igualar todo a 30.	$(2X - 4) \cdot (-3) = 30$

Consecutivo y Antecesor:

- El **Consecutivo** de un Número Entero es el número que le sigue en la recta numérica.
  → El Consecutivo de X es (X+1)

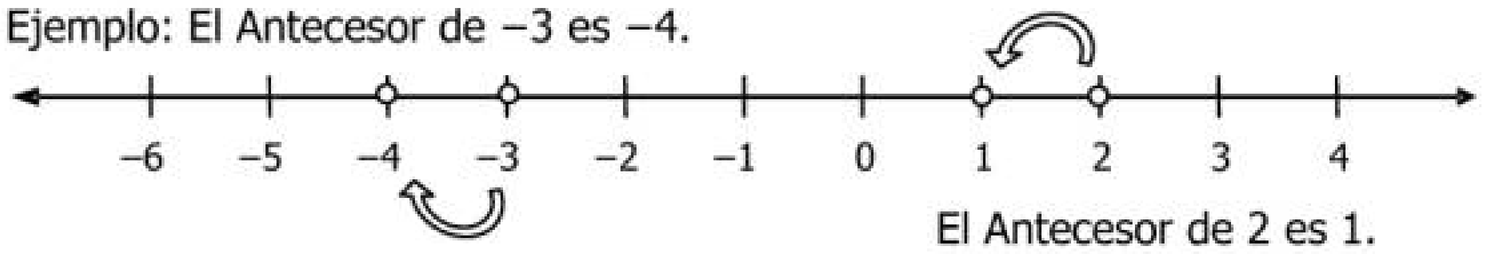
Ejemplo: El Consecutivo de −5 es −4.



El Consecutivo de 2 es 3.

- El **Antecesor** de un Número Entero es el número que le precede en la recta numérica.
  → El Antecesor de X es (X−1)

Ejemplo: El Antecesor de −3 es −4.



El Antecesor de 2 es 1.

Del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico.

Vamos a ver un ejemplo, de una ecuación con el consecutivo y otro con el antecesor de un número entero.

	Lenguaje Coloquial	Lenguaje Simbólico
Ejemplo 1:	Al doble del consecutivo de un número, le sumo 5 y me da por resultado 21	2 . (X+1) + 5 = 21
Ejemplo 2:	El antesesor del triple de un número es igual a 20	3.X - 1 = 20

<u>¿Qué son las Inecuaciones?</u> Una inecuación es una desigualdad de expresiones algebraicas, en la cual, en uno o ambos términos, tenemos una incógnita.

Repaso : ¿Te acordás de los signos "mayor que" y "menor que"?

$13 > 7$ ⇨ Se lee: 13 "**es mayor que**" 7

$20 < 43$ ⇨ Se lee: 20 "**es menor que**" 43

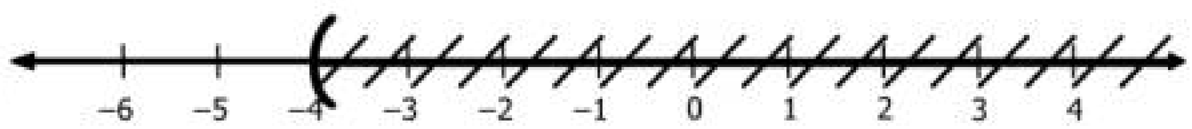
$x \geq 2$ ⇨ Se lee: x "**es mayor o igual que**" 2

Fijate en los ejemplos que siempre el "piquito" del signo apunta al número menor, y las "dos patitas" al mayor.

<u>Nociones básicas</u>: Veamos la siguiente Inecuación: $\mathbf{X > -4}$

"**x**" representa a **todos** lo valores mayores a −4

Grafiquémoslo:



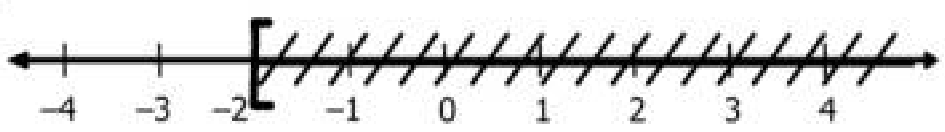
Así, este gráfico se denomina <u>intervalo</u>. Como el signo es "**>**" entonces **no incluye al "−4"** y en el gráfico se usa un **paréntesis**. Si hubiera sido "≥" **lo hubiera incluido** y para graficarlo en lugar de usar un paréntesis en el "−4" hubiéramos usado un **corchete**.

<u>Resolución de Inecuaciones:</u> La manera de resolver una inecuación es muy similar a la de resolver una ecuación: Hay que dejar a la "X" sola despejando y operando (O utilizar las propiedades)

Si optamos por utilizar los "despejes" hay que tener en cuenta una sutil diferencia en el despeje de términos. La única diferencia en el "Despeje de Términos" es que al pasar de miembro, <u>multiplicando o dividiendo un número negativo</u>, tengo que "**<u>invertir</u>**" el signo de la desigualdad.

Ejemplo: $(-2)\cdot x \leq 4 \quad \Rightarrow \quad x \geq \dfrac{4}{-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \geq -2}$

"Invertimos" el signo



Como pasamos dividiendo el (−2) que es negativo, tenemos que "invertir" el signo de la desigualdad.

Nota: la propiedad uniforme del producto y la división no es válida en desigualdades, ya que al multiplicar números negativos queda invertida la desigualdad (Que es lo mismo que decimos cuando "pasamos" multiplicando o dividiendo algo negativo que tenemos que invertir el signo de la desigualdad).

<u>Ahora en lenguaje coloquial</u>:

	Lenguaje Coloquial	Lenguaje Simbólico
Ejemplo:	"La diferencia entre 18 y el cuádruplo de un cierto número nunca supera a 10" ¿De que números se trata?	18 - 4.X ≤ 10

Primero paso el 18 que estaba sumando para el otro lado restando. ⇨ $-4.X \leq 10 - 18$ ⇨ Hago la resta: $10 - 18 = -8$ ⇨ $-4.X \leq -8$

Ahora paso el (−4) que está multiplicando a la "X" para el otro lado dividiendo. <u>Ojo, como paso dividiendo algo de signo negativo, tengo que dar vuelta el signo de la desigualdad</u> ⇨ $X \geq -8 : -4$ ⇨ Hago la división: $-8 : -4 = 2$ ⇨ $\boxed{X \geq 2}$

➢ <u>Resolver las siguientes ecuaciones</u>:

1) $5 = x + 8$
2) $-10 + x = -3$
3) $7 = 5 - x$
4) $x - 2 = -16$
5) $-8 = 4 \cdot x$
6) $x \cdot 2 = -6$
7) $-32 : x = -8$
8) $-3 = x : 5$
9) $3 + 2 - 5 + x = 2 + 1 - 3$
10) $-2 + 6 - 12 = x + 5 - 1$
11) $2 + 6 - 1 = x + 16 - 4$
12) $-5 - 6 + x = 5 - 8 + 3$
13) $6 - 9 + x + 9 = -4$
14) $-6 = 4 + x + 3 - 5$
15) $7 - 9 = 2 + x - 14$
16) $2 + 15 - 9 = x + 3 - 5$
17) $4 + 6 + x = -14 + 3$
18) $4x - 2 = -10$
19) $-6x + 7 = -17$
20) $2x + 5 = 3$

➢ <u>Resolver las siguientes ecuaciones con mas de una “x”</u>:

21) $7x = 4x - 6$
22) $-2x = 9 - x$
23) $-6x = -24 + 2x$
24) $10 = 15 - 5x$
25) $x - 8 = 4 - x$
26) $3x - 10 = 18 - x$
27) $7x + 8 = 3x - 4$
28) $-2 - 3x + 5 = -5 - 8x + x$
29) $x - 2 = -3 - 2x - 8$

➢ <u>Resolver las siguientes ecuaciones aplicando Propiedad Distributiva</u>.

30) $-15x + 12 + 3.(2x-6) = 3x-(21x-1)+2$
31) $4 - 2 . (3 - x) + 5 x - 7 = 12 x - 19$
32) $(9 x + 6) : 3 + 2 = 13$
33) $(8 x - 6) : 2 = 3 x - (6 - 2 x) + 7$
34) $(12 x + 8) : 4 = (9 x - 6) : 3 + 4$
35) $-3x + 2 - 5 (7-8x) = 4x + 3x - (2x+3) + 27x$

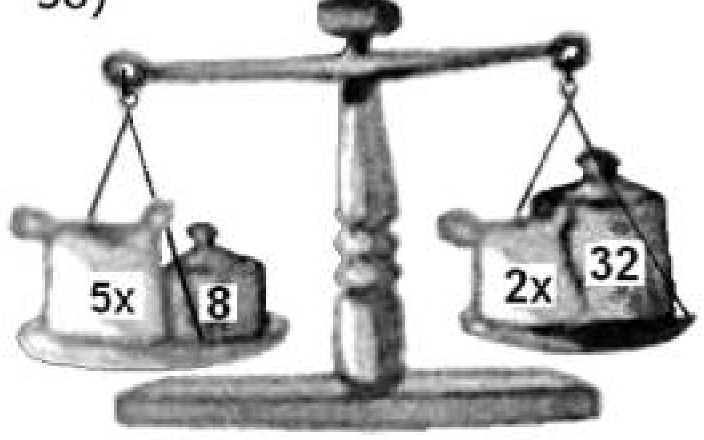
➢ <u>Resolver las siguientes ecuaciones</u>:

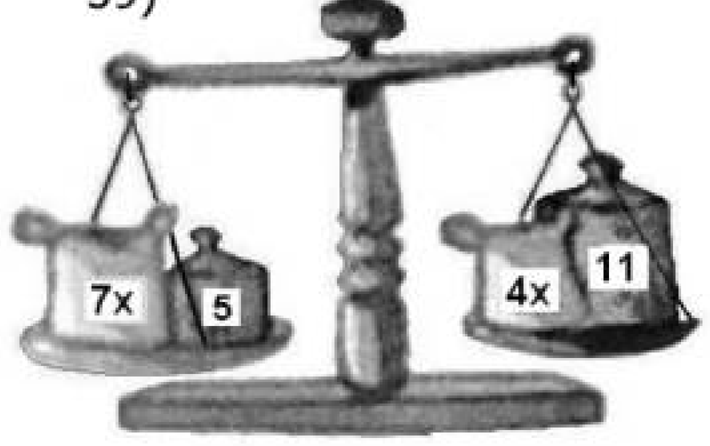
36) $x + 3 (x - 1) - 7 = 6$
37) $3 x - 12 : 3 + 2 + 3 (x - 1) = 13$
38) $8 : 4 + 2 (x + 1) - 10 : 5 + 5 = 9$
39) $9 - 8 : 2 + 3 x - 2 (x + 1) = 18 : 3 - 6 : 3 + 1$
40) $(6 x - 2 . 6 - 1 + 3 x) : 2 = -38$
41) $19 x + 17 + 3 (2 x - 1) = x - 10$
42) $5 - 2 x + 4 : 2 + 3 (x + 1) = 5 . 3 + 1$
43) $3 x + 2 - 2 (2 x - 3) = x - 2$
44) $x : 9 + 14 : 2 + 5 = 10 : 2 + 3 + 3 . 2 - 1$
45) $2 (3 x - 15) - 4 x + 20 = 2$

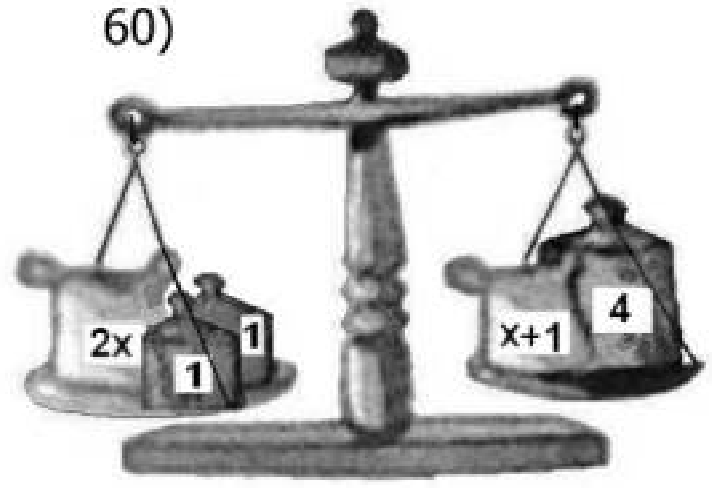
➢ <u>Resolver las siguientes ecuaciones con Números Enteros</u>.

46) $\dfrac{x+5}{-3} = 3x-5$
47) $\dfrac{x+38}{5} = (6+9x):3$
48) $\dfrac{2x-3}{-3} = 2 \quad (1+x) - 9$
49) $\dfrac{2x+9}{5} = x+3$
50) $\dfrac{2-3x}{4} = -1$
51) $\dfrac{x}{-2} = 3-x$
52) $\dfrac{(x+5)^2}{-2} = -8$
53) $\dfrac{-10}{x} + 3 = (-10) \div (-2)$
54) $\dfrac{x}{3} = 2 \quad (x-5)$
55) $\dfrac{\sqrt{x+5}}{-2} = -1$
56) $\dfrac{11-2x}{5} = -x+1$
57) $\dfrac{8}{x+4} = (-10+2) \div (-2)$

➢ Para cada balanza equilibrada, averiguar los valores de “x” Planteando una ecuación:

58)


59)


60)


Reflexionar que pasaría con el equilibrio de cada una de estas balanzas si: (Relacionarlo con las ecuaciones)

- Les agregara la misma cantidad de peso de ambos lados.
- Les sacara la misma cantidad de peso de ambos lados.
- Duplicara, triplicara, cuadriplicara, etc, el peso de ambos lados.
- Dividiera por 2, por 3, o por algún número el peso de ambos lados.

➢ Problemas: Plantear una ecuación y resolverla.

61) Supongamos que de un lado de la balanza tengo 2 pesas de 50 gramos y 4 pesas iguales que desconozco su peso. Del otro lado tengo una pesa de 20 gramos y dos de 60 gramos. La balanza está equilibrada ¿Cuál es el peso de las pesas que desconozco?

62) Supongamos ahora una balanza que del lado izquierdo tiene dos pesas iguales cuyo peso desconocemos y una pesa de 50 gramos, del lado derecho, la balanza tiene, una pesa de 30 gramos, otra de 70 gramos y dos de 80 gramos. A su vez, esta balanza no está equilibrado, sino que se inclina hacia su derecha, pero sabemos que para que quede equilibrada, deberíamos duplicar exactamente el peso del lado izquierdo. ¿Cuánto pesan las dos pesas del lado izquierdo que desconocemos su peso?

63) Martín gastó $12 de lo que tenía ahorrado en un regalo para su hermano, luego gastó $3 en golosinas y luego se ganó la misma cantidad que tenía ahorrados al principio en un juego. Después de todo esto, contó su dinero y tenía $23 ¿Cuánto tenía ahorrado al principio?

64) Andrés gastó $75 de su dinero ahorrado en la primera semana del mes, luego gastó $47 la segunda semana y $36 en la tercera, en la cuarta semana gastó lo mismo que en la segunda. Luego cobró su sueldo, su sueldo es $182 más de lo que tenía ahorrado a principios de mes, y después contó su dinero, contó $413. ¿Cuánto tenía ahorrado al principio?

65) Susana piensa un número negativo, luego lo multiplica por 3, luego al resultado le suma 44. Esta cuenta le da por resultado 23 ¿Qué número había pensado?

66) Silvia piensa un número negativo, le suma 6, luego al resultado lo multiplica por (-4) y al resultado de esta cuenta le suma 17. Todo esto le da 9 ¿En qué número había pensado Silvia?

67) Si a un cierto número entero, le sumo 5, luego al resultado lo divido por 7 y luego a la resultado le resto 4, obtengo como resultado (-6) ¿De qué número se trata?

➢ Dar el consecutivo de los siguientes números enteros:

68) -5 69) 4 70) -1 71) 0 72) X 73) $X+5$

➢ Dar el antecesor de los siguientes números enteros:

74) -5 75) 1 76) -1 77) 0 78) X 79) $X+5$

➢ Plantear las ecuaciones y resolver:

80) La suma entre un número y su consecutivo es 43 ¿De qué número se trata?

81) La suma entre un número y su consecutivo es (-13) ¿De qué número se trata?

82) El triple del consecutivo de un determinado número es (-12) ¿De qué número se trata?

83) El consecutivo del triple de un determinado número es (-17) ¿De qué número se trata?

84) El doble de un número, mas el antecesor de dicho número da 11 ¿De qué número se trata?

85) Si a un determinado número lo divido por 3, al resultado le sumo 4 y le resto el consecutivo de dicho número me da por resultado (-3) ¿De qué número se trata?

86) Si al triple de un determinado número le resto 5 y al resultado le sumo el antecesor de dicho número me da por resultado 6 ¿De qué número se trata?

87) El doble del consecutivo de un número menos el antecesor de dicho número es 8 ¿Qué número es?

88) Si al consecutivo de un número lo multiplico por 7 me da lo mismo que si al consecutivo de este número lo hubiera multiplicado por 19 ¿De qué número se trata?

89) Si al antecesor de un número lo multiplico por (-4) me da lo mismo que si al consecutivo de dicho número lo multiplico por (-6) ¿De qué número se trata?

90) Si elevo un número positivo al cuadrado y le resto 7, me da por resultado 18 ¿De qué número se trata?

➢ Inventar una situación problemática o con números para cada ecuación (Además de resolverlas)

91) (X + 7) . 3 = 33
92) (X − 2) : 2 = 2
93) 5.X + 3 = 3
94) 13 −2 . (X +1) = 5
95) (X − 1) : 3 = 1
96) (X − 1) . 2 − 5 = −1
97) (X +1) + (X −1) = 2

➢ Más ecuaciones para hallar X, esta vez con potencias y raíces:

98) $X+(-5)\cdot\left[\ (-2)^2-\left(\sqrt{9}-1\right)\ \right]+8\div 4=-5$

99) $4-(-1)^3-\left(\sqrt{4}-X\right)+6\div(-2)=1$

100) $\sqrt[3]{-1}-(-1)^3+X-8\div(-4)=9$

101) $-1+\sqrt[3]{-8}-(-2)^2-X+2\cdot\left(-\sqrt[3]{-27}\right)=-5$

102) $(-1)^0+\sqrt[3]{-1}-2X=-3\cdot\left(\sqrt[3]{-8}+3\right)+5$

103) $-3+(-1)^5-\sqrt[3]{1}=2\cdot\left(\sqrt[3]{-64}+X\right)-\sqrt[3]{-1}$

104) $4-(-1)^3+\sqrt[3]{-1}=-6\cdot\left(\sqrt[3]{-8}+1\right)-X+4$

105) $-X+(-1+2)^3-\sqrt[3]{(-2)\cdot(-4)}=-15\div\left(\sqrt[3]{-1}+(-2)^2\right)+3$

106) $-6\cdot\left[\ x-\left(\sqrt[3]{-8}+1\right)\ \right]+\sqrt[3]{-1}=5\cdot(x-8)$

107) $2\cdot\left[\ x-\left(\sqrt[3]{-27}-(-1)^2\right)\ \right]=4$

108) $x-\left(\sqrt[3]{-64}\right)=(2x+12)\div 4$

109) $\sqrt{x-2\cdot\left(\ 2-\sqrt[3]{-7+6}\ \right)}=\left(2\sqrt{-3\cdot 5+8^2}-11\right)\div 3$

110) $\sqrt{\sqrt{-x+85}+\left(-4\cdot\sqrt[3]{-143+79}\ \right)}=5$

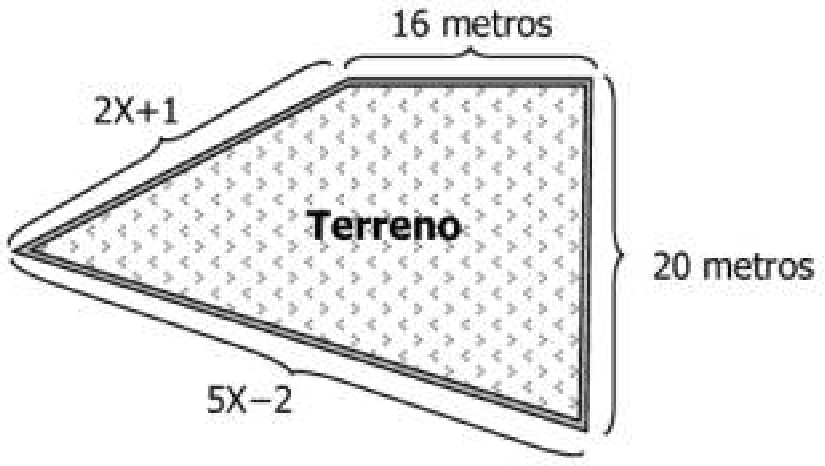
111) $5\cdot\sqrt{2x}-4=44\div\sqrt{-95+6^3}+96\div\left[3^2+\left(3+\sqrt[3]{-64}\right)\right]$

112) Buscar un número entero cuya raíz cúbica dé: $-(-2)^2$

113) Buscar un número entero, al cual, sumándole la raíz cúbica de (−8), me dé por resultado la raíz cúbica de (− 64).

114) Si a un número entero lo elevo al cubo y le sumo la mitad del cuadrado de −4, obtengo como resultado −15. ¿De qué número entero se trata?

115) La figura es el esquema de un terreno al que se lo quiere alambrar con tres vueltas de alambre. El dueño compró el alambre que cuesta \$0,50 el metro y gastó \$84. Calcular "x"



116) La edad de Matías al cuadrado menos 71 es igual 73. ¿ Cuántos años tiene Matías?

117) La edad que tenía Victoria hace tres años es igual al doble de la edad que tendrá dentro de dos años menos 22. ¿Cuántos años tiene Victoria?

118) Una persona que nació en el año 13 antes de Cristo, en el año 16 después de Cristo, tuvo su tercer hijo. ¿Qué edad tendrá cuando su tercer hijo tendrá 17 años?

119) A una sustancia que inicialmente se encontraba a 12ºC bajo cero, se le aumenta su temperatura una cantidad "X" de grados centígrados, luego se le aumenta el doble de lo que se le había aumentado antes, y luego se la disminuye 3ºC. Si finamente esta sustancia quedó a una temperatura de 6ºC positivos, ¿cuál fue la cantidad "X" de grados centígrados que se aumento al principio?

120) El 4 de julio la temperatura en Comodoro Rivadavia fue de 5ºC bajo cero, el 5 de julio la temperatura ascendió 4ºC y el 6 de julio ascendió otros 3ºC. Si el 7 de julio la temperatura fue de 2ºC bajo cero, ¿cuánto ascendió o descendió la temperatura entre el 6 y el 7 de julio en esa ciudad?

- <u>Resolver las siguientes inecuaciones</u>:

121) $X + 3 > 7$
122) $X - 1 \geq -2$
123) $X - 5 \leq -3$
124) $X + 4 < -1$
125) $X + 3 - 5 > -2 + 1$
126) $X + 10 - 29 < -56 + 19$
127) $2X \geq 8$
128) $3X \leq -12$
129) $11X > -5 + 27$
130) $2X + 3 < 9$
131) $5X + 1 > -14$
132) $X : 3 > 5$
133) $X : 2 - 3 \leq -7$
134) $X : 5 - 7 > -6$
135) $3X + 4 < 2X + 9$
136) $7X - 8 \geq 5X + 4$
137) $11X - 6 > 4X + 1$
138) $9X + 5 \leq 5X - 11$
139) $7X - 8 < 4X - 26$
140) $3X + 5 > 5$
141) $9X - 6 \leq -6$
142) $3X + 4 \geq X + 4$
143) $2 . (X + 3) < 6$
144) $2 . (X + 3) > X + 1$
145) $3 . (X - 5) \geq X - 7$
146) $5 . (X - 2) < 2 + 4X$
147) $7.(X - 3) > 3.(X + 1)$
148) $2 . (X + 4) > 0$
149) $3 . (X - 5) < 0$
150) $10 . (8 X - 120) \leq 0$

- <u>Resolver las siguientes Inecuaciones</u>. (Ojo con los signos "<" y ">")

151) $-2X > 8$
152) $-X < -2$
153) $1 - X \geq 0$
154) $-3x + 8 \leq -4$
155) $-2 - 4X > -10$
156) $-5X + 1 < -9$
157) $X : (-2) > 3$
158) $X : (-3) \leq 0$
159) $X : (-3) + 2 \leq 4$
160) $X : (-5) - 2 \leq -3$
161) $2X - 10 : 2 > 1$
162) $-3X + 12 : 3 \geq 1$
163) $2X + 5 < 5X + 2$
164) $7X - 5 < 11X + 3$
165) $4 - 6X \geq X - 10$
166) $(X - 5) : (-2) > 4$
167) $(2X + 1) : (-3) \leq 5$
168) $-2 (X + 3) < -10$
169) $-3 (X - 5) \geq X - 9$
170) $2 (X + 8) < 7 (X + 8)$
171) $-3 (X + 5) \geq -6 (X - 8)$

- <u>Problemas</u>:

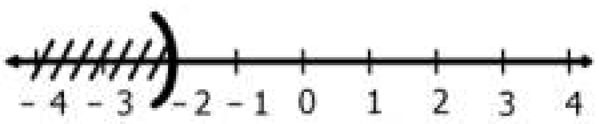
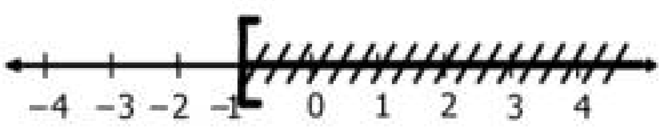
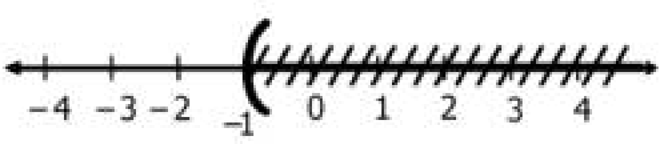
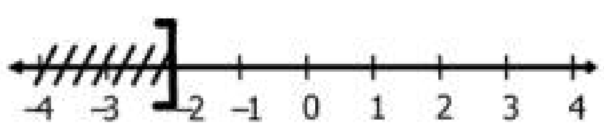
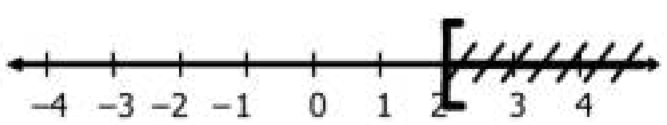
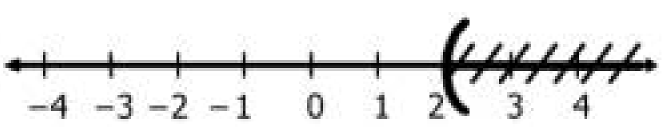
172) Hallar el conjunto de números o la desigualdad correspondiente para números tales que si se les suma 3, da por resultado un número entero mayor a 5.

173) Hallar el conjunto de números o la desigualdad correspondiente para números tales que si se los multiplica por (-2) y al resultado se le suma 5, da por resultado un número entero menor a 1.

174) Hallar el conjunto de números o la desigualdad correspondiente para números tales que si se los suma a su consecutivo da por resultado un número entero menor o igual a 7.

175) Si al doble de la edad de María le resto 5 años, el resultado es menor a 11
¿Qué edad podría tener María?

- <u>Unir con Flechas Cada gráfico al intervalo que lo representa</u>:

176)		$X > -1$
177)		$X \leq -2$
178)		$X \geq 2$
179)		$X < 2$
180)		$X \geq -1$
181)		$X < -2$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Ecuaciones con Números Racionales

Número de Tema: **15**

Área: **Matemática**

Ecuaciones: Una forma de resolver una ecuación es despejar (Si bien no es la manera más formal de resolverlas, es la más sencilla y por eso es la que vamos a utilizar en este libro). Despejar significa "Dejar a la X sola" de un lado del igual y pasar todo lo demás para el otro lado...

Antes que nada, repasemos las "reglas básicas" para pasar de términos

- **Lo que está sumando pasa restando**. Ejemplo: $x + \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$ ⇨ Despejando: ⇨ $x = \frac{1}{4} - \frac{2}{3}$
- **Lo que está restando pasa sumando**. Ejemplo: $3x - \frac{1}{7} = \frac{2}{5}$ ⇨ Despejando: ⇨ $3x = \frac{2}{5} + \frac{1}{7}$
- **Lo que está multiplicando pasa dividiendo**. Ejemplo: $\frac{2}{5} \cdot x = 4$ ⇨ Despejando: ⇨ $x = 4 \div \frac{2}{5}$
- **Lo que está dividiendo pasa multiplicando**. Ejemplo: $x \div \frac{3}{11} = \frac{2}{7}$ ⇨ Despejando: ⇨ $x = \frac{2}{7}\ \frac{3}{11}$
- **Las raíces cuadradas pasan como cuadrados**. Ejemplo: $\sqrt{x+1} = \frac{1}{3}$ ⇨ Despejando: ⇨ $x+1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$
- **Los cuadrados pasan como raíces cuadradas**. Ejemplo: $\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ⇨ Despejando: ⇨ $x - \frac{2}{5} = \sqrt{\frac{1}{4}}$

Ejemplo de resolución de ecuaciones. Resolvamos la siguiente ecuación: $\frac{11}{6}X - \frac{1}{5} = 2$

$$\frac{11}{6}X - \frac{1}{5} = 2 \quad +$$

Acá tenemos que pasar primero el −1/5. Como está restando, lo pasamos de miembro, sumando: Por lo tanto la ecuación nos quedaría así:

$$\frac{11}{6}X = 2 + \frac{1}{5}$$

Hacemos la cuenta:

$$\Rightarrow \frac{11}{6}X = \frac{11}{5}$$

$$\frac{11}{6}X = \frac{11}{5} \quad \div$$

Luego tenemos que pasar el 11/6 que está multiplicando a la X. Como está multiplicando, pasa dividiendo:

$$X = \frac{11}{5} \div \frac{11}{6} \Rightarrow X = \frac{11}{5}\ \frac{6}{11} \Rightarrow \boxed{X = \frac{6}{5}}$$

Del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico.

Vamos a ver en ejemplos, como escribir una ecuación, dado un problema redactado.

Ejemplo 1

Lenguaje Coloquial	**Lenguaje Simbólico**
Un auto recorre primero los 2/5 de la carrera, luego recorre 1/4 de la carrera y le quedan por recorrer 860 metros. ¿Cuánto es el recorrido total?	X = 2/5 X + 1/4 X + 860

Paso a Paso

La incógnita es el recorrido total. Lo llamamos "X"	X
Lo que recorre en la primera etapa es 2/5 del recorrido, o sea 2/5 de X	2/5 X
Lo que recorre en la segunda etapa es 1/4 del recorrido, o sea 1/4 de X	1/4 X
Igualamos "X" a la suma de las partes que va recorriendo...	X **= 2/5 X + 1/4 X +** ...
Y falta agregar lo que todavía no recorrió, ya que la suma de lo que recorrió y lo que le falta es el total "X"	X = 2/5 X + 1/4 X **+ 860**

Ejemplo 2

Lenguaje Coloquial	**Lenguaje Simbólico**
Ariel tiene ahorrados una cantidad "X" de dinero. Luego gasta 1/3 de sus ahorros en un regalo y luego gasta 1/2 de lo que le queda en ropa. Le quedan después de estos gastos $25 ¿Cuánto tenía al principio?	X - 1/3 X - 1/2 (X - 1/3) = 25

Paso a Paso

Si la incógnita es lo que tenía ahorrado al principio, lo llamamos "X"	X
A esto le restamos primero su tercera parte, o sea X - 1/3 X	X **- 1/3 X**
Luego dicen que gasta 1/2 de lo que le queda. Si ya había gastado la tercera parte, le quedaba no "X" sino "X - 1/3 X" entonces ahora gasta 1/2 de "X -1/3 X". Por lo tanto se lo volvemos a restar a lo que tenía hasta ahora.	X - 1/3 X - **1/2 (X - 1/3)**
Ahora nos dicen que luego de estos gastos le quedan $25, entonces esto lo igualamos a 25 y queda planteada la ecuación.	X - 1/3 X - 1/2 (X - 1/3) **= 25**

Otro ejemplo de resolución de ecuaciones:
Veamos ahora un ejemplo más difícil, Resolvamos la ecuación: $\frac{1}{3}X + 2 = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}X + 3\right) + \frac{7}{10} + \frac{39}{35} \div \frac{6}{7}$

Lo primero que hacemos es separar en términos: $\overbrace{\frac{1}{3}X}\ \overbrace{+\,2} = \overbrace{\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}X + 3\right)} + \overbrace{\frac{7}{10}} + \overbrace{\frac{39}{35} \div \frac{6}{7}}$

Ahora, vamos a resolver los términos que se pueden resolver haciendo simplemente la cuenta:

$$\overbrace{\frac{1}{3}X}\ \overbrace{+\,2} = \overbrace{\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}X + 3\right)} + \overbrace{\frac{7}{10}} + \boxed{\frac{39}{35} \div \frac{6}{7}} \Longrightarrow \frac{1}{3}X + 2 = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}X + 3\right) + \frac{7}{10} + \frac{13}{10}$$

Ahora, aplicamos la propiedad distributiva, para eliminar los paréntesis

$$\frac{1}{3}X + 2 = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}X + 3\right) + \frac{7}{10} + \frac{13}{10} \Rightarrow \frac{1}{3}X + 2 = \boxed{\frac{1}{4}\,\frac{5}{6}X} + \boxed{\frac{1}{4}\,3} + \frac{7}{10} + \frac{13}{10} \Rightarrow \frac{1}{3}X + 2 = \frac{5}{24}X + \frac{3}{4} + \frac{7}{10} + \frac{13}{10}$$

Ahora pasamos todos los términos con "X" de la izquierda y todos los números a la derecha del igual:

$$\frac{1}{3}X + \boxed{2} = \boxed{\frac{5}{24}X} + \frac{3}{4} + \frac{7}{10} + \frac{13}{10} \Longrightarrow \frac{1}{3}X - \frac{5}{24}X = \frac{3}{4} + \frac{7}{10} + \frac{13}{10} - 2$$

Hacemos las cuentas que hay de cada lado del igual

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}X - \frac{5}{24}X = \frac{8X - 5X}{24} = \frac{3X}{24} = \frac{1}{8}X \\ \frac{3}{4} + \frac{7}{10} + \frac{13}{10} - 2 = \frac{15 + 14 + 26 - 40}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \end{array}\right\}$$

Despejamos y resolvemos:

$$\frac{1}{8}X = \frac{3}{4} \Rightarrow X = \frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{3}{4}\ 8 = 6$$

¿Qué son las Inecuaciones? Son desigualdades de expresiones algebraicas, en las cuales tenemos en uno o ambos miembros una incógnita.

¿Te acordás de los signos "mayor que" y "menor que"?

Fijate en los ejemplos que siempre el "piquito" del signo apunta al número menor, y las "dos patitas" al mayor.

$\frac{2}{3} > \frac{1}{3} \longrightarrow$ Se lee: $\frac{2}{3}$ *es MAYOR a* $\frac{1}{3}$

$\frac{-2}{3} < \frac{-1}{9} \longrightarrow$ Se lee: $\frac{-2}{3}$ *es MENOR a* $\frac{-1}{9}$

$\frac{-1}{3} \leq X \longrightarrow$ Se lee: $\frac{-1}{3}$ *es MENOR O IGUAL a X*

Nociones básicas: Veamos la siguiente Desigualdad: **X > −3/4**

"**x**" representa a **todos** lo valores mayores a −3/4... Grafiquémoslo:

Recordemos que si pasamos la fracción a decimal −3/4 equivale a −0,75

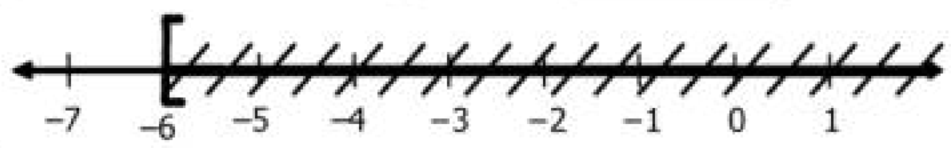
Así, este gráfico se denomina <u>intervalo</u>. Como el signo es "**>**" entonces **no incluye al "−3/4"** y en el gráfico se usa un **paréntesis**. Si hubiera sido "≥" **lo hubiera incluido** y para graficarlo en lugar de usar un paréntesis en el "−3/4" hubiéramos usado un **corchete**.

<u>Resolución de Inecuaciones:</u> La manera de resolver una inecuación es la misma que la de resolver una ecuación: Hay que dejar a la "X" sola despejando y operando, salvo que hay una sutil diferencia en el despeje de términos. La única diferencia en el "Despeje de Términos" es que al pasar de miembro, <u>multiplicando o dividiendo un número negativo</u>, tengo que "<u>dar vuelta</u>" el signo de la desigualdad.

Ejemplo: $\left(\frac{-2}{3}\right) \cdot x \leq 4 \Rightarrow x \geq 4 \div \frac{-2}{3} \Rightarrow x \geq 4\ \frac{-3}{2} \Rightarrow \boxed{x \geq -6}$

"Damos vuelta" el signo

Como pasamos dividiendo el (−2/3) que es negativo, tenemos que "dar vuelta" el signo de la desigualdad.



➢ Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $x + \frac{1}{3} = 1$

2) $x - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

3) $\frac{2}{3} + x = \frac{7}{9}$

4) $x + \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

5) $x - \frac{1}{2} = \frac{-1}{4}$

6) $x - \frac{1}{4} = \frac{-1}{2}$

7) $2x = \frac{-1}{2}$

8) $-3x = \frac{-3}{5}$

9) $\frac{2}{3}x = \frac{-5}{6}$

10) $\frac{3}{2}x = -9$

11) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

12) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 1$

13) $7x - \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$

14) $\frac{-5x}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

15) $\frac{5}{6} - \frac{3}{2}x = 0$

16) $x \div \frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$

17) $x \div \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$

18) $3x \div \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

19) $-5x \div \frac{4}{13} - \frac{1}{4} = \frac{5}{6}$

20) $-x \div \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 5$

21) $x - \left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{2}{3}$

22) $-x + \left(\frac{-1}{2}\right) = 0$

23) $x - \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

24) $-x \div (-1) - \frac{1}{3} = -1$

25) $-x \div \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-3}{2}$

➢ Resolver las siguientes ecuaciones con más de un término con "x":

26) $x + \frac{1}{3}x = 1$

27) $x - \frac{2}{5}x = \frac{7}{10}$

28) $\frac{1}{2}x - x = \frac{1}{4}$

29) $-\frac{1}{4}x - 2x = \frac{9}{16}$

30) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}x$

31) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{5}{6}$

32) $\frac{1}{2}x - 2 = 1 - \frac{1}{4}x$

33) $\frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{4}x - 1$

34) $\frac{1}{5}x + \frac{1}{2} = x + \frac{6}{5} - \frac{1}{3}x$

35) $2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{12} = \frac{1}{4}x + 1$

36) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{4}$

37) $\frac{3}{4} + \frac{3}{8}x + 1 = \frac{5}{6}x - 1$

38) $\frac{1}{5}x \div \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}x$

39) $\frac{1}{3}x \div \frac{5}{12} - \frac{6}{7} = \frac{2}{7}x$

40) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \div \frac{1}{2} = x$

41) $\frac{3}{8}x \div \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{6}x - 1$

➢ Resolver las siguientes ecuaciones aplicando Propiedad Distributiva.

42) $\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{30}$

43) $1 - \frac{2}{5}(x+1) = \frac{4}{5}$

44) $\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right) = \frac{13}{12}$

44) $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{-1}{2}$

45) $\frac{1}{2} + \frac{5}{12}\left(x^2 + \frac{6}{25}\right) = \frac{2}{3}$

46) $\frac{1}{2} - \frac{3}{5}\left(x^2 + \frac{2}{9}\right) = \frac{3}{10}$

47) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\left(\sqrt{x} + \frac{3}{4}\right) = 1$

48) $\frac{1}{2} - \frac{6}{7}\left(\frac{3}{4}\sqrt{x} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{14}$

49) $\frac{2}{5}\left(x + \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{30}$

50) $\frac{-6}{11}\left(2x + \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}x - \frac{13}{16}$

51) $\frac{-2}{5}\left(\frac{3}{4}x - 1\right) = \frac{3}{2} + 3x$

52) $\frac{8}{15}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{4}$

53) $\frac{-8}{15}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right)$

54) $\frac{3}{14}\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{7}\left(x - \frac{2}{3}\right)$

55) $4\left(\frac{1}{3}x - \frac{3}{4}\right) = \frac{-2}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

56) $\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(x - \frac{2}{5}\right)$

57) $\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}x - \frac{5}{2}\right) + 1 = 0$

58) $\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{6}\right) \div \frac{5}{24} = \frac{15}{2}x + \frac{1}{2}$

59) $\left(\frac{9}{4}x - \frac{5}{7}\right) \div \frac{11}{4} = \frac{3}{7}x$

60) $\left(\frac{1}{7}x + 1\right) \div \frac{5}{8} = \frac{3}{7}x + \frac{1}{5}$

➢ Problemas: Plantear una ecuación y resolverla:

61) Martín y Hernán están en el "subibaja" El peso de ambos es exactamente igual, si del lado de martín se sube, junto a él, un amigo que pesa las 3/4 partes de Martín, el subibaja queda desequilibrado por 36 Kilos. ¿Cuánto pesa Hernán?

62) La suma entre las 2/5 partes de la edad martín y la edad de Martín dentro de 3 años es 24 ¿Qué edad tiene Martín?

63) La Suma entre la Edad de María y su hermana menor da 28 años. Sabemos que la hermana menor tiene las ¾ partes de la edad de María ¿Cuántos años tiene María?

64) Calcular la cuarta parte de un número si se sabe que la mitad de dicho número es igual a los tres quintos del mismo, aumentados en 2 unidades.

65) Calcular un número tal que el promedio entre dicho número y sus dos consecutivos inmediatos sea igual a las dos séptimas partes del número, más 6 unidades.

66) El promedio de María en Matemática le dio 7,16666... (Equivale a 43/6 en fracción) En las cinco pruebas que le tomaron se sacó 8 , 8 , 7 , 3 y 10 , pero la profesora para sacar los promedios les agregó a cada alumno una nota conceptual. Cuál es la nota conceptual que le puso a María?

67) Fernando tiene este trimestre en Matemática como notas: 7, 8, 4, 10, 9 y 8 y le falta dar una prueba.
a) Cuanto se tiene que sacar para que las 5/7 partes de su promedio equivalgan a 5?

- Problemas con números:

68) Si a las 3/4 partes de un número le sumo el consecutivo de dicho número, se obtiene el cuádruplo de dicho número menos 26. ¿De qué número se trata?

69) Calcular el número tal que: la diferencia entre sus 4/5 partes y sus 2/3 partes sea igual a 2.

70) La diferencia entre la mitad de un número y el opuesto de –4 es igual a 96. Calcular dicho número.

71) Si a la tercera parte de un número le sumo el duplo de su consecutivo se obtiene 23. Calcular el número.

72) Si al doble de una fracción le sumo 2/3, da como resultado el cuádruplo de dicha fracción. ¿Cuál es la fracción?

73) Si a la mitad de una fracción le sumo 2/5, se obtiene como resultado la fracción inicial. ¿Cuál es la fracción?

74) Si a las 2/5 partes de una fracción le resto 1/6, resulta la décima parte de un entero. ¿Cuál es la fracción?

75) Los 2/3 de un cierto número "X" es igual a los 3/4 de su antecesor. ¿Cuánto vale "X"?

76) La suma de 3 números consecutivos es igual a 18/5 del menor de los tres consecutivos. ¿Cuál es el menor de los tres números consecutivos?

77) ¿Cuántas veces tengo que sumar 21/99 a sí mismo para llegar a 7 ?

78) ¿Cuántas veces tengo que sumar 2/5 a sí mismo para llegar a 12?

79) El triple de un número menos 10 es igual a la mitad de dicho número ¿Qué número es?

80) Si a la novena parte de un número le resto 2/5 y obtengo la novena parte de 5. ¿De qué número se trata?

81) Si a la tercera parte de un número le sumo su cuarta parte, me da por resultado dicho número menos 11. ¿Qué número es?

- Problemas de aplicación:

82) Calcular el valor de un ángulo sabiendo que su duplo más su tercera parte es igual a 14/9 de un ángulo recto.

83) 2 ángulos adyacentes son tales que uno de ellos es igual a los 2/3 del otro. ¿Cuánto vale el mayor de los dos? (Recordemos que los ángulos adyacentes suman 180º)

84) Se desean dividir $91 entre 2 hermanos tal que uno de ellos reciba 5/8 de lo que recibe el otro. ¿Cuánto le toca a cada uno?

85) Ana tiene 7 años más que las 3/4 partes de la edad de Mario. Ana tendrá 23 años el año que viene ¿Qué edad tiene Mario?

86) La edad de Martín mas sus dos quintas partes es igual la edad que tendrá dentro de seis años. ¿Cuántos años tiene Martín?

87) La edad de Marcela menos sus tres séptimas partes es igual a la edad de su hermana menor Mariana que tiene seis años menos ¿Cuántos años tiene Marcela?

88) Cuatro chicos compran una botella de Coca-Cola los primeros tres toman una quinta parte cada uno y el otro toma las cinco octavas partes de lo que queda. Si sobraron 3/10 de litro ¿Cuántos litros tenía la botella llena?

89) Un hombre hace un recorrido en cinco días, el primer y segundo día recorre las tres décimas partes del total cada día, el tercer día las tres octavas partes de lo que le queda y el cuarto día recorre la mitad de lo que recorrió el tercer día. Si le quedan 350 Km. Para recorrer el quinto día ¿Cuántos Km. Tiene que recorrer en total?

90) Se reparten figuritas de Spiderman entre cuatro hermanos. Al primero le toca la quinta parte, al segundo la tercera parte, al tercero la cuarta parte y al cuarto lo que queda que son 13 figuritas. ¿Cuántas figuritas había para repartir?

91) La mitad de los alumnos de 6to A no aprueba matemática, la quinta parte no aprueba lengua, la sexta parte no aprueba inglés, la mitad de los que quedan no aprueba ciencias naturales, y solo hay 2 alumnos que aprueban todas las materias. No hay nadie que desapruebe más de una materia ¿Cuántos alumnos hay en total?

92) Ayer, las dos novenas partes de alumnos de 8° A fue a la escuela caminando, la tercera parte fue en colectivo, la cuarta parte en bicicleta, de los que quedan las seis séptimas partes fue en auto y faltó un alumno ¿Cuántos alumnos hay en 8° A?

93) De las chicas de 8° B la mitad son fanáticas de "Miranda", la cuarta parte prefieren a "Maná", las tres cuartas partes de las que quedan prefieren a los "U2" y hay una que no prefiere a ninguno de los tres. ¿Cuántas chicas hay en 8° B?

94) Hay una pileta de natación vacía, entre las 8 y las 9 de la mañana se llena hasta su cuarta parte, a la hora siguiente se agrega una tercera parte mas, a la hora siguiente se agrega la mitad de lo que le faltaba , y todavía faltan agregar 50.000 litros para que la pileta esté llena. ¿Cuántos litros de agua tiene la pileta cuando está llena?

- Inventar una situación problemática o con números para cada ecuación: (Y Resolverlas)

95) $\frac{2}{3}X + 1 = 5$ 96) $\frac{1}{2}X - 10 = 25$ 97) $\frac{4}{5}X = 3 + \frac{1}{2}X$ 98) $\frac{2}{5}(X+10) = 60$ 99) $\frac{1}{3}(X-6) = \frac{1}{5}X$

- Más ecuaciones para hallar X:

100) $\frac{3}{5}X + 2(X-3) - 2\left(\frac{7}{10}X - 4\right) = \frac{1}{5}X + 7$

101) $\frac{2}{9}X - \frac{7}{3}\left(\frac{1}{9}X + 2\right) = X - \left(\frac{1}{3}X + 11\right)$

102) $\frac{3x+8-x}{6} + \frac{5x-11+2x-3}{7} = 2x-7$

103) $\frac{4x+9-2x}{5} + \frac{5x-8+x-5}{7} = x+2$

104) $\frac{2X+4-5X+3}{4} - \frac{7X-9+3X-8}{7} + 2 = 4x$

105) $\frac{3X+4+5X+7}{19} - \frac{-2X+7-3X-8}{2} = 4X$

106) $\frac{9}{7}(x+4) - \frac{3}{5}(2x-1) = \frac{7}{10}(3x+1) - 1$

107) $\frac{4}{3}(2x+1) + \frac{7}{2}\left(\frac{4}{5}x - \frac{6}{5}\right) + 3 = \frac{11}{12}(5x+4)$

108) $\frac{4}{3}x + \frac{5}{9}x - \frac{1}{3} + \frac{4}{7}\left(\frac{8}{3}x - 9\right) = \frac{5}{9}\left(\frac{5}{6}x + 22\right)$

109) $\frac{5}{9}(x+2) - \frac{7}{6}(x-1) + \frac{6}{7}x = \frac{8}{9}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

110) $\frac{7}{8}(x-2) + \frac{5}{6}(x-4) = 20 - \frac{7}{3}(x-7)$

111) $\frac{7}{9}(x+3) - \frac{5}{6}\left(\frac{5}{6}x + 1\right) = 10 - \frac{1}{4}(7x-10)$

112) $2X - 3\left(\frac{3}{5}X + \frac{2}{5}\right) + 7\left(\frac{1}{10}X + \frac{1}{7}\right) = 6\left(\frac{2}{5}X - \frac{1}{3}\right) - \frac{57}{10}$

113) $21X + \frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}X + 9\right) - \frac{9}{4} = 24X + 3$

- Más ecuaciones, ahora con potencias y raíces:

114) $x + \sqrt{\frac{1}{9}} = 1^2$

115) $\frac{\sqrt{x}}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}$

116) $\frac{2}{3} + x^2 = \sqrt{\frac{49}{81}}$

117) $x + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{-1}{125}} = 0$

118) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{-1}{8}$

119) $\sqrt{\frac{11}{36}x + \frac{5}{12}} = \frac{3}{4}$

120) $\sqrt{7x^2 - \frac{1}{3}} = \frac{-2}{3}$

121) $(1-3x)^3 = \frac{-1}{5} + \frac{3}{40}$

122) $\frac{-2}{3}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-3}{8}$

123) $\sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{7}{10} \div 5\right)} = \frac{11}{20} + x^2$

124) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{11}{27}x - \frac{2}{9}}$

125) $\frac{12}{25}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{5}{6} = \frac{7}{8}x + \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

126) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} + \sqrt[3]{\frac{1}{5} - \frac{3}{40}}$

127) $5\sqrt{x} - \frac{1}{20} = -2^2 + \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{11}{25}}$

- Algunos problemas más de aplicación: "Pagando en cuotas"

128) El Padre de Aníbal compra un equipo de música que cuesta \$680, pagando \$138 en efectivo y el resto en 4 cuotas. La primera cuota es la cuarta parte de lo que vale el equipo, la segunda cuota es \$10 más elevada que la primera y la tercera cuota es las 2/3 partes de la segunda ¿Cuánto tiene que valer la 4º Cuota?

129) Una persona compra una heladera que cuesta \$1170 pagando las 2/5 partes en efectivo y el resto en 3 cuotas. Las 3 cuotas cumplen con las siguientes condiciones: La primera es las 3/4 partes de la segunda y la segunda es 2/3 partes de la tercera. ¿Cuál es el importe de la 1º Cuota?

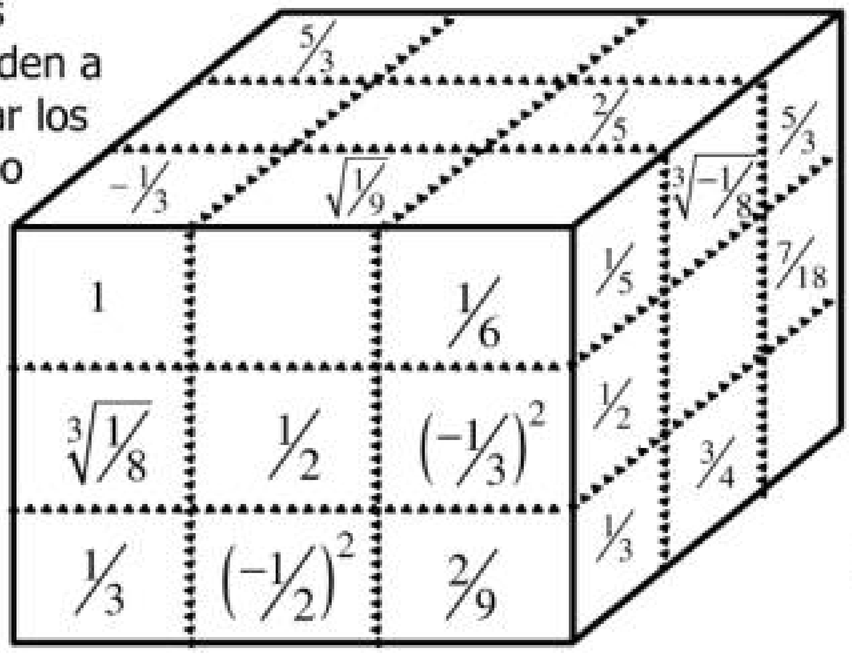
130) Una inmobiliaria vende una propiedad a pagar. \$15.000 al contado, y el resto financiado en 20 cuotas. De modo tal que las primeras 10 cuotas equivalgan a las 3/5 partes de las siguientes 8 cuotas. Y las últimas 2 cuotas de \$500 cada una. El valor final pagado por la propiedad fue de \$32.000. ¿Cuánto costaron cada una de las primeras 10 cuotas?

131) Si Compramos una Computadora que la venden en 4 pagos, el primero es las 3/5 partes del segundo, el segundo es la mitad del tercero, el tercero es las 4/3 partes del cuarto pago y el cuarto pago es de 300. ¿Cuánto pagamos en total por la Computadora?

132) Una computadora que cuesta \$1.500. La venden en un pago efectivo de \$450 y tres cuotas de modo que la segunda sea la mitad de la primera y la tercera la mitad de la segunda. ¿Cuánto hay que pagar en la primera cuota?

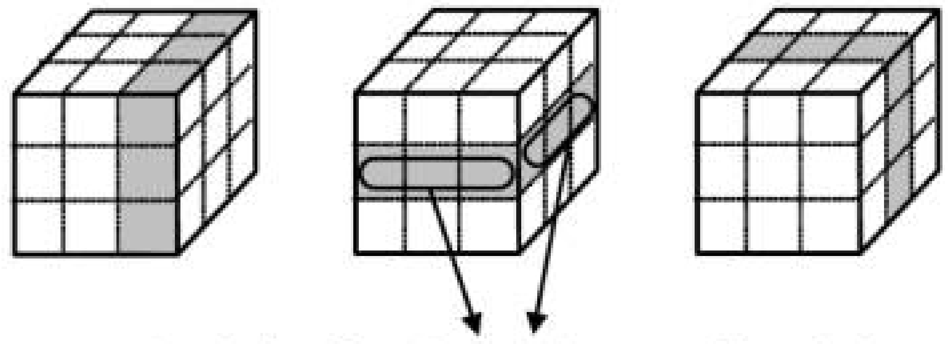
El cubo "mágico" de las fracciones

Consigna: Escribir las ecuaciones que corresponden a cada igualdad y Completar los lugares vacíos del cubo



En el siguiente gráfico te mostramos las "reglas" del cubo "mágico":

La suma de las fracciones de una fila cualquiera, es igual a la suma de las fracciones de la fila de la cara siguiente. Lo mismo pasa con las columnas.



La sumatoria de las fracciones de estas filas da lo mismo. Y así con las demás filas y columnas.

➢ Resolver las siguientes inecuaciones:

133) $x+1 \leq \frac{1}{2}$

134) $x+\frac{1}{5} > \frac{7}{10}$

135) $\frac{1}{4}+x \geq \frac{2}{3}$

136) $x-\frac{1}{3} > \frac{1}{9}$

137) $x-\frac{1}{2} < \frac{-1}{4}$

138) $x-\frac{1}{4} > \frac{-1}{2}$

139) $3x < \frac{-1}{2}$

140) $-3x \leq \frac{-3}{5}$

141) $\frac{2}{3}x > \frac{-5}{6}$

142) $\frac{-3}{2}x \geq 6$

143) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} > \frac{3}{4}$

144) $\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2} \leq 1$

145) $\frac{3}{5}-7x < \frac{-1}{3}$

146) $\frac{-5x}{16}-\frac{1}{4} \leq \frac{3}{8}$

147) $\frac{5}{6}-\frac{3}{2}x < 0$

148) $x \div \frac{3}{10}+\frac{1}{4} < \frac{2}{3}$

149) $x \div \frac{3}{16}-\frac{1}{3} \leq -1$

150) $5x \div \frac{56}{75}-\frac{11}{16} > \frac{3}{7}$

151) $\frac{-5}{12}x \div \frac{15}{29}-\frac{1}{4} > \frac{5}{9}$

152) $-x \div \frac{6}{23}-\frac{4}{9} < -3$

153) $x-\left(\frac{-1}{2}\right) < \frac{5}{8}$

154) $-x+\left(\frac{-4}{5}\right) > 0$

155) $x-\left(\frac{-4}{9}\right) < \frac{2}{3}$

156) $-x \div (-1) < -1$

157) $-x \div \left(\frac{-11}{18}\right) > \frac{-6}{11}$

158) $\frac{-2}{3}\left(x+\frac{3}{14}\right) > \frac{6}{7}$

159) $\frac{11}{18}\left(x-\frac{1}{11}\right) > \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) \div \frac{3}{10}$

160) $\frac{8}{15}\left(x+\frac{3}{4}\right) > \left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right) \div \frac{-5}{6}$

Resolver las siguientes Inecuaciones:

161) $\frac{5}{4}x-\frac{4}{5} > \frac{x}{4}+10$

162) $3x-4+\frac{x}{4} < \frac{5x}{2}+2$

163) $\frac{9}{8} \geq \frac{15x-6}{3}$

164) $\frac{23-3x}{3} > \frac{34-12x}{6}$

165) $\frac{3}{5}x+2(x-3)-\frac{7}{5}x+8 \geq \frac{1}{5}x+7$

166) $\frac{2}{9}x-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{9}x+2\right) < x-\left(\frac{1}{3}x+11\right)$

167) $21x+\frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}x+9\right)-\frac{9}{4} \geq 24x+3$

168) $\frac{2x+4-5x+3}{4}+\frac{12x-8+3x}{7}+1 \geq 3x$

169) $\frac{3x-4+5x+7}{19}-\frac{-2x+4-3x-8}{2} > 3x+2$

➢ Problemas:

170) Hallar el conjunto de números o la desigualdad correspondiente para números tales que sus 3/4 partes mas 2, da por resultado un número mayor a 5.

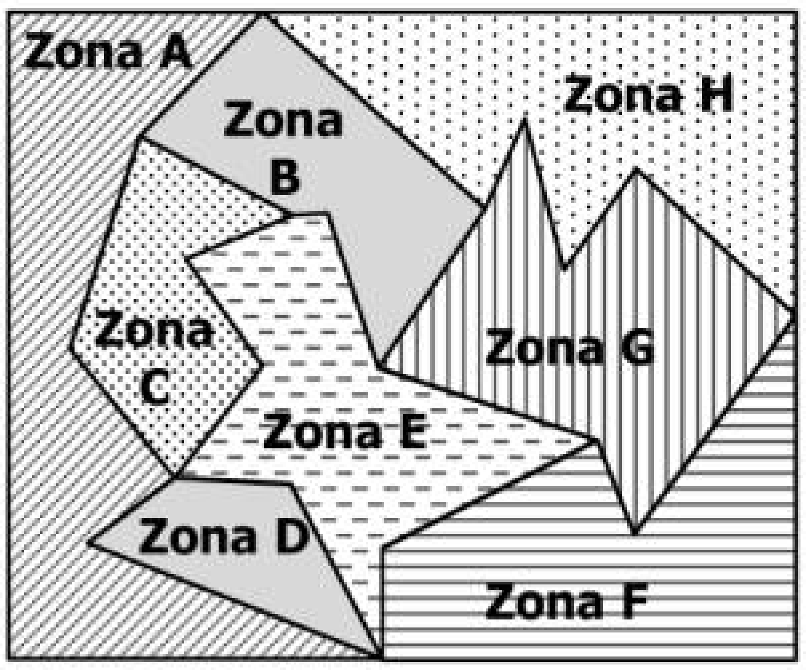
171) Hallar el conjunto de números o la desigualdad correspondiente para números tales que si se los multiplica por (−2/3) y al resultado se le suma 5, da por resultado un número menor a 1.

172) Hallar el conjunto de números o la desigualdad correspondiente para números tales sus 3/5 partes más su mitad, menos 1/2 da por resultado un número menor o igual a 5.

173) Si a la cuarta parte de la edad que tenía Ariel hace tres años, le sumo 5 años, el resultado es mayor que 9 ¿Qué edad podría tener Ariel?

174) Si a la mitad de la edad que tendrá Mariana dentro de 5 años le resto 4, me da por resultado un número menor que 3. ¿Qué edad podría tener Mariana?

Aplicaciones Geométricas con Números Racionales: Se tiene el siguiente diagrama de un terreno dividido en 8 partes. (Según los datos expuestos) La superficie total del terreno es de "x" m^2



$$Área\ A = 2\frac{1}{2} \cdot Área\ B \qquad Área\ E = \frac{5}{6} \cdot Área\ F$$

$$Área\ B = 1\frac{1}{15} \cdot Área\ C \qquad Área\ F = 1\frac{1}{14} \cdot Área\ G$$

$$Área\ C = 1\frac{1}{2} \cdot Área\ D \qquad Área\ G = \frac{7}{9} \cdot Área\ H$$

$$Área\ D = \frac{2}{5} \cdot Área\ E \qquad Área\ H = \frac{9}{50} \cdot Área\ Total$$

Planteando siempre ecuaciones en donde el área total del terreno la representamos con "x"
(Nota: No siempre conviene seguir el orden en que están expuestos los ejercicios)
Hallar los siguientes valores, planteando ecuaciones o igualdades:

¿Qué fracción del terreno representan las siguientes zonas?

175) La zona "A"
176) La zona "B"
177) La zona "C"
178) La zona "D"
179) La zona "E"
180) La zona "F"
181) La zona "G"
182) Zonas "A" y "B" juntas
183) Zonas "B" y "C" juntas
184) Zonas "C" y "D" juntas
185) Zonas "A" y "E" juntas
186) Zonas "D" y "F" juntas
187) Zonas "C" y "E" juntas
188) Zonas "G" y "H" juntas

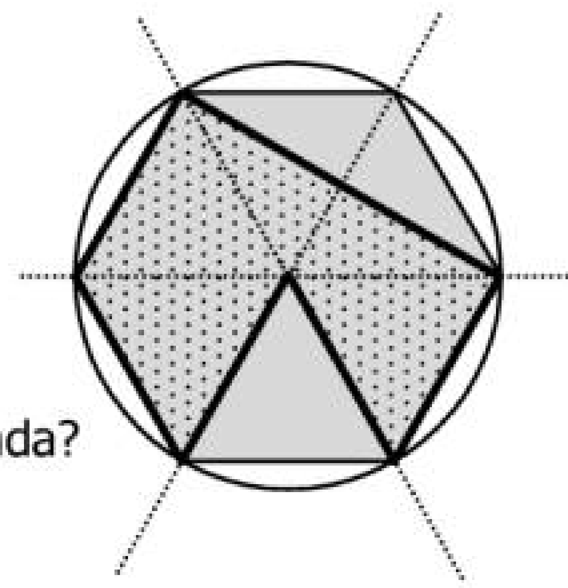
189) ¿Qué fracción del área de la zona "A" representa el área de la zona "D" ?
190) ¿Qué fracción del área de la zona "F" representa el área de la zona "D" ?
191) ¿Qué fracción del área de la zona "F" representa el área de la zona "C" ?
192) ¿Qué fracción del área de la zona "G+H" representa el área de la zona "A+3/2 B" ?

Si sacáramos del terreno a la zona "A" , ¿Qué fracción representaría del nuevo terreno...
193) La zona "B"
194) La zona "C"
195) La zona "D"
196) La zona "E"

197) Si sacáramos del terreno las zonas "C" y "E" ¿Qué fracción representaría la zona "F" del nuevo terreno?
198) Si sacáramos del terreno las zonas "C" y "E"¿Qué fracción representaría la zona "G" del nuevo terreno?
199) Si sacáramos del terreno las zonas "C" y "E"¿Qué fracción representaría la zona "H" del nuevo terreno?

Plantear las inecuaciones o desigualdades correspondientes para confirmar o negar lo siguiente:
200) ¿Es mayor la Zona "B" que la zona "C"?
201) ¿Es mayor la Zona "F" que la zona "G"?
202) ¿Es mayor la Zona "E" que la zona "F"?
203) ¿Es mayor la suma de las zonas "A" + "B" que la suma de las zonas "F" + "G" ?
204) ¿Es mayor la suma de las zonas "A" + "E" que la suma de las zonas "H" + "G" ?
205) ¿Es mayor la zona dada por A+3B que la dada por 2G + 5/6 H ?

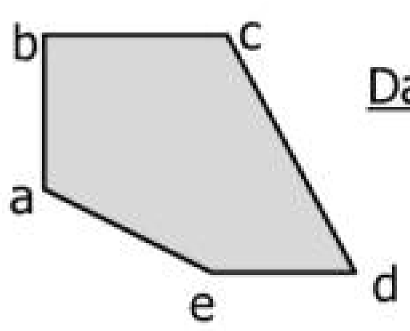
Si sabemos que el área del hexágono inscripto representa aproximadamente un fracción de 43/52 del área del círculo:



206) ¿Qué fracción del hexágono representa la figura sombreada?
207) ¿Qué fracción aproximada del círculo representa la figura sombreada?
208) ¿Qué fracción aproximada del círculo representan 13/43 de la figura sombreada?
209) Planteando una desigualdad para resolver la duda, decidir: ¿Es verdad que 3/4 del área de la figura sombreada es mayor que las 2/5 partes del área del hexágono? (Formular en relación a "x" como el área del círculo)

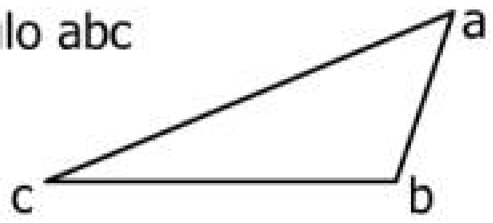
210) Calcular el valor del lado mayor de la siguiente figura sabiendo que su perímetro vale 89 cm.

Nota: Asegurarse que es el lado mayor de todos.



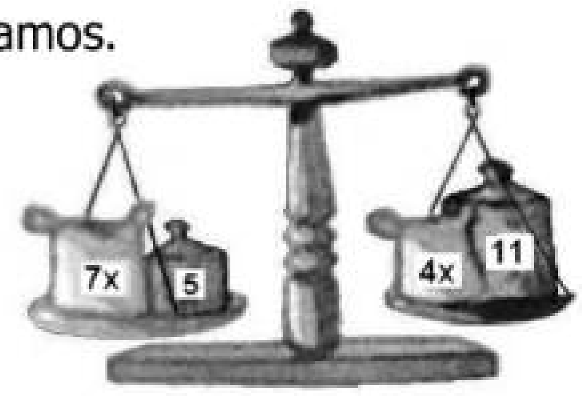
Datos:
$$\begin{cases} \overline{ab} = \frac{4}{5}x + 12 & \overline{ed} = \frac{1}{4}(9x+16) \\ \overline{bc} = 4x + \frac{3}{4} & \overline{ae} = \frac{36}{61}\overline{ed} + x \\ \overline{cd} = 4x + 3 & \end{cases}$$

211) Hallar el perímetro del triángulo abc



Datos: $\begin{cases} \overline{ab} = \dfrac{2}{3}\overline{bc} \\ \overline{bc} = \dfrac{2}{3}\overline{ac} \end{cases}$ $\qquad \overline{ab} = \dfrac{2}{3}\overline{ac} - 2cm$

212) La siguiente balanza está en equilibrio perfecto. Las unidades están en Kilogramos.



Si al plato de la izquierda le resto una proporción de 17/38 de su propio peso, y luego al plato de la derecha le sumo 14/17 de lo que le saqué al plato izquierdo. ¿Qué fracción del peso original del plato de la izquierda le debo agregar finalmente al plato izquierdo para volver a dejar en equilibrio la balanza?

En la pileta de un club se cuenta con tres bocas para llenarla. Las bocas son de diferente capacidad de caudal, por lo tanto:

Con solo la primera boca la pileta se llena en **4 horas.**
Si solo abrimos la segunda boca, **2/3** de la capacidad de la pileta se llena en **4 horas**
Si solo abrimos la tercera boca, **la mitad** de la capacidad de la pileta se llena en **5 horas**.

213) ¿Qué fracción de la pileta quedará llena en 1 hora si abrimos solo la 1º y 2º bocas juntas?

214) ¿Qué fracción de la pileta quedará llena en 1 hora si abrimos solo la 2º y 3º bocas juntas?

215) ¿Qué fracción de la pileta quedará llena en 1 hora si abrimos solo la 1º y 3º bocas juntas?

216) ¿Qué fracción de la pileta quedará llena en 1 hora si abrimos las 3 bocas juntas?

217) Habiendo hecho estos cálculos el dueño del club nos dice que si abrimos las tres bocas juntas solo las podemos dejar abiertas 1 hora y media (Ya que pasado ese tiempo la presión del agua hace que hayan pérdidas), pero en cambio si abrimos solo 2 bocas juntas, podemos dejarlas abiertas 2 horas. Hay una combinación de técnicas que permite llenar casi la totalidad de la pileta en 2 horas. El club abrió a las 8 AM y a las 10 AM llega la gente a la pileta. Calcular la fracción máxima que puede llenarse de la pileta en esas 2 horas.

Últimos Ejercicios Combinados para hallar "x":

218) $\sqrt{\frac{3}{2}x+1} = 2$

219) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{4}{5}x-4\right)^2 = 0$

220) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{6}x-1} = -1$

221) $\left(\frac{3}{x-2}\right)^{-1}+\frac{2}{3}=1$

222) $\frac{2}{3}\left(\frac{5}{x+3}\right)^{-1}-\frac{1}{3}=1$

223) $\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x+1}\right)^{-1}+3} = 2$

224) $\frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{6}\right)^{-1}+\frac{1}{2}=1$

225) $\left(\frac{3}{5}x-3\right)^2+2^{-2} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)$

226) $\sqrt{\frac{7}{4}\cdot\left(\frac{4}{x}\right)^{-2}+2} = 3$

227) $\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{7}{9}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{x+1}\right)^{-3}} = 1$

228) $-7+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{x+7}\right)^{-3} = -1$

229) $1+6\cdot\left(\frac{8}{x-2}\right)^{-3} = 2^{-2}$

230) $1-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{7}{10}x} = -2^{-1}$

231) $\frac{-1}{8}\sqrt{2-\sqrt[3]{x}} = -2^{-2}$

232) $3-\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1+2x}{5}\right)^{-1}} = 1^{-3}$

233) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1\cdot\sqrt{4(2-x)}}{6}\right)^{-1} = -1+2^{-1}$

234) $5\cdot\sqrt{2+\sqrt[3]{3x+4}} = 0$

235) $\frac{-4}{3}\cdot\sqrt{2\cdot\left(\frac{5}{x+1}\right)^{-1}+11} = -2^2$

236) $\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{3^{-2}}{2^{-3}}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{x+2}\right)^{-1}} = 0$

237) $-3\cdot\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^{-3}-x\right)^{-1} = -1+\left(\frac{-1}{2}\right)^{-2}$

238) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2+\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{1+3x}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = 3^{-2}$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

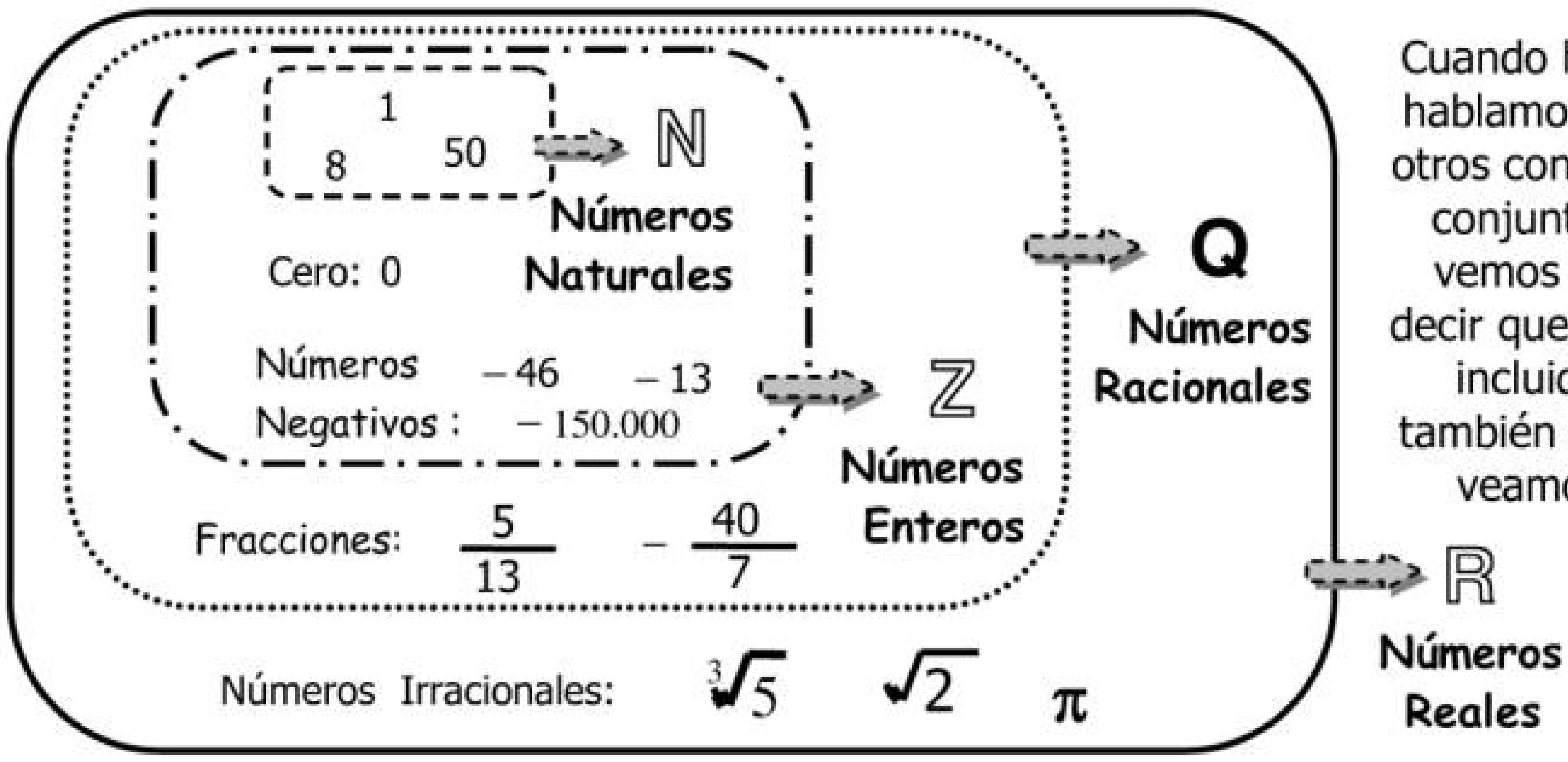
Título del Tema:

Operaciones con Números Reales

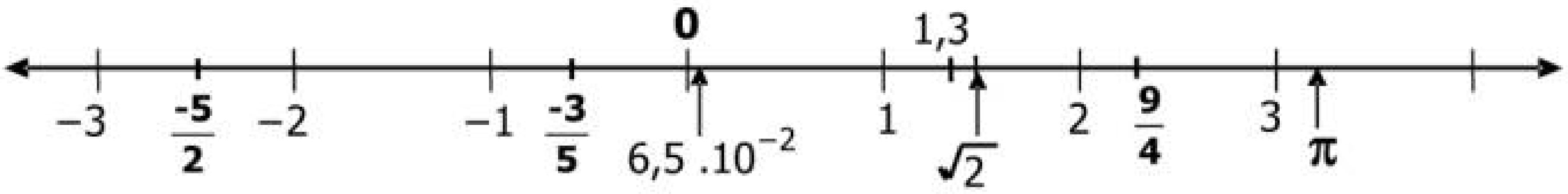
Número de Tema: **16**

Área: **Matemática**

Los Conjuntos Numéricos: Los números reales son un conjunto de números que incluye a los naturales, a los enteros (negativos y positivos), a los fraccionarios y a los irracionales. Veamos el esquema de los conjuntos numéricos a modo de repaso:



Cuando hablamos de números reales, hablamos de cualquier número de los otros conjuntos que esté incluido en el conjunto de los números reales. Si vemos la recta numérica podemos decir que todos los números que están incluidos en ella, están incluidos también en el de los Números Reales, veamos una recta numérica con algunos ejemplos.



Pero entonces aquí nos aparece un conjunto nuevo que todavía no estudiamos y lo vamos a hacer ahora. Es el conjunto de los números irracionales

Números Irracionales:

Una pequeña historia**:** Hace muchos años los griegos más inteligentes de su ápoca se esforzaron muchísimo en tratar de comprender cuánto valía exactamente la diagonal de un cuadrado de 1 cm de lado. Hoy, podemos decir tranquilamente que esa diagonal vale $\sqrt{2}$ Esto lo calculamos mediante el teorema de Pitágoras. Y su valor decimal es: 1,414213562... y tiene infinitos decimales.

El problema con este valor es que no lo podían escribir con su valor exacto. Como vimos en el capítulo de expresiones decimales, hay números con infinita cantidad de decimales que se pueden escribir como fracción. Por ejemplo: 0,0444444... que lo escribimos como $0,0\overset{\frown}{4} = \frac{4}{90}$

Pero el número que elevado al cuadrado de exactamente 2, tiene infinitos decimales, pero les aseguro que no hay fracción que represente exactamente a todos esos decimales. Este tipo de números tiene infinitos decimales, pero no se pueden expresar como fracción.

Justamente **a estos números con infinitos decimales que no se pueden expresar como fracción, se los llama Números Irracionales**

Y son estos Números Irracionales los que nos faltaban para poder completar el conjunto de los Números Reales. Y con ello, ya no tenemos más conjuntos que agregar para poder representar a todos los números de la recta numérica (Los conjuntos que estudiaremos más adelante pertenecen a otro campo, el campo vectorial, que en lugar de ubicarse en una recta numérica, se ubicarán en un plano de ejes cartesianos, pero todavía falta para eso)

Entonces **¿Cuáles son todos los Números Irracionales?**
La verdad que hay infinidad de números Irracionales diferentes, por ejemplo π que como sabemos es aproximadamente igual a 3,141592653589.. pero tiene infinitos decimales más, solo que por practicidad siempre truncamos este número y usamos sólo el 3,14. Hay otros casos como "e" que vale e=2,71828182845... (Este valor se usa para calcular logaritmos)

Pero de toda la infinidad de Números Irracionales nos vamos a ocupar de aquéllos que se calculan como raíces inexactas como por ejemplo: $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt[3]{4}$

Todos ellos tienen infinitos decimales y no se pueden expresar como fracción.

Vamos a comenzar ahora un repaso de algunas herramientas muy útiles para trabajar con todos los Números Reales y los ejercicios combinados.

Repaso: **Pasaje de decimales a fracciones** Cuando tengamos operaciones combinadas y nos aparezcan expresiones decimales, la mejor manera de resolver todo es pasando todos los números a fracciones *(Siempre que se pueda hacer esto, recordando que los números Irracionales nunca los podremos escribir como Fracción).*

Repasemos entonces la forma de escribir un número decimal como una fracción.

- Caso 1: Decimales No Periódicos *(este es el caso más simple)* Ejemplo: Pasemos 5,47 a fracción

En el Denominador escribimos un **1** seguido de tantos ceros como decimales tengamos (En este caso son 2 posiciones decimales) →

$$\frac{547}{100}$$

← En el Numerador escribimos el número "sin la coma"

- Caso 2: Decimales Periódicos Puros Ejemplo: *Pasemos* $3,\overset{\frown}{956}$ *a fracción*

Todo el número sin la coma − La parte Entera → En el Numerador RESTAMOS todo el número menos la parte entera

En el Denominador escribimos tantos **9 (nueves)** como decimales tengamos "debajo del arquito"

$$3,\overset{\frown}{956} = \frac{3956 - 3}{999}$$

Entonces nos queda: $3,\overset{\frown}{956} = \frac{3956 - 3}{999} = \boxed{\frac{3953}{999}}$ ⟹

Verificación:

3953 ÷ 999 = 3 , 956 956 956 = $3,\overset{\frown}{956}$

- Caso 3: Decimales Periódicos Mixtos Ejemplo: Pasemos $1,42\overset{\frown}{3}$ a fracción

Todo el número sin la coma − Todo lo que no está debajo del "arquito" → En el Numerador RESTAMOS todo el número menos todo lo que no está "debajo del arquito"

En el Denominador escribimos

Tantos **9 (nueves)** como decimales tengamos "debajo del arquito" En el ejemplo es uno solo: el 3

Tantos **0 (ceros)** como decimales tengamos "fuera del arquito" En el ejemplo son dos: el 4 y el 2

$$1,42\overset{\frown}{3} = \frac{1423 - 142}{900}$$

Entonces nos queda:

$$1,42\overset{\frown}{3} = \frac{1423 - 142}{900} = \frac{1281}{900} = \frac{427}{300}$$ ⟹

Verificación:

427 ÷ 300 = 1,423333 = $1,42\overset{\frown}{3}$

Repaso de Notación Científica: La Notación Científica se compone de:

Un número decimal. Cuya parte entera (Antes de la coma) debe ser **mayor o igual a 1 y menor a 10.** ← $6,15 \cdot 10^{3}$ → Una potencia de 10

Los **exponentes positivos** en la Notación Científica se usan para escribir **números grandes** (mayores a 10) **y los exponentes negativos** para escribir **números chicos** (menores a 1).

Pasaje de Notación decimal a notación Científica:

Ejemplo: Pasar a Notación Científica: 18.200

1- Escribo el primer número distinto de cero que aparece que es un **"1"**, luego escribo la coma, y los demás números que estaban después del 1. ⟹ **1,8200**

2- Escribo un 10 elevado a la 4 porque si comparo 18.200 con 1,8200 me doy cuenta que corrí la coma 4 lugares. ⟹ **$1,8200 \cdot 10^4$**

3- Como el número era mayor que 1 el exponente queda positivo: ⟹ **$1,8200 \cdot 10^4$**

Otro ejemplo: Pasar a Notación Científica: 0,0000564

1. Escribo el primer número distinto de cero que aparece que es un **"5"**, luego escribo la coma, y todos los demás números que estaban después del 5. ⟹ **5,64**
2. Escribo un 10 elevado a la 5 porque si comparo 0,0000564 con 5,64 , me doy cuenta que corrí la coma **5 lugares**. ⟹ **$5{,}64 \, . \, 10^5$**
3. Como el número era menor que 1 , el exponente queda negativo. ⟹ **$5{,}64 \, . \, 10^{-5}$**

0 , 0 0 0 0 5 6 4

5 lugares.

Pasaje de Notación Científica a notación decimal:

¿Cómo se pasa un número de Notación Científica a Notación Decimal? **CORRIENDO LA COMA DE LUGAR**

- Si el exponente es negativo, corro la coma para la izquierda
- Si el exponente es positivo, corro la coma para la derecha

Ejemplo: Pasar a Notación Decimal: $1{,}21445 \, . \, 10^4$

Tengo que correr la coma 4 lugares para la derecha, me queda entonces: 12.144,5

Otro ejemplo: Pasar a Notación Decimal: $4{,}47 \, . \, 10^{-5}$

Corro la coma 5 lugares para la izquierda! Pero como sólo hay una cifra a la izquierda de la coma, hago de cuenta que antes de la primera cifra hay muchos ceros (4,47 es lo mismo que 0000004,47). Me queda entonces: 0,0000447

Producto y división en notación científica: Cuando tenemos que multiplicar dos números en notación científica, multiplicamos por un lado las partes decimales y por el otro lado las potencias de 10 (teniendo en cuenta que cuando multiplicamos dos potencias de igual base se suman los exponentes). Con la división, los exponentes se restan.

Ejemplo $(3{,}1 \, . \, 10^{-3}) \, . \, (2{,}15 \, . \, 10^7) = 6{,}665 \, . \, 10^4$

Primero multiplico los números:
$3{,}1 \, . \, 2{,}15 = 6{,}665$

Y por otro lado multiplico las potencias de 10 (Producto de potencias de igual base, se suman los exponentes)
$10^{-3} \, . \, 10^7 = 10^4$

Irracionales: Dentro del conjunto de números irracionales nosotros nos vamos a preocupar por el momento, en particular por los números que son raíces inexactas, por ejemplo $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ etc.

Propiedad distributiva de la raíz con respecto al producto y a la división:

Con respecto al producto ⟹ $\sqrt{15} = \sqrt{3.5} = \sqrt{3} \, . \, \sqrt{5}$

Con respecto a la división ⟹ $\sqrt{\frac{15}{8}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{8}}$

Esto se puede leer al revés, cosa que pasa siempre cuando hay un signo "=", o sea que el producto de dos raíces (siempre que el índice de la raíz sea el mismo) se puede juntar en una sola raíz y dentro de la raíz el producto de lo que había dentro de cada una de las raíces por separado, veamos un ejemplo.

Supongamos que tenemos este producto de raíces (ambas inexactas) $\sqrt{12} \, . \, \sqrt{3}$ ⟹ $\sqrt{12} \, . \, \sqrt{3} = \sqrt{12.3} = \sqrt{36} = 6$

Junto las dos raíces en una. Y resuelvo fácilmente.

Atención!!! Tengan muchísimo cuidado con las expresiones radicales de sumas y restas!!!
Por ejemplo las expresiones tales como: $\sqrt{8+1}$ $\sqrt{16+9} =$

Ya que un error muy común es intentar aplicar una propiedad distributiva, cuando en realidad esta propiedad NO SE CUMPLE PARA LA SUMA Y RESTA RESPECTO A LAS RAICES.

Y vamos a ver un ejemplo para que se queden seguros de que esto ES ASI!!
Supongamos que tenemos la operación: $\sqrt{16+9} =$
Este cálculo es muy simple ya que 16+9 es 25 y su raíz vale exactamente **5**

Si quisiéramos aplicar una propiedad distributiva nos quedaría: $\sqrt{16} + \sqrt{9}$
Y como sabemos la raíz de 16 es 4 y la de 9 es 3, por lo tanto nos quedaría 4+3 que es **7**

Repaso de Propiedades de las potencias: Antes de seguir repasaremos unas propiedades.

Cuando se **Multiplican** dos números iguales que están elevados al mismo exponente:
Los exponentes se Suman $\Rightarrow$ $n^a \cdot n^b = n^{a+b}$ $\Rightarrow$ Ejemplo: $5^3 \cdot 5^6 = 5^{3+6} = 5^9$

Cuando se **Dividen** dos números iguales que están elevados al mismo exponente:
Los exponentes se Restan $\Rightarrow$ $n^a \div n^b = n^{a-b}$ $\Rightarrow$ Ejemplo: $2^8 \div 2^5 = 2^{8-5} = 2^3$

Cuando un número está elevado a un exponente, y el resultado está elevado a otro exponente: Los exponentes se Multiplican $\Rightarrow$ $\left(n^a\right)^b = n^{a \cdot b}$ $\Rightarrow$ Ejemplo: $\left(3^4\right)^2 = 3^{4\cdot 2} = 3^8$

Introducción de factores dentro de la raíz: Muchas veces tenemos expresiones como $5^3 \sqrt[2]{5}$

En las que tenemos un mismo número dentro de una raíz y fuera de la misma (Que puede o no estar elevado a alguna potencia)

En estos casos, va a ser muy conveniente y práctico para los cálculos, poder introducir los factores que están fuera de las raíces, dentro de las mismas. Para ello veremos primero que significaría esto, y luego les mostraré una regla muy práctica para poder hacerlo en forma rápida y sencilla.

Tomemos el ejemplo: $5^3 \sqrt[2]{5}$

Primero escribimos la expresión como: $5^3 \sqrt[2]{5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \sqrt[2]{5}$

Luego como sabemos que 5^2 es 25 y que la raíz de 25 es 5, podemos decir que: $5 = \left|\sqrt[2]{5^2}\right|$
Las barras del módulo las escribimos para referirnos al valor absoluto simplemente

Entonces, en la expresión anterior, podemos remplazar a los números 5 que están fuera de la raíz por las raíces cuadradas de 5 al cuadrado (En este caso, como remplazamos en la expresión un valor positivo, las barras del valor absoluto podemos obviarlas)

Entonces nos quedaría: $5^3 \sqrt[2]{5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{5^2} \cdot \sqrt[2]{5^2} \cdot \sqrt[2]{5^2} \cdot \sqrt[2]{5}$

Y luego podemos aplicar la propiedad recíproca de la distributiva respecto al producto y juntar todo en una sola raíz, con lo cual nos quedaría: $5^3 \sqrt[2]{5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{5^2} \cdot \sqrt[2]{5^2} \cdot \sqrt[2]{5^2} \cdot \sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5}$

Y por último, dentro de la raíz, podemos aplicar la propiedad de "Producto de potencias de Igual Base"
Y nos quedaría: $5^3 \sqrt[2]{5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{5^2} \cdot \sqrt[2]{5^2} \cdot \sqrt[2]{5^2} \cdot \sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5} = \sqrt[2]{5^7}$

Obviamente que el método es muy engorroso y que hay una manera más sencilla de hacer esto, pero quería dejarles esta manera técnica para que entiendan el por qué de las cosas.

Veamos ahora sí, un ejemplo del método FACIL para introducir factores en la raíz

$5^3 \sqrt[2]{5} \Rightarrow 5^{3} \sqrt[2]{5} \Rightarrow \sqrt[2]{5\ 5^{6}} \Rightarrow \sqrt[2]{5^1\ 5^6} \Rightarrow \boxed{\sqrt[2]{5^7}}$

Multiplicamos el exponente con el índice: 3 . 2 = 6

Adentro sumamos los exponentes porque son potencia de la misma base

Otro ejemplo: $2^5 \sqrt[3]{2} = \Rightarrow 2^{5} \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt[3]{2 \,.\, 2^{15}} \Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{2^{16}}}$

5 . 3 = 15

- **Extracción de factores** fuera de la raíz: Del mismo modo que en la introducción de factores les mostraré primero la manera técnica de hacerlo y luego un método FACIL y más rápido.

Ejemplo: Extraigamos los factores de $\sqrt[3]{2^{13}}$

Primero escribimos: $\sqrt[3]{2^{13}} = \sqrt[3]{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}$

Luego vamos agrupando en grupos de 3: $\sqrt[3]{2^{13}} = \sqrt[3]{(2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2)\cdot2}$

Luego escribimos 2.2.2 como 2 al cubo: $\sqrt[3]{2^{13}} = \sqrt[3]{2^3\cdot2^3\cdot2^3\cdot2^3\cdot2} \Longrightarrow \sqrt[3]{2^{13}} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}$

Luego de la propiedad distributiva, resolvemos: $\sqrt[3]{2^{13}} = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot\sqrt[3]{2} = 2^4\cdot\sqrt[3]{2}$

Veamos un ejemplo del método FACIL para extraer factores de la raíz. *(solo podemos extraer factores cuando el exponente de adentro de la raíz sea mayor o igual al índice de la raíz)*

Divido al exponente por el índice de la raíz...

Ejemplo: $\sqrt[3]{2^{13}} = \Longrightarrow \begin{array}{r|l} 13 & 3 \\ \hline 1 & 4 \end{array} \Longrightarrow 2^{4}\sqrt[3]{2^{1}} \Longrightarrow 2^4\sqrt[3]{2}$

Potencia que SALE

Potencia que QUEDA DENTRO

Otro ejemplo:

$\sqrt[5]{3^{22}} = \Longrightarrow \begin{array}{r|l} 22 & 5 \\ \hline 2 & 4 \end{array} \Longrightarrow 3^4\sqrt[5]{3^2}$

- **Simplificación** de raíces y exponentes***: Los índices de las raíces se pueden simplificar con los exponentes de lo que haya dentro, si son divisibles por el mismo número*** *(Ojo: Esto cuando la base de la raiz no es negativa)* Veamos un ejemplo:

$\sqrt[15]{2^5} = \Longrightarrow \sqrt[\cancel{15}\,3]{2^{\cancel{5}\,1}} \Longrightarrow \sqrt[3]{2}$

Como el índice y el exponente son divisibles por 5, entonces, simplifico por 5.

- **Suma algebraica de raíces***: Ojo con esto!!, **no** se pueden sumar las raíces juntándolas así nomás dentro de una misma raíz y sumar lo que había dentro de las raíces por separado!!* ***La manera de sumar raíces es factoreando lo que hay dentro de cada raíz, extrayendo factores y juntando solo las raíces que tienen el mismo índice y lo mismo adentro***.. veamos unos ejemplos:

$\sqrt{48}+\sqrt{27}+\sqrt{32}-\sqrt{18} = \Longrightarrow$ Factoreo los números $\Longrightarrow \sqrt{2^4\cdot3}+\sqrt{3^3}+\sqrt{2^5}-\sqrt{3^2\cdot2} =$

Extraigo factores $\Longrightarrow 2^2.\sqrt{3} + 3.\sqrt{3} + 2^2.\sqrt{2} - 3.\sqrt{2} = \Longrightarrow 4\sqrt{3}+3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}$

Agrupo por un lado las raíces de 3 y por otro lado las raíces de 2 y sumo o resto según el signo que haya $\Longrightarrow 4\sqrt{3}+3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-3\sqrt{2} \Longrightarrow \boxed{7\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

4 + 3 = 7 (Raíces de 3)   4 − 3 = 1 (Raíces de 2)

Otro ejemplo:

$\Longrightarrow \sqrt{288}+7\sqrt{72}-\sqrt{2}-3\sqrt{200} = \Longrightarrow \sqrt{3^2\cdot2^5}+7\sqrt{3^2\cdot2^3}-\sqrt{2}-3\sqrt{5^2\cdot2^3} \Longrightarrow 3\cdot2^2\sqrt{2}+7\cdot3\cdot2\sqrt{2}-\sqrt{2}-3\cdot5\cdot2\sqrt{2}$

$\Longrightarrow 12\sqrt{2}+42\sqrt{2}-\sqrt{2}-30\sqrt{2} \Longrightarrow (12+42-1-30)\sqrt{2} = \boxed{23\sqrt{2}}$

- Racionalización de expresiones irracionales: Se llama racionalizar una expresión, a escribirla sin radicales en el denominador. Hay tres maneras de racionalizar.

Caso 1: **Monomio en el denominador con Raíz cuadrada**

Ejemplo: Racionalicemos $\frac{3}{\sqrt{2}} \Longrightarrow$ Lo que tenemos que hacer es multiplicar, tanto al numerador como al denominador, por la raíz cuadrada que hay en el denominador de la expresión a Racionalizar. O sea que multiplicamos en este caso por: $\sqrt{2}$

$\Longrightarrow \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ Como vemos, multiplicamos tanto al numerador como al denominador. $\Longrightarrow \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$

Caso 2: **Monomio en el denominador con Raíz No cuadrada**

Racionalicemos $\dfrac{7}{\sqrt[5]{6^2}}$ $\Longrightarrow$ Lo que tenemos que hacer es multiplicar numerador y Denominador por una raíz que:

1. Su radicando sea el mismo de la raíz a racionalizar. (Raíz de Índice 5) $\sqrt[5]{\dots}$
2. La potencia de lo que hay dentro de la raíz resulta de la diferencia entre el radicando de la raíz y el exponente de lo que hay dentro $6^{(5-2)} \Longrightarrow \sqrt[5]{6^3}$

$\sqrt[5]{6^2}$

Ahora multiplicamos Numerador y Denominador por esta Raíz:

$$\frac{7}{\sqrt[5]{6^2}}\ \frac{\sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^3}} \Longrightarrow \frac{7\ \sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^2}\ \ \sqrt[5]{6^3}} \Longrightarrow \frac{7\ \sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^5}} \Longrightarrow \boxed{\frac{7\ \sqrt[5]{216}}{6}}$$

Caso 3: **Binomio en el denominador con Raíces cuadradas**

Racionalicemos $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ Lo que hacemos es multiplicar Numerador y Denominador por el binomio "Conjugado" del denominador. O sea, el mismo binomio cambiando el signo que separa ambos términos.

Binomio: $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ $\Longrightarrow$ Conjugado: $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

Multiplicamos entonces Numerador y Denominador por ese conjugado:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\ \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \Longrightarrow \frac{\sqrt{6}\ \left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} \Longrightarrow \frac{\sqrt{6}\ \sqrt{5}-\sqrt{6}\ \sqrt{2}}{5-2} \Longrightarrow \boxed{\frac{\sqrt{30}-\sqrt{12}}{3}}$$

El producto de un binomio por su conjugado da por resultado, la diferencia de los cuadrados de ambos términos del binomio, con ello se eliminan las raíces del denominador: $\Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} (a+b)\ \ (a-b)\ =\ a^2-b^2 \\ \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\ \ \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\ =\ a\ -\ b \end{array}\right.$$

Ejercicios combinados con números reales:

Lo primero que tengo que tener en cuenta es que debo pasar por ejemplo las expresiones decimales (periódicas o no periódicas) a fracciones, si hay raíces tengo que operar para juntar lo máximo posible en la misma raíz y si tengo varios números en notación científica, debo tratar de juntarlos y luego pasarlo a notación decimal y luego a fracción y tratar de juntarlo con los otros números.. bueno, vamos a ver mejor un ejemplito de operaciones combinadas..

$$\frac{1}{15}+1{,}3-0{,}06-\frac{2{,}5\cdot 10^{15}}{1{,}5\cdot 10^{14}}+\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}\right)^2 = \Longrightarrow$$

Bueno, en este ejercicio hay de todo.. en el primer paso pasamos todo a fracción y factoreamos lo que hay dentro de las raíces...

$1{,}3=\frac{13-1}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ y $0{,}06=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$

$2{,}5=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$ y $1{,}5=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$

$18=2\cdot 3^2$ y $8=2^3$

$$\Longrightarrow \frac{1}{15}+\frac{4}{3}-\frac{1}{15}-\frac{\frac{5}{2}\cdot 10^{15}}{\frac{3}{2}\cdot 10^{14}}+\left(\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^3}\right)^2$$

Ahora hacemos la división de fracciones de los números en notación científica $\frac{5}{2}\div\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

Y extraemos factores de las raíces

$\sqrt{2\cdot 3^2}=3\sqrt{2}$ y $+\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$

$$\frac{1}{15}+\frac{4}{3}-\frac{1}{15}-\frac{5}{3}\cdot\frac{10^{15}}{10^{14}}+\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)^2 \Longleftarrow$$

Ahora resuelvo los exponentes de 10 de la notación científica (como es una división se restan) y agrupo las raíces de 2 dentro del paréntesis.

$$\frac{1}{15}+\frac{4}{3}-\frac{1}{15}-\frac{5}{3}\cdot 10^{1}+\left(5\sqrt{2}\right)^2$$

Hago distributiva del cuadrado y se simplifica con la raíz

$$\frac{1}{15}+\frac{4}{3}-\frac{1}{15}-\frac{50}{3}+25\left(\cancel{\sqrt{2}}\right)^{\cancel{2}} \Longrightarrow \cancel{\frac{1}{15}}+\frac{4}{3}-\cancel{\frac{1}{15}}-\frac{50}{3}+50 = \boxed{68}$$

Resultado final

Cancelo las fracciones iguales de distinto signo...

Nota: Todos los ejercicios de operaciones combinadas con números reales son totalmente diferentes, no hay una manera estándar de resolver estos ejercicios porque cada uno tiene sus cosas.. lo que hay que tener muy en cuenta es que si tenemos números reales en diferentes notaciones (como en el ejemplo que pusimos) vamos a tener que empezar a pasar todos los números a la misma notación para poder resolver poco a poco el ejercicio, lo más conveniente es pasar todo siempre a fracciones y tratar de sacar todo lo posible de adentro de las raíces, siempre y cuando se pueda.

by Dal-Or para TARINGA!

Resolver las siguientes operaciones combinadas (SIN CALCULADORA)

1) $\left(0,5-1,2\right)\cdot 0,3=$

2) $\left[1-0,1+\dfrac{\sqrt{3^{-2}}}{\sqrt{1^{-2}}}\right]^{-1}=$

3) $1,3-0,06-0,303030...+\dfrac{2}{5}-\dfrac{4}{11}=$

4) $\left(\dfrac{3}{5}-0,0545454...\right)^{-1}-\dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{1}{10}\cdot 5=$

5) $\dfrac{3\div 0,1-\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^{-2}}{\dfrac{1-\frac{1}{2}}{0,25}-\dfrac{\frac{1}{2}}{0,83}}+\sqrt[3]{0,875-1}=$

6) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}-1\right)}{\dfrac{\frac{5}{4}-1,375}{\frac{4}{25}\cdot 0,4}}=$

7) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}\div\left(0,3^{-3}\cdot 0,3^{5}\right)^{-1}=$

8) $\dfrac{\left(0,2-\dfrac{3}{4}\right)\div\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{8}\right)}{0,6}=$

9) $\dfrac{0,5-0,75}{5-2\cdot\left(\dfrac{4}{5}+3\right)}\cdot 13=$

10) $\dfrac{1-\dfrac{2}{25}-\dfrac{3}{4}}{2^{-1}-\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-1}}+\dfrac{7}{10}-\left(\dfrac{0,0625}{1+\dfrac{1}{5}}\right)\cdot\dfrac{6}{5}=$

11) $\dfrac{\dfrac{1}{4}+2^{-1}-\dfrac{5}{8}}{\dfrac{\frac{1}{5}-0,75}{0,0625}}\cdot\left(\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{5}{6}\right)^{-1}\right)=$

12) $(1,353535...+2,999...)\cdot\left(\left(\dfrac{1}{11}\right)^{2}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{9,69\cdot 10^{23}}{3.23\cdot 10^{24}}\right)\cdot\left(\left(\dfrac{10\cdot\sqrt{3}}{3}\right)^{2}\right)^{-1}=$

13) $\dfrac{0,4\cdot\left(\dfrac{-1}{2}\right)+\left(\dfrac{5}{6}\right)^{-2}}{\left(\dfrac{1}{2^{-1}}\right)^{-1}}+\left(\dfrac{1,134\cdot 10^{-6}}{5,67\cdot 10^{-7}}\right)\cdot(-0,1)^{2}-\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{\left(\dfrac{-1}{4}\right)\cdot(-2)}\right)^{-1}=$

14) $\dfrac{2}{3}\cdot\left(0,4-\dfrac{1}{3}\right)^{-1}-\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{4,36\cdot 10^{-11}}{1,308\cdot 10^{-10}}\right)\cdot\sqrt{\left(\dfrac{1}{(0,16)^{-2}}+0,6\right)^{-1}}=$

15) $\sqrt{\dfrac{1}{4}\cdot\left(\left(0,2+\dfrac{5}{6}\cdot\left(0,416\right)^{-1}\right)^{-1}+\dfrac{1}{20}\right)^{-6}}-\sqrt[5]{\dfrac{2^{3}-3^{2}+1}{13}}+\left(\dfrac{1,87\ .\ 10^{5}}{3,74\ .\ 10^{5}}\right)=$

16) $\left(0,3+\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{(6)^{-1}}}\div\left(0,26\right)^{-1}\right)^{-8}+\sqrt{\sqrt{9\cdot 6,1+\dfrac{1}{(5)^{-2}}}+1\div\left(0,6\right)^{-2}}=$

17) $\left(0,3+\dfrac{1}{2}\div\dfrac{4}{5}\cdot 0,4-\dfrac{\left(0,16\right)^{-1}}{10^{2}+\left(\dfrac{1}{2^{-1}}\right)^{3}}\right)^{-1}+\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{4}{3^{-1}}\right)^{-1}-0,2+1,138}{5,5+\dfrac{25}{9}\div\dfrac{1}{43-6^{2}}}}=$

18) $\left(0,3-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\div\sqrt{\dfrac{8}{3}}\cdot 0,4+\dfrac{\sqrt[3]{(0,16)}\sqrt[3]{(0,027)}}{2^{-1}+\left(\dfrac{1}{2^{-1}}\right)^{-1}}\right)^{-1}+\sqrt{\dfrac{2}{5}}\cdot\sqrt{1,6}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{25^{-1}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{1}{5^{-1}}\right)^{-1}}=$

19) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{5}{2}}\div\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\sqrt{135}}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}-\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{(0,083)}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{2}{3^{-1}}\right)^{-1}}=$

20) $\sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{6}{5}\sqrt{-\dfrac{2}{3}\left[-\dfrac{1}{3}-\left(-\sqrt{4^{2}+\dfrac{1}{3}}\right)^{2}\right]}}}+\sqrt{\sqrt{\dfrac{2}{5}}\cdot\sqrt{1,6}-\sqrt{\sqrt{1,69}+0,95}+\sqrt{2,89}}=$

- Pasar a notación científica:

21) 19.000
22) 0,000021
23) 20.000.000
24) 0,00005
25) 0,02
26) 1.543,5
27) 200 millones
28) 0,00021
29) Cien mil millones
30) 4.205
31) 12.400
32) 14.250.000.000
33) 0,000000000000000315
34) 0,000000000021554
35) 43.000.000
36) Ciento cuarenta y seis mil millones

- Pasar a notación decimal:

37) $5,64\ .\ 10^{4}$
38) $3,100\ .\ 10^{-3}$
39) $6,16\ .\ 10^{3}$
40) $9,10200\ .\ 10^{5}$
41) $7,163\ .\ 10^{6}$
42) $2,25\ .\ 10^{-1}$
43) $8,83\ .\ 10^{9}$
44) $1,36\ .\ 10^{-11}$
45) $9\ .\ 10^{2}$
46) $7,5\ .\ 10^{-6}$
47) $4\ .\ 10^{7}$
48) $7,21\ .\ 10^{-4}$
49) $6,465541\ .\ 10^{5}$
50) $1,62\ .\ 10^{-3}$
51) $5,512\ .\ 10^{3}$
52) $9,35\ .\ 10^{-2}$
53) $4,6\ .\ 10^{-7}$
54) $6,11\ .\ 10^{2}$
55) $5,5512\ .\ 10^{5}$
56) $1,12\ .\ 10^{-4}$

Realizar las siguientes operaciones en notación científica, (sin usar la calculadora) pasando los decimales a fracción y multiplicando las potencias de 10 por separado, expresar el resultado como Número Natural.

57) $(1{,}2 \,.\, 10^5) \div (1{,}8 \,.\, 10^7) \,.\, (3 \,.\, 10^3)$
58) $(3{,}21 \,.\, 10^3) \div (1{,}2 \,.\, 10^{11}) \,.\, (8 \,.\, 10^{13})$
59) $(1{,}12 \,.\, 10^4) \div (3{,}5 \,.\, 10^5) \,.\, (2{,}5 \,.\, 10^4)$
60) $(9{,}1 \,.\, 10^8) \,.\, (5{,}2 \,.\, 10^{-3}) \div (2{,}8 \,.\, 10^3)$
61) $(4{,}32 \,.\, 10^5) \,.\, (5 \,.\, 10^{-7}) \,.\, (1{,}1 \,.\, 10^4)$
62) $(7{,}2 \,.\, 10^{16}) \,.\, (1{,}125 \,.\, 10^{-7}) \div (8{,}1 \,.\, 10^8)$
63) $(5{,}67 \,.\, 10^{-11}) \,.\, (5 \,.\, 10^7) \div (6{,}3 \,.\, 10^{-6})$
64) $(4{,}2 \,.\, 10^3) \div (2{,}31 \,.\, 10^{-7}) \,.\, (5{,}5 \,.\, 10^{-11})$
65) $(3{,}21 \,.\, 10^{-27}) \div (5{,}35 \,.\, 10^{-35}) \div (2{,}4 \,.\, 10^5)$
66) $(1{,}25 \,.\, 10^4) \,.\, (3{,}6 \,.\, 10^{-9}) \,.\, (7{,}2 \,.\, 10^6)$
67) $(1{,}02 \,.\, 10^{-4}) \,.\, (5 \,.\, 10^{-7}) \,.\, (1 \,.\, 10^{14})$
68) $(1{,}92 \,.\, 10^5) \div (9{,}6 \,.\, 10^{-7}) \,.\, (1{,}55 \,.\, 10^{-2})$

<u>Resolver con la calculadora</u>: 69) $\dfrac{1{,}237\cdot10^{-16}+5{,}463\cdot10^{-16}}{\left(2{,}4\cdot10^{-7}\right)\cdot\left(2{,}7916\cdot10^{-11}\right)}$ 70) $\dfrac{4{,}527\cdot10^{5}+5{,}373\cdot10^{5}}{\left(1{,}8\cdot10^{-13}\right)\cdot\left(5{,}5\cdot10^{15}\right)}$ 71) $\dfrac{1{,}53\cdot10^{12}\div5{,}1\cdot10^{12}}{\left(2{,}7\cdot10^{-15}\right)\cdot\left(2{,}2\cdot10^{13}\right)}$

<u>Resolver las siguientes sumas algebraicas, extrayendo factores de las raíces</u>:

72) $\sqrt{48}+\sqrt{27}$
73) $\sqrt{12}+\sqrt{27}$
74) $9\sqrt{12}-2\sqrt{75}$
75) $7\sqrt{18}-3\sqrt{50}$
76) $-2\sqrt{8}+4\sqrt{72}-5\sqrt{32}$
77) $-\sqrt{20}+3\sqrt{45}-2\sqrt{80}$
78) $\sqrt{28}+2\sqrt{175}-3\sqrt{63}$
79) $2\sqrt{24}+2\sqrt{54}-\sqrt{96}-\sqrt{150}$
80) $3\sqrt{40}+7\sqrt{250}-6\sqrt{90}-2\sqrt{810}$
81) $5\sqrt{12}+2\sqrt{8}-2\sqrt{48}-\sqrt{32}$
82) $3\sqrt{20}-2\sqrt{12}-2\sqrt{45}+\frac{4}{5}\sqrt{75}$
83) $\frac{1}{3}\sqrt{27}-\sqrt{8}-\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{18}+\sqrt{2}$

<u>Resolver los siguientes productos y divisiones con raíces</u>:

84) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}-1\right)$
85) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{10}\right)$
86) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{18}\right)$
87) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)\div\left(\sqrt{3}\right)$
88) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{6}\right)\div\left(\sqrt{2}\right)$
89) $\left(\sqrt{48}+\sqrt{6}-\sqrt{27}\right)\div\left(\sqrt{3}\right)$
90) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$
91) $\left(\sqrt{2}+5\sqrt{5}\right)\cdot\left(-1\sqrt{2}+5\sqrt{5}\right)$
92) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$
93) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$
94) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^2$

<u>Resolver las siguientes operaciones combinadas con raíces</u>:

95) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$
96) $\left(\sqrt{8}+\sqrt{6}\right)\div\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{27}-2\sqrt{3}+1\right)$
97) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)+\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}-\frac{1}{5}\sqrt{75}$
98) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}+1-\frac{1}{2}\sqrt{24}+\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{18}$
99) $\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{40}+\sqrt{8}-\frac{1}{3}\sqrt{72}-\frac{2}{5}\sqrt{1000}$
100) $\left[\left(\sqrt{3}-2\right)^2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}\right]\div\left(\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{108}\right)$

<u>Realizar las siguientes operaciones y expresar el resultado aproximado en notación científica</u>:

101) $1.000.000 \quad 12.000.000.000 =$
102) $80.000.000 \div 0{,}0002 =$
103) $75.000.000.000 \div 0{,}00025 =$
104) $40.000.000 \quad 0{,}000000025 =$
105) $\sqrt{80.000.000.000 \quad 0{,}0000000002} =$
106) $\sqrt{(8.000.000)^2 \quad (0{,}0002)^4} =$
107) $(700.000)^3\div\left(3{,}5\cdot10^7\right)^2 =$

<u>Racionalizar</u>: **Verificar el resultado con la calculadora !!**

108) $\dfrac{6}{\sqrt{5}} =$
109) $\dfrac{6}{\sqrt{3}} =$
110) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} =$
111) $\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{6}}{\sqrt{6}} =$
112) $\dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{10}} =$
113) $\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{15}} =$
114) $\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$
115) $\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt{6}} =$
116) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} =$
117) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} =$
118) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3^2}} =$
119) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{4}} =$
120) $\dfrac{4\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{3}} =$
121) $\dfrac{6\cdot\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}} =$
122) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5}} =$
123) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3}} =$
124) $\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{2^3}} =$
125) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$
126) $\dfrac{2\cdot\left(\sqrt{3}-3\right)}{\sqrt{3}+3} =$
127) $\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} =$
128) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} =$
129) $\dfrac{2}{3+\sqrt{3}} =$
130) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3} =$
131) $\dfrac{2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}+2} =$
132) $\dfrac{\sqrt{2}}{2 \quad \left(2+\sqrt{2}\right)} =$
133) $\dfrac{2}{\sqrt{2} \quad \left(\sqrt{2}+2\right)} =$
134) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6\sqrt{2} \quad \left(3+\sqrt{3}\right)} =$
135) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} =$
136) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+2}} =$
137) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}} =$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Ecuaciones con Números Reales

Número de Tema: **17**

Área: **Matemática**

- **Ecuaciones**: La manera de resolver una ecuación es despejar. Despejar significa "Dejar a la X sola" de un lado del igual y pasar todo lo demás para el otro lado…

Antes que nada, repasemos las "reglas básicas" para pasar de términos

> ➢ **Lo que está sumando pasa restando.** Ejemplo: $x+\sqrt{2}=1$ ⇨ Despejando: ⇨ $x=1-\sqrt{2}$
> ➢ **Lo que está restando pasa sumando.** Ejemplo: $3x-\sqrt{3}=2/5$ ⇨ Despejando: ⇨ $3x=2/5+\sqrt{3}$
> ➢ **Lo que está multiplicando pasa dividiendo.** Ejemplo: $\sqrt{5}\cdot x=4$ ⇨ Despejando: ⇨ $x=4\div\sqrt{5}$
> ➢ **Lo que está dividiendo pasa multiplicando.** Ejemplo: $x\div\pi=3$ ⇨ Despejando: ⇨ $x=3.\pi$
> ➢ **Las raíces cuadradas pasan como cuadrados.** Ejemplo: $\sqrt{x+1}=1/3$ ⇨ Despejando: ⇨ $x+1=(1/3)^2$
> ➢ **Los cuadrados pasan como raíces cuadradas.** Ejemplo: $(x-2/5)^2=1/4$ ⇨ Despejando: ⇨ $x-2/5=\sqrt{1/4}$

Ejemplo de resolución de ecuaciones. Resolvamos la siguiente ecuación: $\frac{\sqrt{2}}{6}X-\sqrt{2}=2$

$$\frac{\sqrt{2}}{6}X-\sqrt{2}=2 \quad +$$

Tenemos que pasar primero el $-\sqrt{2}$. Como está restando, lo pasamos para el otro lado del igual, sumando: Por lo tanto la ecuación nos quedaría así: $\frac{\sqrt{2}}{6}X=2+\sqrt{2}$

Luego pasamos el √2/6 que está multiplicando a la X.
Como está multiplicando, pasa dividiendo:

$$\frac{\sqrt{2}}{6}X=\left(2+\sqrt{2}\right) \quad \div$$

$$X=\left(2+\sqrt{2}\right)\div\frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow X=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\ 6}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{Racionalizo} \Rightarrow X=\frac{\left(12+6\sqrt{2}\right)\ \sqrt{2}}{\sqrt{2}\ \ \sqrt{2}}$$

$$X=\frac{12\sqrt{2}+12}{2}=6\sqrt{2}+6$$

- **Del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico. Problemas de ecuaciones con Números Reales:** Vamos a ver en ejemplos, como escribir una ecuación, dado un problema redactado.

Ejemplo 1

Lenguaje Coloquial	**Lenguaje Simbólico**
Cuando una piedra es arrojada desde una terraza, la altura se calcula como la mitad de la gravedad multiplicada por el tiempo que tarda en caer elevado al cuadrado, Si dejo caer una piedra desde una terraza de 12,5 metros de altura, y el valor de la gravedad es aproximadamente 10 ¿Cuánto tarda la piedra en caer?	$X=\sqrt{\frac{2\ \ h}{g}}$ $X=\sqrt{\frac{2\ \ 12,5}{10}}$

Paso a Paso

La incógnita es el tiempo que tarda en caer. Lo llamamos "X"	X
A la gravedad la llammos "g"	g
A la altura de la terraza la llamamos "h"	h
El problema dice que la altura es igual a la mitad de la gravedad…(sigue después)	$h=1/2\cdot g$ ......
… la mitad de la gravedad… por el tiempo al cuadrado.	$h=1/2\ g\cdot X^2$
Despejamos "X" que es el tiempo: Paso el 2 que está dividiendo multiplicando	$2\cdot h=g\cdot X^2$
La "g" que está multiplicando, la paso dividiendo	$(2\cdot h)/g=X^2$
Y el cuadrado lo paso como Raíz	$\sqrt{(2\cdot h)\ /g}=X$
Luego reemplazamos "g" y "h" por los valores que me dan en el enunciado	$X=\sqrt{(2\ \ 12,5)\ /10}$

* Como estamos calculando un tiempo, obviamos escribir | x | al despejar ya que un tiempo debe ser positivo si o si.

Queda por resolver la ecuación: $X=\sqrt{\frac{2\ \ 12,5}{10}} \Rightarrow X=\sqrt{\frac{25}{10}} \Rightarrow X=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{10}} \Rightarrow X=\frac{5}{\sqrt{10}} \Rightarrow X=\frac{5\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}$

Distribuyo la Raíz   Racionalizo

$$\Rightarrow X=\frac{5\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{5\cdot\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \boxed{X=\frac{\sqrt{10}}{2}} \Rightarrow X\quad 1,58\ \textit{segundos}$$

- Inecuaciones con Números Reales: Ya sabemos lo que es una inecuación o desigualdad, a manera de repaso veamos las siguientes inecuaciones como ejemplos: $\frac{-2}{3}x + \sqrt{3} \leq 4$ $\qquad \frac{-2x^2+1}{5} - \sqrt{3} > \frac{1}{2}$

Estas Inecuaciones dan por resultado, una vez despejada x, una desigualdad. Así como las ecuaciones daban igualdades, las inecuaciones dan desigualdades. En realidad el resultado nos indica los valores que pueden tomar "x" para "satisfacer" la desigualdad. Es decir que nos va a dar resultados como X>3, que significaría que "X" puede valer cualquier número que sea menor que 3.

Este resultado lo podemos graficar

Este gráfico se denomina <u>intervalo</u>. Como el signo es "**<**" entonces **no incluye al "3"** y en el gráfico se usa un **paréntesis**. Si hubiera sido "≤" **lo hubiera incluido** y para graficarlo en lugar de usar un paréntesis en el "3" hubiera ido un **corchete**.

La manera de despejar "X" en una inecuación, como ya habrán visto, es la misma que la manera de despejar "x" en una ecuación, solo que hay que respetar una REGLA FUNDAMENTEAL!:

> Al pasar de miembro, <u>multiplicando o dividiendo un número negativo</u>, tengo que "<u>dar vuelta</u>" el signo de la desigualdad. Si es "<" queda ">" y viceversa

- Resolución de Inecuaciones con Números Reales: Veamos este ejercicio tipo: $\frac{-5x + \sqrt{12}}{3} + \sqrt{3} \leq \frac{1}{3}$

<u>Resolución</u>:

$\frac{-5x + \sqrt{12}}{3} + \sqrt{3} \leq \frac{1}{3}$ ⇨ En primer lugar paso la raíz de 3 restando ⇨ $\frac{-5x + \sqrt{12}}{3} \leq \frac{1}{3} - \sqrt{3}$

$\frac{-5x + \sqrt{12}}{3} \leq \frac{1}{3} - \sqrt{3}$ ⇨ Luego paso el 3 multiplicando ⇨ $-5x + \sqrt{12} \leq \left(\frac{1}{3} - \sqrt{3}\right) \cdot 3$

$-5x + \sqrt{12} \leq \left(\frac{1}{3} - \sqrt{3}\right) \cdot 3$ ⇨ Distributiva del 3 ⇨ $-5x + \sqrt{12} \leq 1 - 3\sqrt{3}$

$-5x + \sqrt{12} \leq 1 - 3\sqrt{3}$ ⇨ Paso la raíz de 12 ⇨ $-5x \leq 1 - 3\sqrt{3} - \sqrt{12}$

$-5x \leq 1 - 3\sqrt{3} - \sqrt{12}$ ⇨ Factoreo el 12 ⇨ $-5x \leq 1 - 3\sqrt{3} - \sqrt{2^2 \cdot 3}$

$-5x \leq 1 - 3\sqrt{3} - \sqrt{2^2 \cdot 3}$ ⇨ Extraigo el 22 de la raíz. ⇨ $-5x \leq 1 - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$-5x \leq 1 - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ ⇨ Agrupo las raíces de 3. ⇨ $-5x \leq 1 - 5\sqrt{3}$

$-5x \leq 1 - 5\sqrt{3}$ ⇨ Paso el –5 dividiendo **Y doy vuelta el signo** ⇨ $x \geq \left(1 - 5\sqrt{3}\right) \div (-5)$

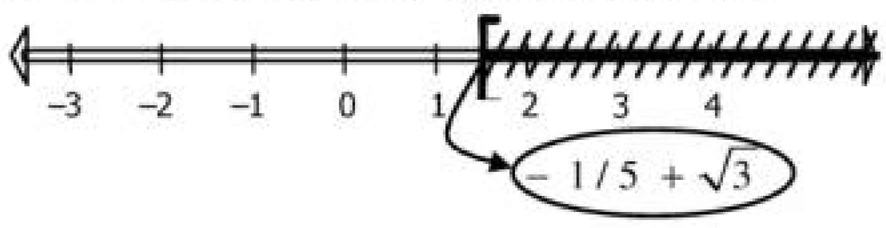
$x \geq \left(1 - 5\sqrt{3}\right) \div (-5)$ ⇨ Distributiva del –5 ⇨ $\boxed{x \geq -\frac{1}{5} + \sqrt{3}}$

Ya despejamos "X" y resolvimos la inecuación.

Ahora vamos a graficar el resultado: Para ello, tenemos que tener un valor aproximado de: $-\frac{1}{5} + \sqrt{3}$
Entonces pasemos la fracción a decimal y calculemos con calculadora la raíz de 3:

Nota: La raíz de 3, como ya sabemos es un irracional que tiene infinitos decimales no periódicos, por lo tanto tenemos que truncar o redondear el resultado si calculamos la raíz, es por ello que la única manera exacta de representar un irracional como raíz de 3 es utilizando la raíz ya que al calcularlo, tenemos que tomar una cantidad limitada de decimales.

Entonces nuestra inecuación da por resultado que la "x" tiene que ser un valor mayor o igual a 1,532...
Y lo podemos graficar en la recta numérica de la siguiente manera:



Potencias negativas

El (-1) como potencia: El (-1) como potencia "convierte" al número que eleva en su inverso multiplicativo

En lenguaje simbólico: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ O sea que es como si "diera vuelta" a la fracción

Ejemplos: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$ $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-1} = -\frac{5}{4}$ $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} = -3$ $(5)^{-1} = \frac{1}{5}$ $(-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$

Ahora veamos que pasa con las otras potencias negativas que no son justamente -1

Supongamos que queremos hacer esta cuenta: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ ⇨ Esta cuenta, la podemos escribir como ⇨ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1\cdot 2}$

O sea que podemos elevar primero a la -1 y después a la 2.

Por lo tanto la cuenta sería así:

Elevo primero a la -1 ⇨ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1\cdot 2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2}$ ⇨ Luego elevo a la 2 ⇨ $\left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}$ ⇨ Por lo tanto: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1\cdot 2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2}$

Otros ejemplos: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$ $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{9}$ $(2)^{-3} = \frac{1}{8}$ $(-3)^{-3} = \frac{-1}{27}$

Irracionales en la recta numérica

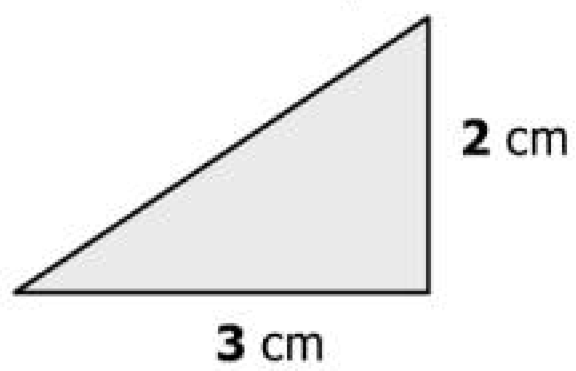
Ahora vamos a ver como ubicar en una recta numérica los números que resultan de calcular las raíces cuadradas inexactas, que son números irracionales.

Imaginemos que queremos ubicar en la recta numérica la raíz cuadrada de 13, que sabemos que es inexacta.

Vamos a utilizar el teorema de Pitágoras

Supongamos que tenemos el siguiente triángulo rectángulo:

Calculemos la hipotenusa:

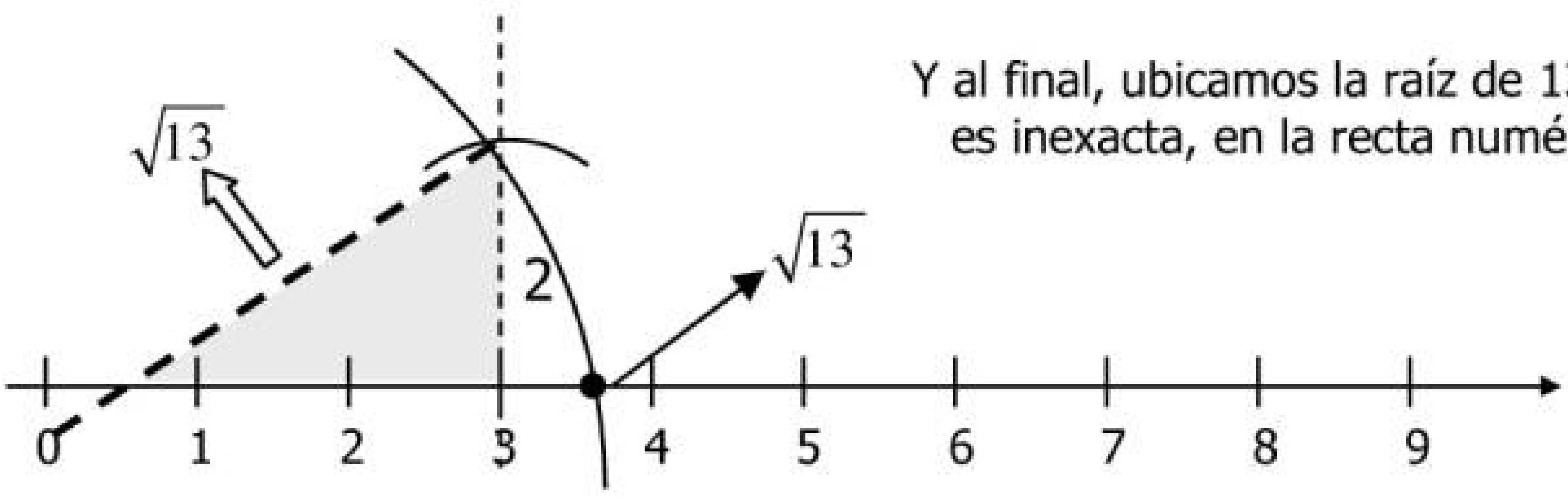


$$H^2 = (2cm)^2 + (3cm)^2$$
$$H^2 = 4cm^2 + 9cm^2$$
$$H^2 = 13cm^2$$
$$H = \sqrt{13cm^2}$$
$$H = \sqrt{13}\ cm$$

Por el resultado que obtuvimos recién, nos damos cuenta que si quiero tener la medida de la raíz de 13 para graficarla, puedo tomarla con el compás de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 2 y 3 cm.

Para trasladar correctamente esta medida a la recta numérica, una manera es la siguiente:

- Trazo una recta vertical sobre el valor de uno de los catetos (por ejemplo 3)
- Con el compás tomo la medida del otro cateto (2) y la marco sobre la recta vertical que tracé en el paso anterior.
- Luego dibujo la hipotenusa del triángulo rectángulo entre el punto que marqué recién sobre la recta vertical y el 0
- Por último tomo la medida de la hipotenusa con el compás, apoyando sobre el cero y marco la raíz de 13 sobre la recta.



Y al final, ubicamos la raíz de 13 que es inexacta, en la recta numérica

Así de esta manea podemos ubicar sobre la recta, por ejemplo:

- La raíz de 2 (tomando como catetos 1 y 1)
- La raíz de 5 (tomando como catetos 1 y 2)
- La raíz de 8 (tomando como catetos 2 y 2)
- La raíz de 18 (tomando como catetos 3 y 3)
- Y muchos números mas....

Pero... ¿Qué pasa si quiero ubicar en la recta la raíz de 12 por ejemplo?
En este caso, uno de los catetos también tiene que ser una raíz inexacta:

Resolución:

- Primero descomponemos al 12 en la suma de dos números cualesquiera, por ejemplo, 4 + 8
- Luego estos valores (4 y 8) van a ser los cuadrados de los catetos, por lo tanto los catetos tienen que ser las raíces de estos números
- Entonces un cateto va a ser 2 y el otro la raíz de 8.

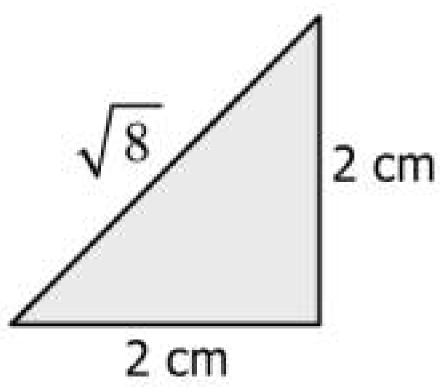
Pero antes de graficar esto, tenemos que ver la manera de graficar la raíz de 8 que también es inexacta.. y para ello repetimos el proceso

- Descomponemos al 8 en dos, por ejemplo, 4 + 4
- Luego los catetos van a ser las raíces de 4 y 4, o sea que los catetos van a ser 2 y 2

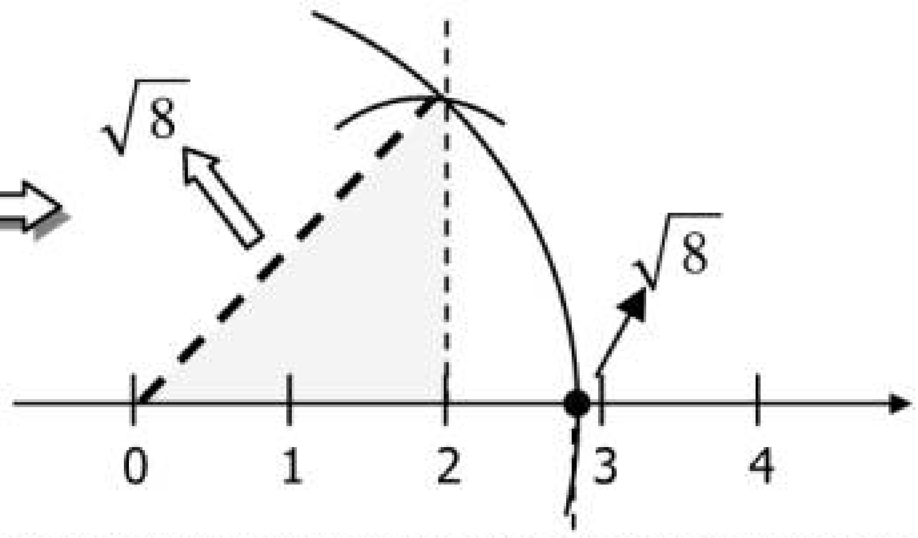
Veámoslo graficado:

Primero buscamos la raíz de 8

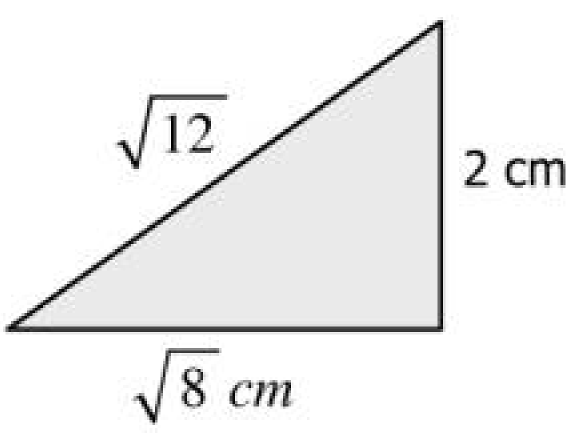
Calculamos con Pitágoras tomando 2 catetos de 2 cm cada uno



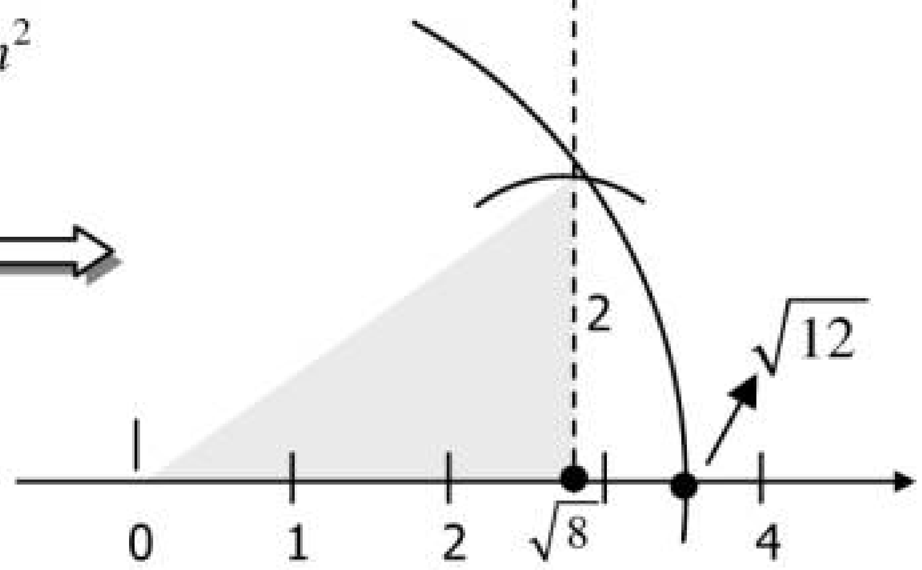
$$\begin{cases} H^2 = (2\,cm)^2 + (2\,cm)^2 \\ H^2 = 4\,cm^2 + 4\,cm^2 \\ H = \sqrt{8\,cm^2} \\ H = \sqrt{8}\ cm \end{cases} \Rightarrow$$



Ahora buscamos la raíz de 12



$$\begin{cases} H^2 = (2\,cm)^2 + \left(\sqrt{8}\ cm\right)^2 \\ H^2 = 4\,cm^2 + 8\,cm^2 \\ H = \sqrt{12\,cm^2} \\ H = \sqrt{12}\ cm \end{cases} \Rightarrow$$



Y de esta forma podemos encontrar triángulos para todas las raíces inexactas menores a 100.

Algunas raíces inexactas saldrán de un solo paso, es decir, que para algunas encontraremos un triángulo cuyos catetos al cuadrado sumados sean ese valor cuya raíz inexacta queremos calcular. Ejemplo: La raíz de 85 la podemos calcular como la raíz de 81 + 4, que son a su vez los cuadrados de 9 y 2 respectivamente. Por lo tanto en un solo paso encontramos un triángulo cuyos catetos al cuadrado sumados dan el valor cuya raíz inexacta busco.

Otras veces, como para la raíz de 12, tendremos que hacerlo en dos pasos como vimos recién.

➢ Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $\dfrac{\frac{3}{2}X-0,2}{2^{-1}}=\sqrt{\dfrac{5^2+11}{4}}$

2) $\left[-2X+\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot 0,9\right]=-\left[0,2-3.(-0,1)\right]:(-5)$

3) $0,6+\dfrac{4}{3}X=\sqrt{\left(\sqrt{0,4}-1\right):(-3)}$

4) $\dfrac{2X-1}{\sqrt[3]{7,9}}=-\left[-4-\dfrac{1}{2}\cdot(-2)^2\right]^2$

5) $\left[\dfrac{4}{5}X-1,5\right]\div 1,4+\sqrt{11^2-21}=\sqrt[3]{1-0,875}$

6) $3\cdot\left[X+0,2\right]-\sqrt{\dfrac{3}{5}\cdot\left(1-\dfrac{8}{3}\right)\cdot(-1)}=2,3$

7) $\dfrac{X}{7}+\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{10^2-19}}=\left(\dfrac{3}{2}-1\right)^{-2}$

8) $\dfrac{\left(3,5-1,2\right)\div 2,8}{2X+0,6}=\sqrt[3]{-\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{9}{5}\cdot\left(2,2\right)}}$

9) $X-1-\sqrt{\left(1-\dfrac{4}{5}\right)\cdot 0,2}=-\left[1-\dfrac{3}{2}\cdot\left(-2^2\right)\right]$

10) $\dfrac{\sqrt{X-0,19}}{3}-\sqrt{\left(0,36-\dfrac{1}{3}\right)\div 0,83}=\sqrt[3]{-1+\dfrac{7}{8}}$

11) $\dfrac{X+1}{2}-\left(3,2-2+0,1\right)=\dfrac{\sqrt[3]{-0,125}}{\sqrt{0,25}}$

12) $-0,5X+\sqrt[3]{-1+0,875}=\left[-1+3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\right]\cdot\dfrac{1}{10}$

13) $\left(X-\dfrac{1}{4}\right)+\sqrt[5]{(0,4-0,08)\div(0,1)^2}=-2$

14) $5^2-5^3+\dfrac{4}{5}X=-\sqrt{0,63+\dfrac{2^2}{11}}+\sqrt{3,6\div 0,9}$

15) $\left(3X+\dfrac{1}{2}\right)\cdot 0,2=\sqrt[3]{0,72\cdot\left(-\dfrac{1}{11}\right)^{-1}}$

16) $\left(\dfrac{1}{2}X-2\right)\div(-2)^{-1}=-\left[(2-0,1\div 5)\cdot(-1)^{-4}\right]$

17) $X+1+\sqrt{(1-0,8)\cdot 0,2}=\sqrt{0,01}$

18) $X+\dfrac{2}{3}-\sqrt{\dfrac{\left(\frac{1}{2}+0,8\right)\cdot 0,4}{\frac{2}{5}-\sqrt{0,1}\cdot\sqrt{0,4}}}=0$

➢ Mas Ecuaciones para resolver:

19) $3+\dfrac{\frac{6}{5}:3+\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}:\frac{5}{6}-\frac{1}{4}}=\dfrac{300+x}{71}$

20) $\sqrt{1-\dfrac{8}{9}\cdot(-3)^2\cdot x+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3:\dfrac{3}{3x-1}}=\dfrac{5\cdot(x+6)}{12}$

21) $\sqrt{\dfrac{1}{16}}\cdot\sqrt[3]{-27}:\dfrac{3}{4(x-1)}-\left(-0,6\right)^{-3}=2+\dfrac{x+1}{8}$

22) $\left(\sqrt{3}+4\right)^2-\left(1+4\sqrt{3}\right)\cdot(x-3)=17$

23) $\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{6}}\quad\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{6}}=\sqrt{x-3}$

24) $\left(3-\sqrt{2}\right)^2-6\quad\left(3-\sqrt{2}\right)+7=x$

25) $\left(\sqrt{7}-3\right)^2+6\quad\left(\sqrt{7}-3\right)-19=3x$

26) $3\sqrt{8}-2\sqrt{18}+4\sqrt{50}=20\sqrt{x}$

27) $4\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{135}+3\sqrt[3]{40}-15\sqrt{\dfrac{1}{25}}=4\sqrt[3]{(x+2)}-3$

28) $20-\left[(4\cdot 3+15):3-2\right]=\left(\dfrac{1}{(x+1)}\right)^{-2}-3$

29) $\left(\dfrac{-3}{2}\right)^2+0,6+\dfrac{-3}{2}=\dfrac{1}{6}\left[(x-1)^2-5\right]$

30) $4\left(\dfrac{-3}{2}\right)^2+0,6:0,4=\dfrac{(x-3)^2-4}{2}$

31) $-2+\dfrac{1}{2}-\left[-1-\left(\dfrac{1}{2}+1\right)\right]=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{5}\right)^{-2}-\dfrac{21x^3+1}{3}$

32) $\left(-1-\dfrac{1}{2}\right)\quad\left(-2+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{7}{4}=\dfrac{4}{(x+1)^3}$

33) $1:\left(-\dfrac{1}{2}+1\right)-\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{5x^4-2}{2}$

34) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-1\right)\quad\left[-\left(\sqrt{3}\right)^2\right]}{2}=\dfrac{1}{2}\quad(x-6)^3$

35) $\dfrac{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2\quad\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^3}+1=\dfrac{x^3-3}{48}$

36) $\sqrt[3]{-1}+\sqrt{4}-\sqrt[5]{-32}=\dfrac{x^2+3}{4}$

37) $\sqrt[3]{-1+\dfrac{7}{8}}-\sqrt{\dfrac{-3}{4}+1}=\dfrac{x^3+3}{10}-\left(\sqrt{2}\right)^4$

38) $\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-2}}=\dfrac{\left(-\sqrt{2}\right)^2}{x^2+1}$

La energía cinética de un móvil en movimiento está dada por la expresión $\boxed{E = \frac{1}{2} m V^2}$
Donde: "E" es la energía, "m" es la masa, y "V" es la velocidad

39) Hallar la energía cinética de un móvil si el valor de su masa es de $\sqrt{2}$ y el de su velocidad es de $\sqrt{2}+1$
40) Hallar el valor de su Velocidad si el valor de su energía cinética es de 2 y el valor de su masa es de 3.

La teoría de la relatividad especial relaciona la Energía con la masa y una constante que es la velocidad de la luz según la siguiente expresión: $E = m \cdot c^2$
E=Energía (Ergios) m=masa (gramos) c=Velocidad de la luz = $3 \,.\, 10^{11}$ cm/seg

41) Calcular el valor de la energía en Ergios de una masa de 120 gramos.

➢ Resolver las siguientes ecuaciones: (Racionalizar el resultado, si es necesario)

42) $\sqrt{3}\cdot x + \left(\sqrt{3}-1\right)^2 = 7$

43) $\dfrac{8x}{\sqrt{2}} + \dfrac{7-7\sqrt{8}}{\sqrt{8}\ +1} = -1$

44) $2x^2 - \left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2 = -\left(\dfrac{9}{2}+2\sqrt{10}\right)$

45) $\dfrac{-\sqrt{3}}{5}x^2 + \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)^2 = 1$

46) $2\sqrt{2}\cdot x + \left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right) = 4$

47) $\dfrac{2x+\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

Ubicando Irracionales en la Recta Numérica

➢ Ubicar en la recta numérica los siguientes valores de un solo paso (tomando como catetos dos valores exactos)

48) $\sqrt{2}$	52) $\sqrt{17}$	56) $\sqrt{29}$	60) $\sqrt{40}$	64) $\sqrt{52}$	68) $\sqrt{65}$	72) $\sqrt{74}$
49) $\sqrt{5}$	53) $\sqrt{18}$	57) $\sqrt{32}$	61) $\sqrt{41}$	65) $\sqrt{53}$	69) $\sqrt{68}$	73) $\sqrt{80}$
50) $\sqrt{8}$	54) $\sqrt{20}$	58) $\sqrt{34}$	62) $\sqrt{45}$	66) $\sqrt{58}$	70) $\sqrt{53}$	74) $\sqrt{61}$
51) $\sqrt{10}$	55) $\sqrt{26}$	59) $\sqrt{37}$	63) $\sqrt{50}$	67) $\sqrt{61}$	71) $\sqrt{73}$	75) $\sqrt{34}$

➢ Ubicar en la recta numérica estas otras raíces, en dos pasos:

76) $\sqrt{3}$	78) $\sqrt{11}$	80) $\sqrt{18}$	82) $\sqrt{21}$	84) $\sqrt{27}$	86) $\sqrt{32}$	88) $\sqrt{35}$
77) $\sqrt{6}$	79) $\sqrt{14}$	81) $\sqrt{19}$	83) $\sqrt{24}$	85) $\sqrt{30}$	87) $\sqrt{33}$	89) $\sqrt{38}$

➢ Resolver las siguientes inecuaciones:

90) $\dfrac{0,6\cdot\left(3x-\sqrt{2}\right)}{2^{-1}} < \sqrt{\dfrac{5+1,2}{7}}$

91) $\dfrac{0,12\cdot(x-1)}{-0,36} \geq \sqrt{\dfrac{8}{3}} + \dfrac{1}{3}\sqrt{6}$

92) $\dfrac{\sqrt{5}\ x - 2+\sqrt{3}}{3} \geq \sqrt{\dfrac{1}{3}} + 1$

93) $2x + \sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\ \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} > x+3$

94) $\sqrt{3}\ x + 2x - \dfrac{1}{5} + \sqrt{3} < \dfrac{4}{5}$

95) $\dfrac{-\sqrt{2}}{7}x + \dfrac{1}{7}\left(\sqrt{3}+2\right)^2 \leq \left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1$

96) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot x + \left(\sqrt{3}-3\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right) < 4$

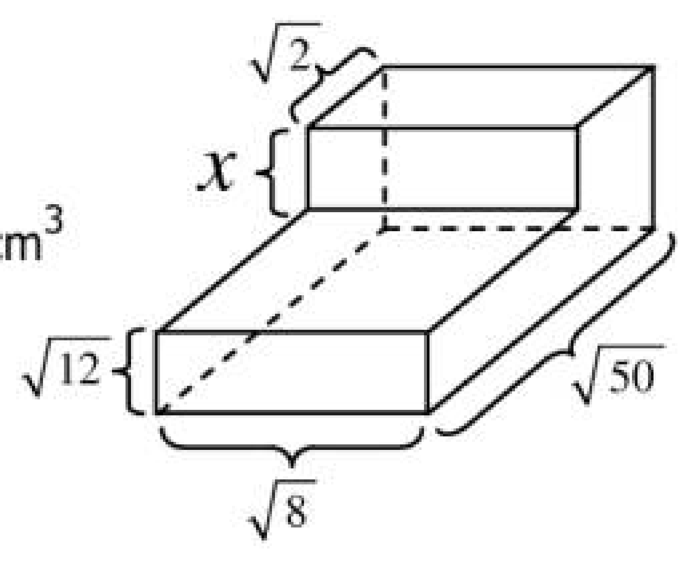
97) $\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + 3\sqrt{27}\right)\cdot x > 9\sqrt{\left(1,4-2\right):\dfrac{-1}{5}}$

98) $\dfrac{\sqrt{12} - 11x}{2} + 2\sqrt{3} \leq \sqrt{1-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}}$

99) $\sqrt{1-\dfrac{2}{3}\cdot(-3x)} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 : \dfrac{2^{-2}}{2x-1} > \dfrac{5}{2}$

100) Hallar la altura de un rectángulo cuya base mide √2+1 cm y su área es √2+2 cm

101) Hallar el valor de "x" sabiendo que el volumen del cuerpo vale: $44\sqrt{3}$ cm^3



Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

SIMELA

Número de Tema: **18**

Área: **Matemática**

¿Qué es el SIMELA? Es una sigla que significa: "**SI**stema **ME**trico **L**egal **A**rgentino"

O sea es el sistema de unidades que se usa en Argentina para medir las longitudes y demás magnitudes espaciales. Es por eso que estamos acostumbrados a decir metros o centímetros, pero no estamos acostumbrados a decir pulgadas o pies, cuando hablamos de lo que mide un objeto. Esto es por el SIMELA, ya que el SIMELA establece al metro por ejemplo como unidad, pero no a las millas o pulgadas, ya que estas medidas están establecidas por el sistema de medidas de Estados Unidos que tomaron convenciones diferentes.

¿Qué unidades están incluídas en el SIMELA? Las unidades que están incluidas en el SIMELA son:

Kilómetro	Hectómetro	Decámetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro

¿Qué significa cada unidad?

Kilómetro	Son **MIL** Metros	Abreviatura: **km**
Hectómetro	Son **CIEN** Metros	Abreviatura: **Hm**
Decámetro	Son **DIEZ** Metros	Abreviatura: **Dam**
Metro	**Es la unidad principal del sistema**	Abreviatura: **m**
Decímetro	Es la **DÉCIMA PARTE** de un Metro	Abreviatura: **dm**
Centímetro	Es la **CENTÉSIMA PARTE** de un Metro	Abreviatura: **cm**
Milímetro	Es la **MILÉSIMA PARTE** de un Metro	Abreviatura: **mm**

¿Cómo se pasa de una unidad a otra? Se corre la coma tantos lugares como me desplace

Si me tengo que mover hacia la derecha, la coma se mueve para la derecha
Si me tengo que mover hacia la izquierda, la coma se mueve para la izquierda

Ejemplo: Si tengo que pasar **de Km a metro** tengo que mover la coma **3 lugares a la derecha**

Km	Hm	Dam	**m**	dm	cm	mm

Ejemplo: Para pasar 32,35 Km a Dam ⇨ Corro la coma **2** lugares para la **DERECHA**

Km	Hm	**Dam**	m	dm	cm	mm

Con lo cual me quedan: 3235 Dam

Ejemplo: Para pasar 651,37 cm a M ⇨ Corro la coma **2** lugares para la **IZQUIERDA**

Km	Hm	Dam	**m**	dm	**cm**	mm

Con lo cual me quedan: 6,5137 M

Atención: Si tenemos que correr la coma, por ejemplo 4 lugares hacia algún lado y nos encontramos con que solo hay dos o tres números de ese lado después de la coma. Tenemos que "inventar" ceros para completar los lugares que faltan. Veamos dos ejemplos.

Para pasar 59,21 cm a Hm ⇨ Corro la coma **4** lugares para la **IZQUIERDA**

Km	**Hm**	Dam	m	dm	**cm**	mm

Como tengo sólo dos números antes de la coma y tengo que correr 4 lugares, "invento" ceros para completar los lugares que me faltan Con lo cual me quedan: 0,005921 Hm

Para pasar 5,3 Km a dm ⇨ Corro la coma **4** lugares para la **DERECHA**

Km	Hm	Dam	m	**dm**	cm	mm

Como tengo sólo un número después de la coma y tengo que correr 4 lugares invento ceros para completar los lugares que me faltan. Con lo cual me quedan: 53 000 dm

- ***Medidas de Áreas y volúmenes***

Medidas Lineales

Km	Hm	Dam	**m**	dm	cm	mm

Km^2	Hm^2	Dam^2	$\mathbf{m^2}$	dm^2	cm^2	mm^2	Medidas de Superficie
Km^3	Hm^3	Dam^3	$\mathbf{m^3}$	dm^3	cm^3	mm^3	Medidas de Volumen

En las medidas de Superficie, *Si tengo que pasar de m^2 a dm^2 (Hay un lugar) en verdad, como la medida está al cuadrado tengo que correr la coma 2 lugares hacia la derecha. Si tuviera que pasar de m^2 a mm^2 (Hay 3 lugares) en verdad, como la medida está al cuadrado tengo que correr la coma 6 lugares hacia la derecha.*

En las medidas de Volumen, *Si tengo que pasar de m^3 a dm^3 (Hay un lugar) en verdad, como la medida está al cubo tengo que correr la coma 3 lugares hacia la derecha. Si tuviera que pasar de m^3 a mm^3 (Hay 3 lugares) en verdad, como la medida está al cubo tengo que correr la coma 9 lugares hacia la derecha.*

Ejemplos:

Pasar 15,31 Hm^2 a m^2 → De Hm a m hay 2 lugares pero como son medidas de superficie, tenemos que movernos de a dos por vez, por lo que nos queda que tenemos que correr la coma **4** lugares en total para la **DERECHA.**

Entonces nos queda: ***15,31 Hm^2 = 153100 m^2***

Pasar 45,1 mm^2 a dm^2 → De mm a dm hay 2 lugares pero como son medidas de volumen, tenemos que movernos de a tres por vez, por lo que nos queda que tenemos que correr la coma **6** lugares en total para la **IZQUIERDA.**

Entonces nos queda: ***45,1 mm^3 = 0,0000451 dm^3***

- Resolución de Ejercicios de Aplicación:

Es muy común que en un ejercicio de aplicación tenga que sumar o restar medidas que están expresadas en unidades diferentes. Lo que tenemos que tener muy en claro es que "No podemos sumar así nomás, dos medidas que están expresadas en unidades diferentes" lo que hay que hacer en estos casos, es pasar todas las medidas que tenga que sumar o restar, a la misma unidad.

Ejemplo: *Una persona hace un recorrido en auto en tres etapas. En la primera etapa recorre 16,6 Km. En la segunda etapa recorre 1250 metros y en la tercera etapa recorre 186 Hm. ¿Cuántos Km. recorrió en total?*

Resolución: Como la pregunta es cuántos "**Km**" tengo que pasar todas las medidas a Km:

1º Etapa: 16,6 Km (esta ya estaba en Km)
2º Etapa: 1250 m => Tengo que correr tres lugares a la izquierda: 1,25 Km
3º Etapa: 186 Hm => Tengo que correr un lugar a la izquierda: 18,6 Km

Luego, una vez pasadas todas las medidas a Km, puedo sumarlas tranquilo.
Entonces, el total va a ser la suma de las tres etapas:

Total = 1º Etapa + 2º Etapa + 3º Etapa = 16,6 Km + 1,25 Km + 18,6 Km = 36,45 Km

Nota: En los ejercicios que tengamos que comparar medidas en diferentes unidades, lo que hay que hacer es pasar todos los datos a la misma unidad, si el ejercicio no indica nada en especial, podemos pasar a la unidad que mas nos guste, solo para comparar los valores.

Pasar a metros:

1) 543 mm
2) 54,23 dm
3) 45,25 cm
4) 1153 mm
5) 122,46 Hm
6) 45,15 Dam
7) 9911 cm
8) 0,51 Km
9) 0,11 Km
10) 125 mm
11) 1453 dm
12) 0,00459Hm
13) 0,158 Hm
14) 2583 cm
15) 1200 mm
16) 0,0075 Km
17) 0,07 Dam
18) 2586 cm
19) 0,02 Km
20) 5000 mm
21)12 cm
22) 0,021 Km
23) 0,001 Km
24) 520 mm
25) 42,5 dm
26) 1,02 Hm
27) 0,01 Hm
28) 7841 cm
29) 112 mm
30) 23 cm
31) 0,004 Km
32) 0,00055Km
33) 1212 mm
34) 125 dm
35) 12 Hm
36) 123 cm
37) 0,025 Km
38) 0,0012 Km
39) 21 mm
40) 105 dm
41) 23,11 Hm
42) 1 cm
43) 2,251 Km
44) 1,002 Km
45) 12 mm
46) 15,1 dm
47) 11,55 Hm
48) 1,052 Hm
49) 1200 cm
50) 1200 mm

Pasar a mm:

51) 23,302 M
52) 7,364 dm
53) 6,727 cm
54) 33,956 M
55) 11,066 Hm
56) 6,719 Dam
57) 99,554 cm
58) 0,714 Km
59) 0,332 Km
60) 11,18 M
61) 38,118 dm
62) 0,068 Hm
63) 0,397 Hm
64) 50,823 cm
65) 34,641 M
66) 0,087 Km
67) 0,265 Dam
68) 50,853 cm
69) 0,141 Km
70) 70,711 M
71) 3,464 cm
72) 0,145 Km
73) 0,032 Km
74) 22,804 M
75) 6,519 dm
76) 1,01 Hm
77) 0,1 Hm
78) 88,549 cm
79) 10,583 M
80) 4,796 cm
81) 0,063 Km
82) 0,023 Km
83) 34,814 M
84) 11,18 dm
85) 3,464 Hm
86) 11,091 cm
87) 0,158 Km
88) 0,035 Km
89) 4,583 M
90) 10,247 dm
91) 4,807 Hm
92) 1 cm
93) 1,5 Km
94) 1,001 Km
95) 3,464 M
96) 3,886 dm
97) 3,399 Hm
98) 1,026 Hm
99) 34,641 cm
100) 34,641 M

Pasar a Hm:

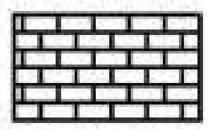
101) 21 M
102) 102 dm
103) 3100 cm
104) 5,1 M
105) 2000 mm
106) 212,49 Dam
107) 3500 cm
108) 22,58 Km
109) 10,49 Km
110) 152 M
111) 1200 dm
112) 300 mm
113) 8800 mm
114) 125 cm
115) 36 M
116) 0,052 Km
117) 8,37 Dam
118) 160 cm
119) 4,47 Km
120) 2230 M
121) 100 cm
122) 45,45 Km
123) 1 Km
124) 721 M
125) 205 dm
126) 20 mm
127) 500 mm
128) 30000 cm
129) 30 M
130) 15 cm
131) 0,2 Km
132) 0,74 Km
133) 110,1 M
134) 121 dm
135) 9500 mm
136) 350 cm
137) 5 Km
138) 1 Km
139) 12 M
140) 12 dm
141) 1200 mm
142) 120 cm
143) 0,0012 Km
144) 31,65 Km
145) 120 M
146) 258 dm
147) 3200 mm
148) 30 mm
149) 3900 cm
150) 5 M

Completar el cuadro:

	Km	Hm	Dam	M	dm	cm	mm
151)		0.001					
152)					520		
153)			1.55				
154)				0.8			
155)						1280	
156)		0.089					
157)					45		
158)							1200
159)				1.8			
160)						600	
161)		0.9					
162)	0.8						
163)				1200			
164)						150	
165)							1158000
166)					29521		
167)						520	
168)			11.5				
169)			0.0005				
170)	0.001521						

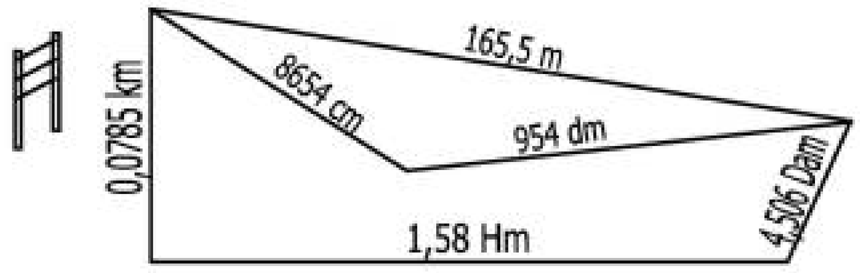
171) Una empresa de "relojes medidores de distancias" hace una prueba de sus relojes. Prueban simultáneamente tres relojes, uno de "**Km**" otro de "**Hm**" y otro de "**Dam**". Hacen recorrer al auto una distancia de 16520 metros. ¿Cuál fue el mayor error en metros de las mediciones entre los 3 relojes? Los relojes marcaron: Km: 16,6 Hm: 165,7 Dam: 1650

172) Se construye una pared con dos tipos distintos de ladrillos. Se hacen 16 hileras de ladrillos de 12 cm de alto y otras 10 hileras de ladrillos de 2,2 dm de alto. La separación entre cada hilera e ladrillos es indistintamente de 28 mm. ¿Qué altura tendrá la pared? (en metros)

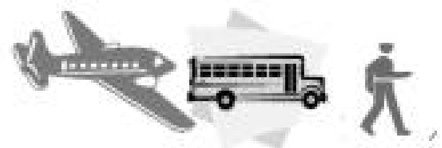


173) Una persona quiere hacer un cuadrilátero con varillas de madera cuyas medidas son: 160 mm, 18 cm, 1,5 dm y 0,01 Dam. ¿Cuántos metros de varilla necesita?

174) El dueño de un campo quiere alambrar su campo, con 3 tiras de alambre en cada línea. La figura muestra el contorno del campo y las subdivisiones interiores. El metro de alambre cuesta $0,36. *Calcular el costo total del alambre que necesita para alambrar su campo*



175) Un señor va en Avión desde su país hasta Japón, recorre en avión, 2453 Km. exactos. Luego desde el aeropuerto de Japón toma un Autobús hasta la esquina del hotel que recorre 12,51 Hm, y luego camina hasta la puerta del hotel unos 21 metros ¿Qué distancia recorrió en total?

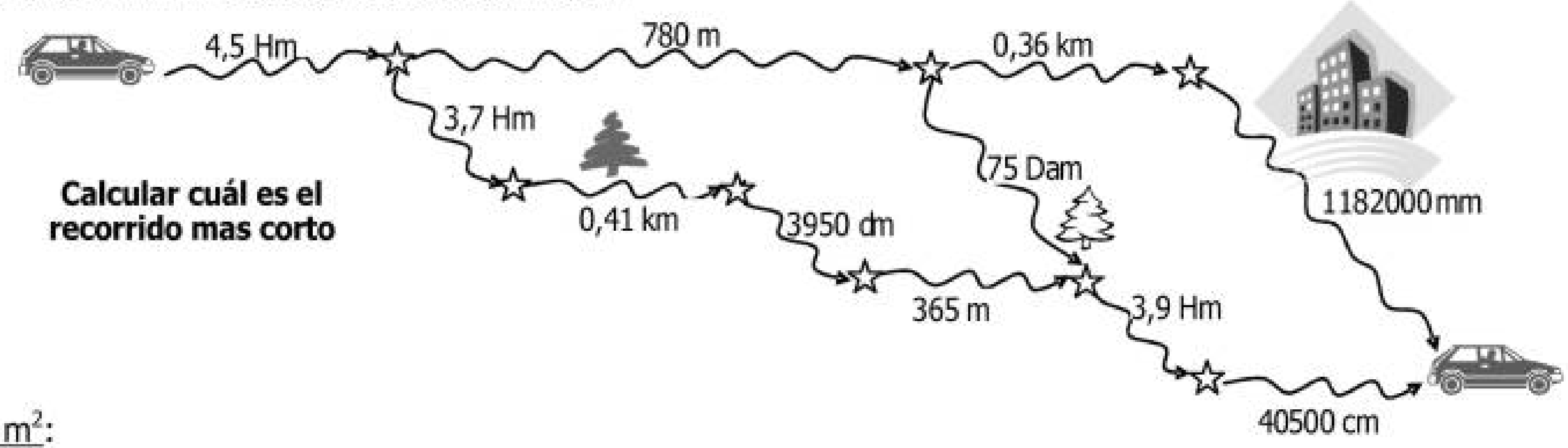


176) Mariana quiere armar un collar de 45 cm con piedritas de 6 mm ¿Cuántas piedritas necesita?

177) Si el espesor de una hoja es de 0,12 mm ¿Cuál será el ancho en **cm** de un libro de 500 hojas?

178) EL profesor de matemáticas de 7º A, le preguntó a Marcelo, uno de sus alumnos, cuál era la distancia desde su casa al colegio, el alumno respondió 8 cuadras, el profesor dijo entonces "eso es aproximadamente 800 metros" y luego dijo "La luna, queridos alumnos, está a una distancia de nosotros que es 477 mil veces mayor a la distancia de la casa de Marcelo al colegio" Luego les pidió que calculen de tarea la distancia aproximada en Km. del colegio a la luna. Ahhh… Ustedes son los alumnos…

179)



Pasar a m^2:

180) 0,0045 Hm^2	188) 0,00051 Km^2	196) 0,07 Dam^2	204) 425 dm^2	212) 1200 mm^2
181) 540 dm^2	189) 8500 mm^2	197) 2500 cm^2	205) 1,02 Hm^2	213) 125 dm^2
182) 450 cm^2	190) 13 dm^2	198) 0,005 Km^2	206) 0,01 Hm^2	214) 0,158 Hm^2
183) 1000 mm^2	191) 0,025 Hm^2	199) 5000 mm^2	207) 5020 cm^2	215) 1230 cm^2
184) 1,1 Hm^2	192) 0,0012 Hm^2	200) 7000 cm^2	208) 2000 mm^2	216) 0,025 Km^2
185) 2,12 Dam^2	193) 250 cm^2	201) 0,0002 Km^2	209) 2300 cm^2	217) 0,0012 Km^2
186) 800 cm^2	194) 5000 mm^2	202) 0,0011 Km^2	210) 0,004 Km^2	218) 9300 mm^2
187) 0,002 Km^2	195) 0,0075 Km^2	203) 5200 mm^2	211) 0,00055 Km^2	219) 105 dm^2

Pasar a m^3:

220) 2600 dm^3	228) 0,0051 Hm^3	236) 0,265 Dam^3	244) 89 dm^3	252)0,00002Hm^3
221) 12 dm^3	229) 1200 dm^3	237) 5000 cm^3	245) 0,01234 Hm^3	253) 2500 dm^3
222) 500 cm^3	230) 310 dm^3	238) 20 dm^3	246) 0,0001 Hm^3	254) 0,00054 Hm^3
223) 0,005 Hm^3	231) 0,00015 Hm^3	239) 0,0156 Dam^3	247) 7000 cm^3	255) 1000 cm^3
224) 0,00051 Hm^3	232) 0,0012 Hm^3	240) 500 cm^3	248) 0,156 Dam^3	256) 2 dm^3
225) 0,052 Dam^3	233) 300 cm^3	241) 0,014 Dam^3	249) 900 cm^3	257) 0,035Dam^3
226) 2500 cm^3	234) 840 dm^3	242) 0,0015 Dam^3	250)0,063 Dam^3	258) 27 dm^3
227) 6400 dm^3	235) 0,0047 Hm^3	243) 0,1563 Dam^3	251) 80 dm^3	259) 715 dm^3

260) Cuántos cm^3 tiene una botella de gaseosa de 2,25 litros (Un litro es lo mismo que 1 dm^3)

261) ¿Cuántas gaseosas de 375 cm^3 equivalen a una de 2,25 litros?

262) Ariel usa cerámicas de 150 cm^2 para su patio cuya superficie es de $18m^2$. ¿Cuántas cerámicas necesita?

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

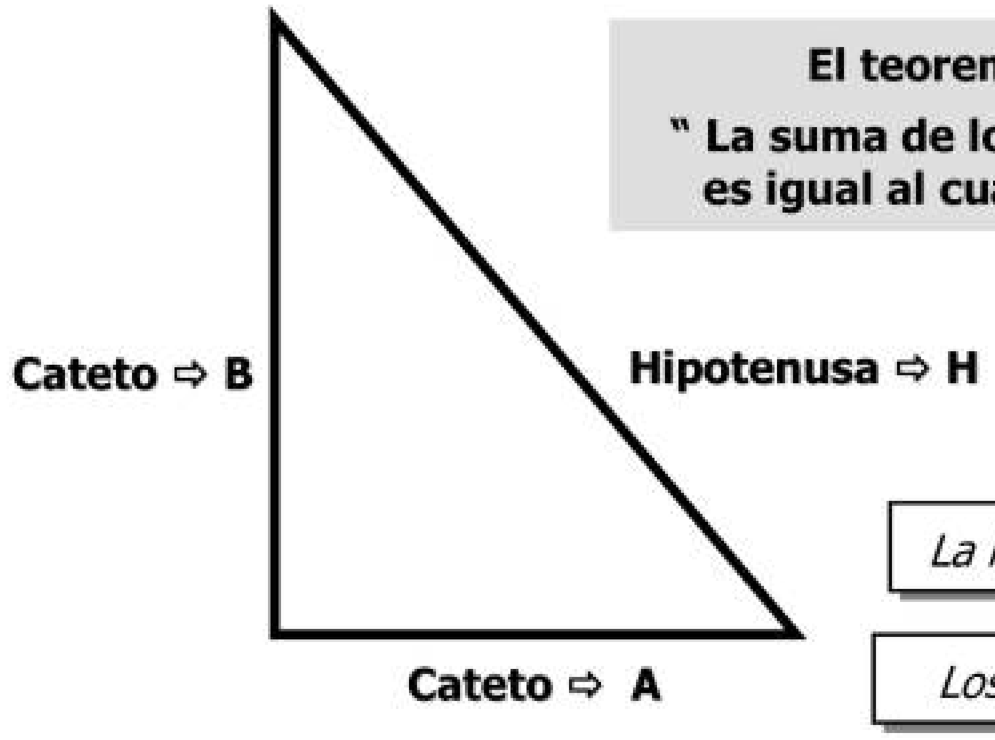
Título del Tema:

Teorema de Pitágoras

Número de Tema: **19**

Área: **Matemática**

El Teorema de Pitágoras:



El teorema de Pitágoras dice:
" La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa "

$$\boxed{A^2 + B^2 = H^2}$$

La Hipotenusa siempre es el lado más largo del triángulo

Los catetos son los dos lados que forman el ángulo recto

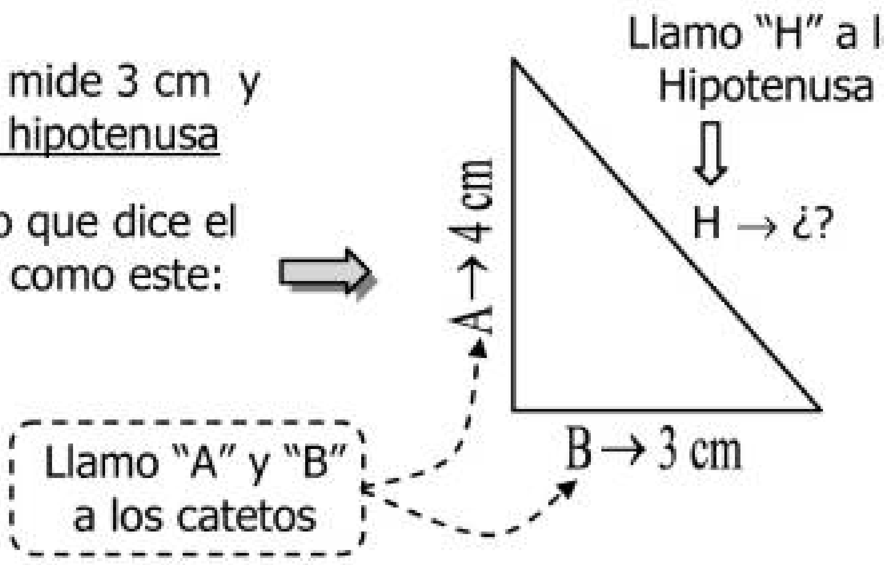
Como vemos es sólo una fórmula, y nos sirve para calcular el tercer lado de un triángulo rectángulo, sabiendo cuanto valen los dos primeros!

Hay que acordarse que, el teorema de Pitágoras, sólo se puede usar con triángulos rectángulos.

Vamos a ver un ejemplo:

Supongamos que tenemos como dato que un cateto mide 3 cm y el otro cateto mide 4 cm. Y <u>tenemos que calcular la hipotenusa</u>

Si dibujamos el triángulo que dice el enunciado nos quedaría como este:



Lo primero que hago es plantear la fórmula de Pitágoras: $A^2 + B^2 = H^2$

Luego, remplazo los valores que tengo como dato: $(3\ \text{cm})^2 + (4\ \text{cm})^2 = H^2$

(En este caso, tenemos como dato, los dos catetos)

Entonces remplazo un cateto por 4 cm y el otro por 3 cm

Hago las cuentas

$$9\ \text{cm}^2 + 16\ \text{cm}^2 = H^2$$

Sumo 9 + 16

$$25\ \text{cm}^2 = H^2$$

Paso el cuadrado como Raíz

$$\sqrt{25\ \text{cm}^2} = H$$

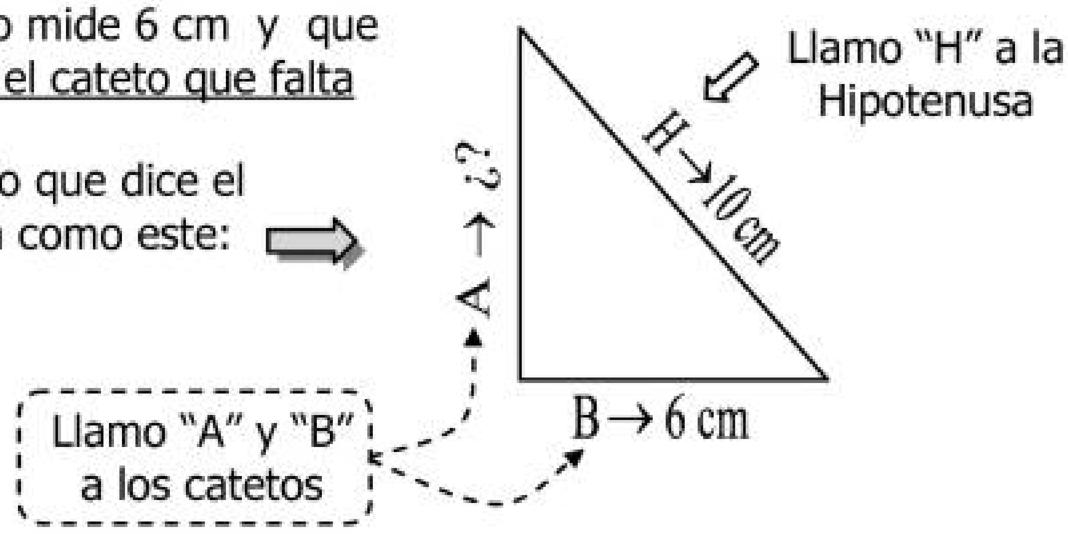
$$\boxed{5\ \text{cm} = H}$$

Por lo tanto ya calculamos la hipotenusa: Nos dio 5 cm

Vamos a ver otro ejemplo:

Supongamos que tenemos como dato que un cateto mide 6 cm y que la hipotenusa mide 10 cm. Y <u>tenemos que calcular el cateto que falta</u>

Si dibujamos el triángulo que dice el enunciado nos quedaría como este:



Lo primero que hago es plantear la fórmula de Pitágoras: $\mathbf{A^2 + B^2 = H^2}$

Luego, remplazo los valores que tengo como dato: $A^2 + (6\text{ cm})^2 = (10\text{ cm})^2$

(En este caso, tenemos como dato, un cateto y la hipotenusa (es lo mismo si suponemos que el cateto de dato es "A" que si suponemos que es "B")

Hago las cuentas

$$A^2 + 36\text{ cm}^2 = 100\text{ cm}^2$$

Paso el 36 para el otro lado. Como está sumando, pasa restando

$$A^2 = 100\text{ cm}^2 - 36\text{ cm}^2$$

Hago la resta

$$A^2 = 64\text{ cm}^2$$

Paso el cuadrado como Raíz

$$A = \sqrt{64\text{ cm}^2}$$

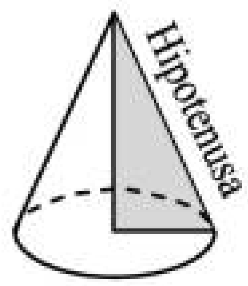
Por lo tanto ya calculamos el cateto que faltaba y vale 8 cm. $\boxed{A = 8\text{ cm}}$

<u>Ejemplos gráficos de triángulos rectángulos usados para la resolución de ejercicios de aplicación</u>: Tengan en cuenta las siguientes consideraciones:

- En todo rectángulo, Su diagonal divide al rectángulo en dos triángulos rectángulos. La diagonal es la hipotenusa de ambos triángulos.

- Lo mismo pasa con los cuadrados.

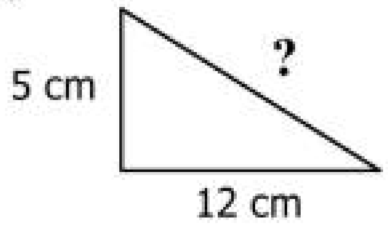
- Hay figuras tridimensionales como los conos, pero que si la miramos en una forma conveniente, vemos un triángulo rectángulo que nos puede servir para usar el teorema de Pitágoras.



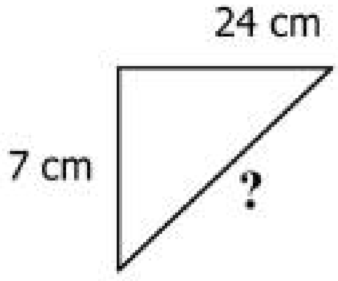
- En la vida cotidiana, podemos encontrar muchísimos ejemplos de cosas que forman triángulos rectángulos. Y recuerden que cualquier triángulo rectángulo, tiene dos catetos y una hipotenusa y con estos lados podemos plantear el teorema de Pitágoras. Por ejemplo podemos ver triángulos rectángulos en: Un Árbol y su sombra – Una escalera apoyada en una pared – Una escuadra, etc.

Calcular el lado que falta del Triángulo:

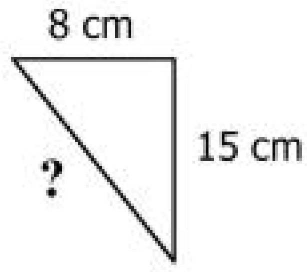
1)



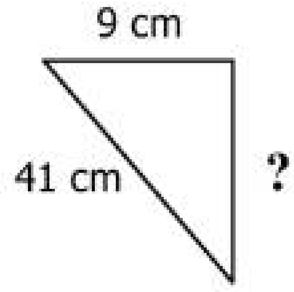
2)



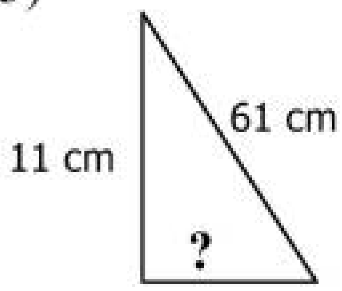
3)



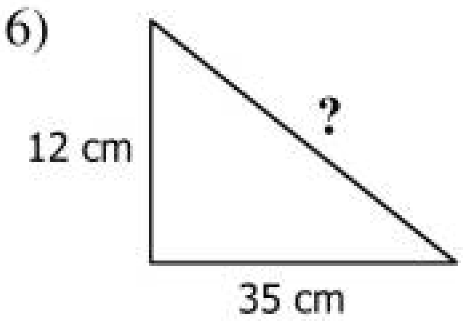
4)



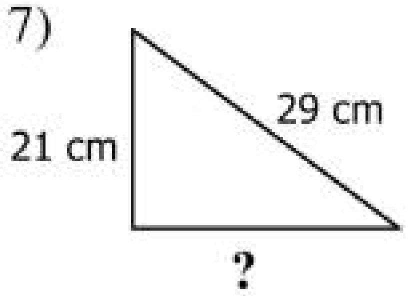
5)



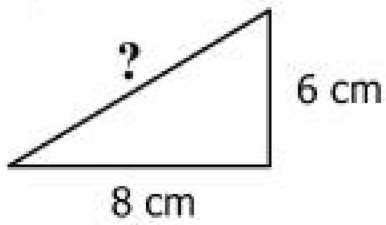
6)



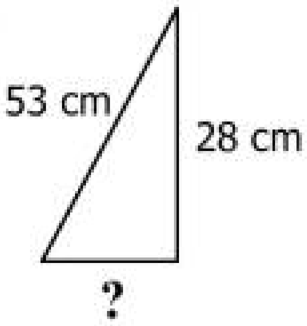
7)



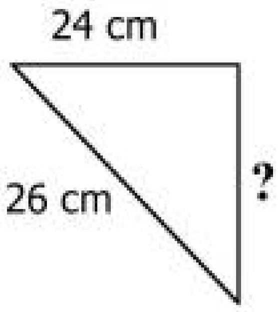
8)



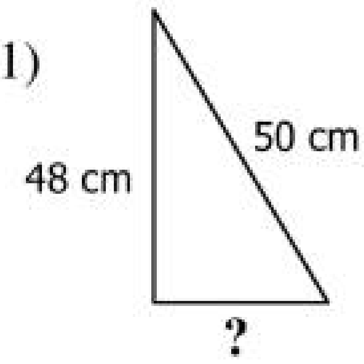
9)



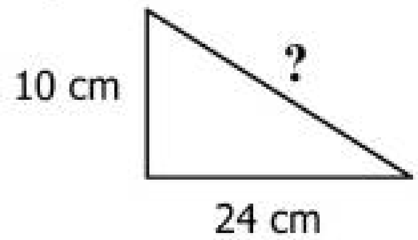
10)



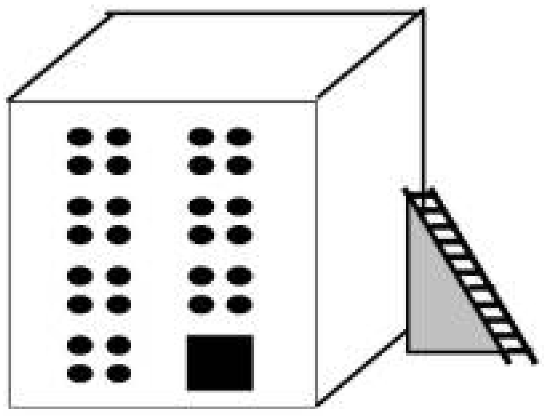
11)

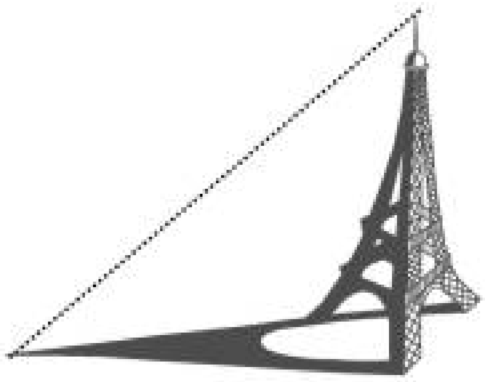


12)



13) Un obrero apoya la base de una escalera de 17 metros de largo en el piso, separada a 8 metros de la pared de un edificio. Calcular la altura a la que llega la punta de la escalera sobre la pared del edificio.





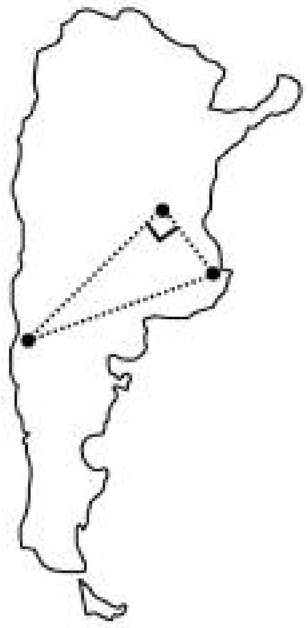
14) La torre Eiffel proyecta a las tres de la tarde una sombra de 55 metros de largo. Si se mide la distancia entre la punta más alta de la torre y el punto donde termina su sombra tenemos 305 metros. Calcular usando el teorema de pitágoras, la altura de la torre.

15) Supongamos que los vértices del triángulo dibujado en el mapa representan las ciudades de Buenos Aires, Rosario y Bariloche.

La distancia entre Buenos Aire y Bariloche es aproximadamente 1640 km. y la distancia entre Rosario y Bariloche es aproximadamente 1600 km.

Calcular la cantidad de kilómetros que se hacen de mas para ir de buenos aires a Bariloche si se pasa antes por la ciudad de rosario.

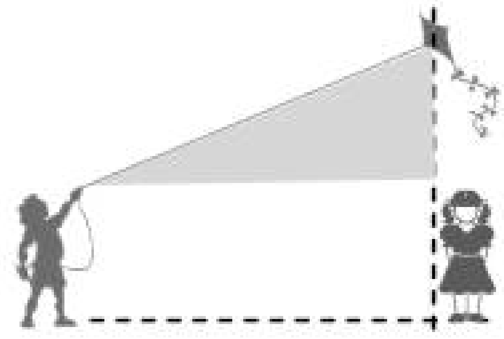
Nota: La línea que une Bs As con Rosario forma un ángulo recto con la línea que une Bariloche con Rosario.



16) En un rectángulo de 35mm x 120mm se traza su diagonal. ¿Cuánto mide esta diagonal?

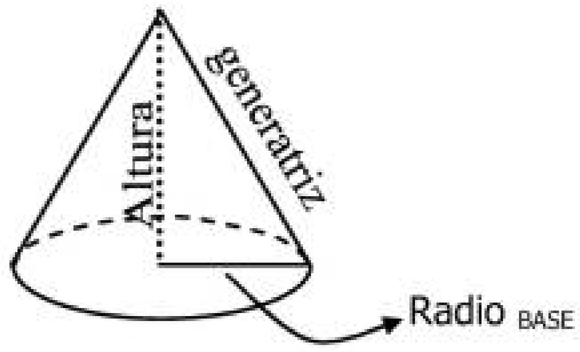
17) En un rectángulo de 55 mm de base, se traza su diagonal. La diagonal trazada mide 305mm ¿Cuánto mide la altura del rectángulo?

18) Maximiliano está remontando su barrilete. El largo del hilo desenredado es de 15.9 metros. El barrilete está justo encima de su hermana, que está a 8,4 metros de distancia de Maximiliano. Calcular la altura a la que está en ese momento el barrilete del piso. Maxi y su hermana miden los dos 1,5 metros.



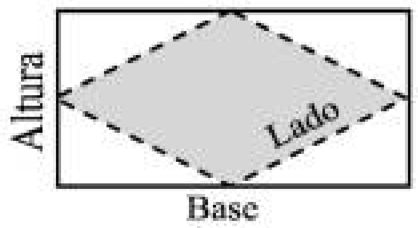
19) Mariano hace un rectángulo uniendo fósforos. Para la base usó 36 fósforos y para la altura 15 fósforos. ¿Cuántos fósforos necesita para hacer su diagonal?

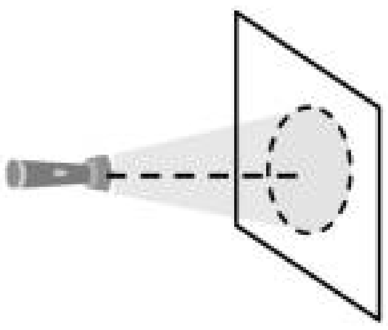
En un cono tenemos los siguientes elementos:



20) Hallar la altura de un cono de 24 cm de radio y 74 cm de generatriz.
21) Hallar el radio de un cono de 42 cm de altura y 58 cm de generatriz.
22) Hallar la generatriz de un cono de 7,5 cm de radio y 4 cm de altura.

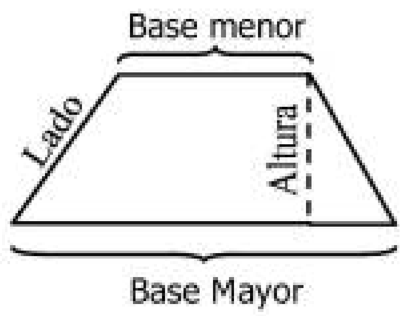
23) Hallar el valor del lado del rombo. Si sabemos que la base del rectángulo mide 80 cm y la altura del rectángulo mide 18 cm.

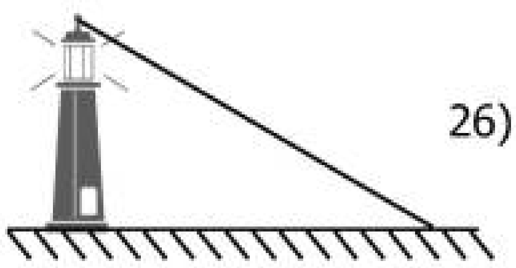




24) Una linterna colocada a una distancia "X" de una pared, proyecta una luz sobre esta en forma de círculo. La distancia entre la linterna y el punto mas alto del círculo proyectado es de 37 dm, el diámetro del círculo que se proyecta en la pared es de 24 dm. Calcular la distancia "X" a la que está la linterna de la pared.

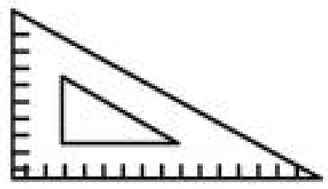
25) La base mayor de un trapecio isósceles mide 142 cm, la base menor mide 100 cm y los lados miden 35 cm. Hallar la altura del trapecio.





26) Desde la punta de un faro, una persona ata una cuerda de 91 m de largo y la ubica a 35 m de distancia del faro. Calcular la altura del faro.

27) Alejandro compró una escuadra que en sus lados más cortos mide 20 cm y 21 cm. ¿Cuánto mide su lado mas largo?



28) Mario apoya una escalera de 8,2 metros en una pared, separada a 1,8 metros de la misma. ¿A qué altura del piso estará el escalón más alto de la escalera?

29) Dentro de una circunferencia dibujamos Un rectángulo de 30 cm de base, perfectamente centrado dentro de la misma. El radio de la circunferencia es 17 cm. ¿Cuánto mide la altura de este rectángulo?

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Perímetro de Figuras en el Plano

Número de Tema: **20**

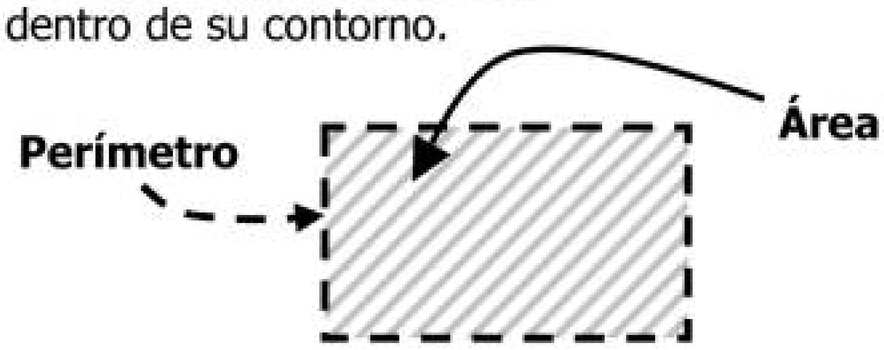
Área: **Matemática**

Concepto de Perímetro: El perímetro de una figura, es su contorno, es decir, es la longitud de su contorno, o sea que es la suma de los lados o curvas que lo limitan.

Diferencia entre el Área y el Perímetro de una figura.

Perímetro: ⇒ Es la longitud del **contorno** de la figura

¿Qué es área? ⇒ Es un número que representa la cantidad de veces que CABE LA UNIDAD dentro de su contorno.



Si bien podemos calcular el perímetro de la misma manera para cualquier figura utilizando un método general, veremos que no es lo más conveniente. El método general para conocer el perímetro de cualquier figura es sumar todos los lados que delimitan a la figura, ya sean lados rectos o arcos de circunferencia.

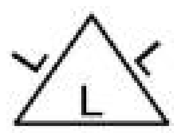
Pero, como las figuras que vamos a estudiar, tiene cada una sus particularidades, vamos a estudiar una fórmula para calcular el perímetro de cada figura en particular.

veamos las fórmulas que vamos a utilizar para cada figura:

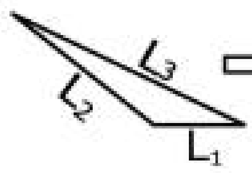
Fórmula:

Triángulo

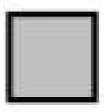
Tipos de Triángulos

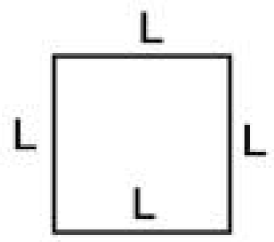
Equilátero: 3 Lados Iguales ⇒  ⇒ Perímetro = $3 \cdot L$

Isósceles: 2 Lados Iguales (El tercer lado puede ser igual o distinto) ⇒  ⇒ Perímetro = $L_1 + 2.L_2$

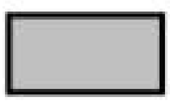
Escaleno: 3 Lados desiguales ⇒  ⇒ Perímetro = $L_1 + L_2 + L_3$

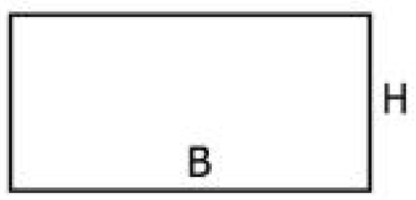
Cuadrado



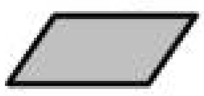
Los cuadrados tienen sus 4 lados iguales, por lo tanto su perímetro será la suma de esos 4 lados, que es lo mismo que multiplicar al valor de un lado por 4. ⇒  ⇒ Perímetro = $4 \cdot L$

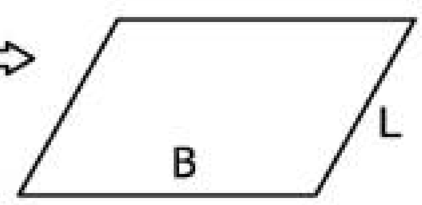
Rectángulo



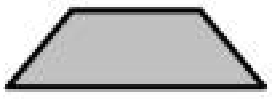
Los rectángulos tienen 2 pares de lados iguales entre sí. Al lado "Horizontal" se lo llama "Base" y al lado "vertical" se lo llama "Altura" ⇒  ⇒ Perímetro = $2.B + 2.H$

Paralelogramo



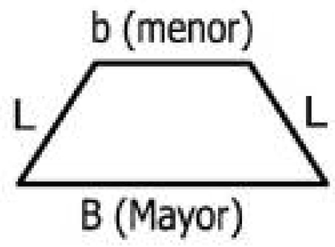
Los paralelogramos tienen 2 pares de lados iguales entre sí. Al lado "Horizontal" se lo llama "Base" y al lado "oblicuo" simplemente "Lado" ⇒  ⇒ Perímetro = $2.B + 2.L$

Trapecio Isósceles



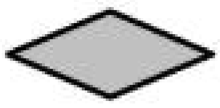
Los trapecios Isósceles tienen 2 pares de lados iguales entre sí, a los que llamamos "L" y otros 2 lados desiguales que llamamos "Base Mayor" y "Base menor".

⇒



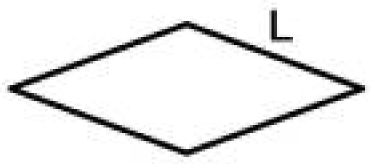
⇒ Perímetro = B + b + 2.L

Rombo



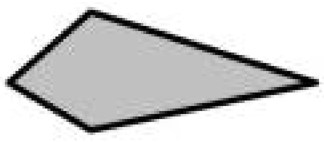
Los Rombos tienen sus 4 lados iguales. Por lo tanto su perímetro va a ser 4 veces el valor de su lado.

⇒



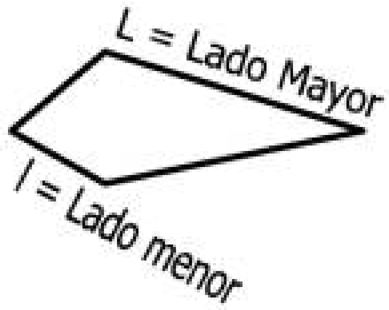
⇒ Perímetro = 4.L

Romboide



Los Romboides tienen dos pares de lados iguales. A uno lo llamamos "Lado Mayor" y al otro "lado menor"

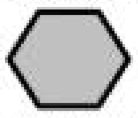
⇒



⇒ Perímetro = 2.L + 2.l

Polígonos Regulares

Hexágono



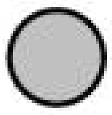
Pentágono

Los polígonos regulares tienen todos sus lados iguales. Por lo tanto su perímetro constará de multiplicar el valor de sus lados por la cantidad de lados del polígono.

⇒

- Perímetro = Nº de lados . L
- Perímetro (Pentágono) = 5 . L
- Perímetro (Hexágono) = 6 . L
- Perímetro (Heptágono) = 7 . L
- Perímetro (Octógono) = 8 . L

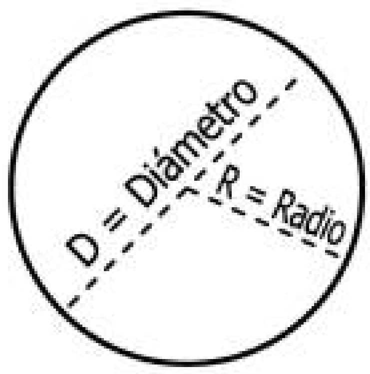
Circunferencia



Radio: Segmento que va desde el centro hasta cualquier punto de la circunferencia.

Diámetro: Segmento que une dos puntos de la circunferencia, pasando por el centro.

Pi: O su símbolo "π" es una constante que vale 3,14 (Aproximadamente)

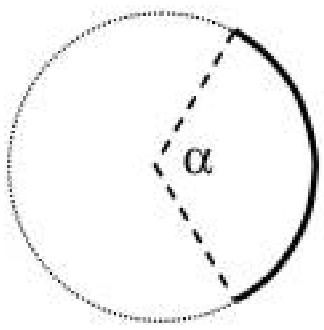


⇒

- Perímetro = π. D
- Perímetro = 2 . π. R

Arco de Circunferencia

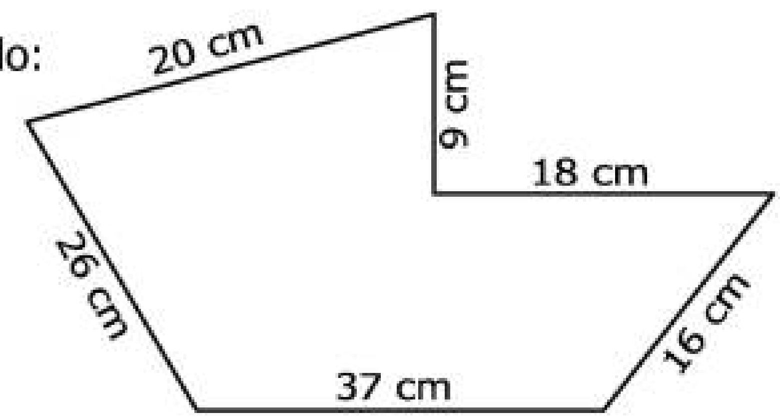
Es una parte de una circunferencia. Por lo tanto, a la fórmula del perímetro de la circunferencia la tenemos que multiplicar por el ángulo del arco y dividir por 360 grado que es lo que equivale a la circunferencia entera.



⇒ Arco de Circ. = $\dfrac{\pi . D . \alpha}{360}$

Figuras irregulares: El perímetro de las figuras irregulares, lo calcularemos sin fórmulas. Es decir, simplemente sumando todos sus lados

Ejemplo:



El perímetro de esta figura será la suma de todos sus lados

Perímetro = 26 cm + 20 cm + 9 cm + 18 cm + 16 cm + 37 cm

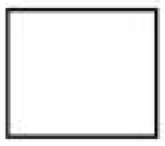
$\boxed{\text{Perímetro = 126 cm}}$

Ejercicios:

1) Calcular el perímetro de un triángulo equilátero cuyos lados valen 6 cm.
2) Calcular el perímetro de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 4 cm y el otro lado mide 2 cm.
3) Calcular el perímetro de un triángulo escaleno cuyos lados miden 5 cm, 7 cm y 9 cm.
4) Calcular el perímetro de un cuadrado de lado 8cm.
5) Calcular el perímetro de un rectángulo de base 10 cm y altura 5 cm.
6) Calcular el perímetro de un paralelogramo cuyos lados valen 7 cm y 13 cm.
7) Calcular el perímetro de un rombo de lado 7cm.
8) Calcular el perímetro de un romboide cuyo lado mayor es 9 cm, el lado menor es 2 cm menos que el mayor.
9) Calcular el perímetro de un trapecio isósceles cuya base mayor mide 8 cm, la base menor 5 cm y los lados 3 cm.
10) Calcular el perímetro de un octógono de lado 5 cm.

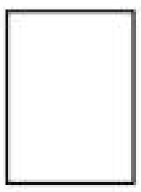
Completar los siguientes cuadros:

Cuadrado



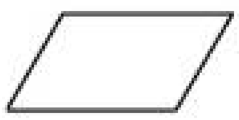
	Lado	Perímetro
11)	5 cm	
12)	8,4 cm	
13)		60 cm
14)		50,4 cm

Rectángulo



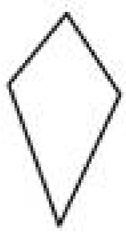
	Base	Altura	Perímetro
15)	5 cm	3 cm	
16)	8,4 cm	2 cm	
17)	15 cm		39 cm
18)		2,4 cm	14 cm

Paralelogramo



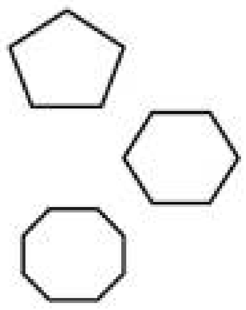
	Base	Lado	Perímetro
19)	3,4 cm	2 cm	
20)	4 cm	3,5 cm	
21)		3,2 cm	18 cm
22)	2,5 cm		10 cm

Romboide



	Lado Mayor	Lado Menor	Perímetro
23)	2,5 cm	4,2 cm	
24)	3,6 cm	4 cm	
25)	4 cm		13,6 cm
26)		3 cm	12,8 cm

Polígono Regular

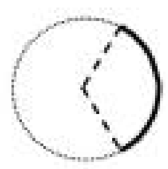


	Nº de Lados	Lado	Perímetro
27)	8	3,5 cm	
28)	7	3 cm	
29)	9		45 cm
30)		4 cm	24 cm
31)		3,4 cm	17 cm
32)	6		24 cm

Circunferencia

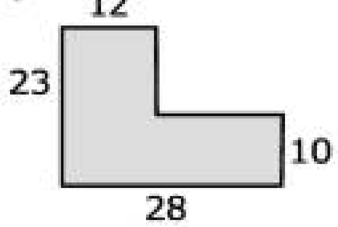
	Radio	Diámetro	Perímetro
33)	10 cm		
34)	4 cm		
35)		10 cm	
36)	12 cm		

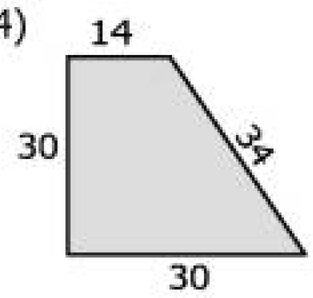
Arco de Circunferencia

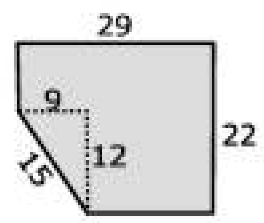


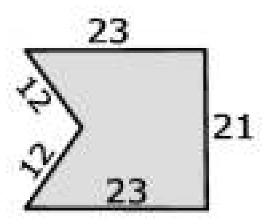
	Radio	Ángulo	Arco
37)	10 cm	120 º	
38)	4 cm	60 º	
39)		180 º	94,2 cm
40)	20 cm		125,6 cm
41)	5 cm		31,4 cm
42)		30 º	75,36 cm

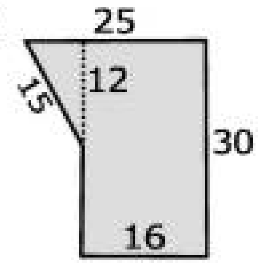
Calcular el perímetro de las siguientes figuras sombreadas: (Todas las medidas están en cm)

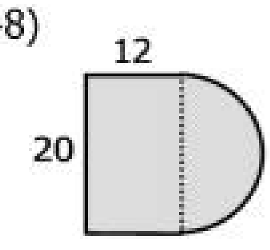
43)


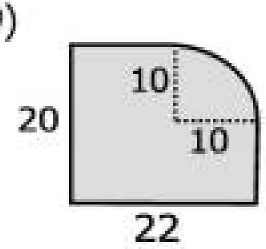
44)


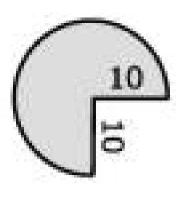
45)


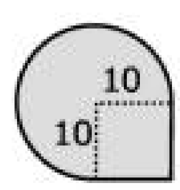
46)


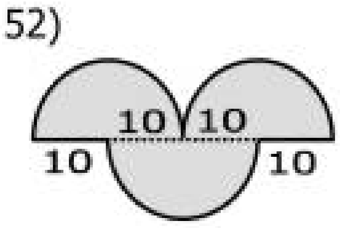
47)


48)


49)


50)


51)


52)


Problemas de Aplicacion:

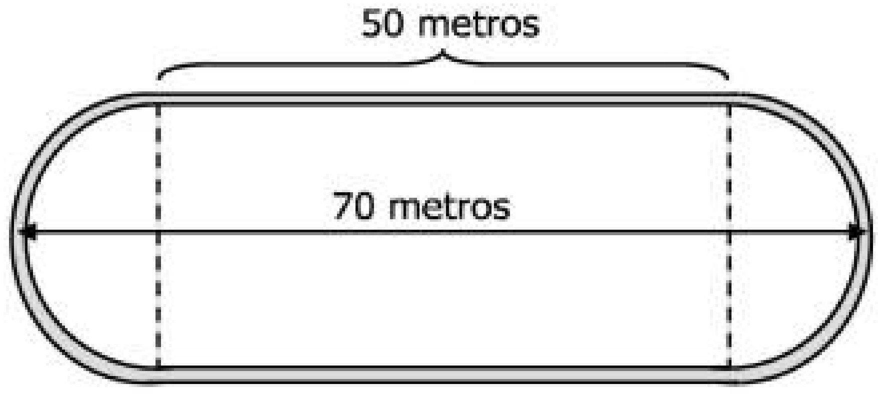
53) Florencia tiene un rollo de alambre de 100 metros de largo. Desenrolla el rollo y hace con él una circunferencia, sin que le sobre ni un centímetro de alambre. ¿Cuánto va a medir el diámetro de esta circunferencia?

54) Martín abre su compás de manera que la distancia entre las puntas es de 6 cm. Luego dibuja sobre una hoja una circunferencia ¿Cuál va a ser el perímetro de dicha circunferencia?

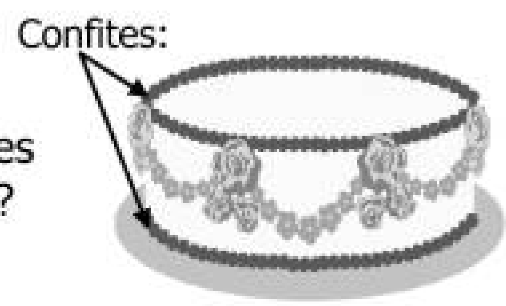
55) Marina tiene una copa con las siguientes medidas: El radio de la circunferencia superior de la copa es de 3 cm y la altura de la copa es de 18,5 cm. ¿Qué es mayor: la altura de la copa o el perímetro de su circunferencia superior?

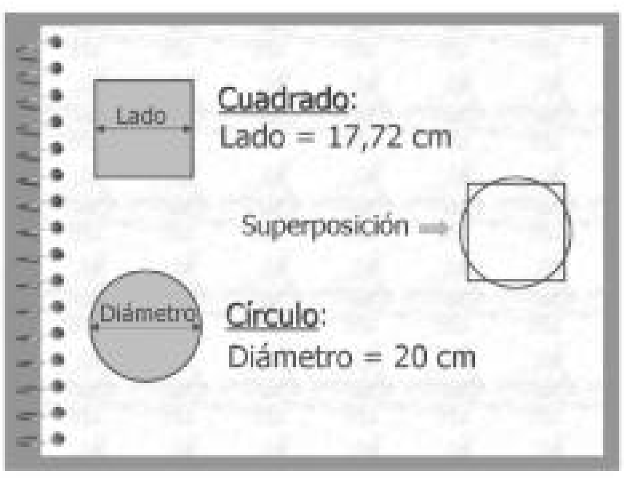
56) Maxi entrena con su bicicleta en un campo de deportes con las medidas del gráfico siguiente. Su entrenador le dice que tiene que andar, sin parar, 12 kilómetros para estar preparado para una competencia que habrá pronto. ¿Cuántas vueltas tiene que dar al campo de entrenamiento para estar preparado?

Campo de entrenamiento:



57) La mamá de Matías le hace una torta para su cumpleaños, de 35 cm de diámetro. A los bordes superior e inferior los decora con confites circulares de 8,5 mm de diámetro. ¿Cuántos confites necesita para decorar la torta?

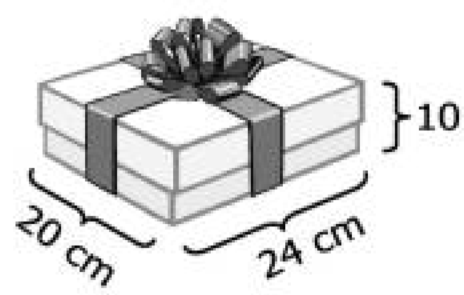




58) Mariano dibuja en un papel un círculo y un cuadrado ambos con la misma área. Escribe también las medidas necesarias para hacer los cálculos ¿Cuál de los dos tiene mayor perímetro?

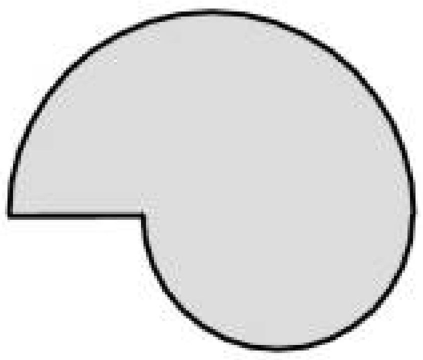
Si tienen la misma área, ocupan el mismo espacio. ¿Te animás a decir por qué, entonces, **no** tienen el mismo perímetro?

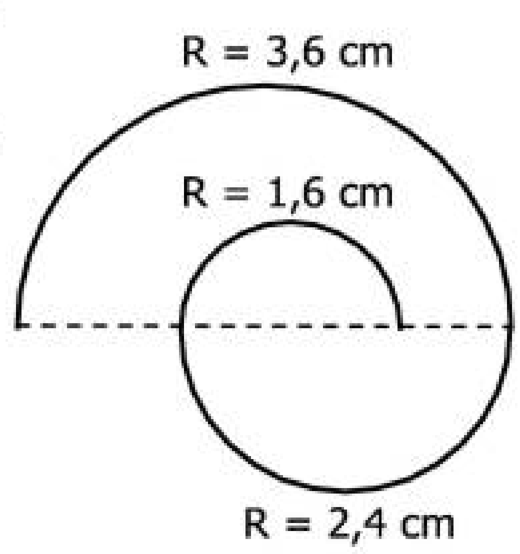
59) Andrea le hizo un regalo a una amiga, lo puso en una caja y le hizo un moño con una cinta de color. Las dimensiones de la caja son: 20 cm de ancho, 24 cm de largo y 10 cm de altura. Para el moño sólo necesitó 15 cm de cinta ¿Cuántos cm de cinta necesitó para hacer el moño y "envolver" la caja en total? (*Recomendación: Hacer el planteo como la suma de 2 perímetros mas la cinta usada para hacer el moño)*



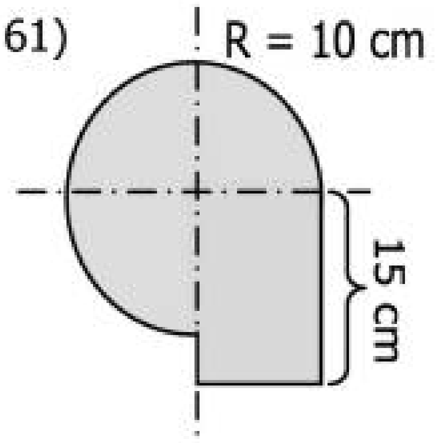
60) El siguiente espiral está formado por 3 semicircunferencias, la primera de radio 1,6 cm, la segunda de radio 2,4 cm y la tercera de radio 3,6 cm.

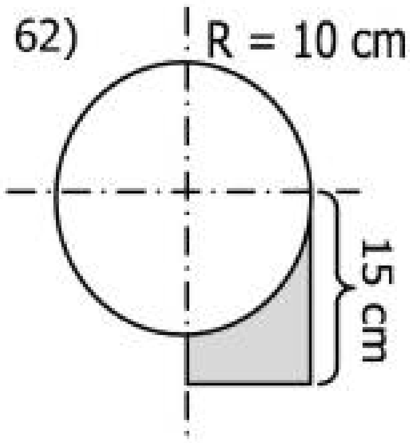
Calcular el perímetro externo de la figura que resulta si cerramos el espiral con una línea horizontal como muestra el siguiente esquema.

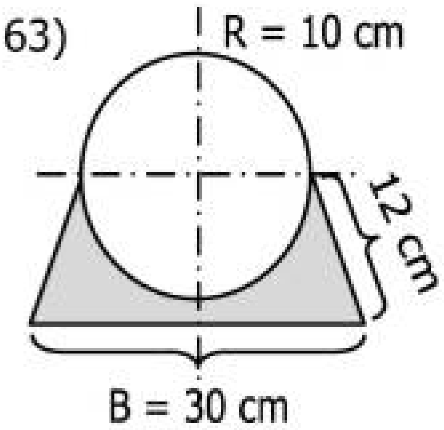


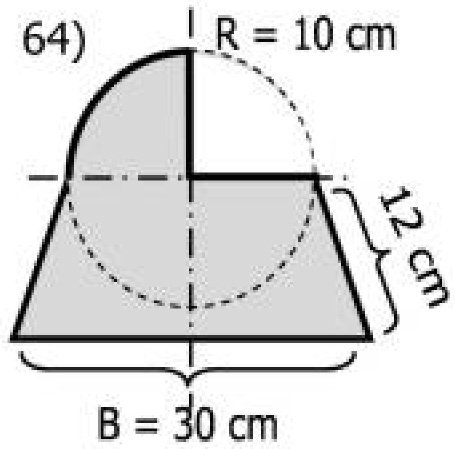


Calcular el perímetro de las siguientes figuras sombreadas:

61)


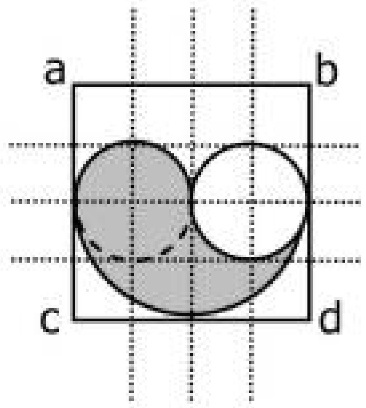
62)


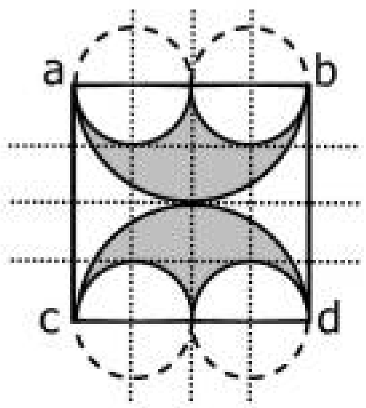
63)


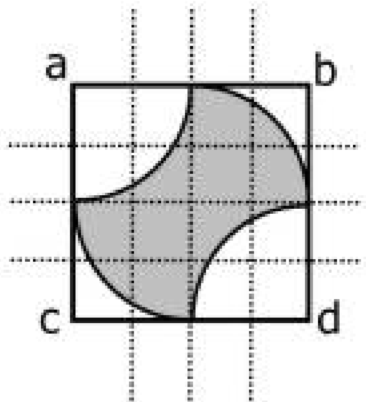
64)


Hallar el perímetro de la Figura sombreada
abcd es un Cuadrado de 16 cm de Lado

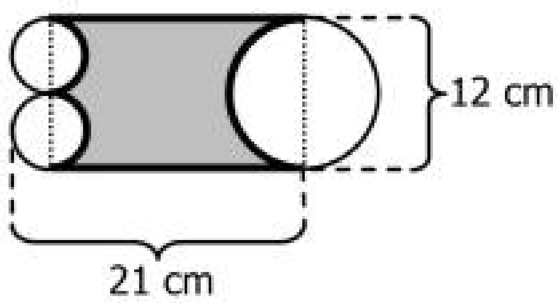
Las rectas en trazo punteado dividen al cuadrado abcd en 16 cuadrados iguales

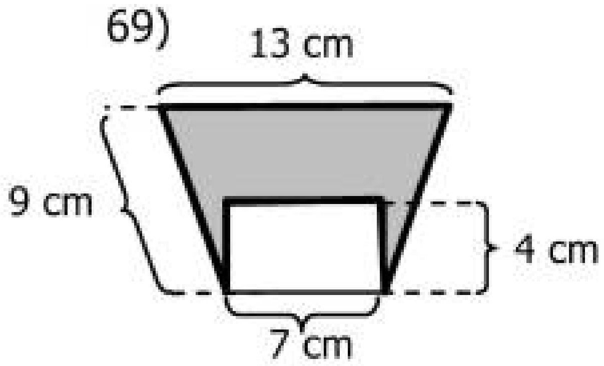
65)


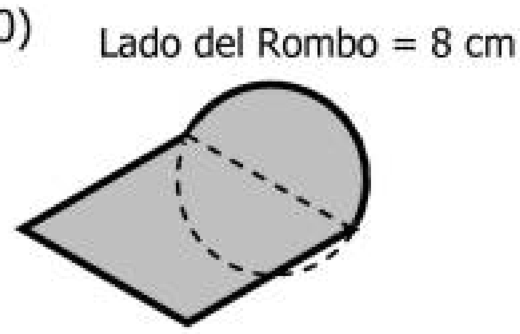
66)


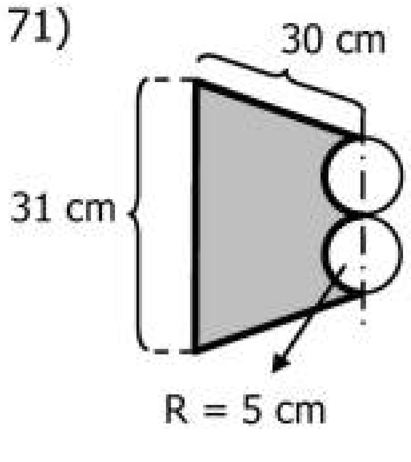
67)


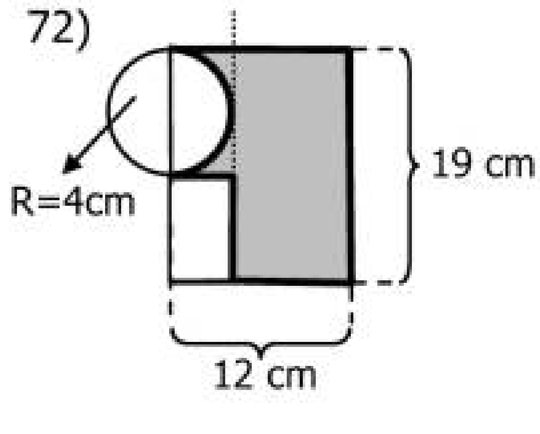
Más ejercicios para calcular el perímetro de la figura sombreada:

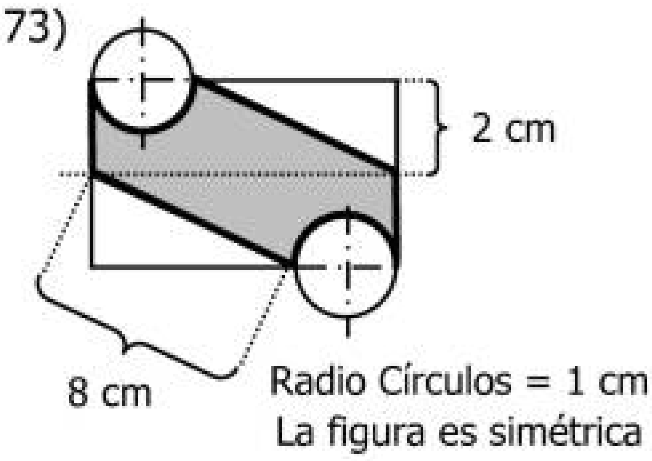
68)


69)


70)


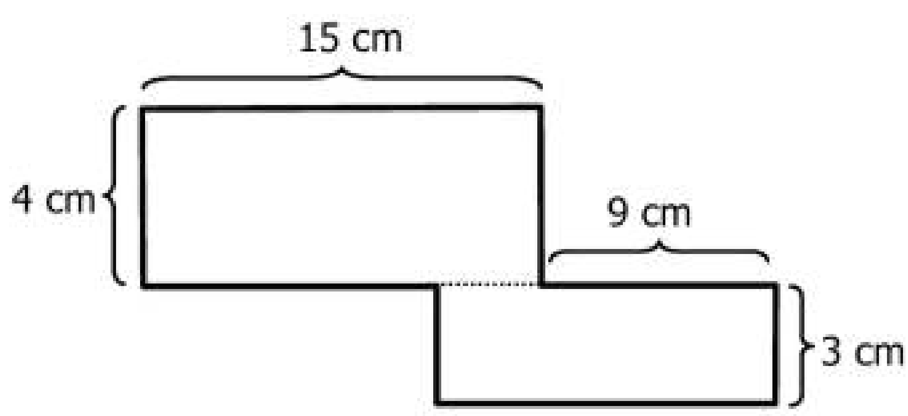
71)


72)


73)


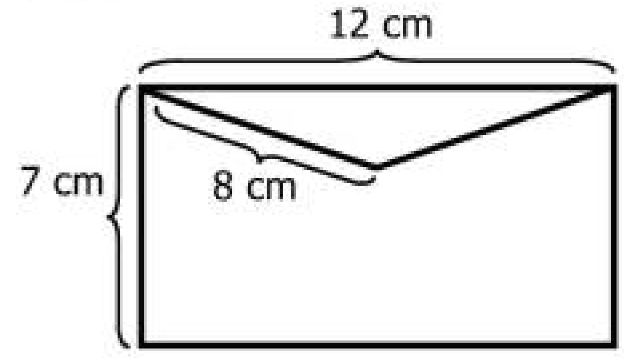
74) Calcular el perímetro de la siguiente figura:

Atención!!! No Falta ningún dato



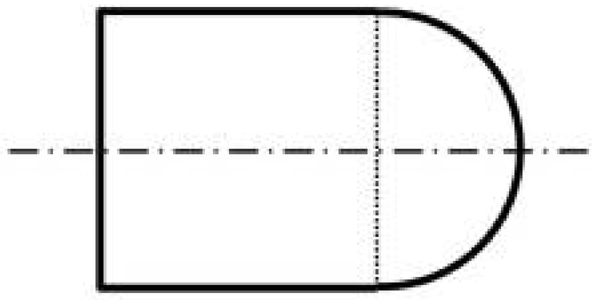
75) La cuadra donde vive Mariana mide 100 metros exactos, y la manzana de su cuadra es rectangular. Sabiendo que la calle lateral de la casa de Mariana mide 4/5 partes de lo que mide su cuadra. ¿Qué distancia recorre Mariana, si para hacer ejercicio, da 8 vueltas de manzana?

76) Hallar el perímetro o contorno del siguiente sobre, imaginándolo abierto como para poner una carta dentro.



77) Marina enrolló 9,42 metros de hilo en un tubo de 5 cm de radio, ¿Cuántas vueltas tuvo que haber dado con el hilo?

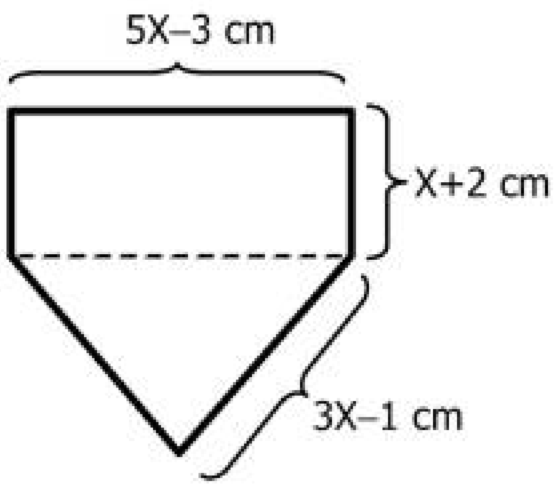
78) Si a la siguiente figura de papel la "cortáramos" en dos partes ¿Cuál sería el valor del perímetro de cada parte? La figura está formada por un cuadrado de 2 cm de lado y una semicircunferencia en su lateral.



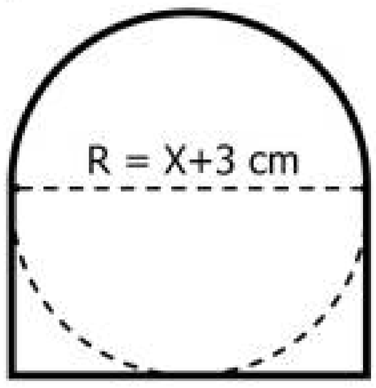
79) Calcular el perímetro de la siguiente estrella sabiendo que todos sus lados miden 3 cm

Hallar "X" sabiendo el perímetro

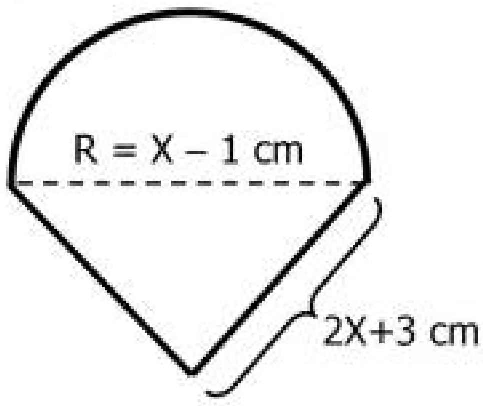
80) Perímetro = 64 cm



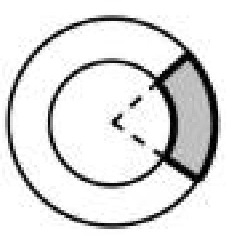
81) Perímetro = 64 cm



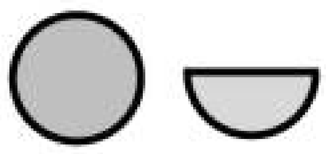
82) Perímetro = 81,4 cm



83) Hallar el perímetro del siguiente trapecio circular, formado por arcos de circunferencia de 60º. El mayor con radio de 24 cm y el menor con radio de 15 cm.

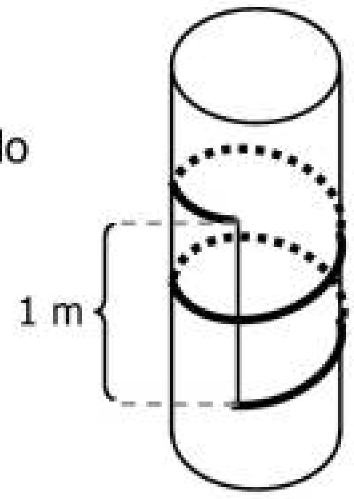


84) Es cierto que el perímetro de una semicircunferencia vale la mitad del perímetro de una circunferencia?



85) Alrededor de un árbol de 60 cm de diámetro se enrosca un cable quedando una punta alejada a un metro de la otra, y se dan exactamente 2 vueltas iguales al árbol. ¿Cuál es la longitud en cm del cable?

Atención: Para resolver este problema hace falta saber el teorema de Pitágoras
Ayuda: Imaginen para cada vuelta al cable estirado y traten de ver que triángulo pueden formar.



Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Área de Figuras en el Plano

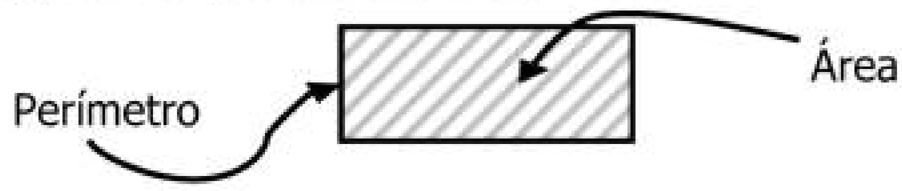
Número de Tema: **21**

Área: **Matemática**

- Concepto de área: El área de una figura, es la cantidad de superficie que encierran sus límites.

  Superficie: Es el conjunto de puntos que encierra su contorno.

  Area: Es un valor numérico que mide cuánta superficie.

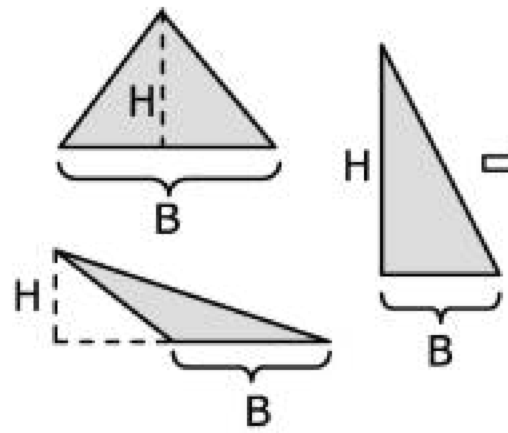


Vamos a estudiar una fórmula para calcular el área de cada figura en particular.
Veamos las fórmulas que vamos a utilizar para cada figura:

Fórmula:

- Triángulos:

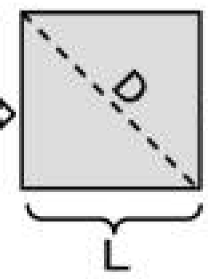
Los tres tipos de triángulos que conocemos tienen la misma fórmula de área. Tanto los triángulos isósceles, equiláteros o escalenos, tienen la misma fórmula para calcular el área. En los triángulos llamamos:
B = Base del triángulo
H = Altura del triángulo (Segmento que une el vértice opuesto a la base, a ésta perpendicularmente)



$$\text{Área} = \frac{B \cdot H}{2}$$

- Cuadrados:

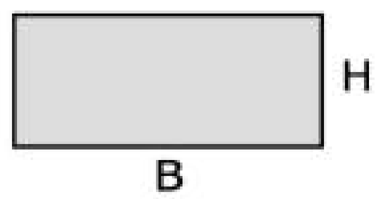
Hay dos maneras de calcular el área de los cuadrados, la más usual es usando el valor del lado, pero hay otra que es usando el valor de la diagonal.
L = Lado del cuadrado **D = Diagonal** del cuadrado.



$$\text{Área} = L^2 = \frac{D^2}{2}$$

- Rectángulos:

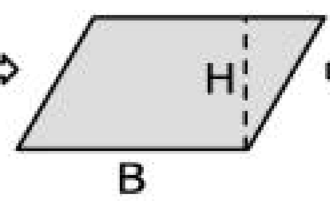
Los rectángulos tienen 2 pares de lados iguales y paralelos entre sí y ángulos interiores rectos. Al lado "Horizontal" se lo llama "Base" y al lado "vertical" se lo llama "Altura"



$$\text{Área} = B \cdot H$$

- Paralelogramos:

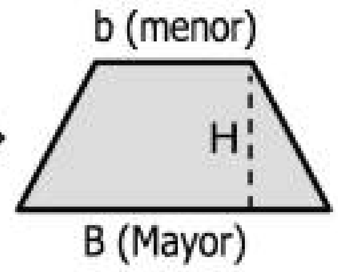
Tienen 2 pares de lados iguales y paralelos entre sí. Al lado "horizontal" lo llamamos "Base". La Altura es el segmento que une ortogonalmente las bases.



$$\text{Área} = B \cdot H$$

- Trapecio:

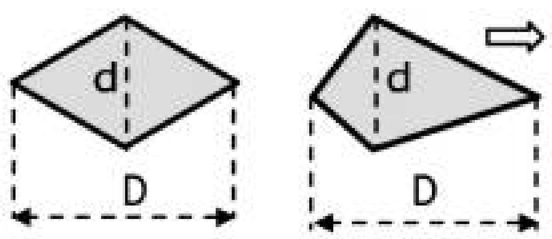
Los trapecios tienen 2 lados "horizontales" desiguales que llamamos "Base Mayor" y "Base menor". La altura es el segmento que une ortogonalmente ambas bases
B = Base Mayor **b = Base menor** **H = Altura**



$$\text{Área} = \frac{(B + b) \cdot H}{2}$$

- Rombos y Romboides:

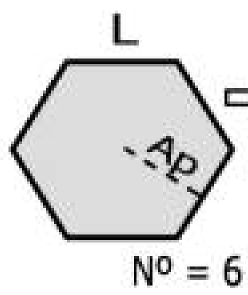
Los Rombos y romboides tienen una diagonal mayor y una diagonal menor, que son los segmentos que unen sus vértices opuestos.
D = Diagonal Mayor **d = Diagonal menor**



$$\text{Área} = \frac{D \cdot d}{2}$$

- Polígonos Regulares:

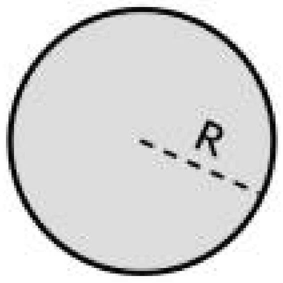
En los polígonos tenemos un elemento "Apotema" que es el segmento que va desde el centro del polígono hasta la mitad de cualquier lado.
L = Lado **Nº = Número de lados** **Ap = Apotema**



$$\text{Área} = \frac{N^{o} \cdot L \cdot Ap}{2}$$

- Círculo:

Elementos:
R = Radio: Segmento que va desde el centro hasta cualquier punto de la circunferecnia.
Pi: O su símbolo "π" es una constante que vale 3,14 (Aproximadamente)

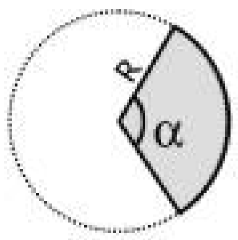


$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Área} = \pi \cdot R^2}$

- Sector Circular:

Es una "porción" de círculo. Esa porción está representada por un ángulo al que llamamos α . Por lo tanto, a la fórmula de área del círculo la tenemos que multiplicar por el ángulo "α" y dividir por 360 grados.

R = Radio del círculo **α = Ángulo**



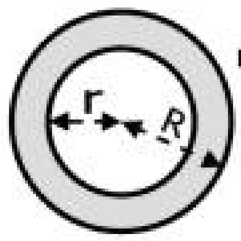
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Área} = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha}{360^\circ}}$

α debe medirse en grados

- Corona Circular:

Es un "anillo" formado por dos circunferencias concéntricas de distinto radio. Tenemos un radio Mayor y un Radio menor. La Fórmula del área será la diferencia de las áreas de las dos circunferencias que la forman.

R = Radio del círculo Mayor **r = Radio del círculo menor**

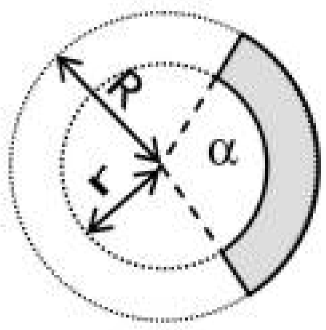


$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Área} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2}$

- Trapecio Circular:

Es como una "porción" de una corona circular. Esa porción está representada por una ángulo al que llamamos α .

R = Radio Mayor **r = Radio menor** **α = Ángulo**

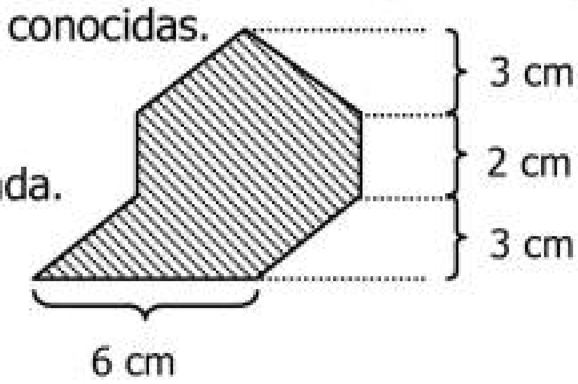


$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Área} = \dfrac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \alpha}{360}}$

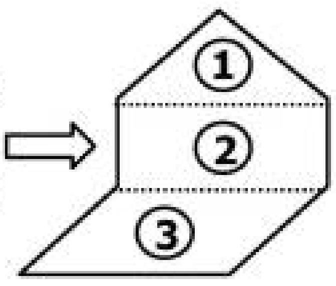
α debe medirse en grados

- Figuras irregulares: En general, cuando tenemos figuras irregulares, para calcular el área, basta con "partir" a las figuras en figuras conocidas.

Veamos un ejemplo.
Calcular el área de la zona sombreada.



$\Rightarrow$ Dividimos a la figura en tres partes que son a su vez figuras conocidas. $\Rightarrow$



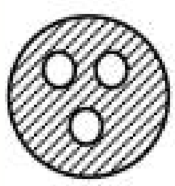
① Área del triángulo: $\Rightarrow \overset{\triangle}{\text{Área}} = \dfrac{B \cdot H}{2} \Rightarrow$ Reemplazamos los valores. $\Rightarrow \overset{\triangle}{\text{Área}} = \dfrac{6\,cm \cdot 3\,cm}{2} \Rightarrow$ Hacemos las cuentas $\Rightarrow \overset{\triangle}{\text{Área}} = 9\,cm^2$

② Área del Rectángulo: $\Rightarrow \overset{\square}{\text{Área}} = B \cdot H \Rightarrow$ Reemplazamos los valores. $\Rightarrow \overset{\square}{\text{Área}} = 6\,cm \cdot 2\,cm \Rightarrow$ Hacemos las cuentas $\Rightarrow \overset{\square}{\text{Área}} = 12\,cm^2$

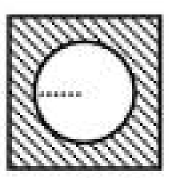
③ Área del Paralelogramo: $\Rightarrow \overset{\diamond}{\text{Área}} = B \cdot H \Rightarrow$ Reemplazamos los valores. $\Rightarrow \overset{\diamond}{\text{Área}} = 6\,cm \cdot 3\,cm \Rightarrow$ Hacemos las cuentas $\Rightarrow \overset{\diamond}{\text{Área}} = 18\,cm^2$

Área Total = Área Triángulo + Área Rectángulo + Área Paralelogramo = $9\ cm^2 + 12\ cm^2 + 18\ cm^2$ **= 39 cm²**

- Otros casos de figuras irregulares:



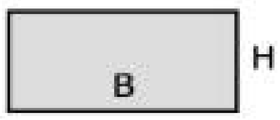
Calculamos primero el área del círculo grande, después la de los circulitos chiquitos y multiplicarla por tres (son 3 circulitos). Por último **RESTAMOS** el área del círculo grande menos la de los círculos chicos.



En este caso habría que calcular primero el área del cuadrado grande, después la del círculo. Por último habría que **RESTAR** el área del cuadrado grande menos el área del círculo.

by Dal-0r
para
TARINGA!

Hallar el área de los siguientes rectángulos



	Base	Altura	Área
1)	3 cm	4 cm	.... cm²
2)	5 cm	61 cm	.... cm²
3)	2 cm	2,5 cm	.... mm²
4)	9,8 cm	10 mm	.... cm²
5)	11 mm	12 mm	.... mm²
6)	12 mm	13 mm	.... mm²
7)	16 mm	12 mm	.... mm²

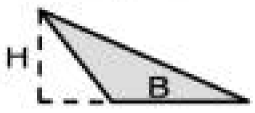
Completar los datos faltantes de los siguientes rectángulos

	Base	Altura	Área
8)	0,3 mm	.... cm	18 mm²
9)	0,2 M	.... mm	0,4 dm²
10)	.... M	25 cm	1 dm²
11)	.... dm	5 cm	150 cm²
12)	4 mm	.... cm	4 mm²
13)	5 cm	.... M	5 cm²

14) ¿Cuánto tiene que medir el largo de un pasillo rectangular para que su área sea de 3 metros cuadrados si el ancho del pasillo es de 50 cm? Expresar el resultado en Hectómetros.

15) La Familia de Martín compró un Lote de 700 metros cuadrados de forma rectangular para construir allí una casa quinta. El frente del terreno es de 10 metros ¿Cuántos Decámetros debe tener el terreno de fondo?

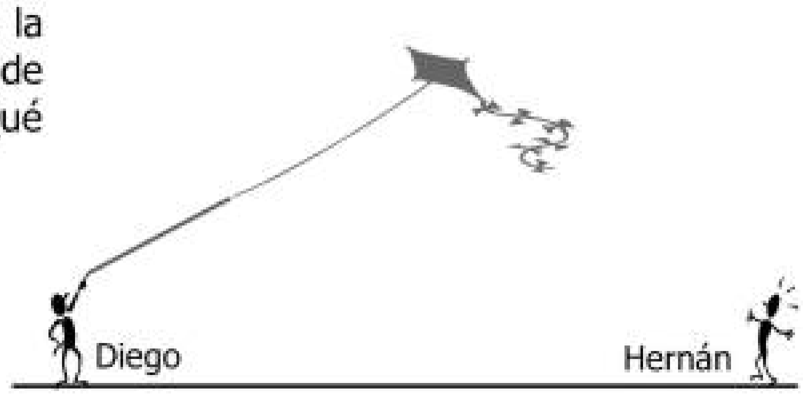
Hallar el área de los siguientes Triángulos



	Base	Altura	Área
16)	2 cm	6 cm	.... cm²
17)	4 cm	12,5 cm	.... cm²
18)	5 cm	1,3 cm	.... mm²
19)	8 cm	12 mm	.... cm²
20)	7 mm	5 mm	.... mm²
21)	3 mm	5 mm	.... mm²
22)	4 mm	9,25 mm	.... mm²

Problemas con triángulos:

23) La mamá de Jorge hizo una torta rectangular de 40 cm por 25 cm de base para una fiesta, pero como es muy grande, decide llevar solo la mitad y para ello la corta por su diagonal quedando dos triángulos formados. A la mitad que va a llevar a la fiesta la va a cubrir con grajeas. Los paquetes de grajeas tienen una indicación que dicen que sirven para cubrir 10 dm^2. ¿Qué fracción del paquete de grajeas debe usar para cubrir la mitad de la torta?



24) Diego remonta un barrilete a una altura de 5 metros. Su hermano Hernán está parado a unos metros de él y la superficie del triángulo formado por Diego, Hernán y el barrilete es de 25 cm^2. ¿A qué distancia están separados Diego y Hernán?

25) Para una fiesta se preparan banderines triangulares isósceles de 10 cm de base. Determinar la altura de los mismos banderines si para hacerlos se cortan 400 banderines de una tela de 4m^2.

26) Melina recorta de un papel un triángulo de 5 cm de base y 20cm^2 de área. Luego recorta otro triángulo pero esta vez sabemos que el triángulo tiene el doble de base y el doble de altura que el anterior ¿Cuál será el área de este segundo triángulo?

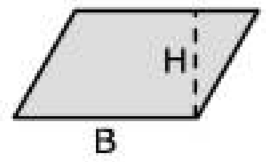
27) Hallar en metros, la base de un triángulo de 80 dm^2 si se sabe que su altura es de 800 mm.

28) Si una servilleta cuadrada de 12 cm de lado es doblada a la mitad por su diagonal queda formado un triángulo isósceles. Hallar la altura de dicho triángulo si se sabe que la base (tomada como el lado mayor) es de 17 cm.

29) Hallar en metros el valor de la altura de un triángulo cuya superficie es la quinta parte de 3 m^2. Y la base mide el triple de lo que mide el lado de un cuadrado de 256 cm^2 de área.

30) Hallar la altura de un triángulo de 0,01 Hm de base y 40.000 mm^2 de área.

Hallar el área de los siguientes paralelogramos



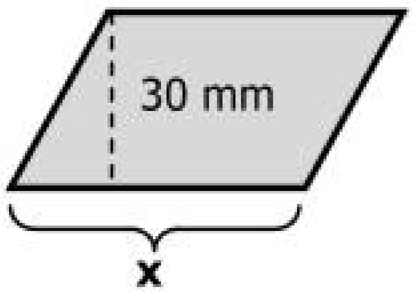
	Base	Altura	Área
31)	2 cm	0,5 cm	.... cm²
32)	6 cm	17 cm	.... cm²
33)	4 cm	1 cm	.... mm²
34)	7,8 cm	30 mm	.... cm²
35)	13 mm	3 mm	.... mm²

Completar los datos faltantes del siguiente cuadro de paralelogramos

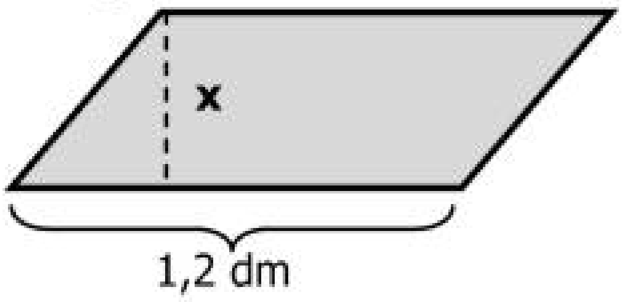
	Base	Altura	Área
36)	.... mm	2 mm	12 mm²
37)	8 mm	.... mm	4 mm²
38)	.... mm	4 cm	20 mm²
39)	0,6 M	3 mm	.... dm²
40)	.... M	2 cm	2 dm²

Hallar el valor de "x" en cada caso:

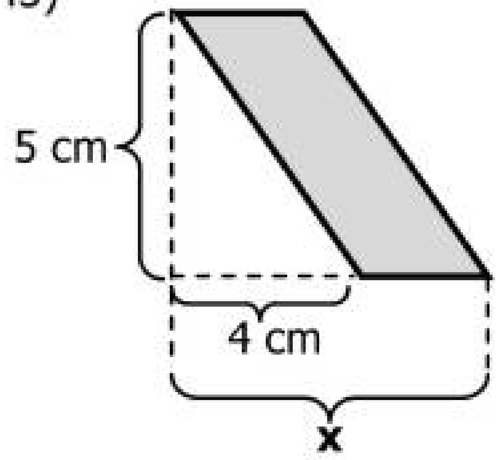
41) Área = 24 cm^2



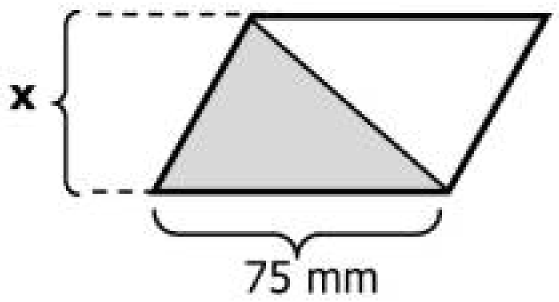
42) Área = 3600 mm^2



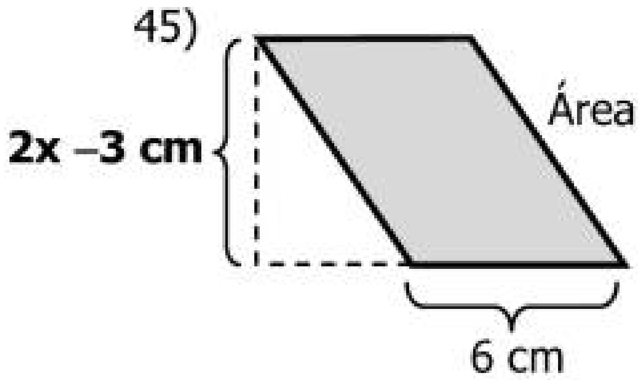
43) Área = 15 cm^2



44) Área Sombreada = 22,5 cm^2



45) Área = 30 cm^2



Completar en el siguiente cuadro los espacios vacíos:
Nota: Tomar Pi como 3,14 (Con 2 decimales para el cálculo)

Círculo

	Radio	Perímetro	Área
46)	2 cm	12,56 cm	.... cm²
47)	5 cm	.... cm	78,5 cm²
48)	.... cm	376,8 mm	11304 mm²
49)	10 cm	.... cm	314 cm²
50)	15 mm	94,2 mm	.... mm²
51)	25 mm	157 mm	.... mm²
52)	0,5 mm	.... mm	0,785 mm²

Problemas con círculos:

53) Adrián toma un rollito de hilo y rodea una lata de duraznos con el mismo y le da 40 vueltas completas. Calcular la longitud total de hilo del rollito en metros, si se sabe que el diámetro de la lata de duraznos es de 15 cm.

54) En un club deciden pintar el fondo de la pileta cuya forma es circular, el diámetro de la pileta es de 20 metros y necesitan saber cuántos metros cuadrados deben cubrir para comprar la pintura ¿Cuántos metros cuadrados son?

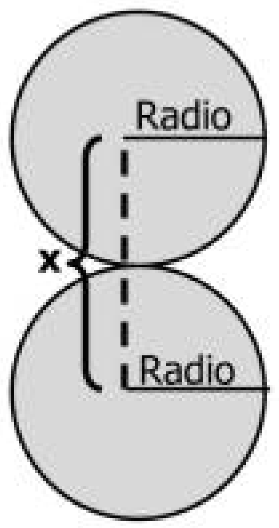
55) Para el problema anterior saben que tienen que darle 3 manos de pintura para que quede bien hecho el trabajo. En las latas de pintura hay una indicación que dice "Cubre aproximadamente 12 metros cuadrados por litro por mano" ¿Cuántos litros de pintura necesitan entonces para el trabajo?

56) Si se toma una soga de 60 metros de longitud y con la misma se forma un círculo en el piso ¿Cuál va a ser el área del círculo formado?

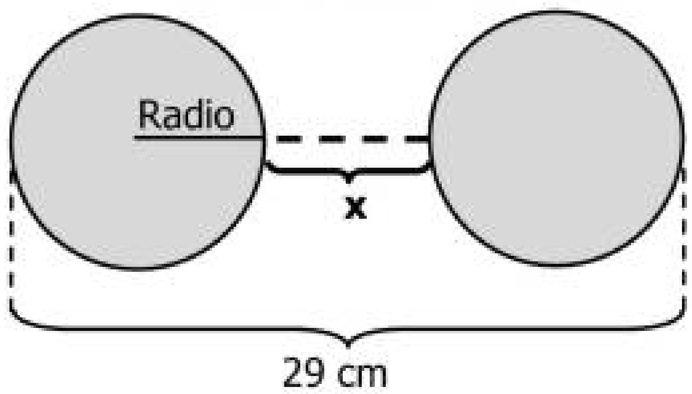
57) En la esquina de una calle hay un cartel cuya superficie es circular y el poste está atornillado al cartel en el centro del mismo. Lucía, que mide 1,65 metros, se para junto al cartel y nota que mide exactamente lo mismo, es decir que llega justo a tapar al cartel. Fernanda que mide 1,45 metros se para junto al cartel y nota que mide lo mismo que el poste que lo sostiene. ¿Cuál es la superficie del cartel?

Hallar el valor de "x"

58) Área Sombreada = 78,5 cm^2

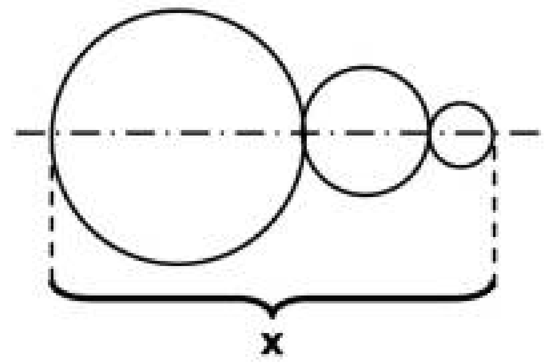


59) Área Sombreada = 226,08 cm^2



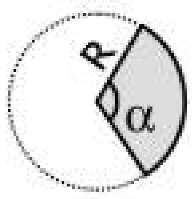
Los círculos son iguales

60) Se dibujan tres círculos sobre el mismo eje de modo tal que el segundo tenga la mitad de diámetro que el primero y el tercero la mitad del segundo. Hallar la distancia total desde el extremo izquierdo del círculo mayor al extremo derecho del círculo menor si se sabe que el área del círculo menor es de 50,24 cm^2.



Problemas con Sectores circulares:

Sector Circular



Hallar el área de los siguientes sectores circulares. Y graficarlos en la carpeta utilizando Compás, transportador y regla.

	Radio	Ángulo	Área
61)	4 cm	90 °	.... cm²
62)	15 cm	180 °	.... cm²
63)	8 cm	270 °	.... mm²
64)	12 cm	45 °	.... cm²
65)	20 mm	72 °	.... mm²
66)	50 mm	36 °	.... mm²
67)	1,5 mm	126 °	.... mm²
68)	100 mm	135 °	.... mm²

69) Hallar el área de una porción de pizza grande si se sabe que el diámetro de la pizza es de 40 cm. Recordar que las porciones totales de la pizza es de 8 porciones.

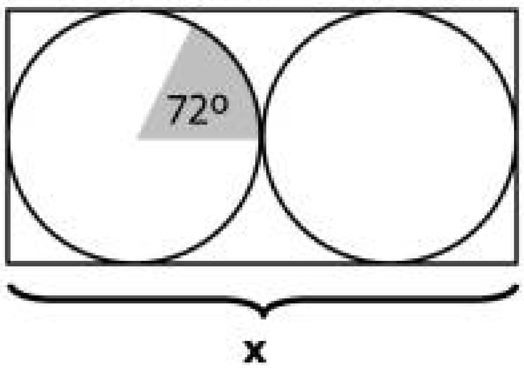
70) Hallar el ángulo de un sector circular de 76,93 cm^2 de área si su radio es de 7 cm.

71) Hallar el radio de un sector circular de 48º si su área es de $20cm^2$.

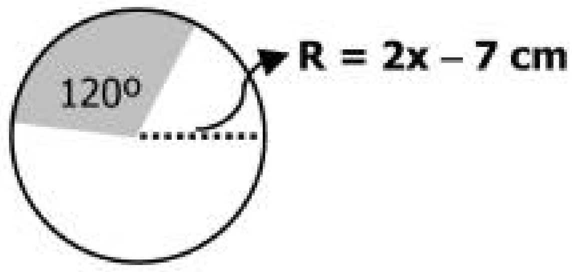
72) Hallar el diámetro de una torta circular, si una de sus porciones circulares con ángulo de 30º tiene un área de $80cm^2$.

Hallar "x" en cada Caso:

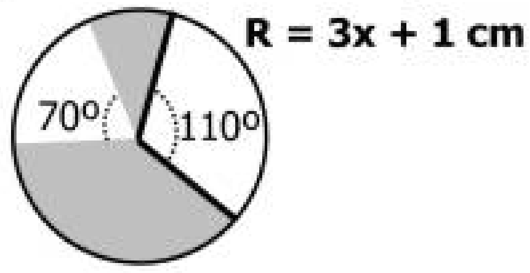
73) Área Sombreada = 62,8 cm^2



74) Área Sombreada = 84,78 cm^2



75) Área Sombreada = 76,93 cm^2



Problemas con Coronas Circulares:

Corona Circular

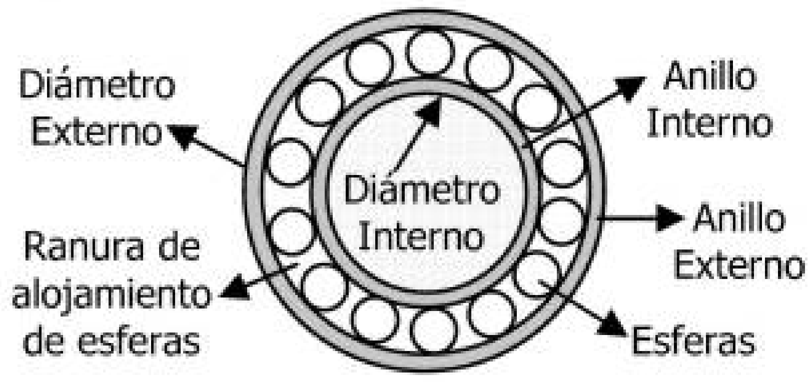
Completar el siguiente cuadro:

	Radio Mayor	Radio menor	Área
76)	4 cm	3 cm	.... cm^2
77)	2 cm	0,1 dm	.... cm^2
78)	1 cm	5 mm	.... mm^2
79)	16 cm	10 mm	.... cm^2
80)	15 mm	.... dm	628 mm^2
81)	17 mm	.... cm	455,3 mm^2
82)	.... mm	10 mm	9,42 cm^2
83)	.... mm	0,1 dm	942 mm^2

84) El diámetro exterior de una moneda de un peso es de 23 mm, y el área de la parte interna de Cobre es de 226,865 mm^2. Hallar el área del anillo externo compuesto de una aleación de Cobre y Níquel.

Los Rodamientos o "Rulemanes" son muy usados en mecánica y básicamente constan de anillos metálicos que forman una ranura donde hay esferas metálicas. El fin de los mismos es que el anillo interno gire libremente con muy poco rozamiento para evitar el desgaste del eje que se aloja en el mismo y que quede bien sujetado. Si bien hay miles de clases de rodamientos distintos, este es uno de los más usados. A continuación vemos unos gráficos ilustrativos:

Figura1: Corte radial del rodamiento



Teniendo los siguientes datos: Los anillos interno y externo tienen el mismo espesor. Diámetro Externo = 70 mm; Diámetro Interno = 42 mm; Radio de las esferas = 3 mm

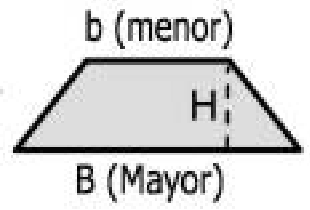
Foto de un rodamiento

85) Hallar el espesor de los anillos interno y externo.
86) Hallar el área de la ranura de alojamiento de las esferas.
87) Hallar el área del anillo externo de la figura 1.
88) Hallar el área del anillo interno de la figura 1.
89) Hallar el área entre los diámetros externo e interno del rodamiento.

90) Calcular el diámetro interior de un DVD si se sabe que su diámetro exterior es de 120 mm y su superficie es de 11.127,375 mm^2.

Problemas con trapecios:

Trapecio ⇨



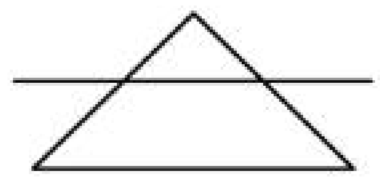
Completar el siguiente cuadro:

	Base Mayor	Base menor	Altura	Área
91)	0,1 M	5 cm	4 dm	.... dm²
92)	6 cm	0,4 dm	7 cm	.... cm²
93)	4 mm	0,3 cm	6 mm	.... mm²
94)	8 cm	60 mm	.... cm	7 cm²
95)	14 mm	1 cm	.... mm	60 mm²
96)	9 mm	0,01 dm	9 mm	.... mm²
97)	1 dm	61 mm	4 mm	.... mm²

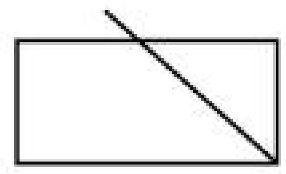
98) Calcular la base mayor de un trapecio cuya altura mide 5 cm y su base menor es el doble de la altura, sabiendo que el área del trapecio es de 60 cm^2.

99) Calcular la base menor de un trapecio sabiendo que su área vale 68 cm^2, su base mayor 10 cm y la altura equivale a las 4/5 de la base mayor.

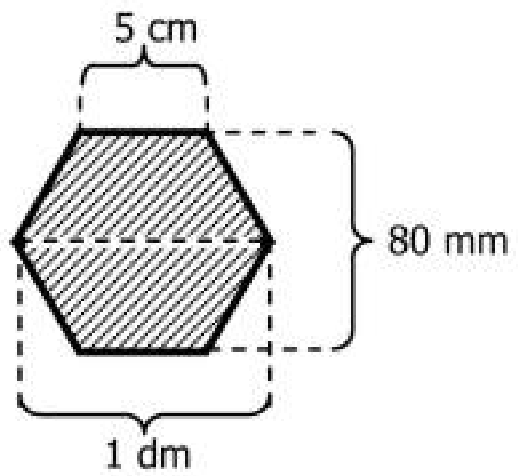
100) En un triángulo isósceles de 12 cm de base, se traza una recta paralela a la base de modo que el segmento formado entre los lados del triángulo mide 7 cm. Hallar la distancia entre la base del triángulo y la recta trazada si se sabe que el área del trapecio formado es de 38 cm^2.



101) Se tiene un rectángulo de 5 cm por 8 cm y luego se traza una semirrecta desde su vértice inferior derecho que corta al lado superior en su punto medio. Calcular el área del trapecio resultante.

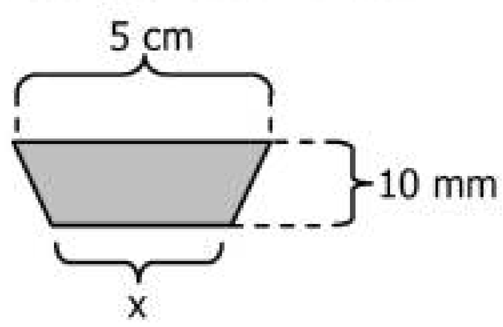


102) Calcular el área del siguiente hexágono

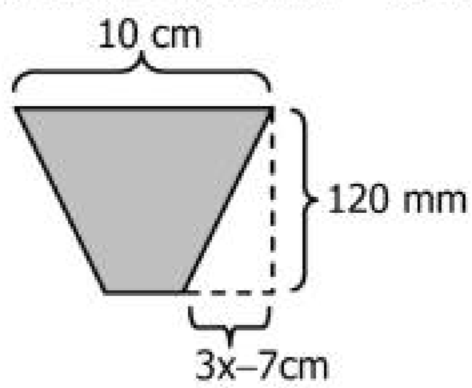


Para los siguientes gráficos, hallar "x"

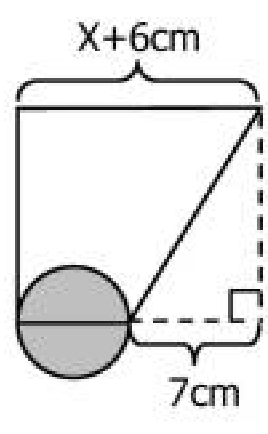
103) Área Sombreada = 4 cm^2



104) Área Sombreada = 72 cm^2

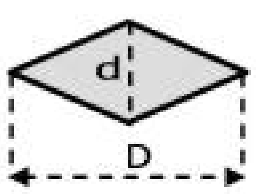


105) Área Círculo = 1256 mm^2



Problemas con Rombos:

Rombo



Completar el siguiente cuadro:

	Diag. Mayor	Diag. menor	Área
106)	3 M	6 cm	..... dm²
107)	7 cm	0,2 dm	..... cm²
108)	2 mm	0,5 cm	..... mm²
109)	6 cm	50 mm	..... cm²
110)	13 mm	2 cm	..... mm²
111)	2 mm	.... dm	3 mm²
112)	.... dm	13 mm	65 mm²
113)	2 mm	.... cm	1 mm²
114)	.... M	5 dm	25 cm²

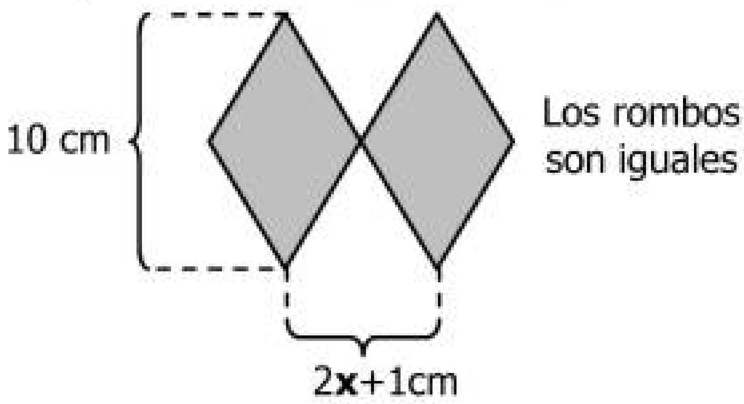
115) Calcular el área de un rombo cuya diagonal mayor mide 12 cm y cuya diagonal menor es 3/4 partes de la diagonal mayor.

116) Calcular la diagonal mayor de un rombo si se sabe que mide el doble de la diagonal menor y además el área del rombo es de 16 cm^2.

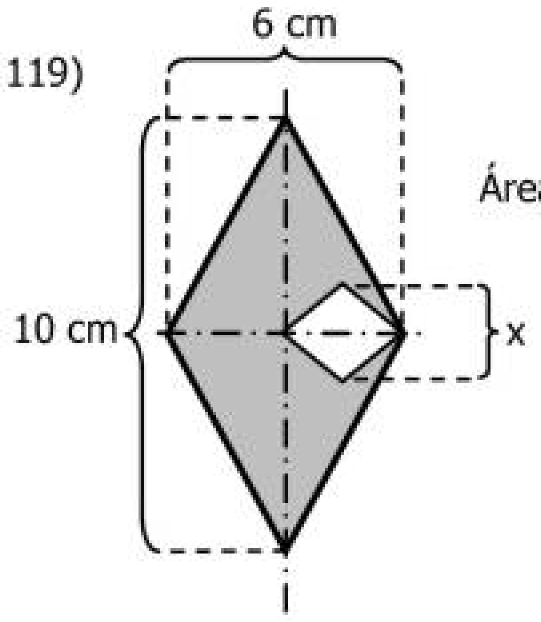
117) Calcular el área de la figura formada por los cuatro vértices de una cruz hecha con dos segmentos de 2 cm y 7 cm de longitud.

Hallar "x" en los siguientes ejercicios:

118) Área Sombreada = 70 cm^2



119)



Área Sombreada = 27 cm^2

Problemas con polígonos Regulares:

120) Hallar la apotema de un hexágono regular de 5 cm de lado y 64,5 cm^2 de área.

121) Hallar el área de un octógono de lado 1,5 dm y apotema 18 cm.

122) Hallar el perímetro de un pentágono de 6,9 cm de apotema y 172,5 cm^2 de área.

123) ¿Cuántos lados tiene un polígono regular si su lado mide 10 cm, su apotema 13,7 y su área 616,5cm^2 ?

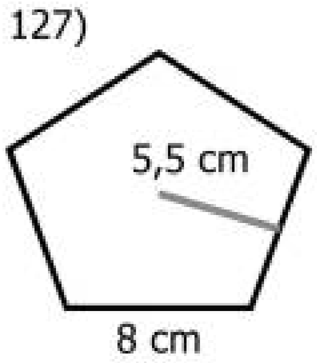
124) ¿Cuántos heptágonos de 20 cm de lado y 20,8 cm de apotema hacen un área total de 247,52 dm^2 ?

125) Calcular la quinta parte del área de un eneágono si su lado mide 50 cm y su apotema 69 cm.

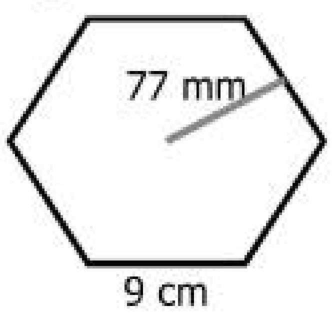
126) Algunos chicos de 7º A, formaron una ronda en el patio del colegio, y entre cada uno de ellos se toman por una soga de 1,5 metros. Desde el centro de la ronda hasta el punto intermedio de una soga la distancia es de 2,4 metros. La superficie de la ronda delimitada por los chicos y las sogas es de 18 metros cuadrados ¿Cuántos chicos formaron la ronda?

Hallar el área de los siguientes polígonos regulares:

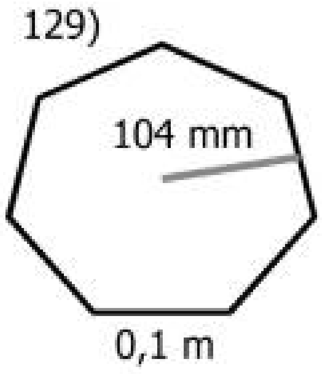
127)



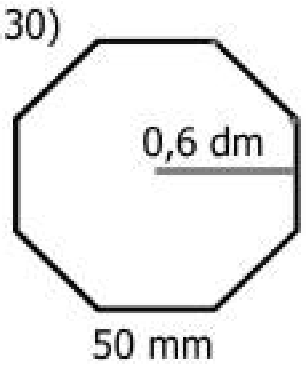
128)



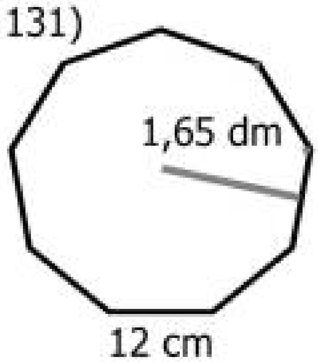
129)



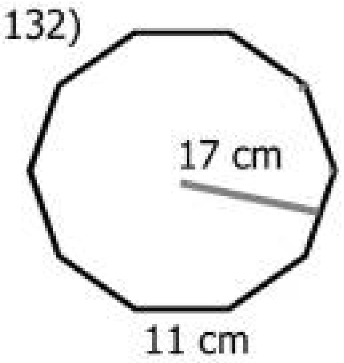
130)



131)

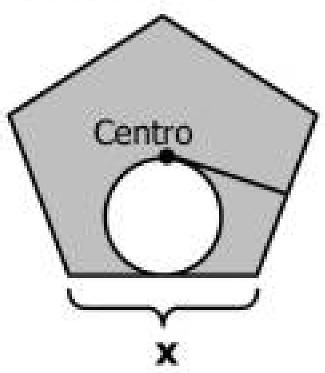


132)

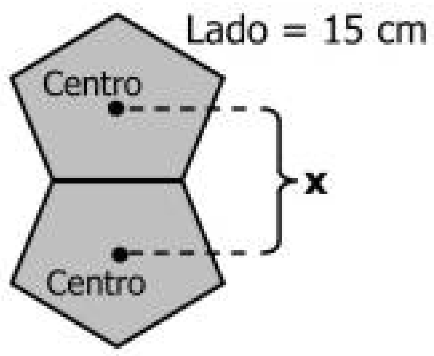


Hallar "x" en los siguientes ejercicios:

133) Área Sombreada = 284 cm^2
Radio Círculo = 5 cm

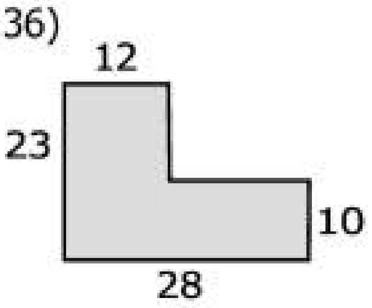


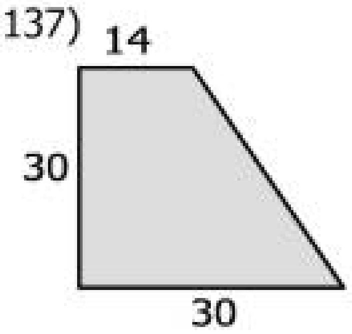
134) Área Sombreada = 776,25 cm^2

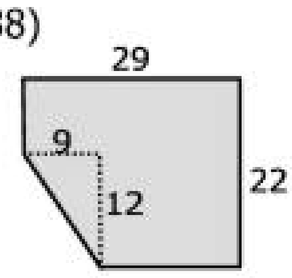


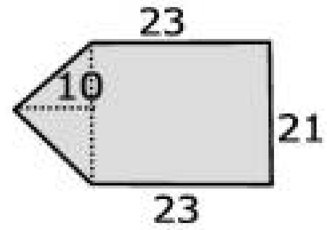
135) La superficie de una pelota de fútbol reglamentaria es de aproximadamente 1500 cm^2. Supongamos que se construye una con gajos pentagonales de 45mm de lado y 31mm de apotema ¿Cuántos gajos tendrá esta pelota? (redondear el resultado)

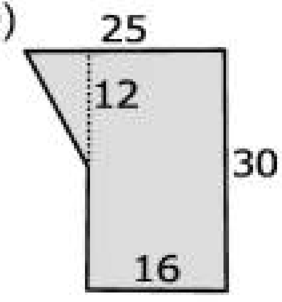
Calcular el Área de las siguientes figuras sombreadas: (Todas las medidas están en cm)

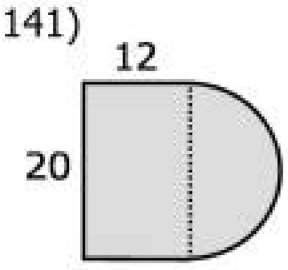
136)


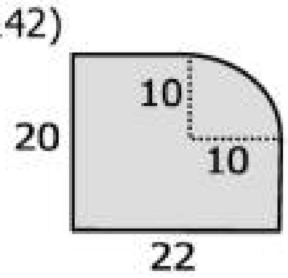
137)


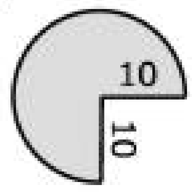
138)


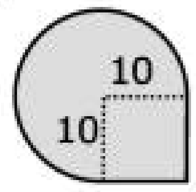
139)


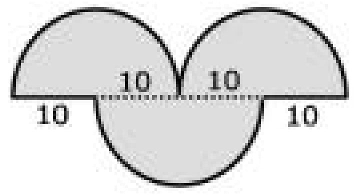
140)


141)


142)


143)


144)


145)


Problemas con Áreas – El área de un cuadrado en función de su diagonal.

146) Calcular el lado de un cuadrado de 64 cm^2 de área.

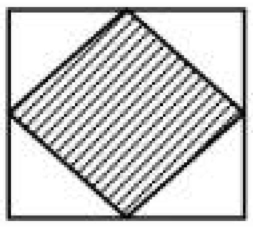
147) Calcular la diagonal de un cuadrado de 72 cm^2 de área.

148) Calcular la diagonal de un cuadrado de 10 cm de lado.

149) Calcular el área de un cuadrado de 5 cm de diagonal.

150) Calcular la diagonal de un cuadrado de 84,5 cm^2 de área.

151) Calcular el área de un cuadrado que está "metido" dentro de otro cuadrado (como lo muestra la figura) Sabiendo que el área del cuadrado grande es 122 cm^2.



152) Hallar el área de un cuadrado de lado igual a 1/2 de la altura de un rectángulo de 5 cm de base y 20 cm^2 de área.

153) Calcular la diagonal de un cuadrado si sabemos que su área es la tercera parte del área de un rombo cuyas diagonales miden 8 cm y 6 cm respectivamente.

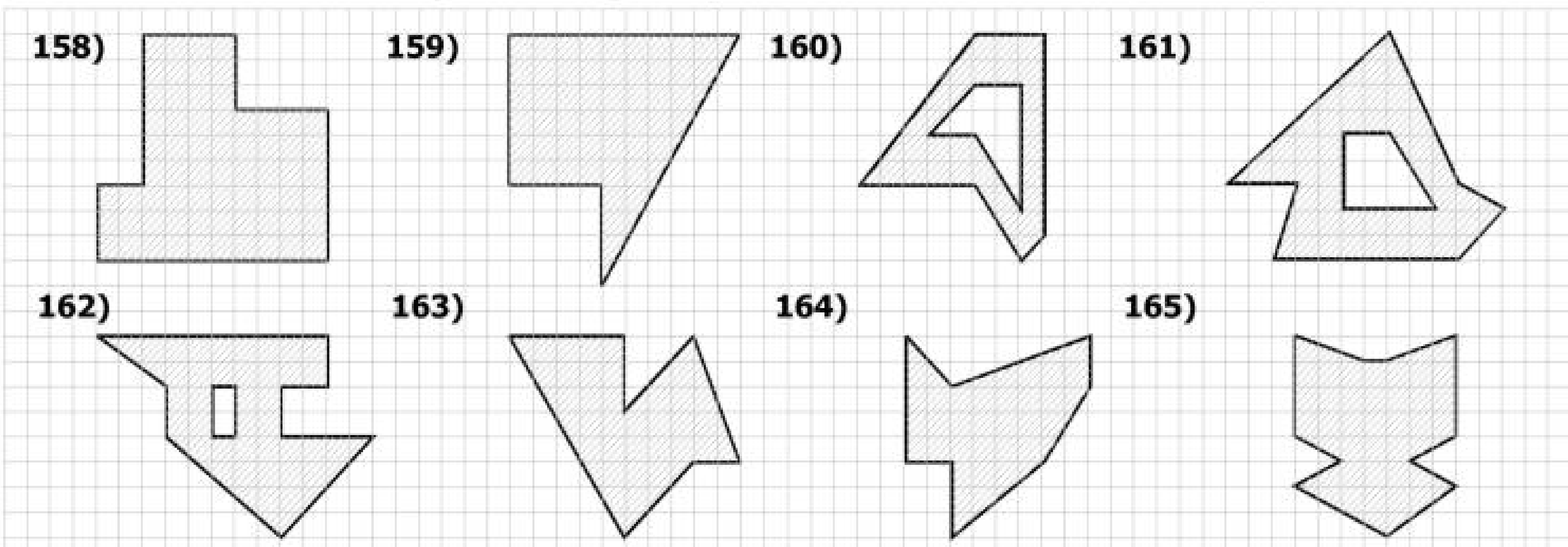
154) Calcular el valor de la altura de un rectángulo si se sabe que su área es de 20 cm^2 y su base mide la mitad de la diagonal de un cuadrado cuya área es de 32 cm^2.

155) Calcular la base de un paralelogramo si sabemos que su área es de 40 cm^2 y su altura es igual a las dos quintas partes de la diagonal de un cuadrado cuya área es de 200 cm^2.

156) Calcular la diagonal de un cuadrado si su área es la cuarta parte del área de un cuadrado cuya diagonal vale 8 cm.

157) Calcular el lado de un cuadrado cuya diagonal es el doble de la de un cuadrado de 16 cm^2 de área.

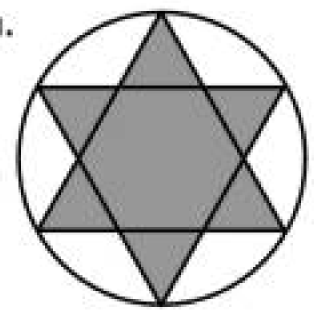
Calcular el área en mm^2 de las siguientes figuras. (Cada cuadradito mide 2mm x 2mm)



166) Para romperse el coco!!! (Imprescindible: "Saber bien el teorema de Pitágoras")

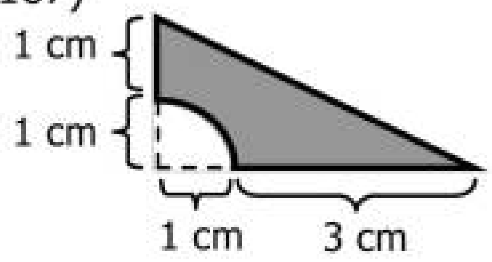
Como se deben imaginar hay que calcular el área de la estrella sombreada.
El único dato es que el radio del círculo vale: 2,5 cm

Ayudita: Todos los triángulos que ves en el dibujo son equiláteros, es decir que los tres lados miden lo mismo.

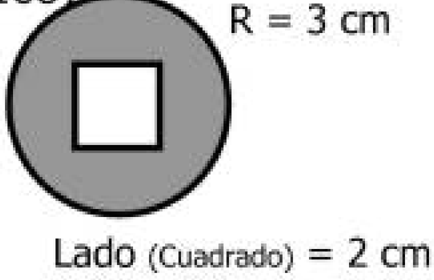


Calcular el área de las siguientes figuras sombreadas:

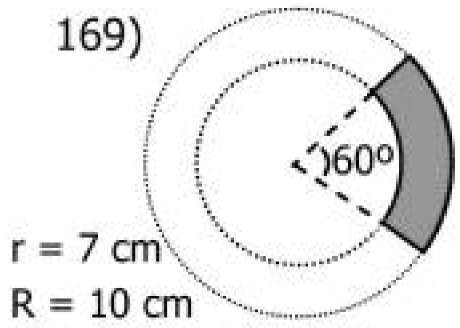
167)



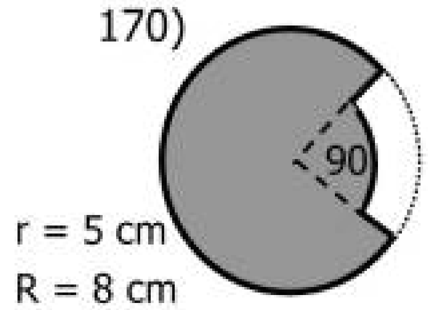
168)



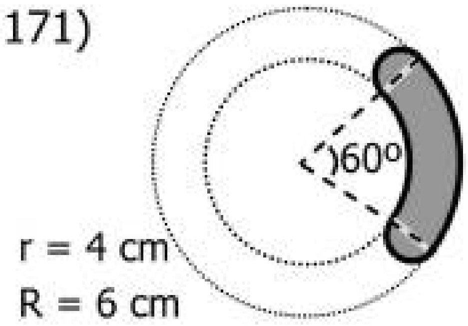
169)



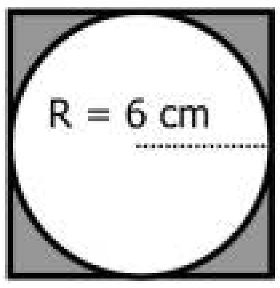
170)



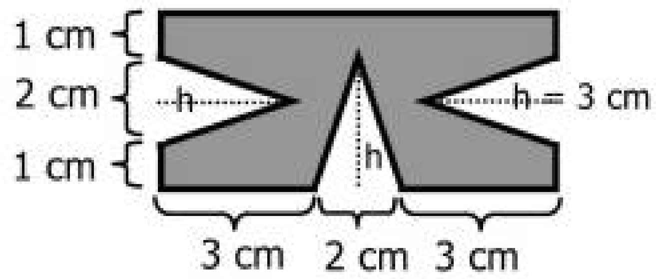
171)



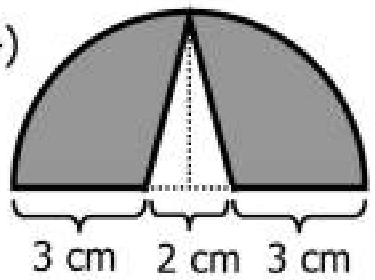
172)



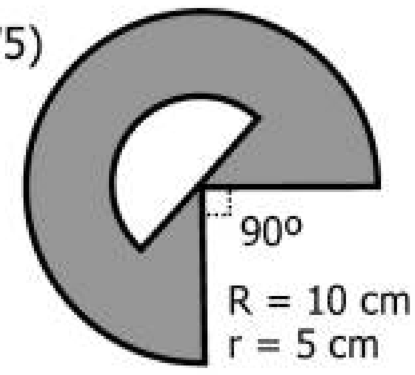
173)



174)



175)

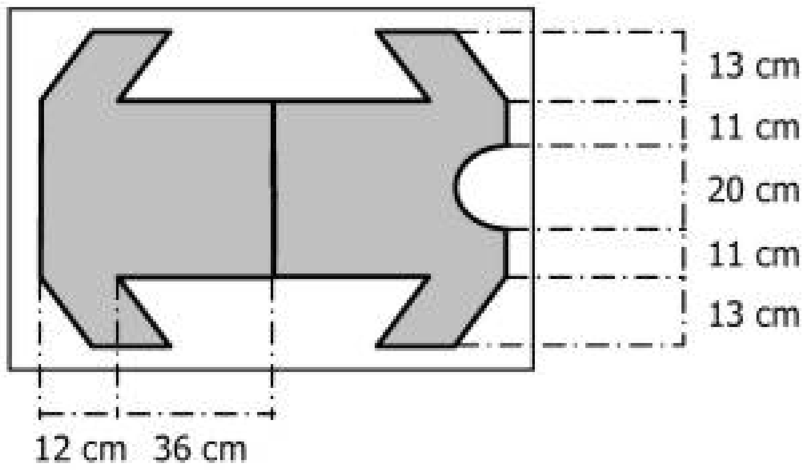


Problemas de Aplicación:

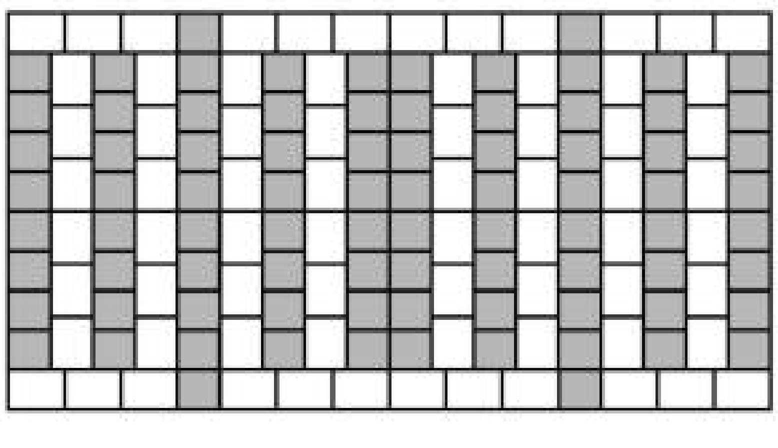
176) El jardín de la casa de Mariano mide 6 metros por 6,5 metros, atrás de todo hay un quincho que tiene piso de cemento, el quincho mide 4 metros por 3,5 metros. Antes del quincho hay una pileta redonda de 4 metros de diámetro. La pileta está comunicada con el quincho por un pasillo de cerámicas que mide 1 metro de largo por 44 centímetros. Todo el resto del jardín tiene pasto. Hacer un esquema del jardín y sus diferentes áreas. Calcular la superficie del jardín que está cubierta con pasto

177) El siguiente esquema presenta las medidas de una remera. La costurera que las cose, utiliza para recortar la forma trozos de tela rectangulares de 1 m por 80 cm.

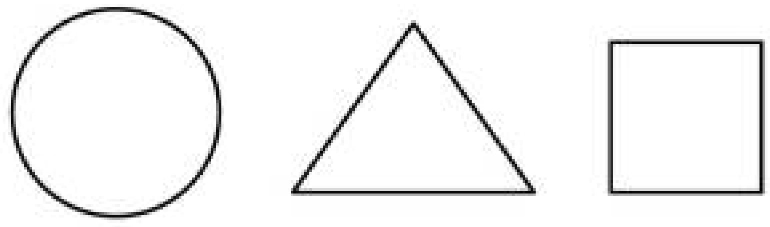
Calcular el porcentaje de desperdicio de tela por cada trozo para fabricar cada remera.



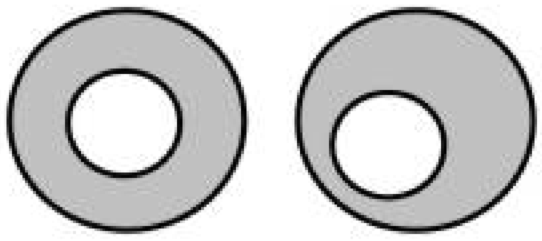
178) Una persona va a poner cerámicas nuevas a su patio. Para ello utilizará dos tipos distintos de cerámicas, con el diseño que muestra el esquema. Las cerámicas blancas son rectangulares y miden 20 cm por 15 cm, por otro lado, las cerámicas de color son cuadradas y tienen 15 cm de lado. Las cerámicas rectangulares cuestan $16 el metro cuadrado y las cerámicas cuadradas valen $18 el metro cuadrado. ¿Cuánto le costarán a esta persona las cerámicas de ambos tipos en total para su patio? (el precio de cada cerámica por metro cuadrado se fracciona de manera proporcional a la superficie de la cantidad de cerámicas que se compren)



179) Fernando tiene un alambre de 180 cm de largo. Su profesor de matemáticas le pide que arme con este alambre una figura de modo tal que su área sea la mayor posible y le dice que la figura que arme puede ser: Un Círculo, un cuadrado o un triángulo equilátero. ¿Cuál de estas figuras es la que tiene que armar Fernando? ¿Cuál es su área?

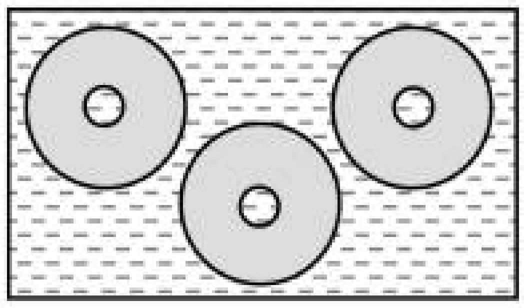


180) A continuación tenemos dibujados, por un lado, una corona circular y por el otro lado una círculo con otro círculo más pequeño adentro, no concéntricos. Los diámetros Mayores son iguales entre si en ambas figuras y los menores también. Los valores no importan, por lo tanto, sin hacer ninguna cuenta ¿Te animás a decir por qué las dos figuras tienen el mismo valor de área?



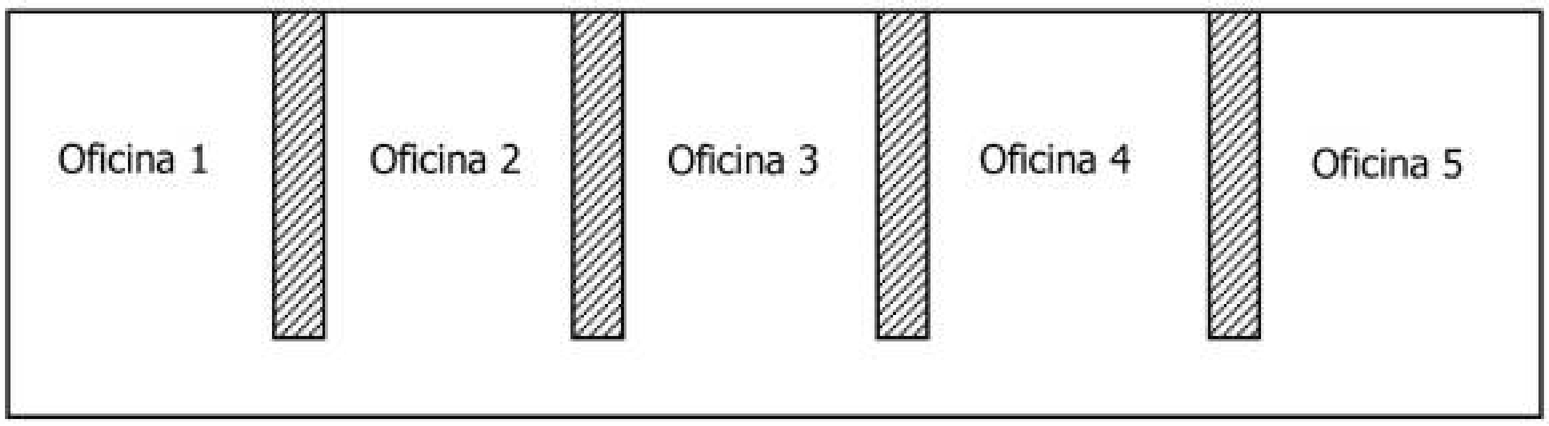
181) La habitación de Carina tiene 3,5 metros de ancho por 4 metros de largo. Su cama mide 80 cm de ancho por 1,8 metros de largo. El armario ocupa un espacio de 40 cm por 1 metro en el piso. Y su escritorio mide 1,2 metros por 60 cm. Calcular la superficie que queda libre para caminar en la habitación de Carina.

182) Esteban recorta de hojas autoadhesivas tamaño oficio (35 cm x 21 cm) las etiquetas para sus CDs, según el siguiente esquema. El diámetro mayor de las etiquetas es de 12 cm y el diámetro menor es de 4 cm. Calcular el porcentaje que desperdicia de cada hoja autoadhesiva.

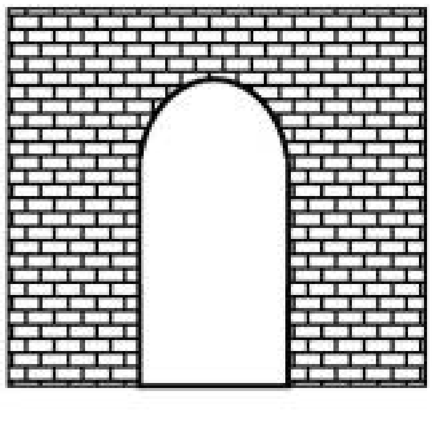


183) En un terreno rectangular de 8,6 metros de ancho por 25 metros de largo, se construyen dos Duplex, ocupando todo el ancho del terreno y dejando libres 12 metros de fondo de jardín. ¿Cuál es la superficie libre que le queda a cada Duplex de jardín?

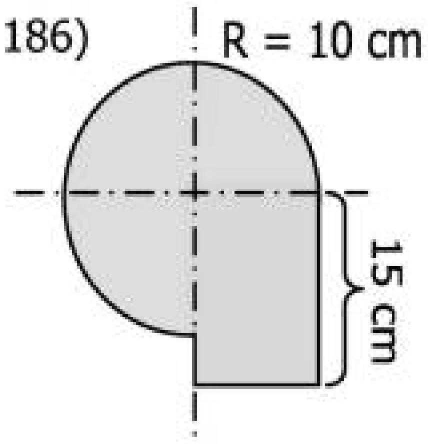
184) En un Piso de un Edificio se van a hacer divisiones para oficinas con paredes de Durlock, cada división es de 2,4 metros de ancho por 3 metros de alto. Son 5 oficinas en total y las entradas a las oficinas por el momento piensan dejarse libres, sin pared. Supongamos que conseguimos las placas de Durlock de medidas 1,2 metros por 1 metro y que además el costo de las placas es de $15 por metro cuadrado ¿Cuánto cuesta el material para hacer las divisiones de las oficinas? (Nota: Con este material "Durlock" se debe usar una placa de cada lado para formar la pared)

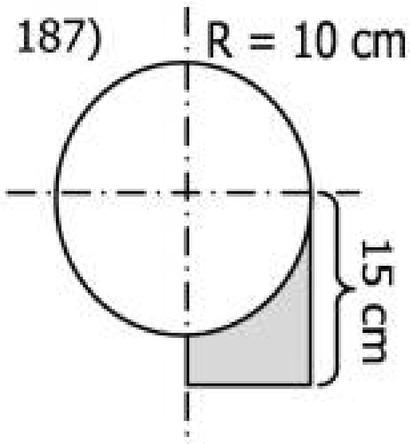


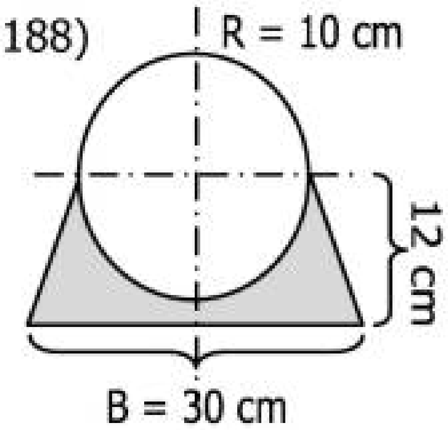
185) En una casa quieren realizar una abertura con arco de modo tal que el arco sea exactamente media circunferencia y que la altura total de la abertura hasta el punto más alto sea de 2,5 metros y el ancho de la abertura 80 cm. ¿Cuál será el área de dicha abertura?

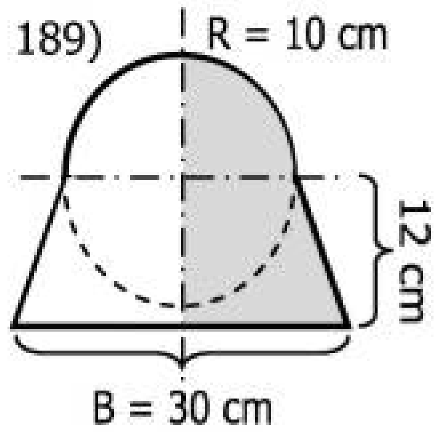


Hallar el área SOMBREADA de las siguientes Figuras:

186)


187)


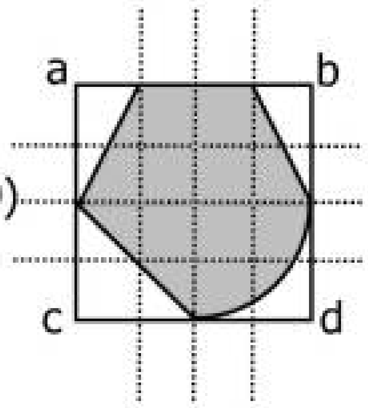
188)


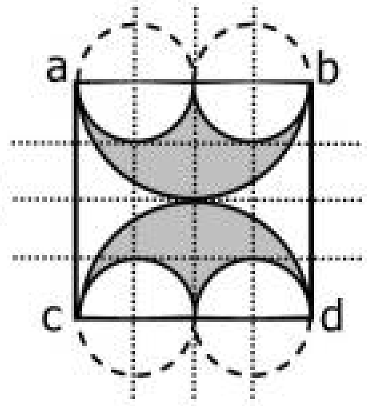
189)


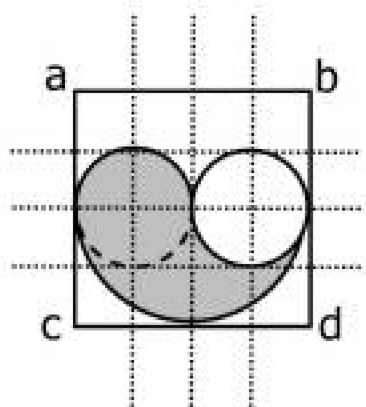
abcd es un Cuadrado de 16 cm de Lado

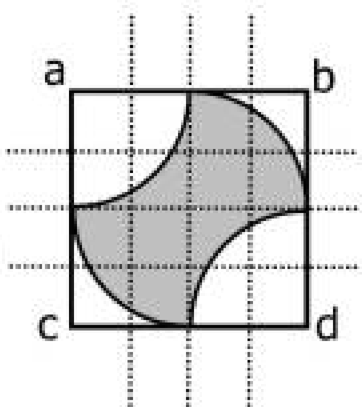
Las rectas en trazo punteado dividen al cuadrado abcd en 16 cuadrados iguales

Hallar el área sombreada

190)


191)


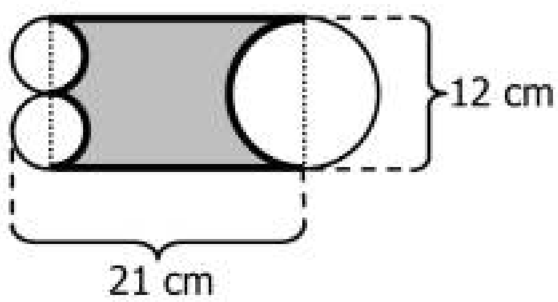
192)


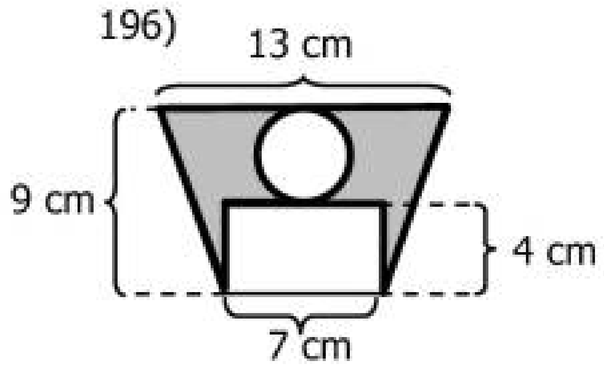
193)


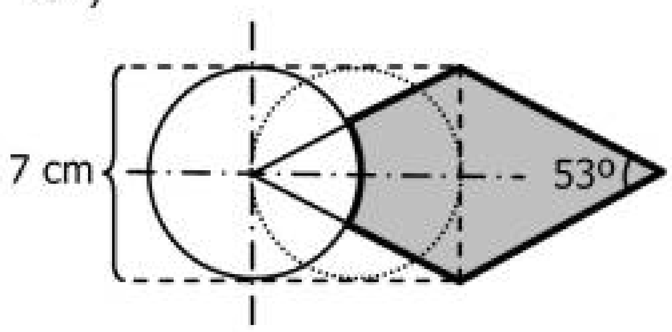
Atención: Fíjense si pueden resolver estos dos últimos ejercicios de una manera muy simple viendo si pueden "rearmar" la figura para formar otra figura del mismo área pero más simple de calcular.

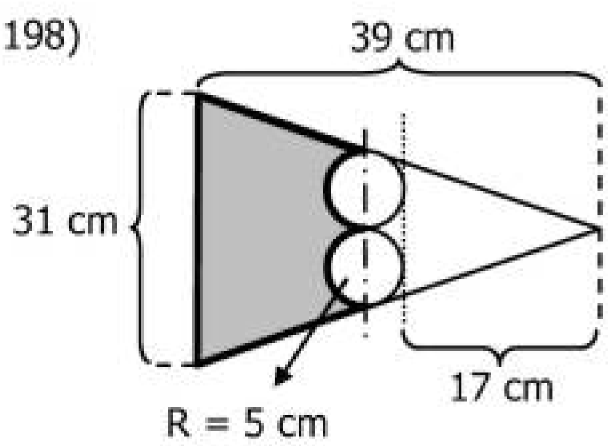
194) Marcelo tiene en la casa un jardín cuadrado de 121 metros cuadrados. Su madre vio de oferta una pileta circular cuya superficie es de 100 metros cuadrados y le pregunta a Marcelo si entra la pileta en el jardín ¿Qué dirías vos si fueras Marcelo?

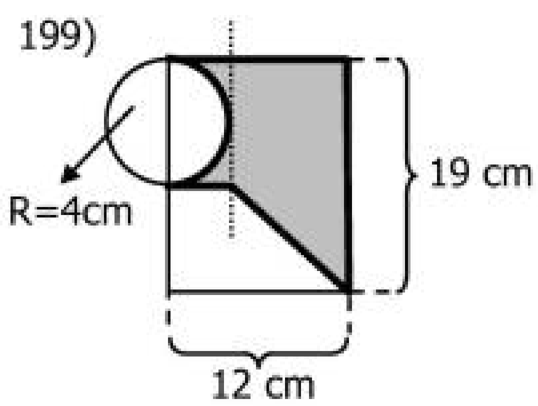
Hallar el área sombreada en cada caso:

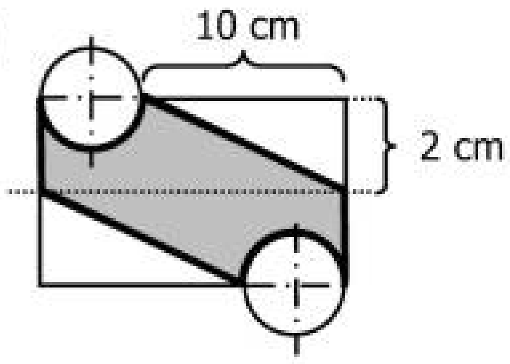
195)


196)


197)


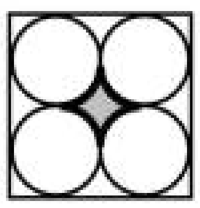
198)


199)


200)


Radio Círculos = 1 cm
La figura es simétrica

201) Tenemos cuatro circunferencias iguales de 1 cm de radio, dispuestas, como lo muestra la figura, dentro de un cuadrado. El desafío es hallar el valor del área que queda encerrada entre los cuatro círculos. (El ejercicio es muy sencillo, sólo hay que hacer dos cuentas y tener un poco de imaginación)



Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Olimpíadas

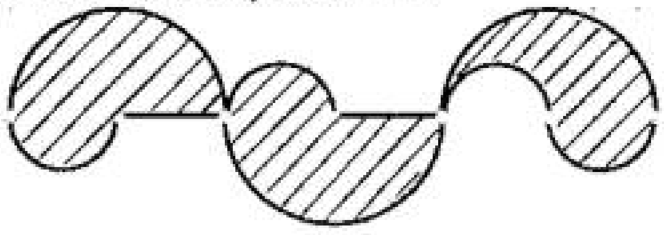
Nivel I

Número de Tema: **22**

Área: **Matemática**

1) Los comerciantes Álvarez y Bianco tienen cada uno la misma cantidad de kilos de harina en bolsas de 50 kg. Álvarez vende las bolsas enteras, cada una a $ 36. Bianco fracciona la harina en bolsitas de medio kilo y al embolsarla pierde el 4% del total; si vende cada bolsita a $0,40 obtiene $192 por la venta de todas.
Con respecto a lo obtenido por Bianco, ¿qué tanto por ciento menos obtiene Álvarez?

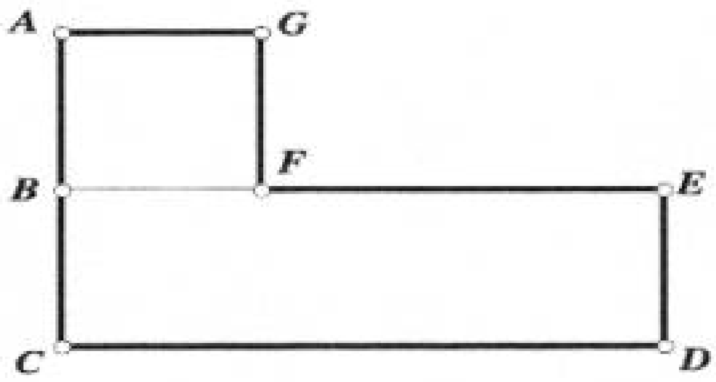
2) En una plaza hay un cantero corno muestra la figura. Los arcos son semicircunferencias. Todos los arcos grandes son iguales entre sí y todos los arcos pequeños son iguales entre sí. En la zona rayada se pondrán flores y en la zona blanca, césped. El área que ocuparán las flores es de 269,2550 m^2.
Se quiere bordear el perímetro de las flores con un cerco.
¿Cuántos metros de cerco se necesitan?



3) Un tenista entrena en las canchas de su club. Cada semana, entrena 2 días mañana y tarde y 4 días sólo por la tarde. Nunca entrena mañana y tarde dos días consecutivos de la semana. Puede utilizar las canchas para entrenar de lunes a domingo.
¿De cuántas maneras distintas puede planificar su entrenamiento durante una semana?

4) Amalia, Bruno y Carla organizaron una rifa para juntar dinero para el viaje de egresados.
Entre los tres vendieron 94 rifas y juntaron $ 235. Carla vendió 20 rifas más que Bruno. Bruno vendió 10 rifas más que Amalia. ¿Cuánto dinero recaudó Bruno?

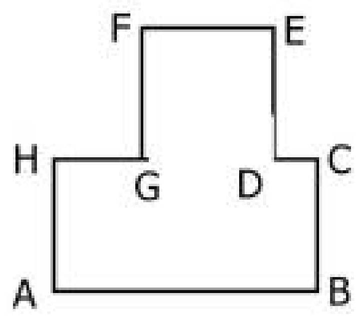
5) BCDE es un rectángulo de 48 cm2 de área. ABFG es un cuadrado. AB = BC. El área del cuadrado es 1/3 del área del rectángulo. ¿Cuál es el perímetro de la figura ACDEFG?



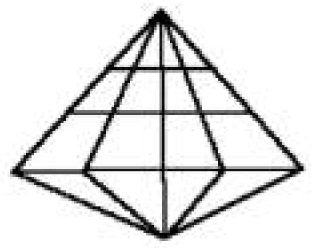
6) ¿Cuántos números pares que son múltiplos de 3 hay entre 998 y 2001? Explica por qué.

7) La cooperadora de la escuela organiza una fiesta para el 25 de mayo. El dueño del salón cobra $ 1560 de alquiler y, además, por cada persona , $ 5 por la comida. Si cada persona que va a la fiesta paga $ 13, ¿cuántas personas tienen que ir para cubrir todos los gastos?

8) El rectángulo ABCH tiene 96 m de perímetro. El perímetro del cuadrado DEFG es 3/4 del perímetro de ABCH. AB = 2 AH y HG = 3 DC. ¿Cuál es la longitud de HG?

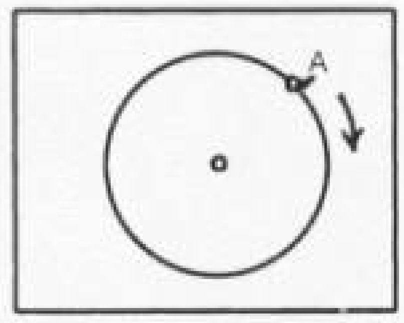


9) ¿Cuántos triángulos hay en la figura?

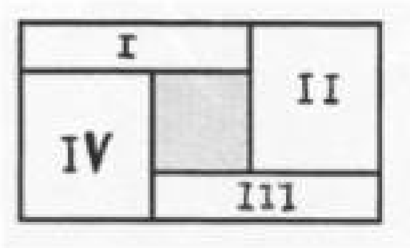


10) Un tren parte de Azul con 134 pasajeros entre hombres, mujeres y niños. Para en varias estaciones; cada vez que para, bajan 2 hombres y 1 mujer y suben 4 niños. Al llegar al final del recorrido hay, en total, 143 pasajeros: el número de niños es una vez y media el número de hombres, el número de mujeres es la mitad del número de niños. ¿ Cuántos hombres, mujeres y niños habla en el tren cuando partió de Azul?

11) En la pantalla de la computadora se ve una marca A y un disco que puede girar sobre su centro, como en la figura. El disco es blanco y el punto del borde que coincide con la marca A es de color rojo. Ceda vez que se aprieto la tecla E, el disco gira 15' en el sentido de las agujas del reloj y, cuando se detiene, cambia el color del punto del borde del disco que coincide con la marca A, de la siguiente manera: si es blanco, cambia a rojo; si es rojo, cambio a azul; si es azul, cambia a rojo. Después de apretar la tecla E 2000 veces, ¿cuántos puntos rojos y cuántos puntos azules hay en el borde del disco? ¿Cuál es el menor número de veces que hay que apretar la tecla E para que haya más puntos azules que rojos?

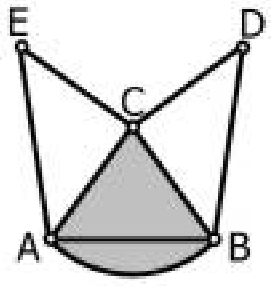


12) Inés dibuja todos los rectángulos de 264 cm2 de área y lados de longitudes enteras (en cm) que puede partir en un cuadrado y cuatro rectángulos, todos de lados de longitudes enteras, como en la figura.
El cuadrado está ubicado en el centro, el rectángulo I es igual al rectángulo III y el rectángulo II es igual al rectángulo IV. ¿Cuáles son los rectángulos que dibujó Inés? En cada uno de esos rectángulos, ¿cuál es el área de cada uno de los cuadrados ubicados en el centro?



13) En la escuela, 5°, 6° y 7° se pueden cursar en el turno mañana o en el turno tarde. El total de alumnos de 5°, 6° y 7° es 734; en el turno tarde hay 10 alumnos más que en el turno mañana. El total de alumnos de 5° es 247; en el 5° turno tarde hay 7 alumnos más que en el 5° turno mañana. En 6° hay, en total, 1 alumno más que en 7° . En 6° del turno mañana hay 5 alumnos más que en 5° del turno mañana. ¿Cuántos alumnos hay en 7° del turno tarde?

14) El triángulo ABC es isósceles con AC = BC y <ACB = 4/3 <CBA (<ACB indica el ángulo ACB). AB es un arco de circunferencia de centro C y radio CA. La parte sombreada de la figura tiene aproximadamente 22,61cm2 de área. Los triángulos ECA y BCD son isósceles, rectángulos e iguales entre sí. ¿Cuál es el área de toda la figura? ¿Cuál es el perímetro de la parte sombreada?

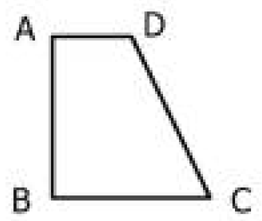


15) Los padres de Javier quieren comprar un departamento que cuesta $ 120000 pero no disponen de todo el dinero. Pagarán una parte al contado y el resto en dos partes iguales: la primera mitad, con el 20% de recargo, en 30 cuotas iguales y la otra mitad, con el 5% de recargo, en 15 cuotas iguales. Por cada una de las 15 últimas cuotas deberán pagar $ 2184. ¿Qué porcentaje del valor del departamento pagaron al contado? ¿Cuánto deberán pagar por cada una de las primeras 30 cuotas?

16) En la primera fila del teatro hay 5 asientos. Para la función de esta noche Juan compró las 5 entradas de la primera fila para él y sus amigos: Ana, Dani, Edu y Mar. Si Ana y Mar se sientan una al lado de la otra, ¿de cuántas maneras distintas podrán sentarse los 5 chicos?

17) El Sr. López es dueño de las tres cuartas partes de una empresa. Cuando se repartieron las ganancias de 1999, el Sr. López recibió como adelanto $12.600 que representaban el 30 % de sus ganancias. ¿Cuánto dinero ganó la empresa en 1999?

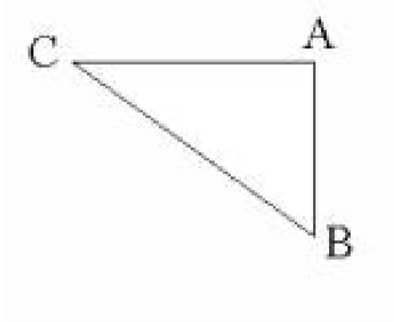
18) El trapecio rectángulo ABCD tiene 192cm2 de área. AB = BC y BC = 2 AD. ¿Cuál es el área del triángulo ABC?

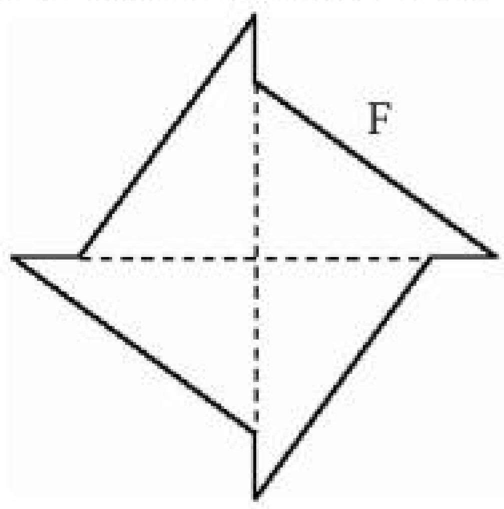


19) Si escribes todos los múltiplos de 5 entre 91 y 609, ¿cuántas veces escribes el 5?

20) El avión salió de Mendoza entre los pasajeros había 30 mujeres y algunos varones. Cuando hizo escala en Córdoba subieron 26 varones y 26 mujeres y no bajó nadie. Al despegar nuevamente el número de mujeres era los 2/5 del número total de pasajeros. ¿Cuántos varones había entre los pasajeros del avión antes de la escala en Córdoba?

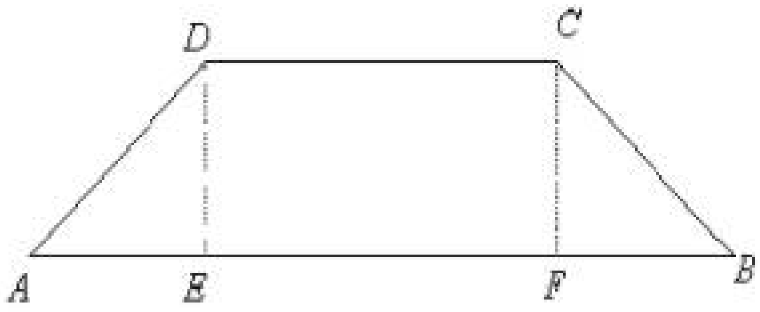
21) Con cuatro piezas triangulares iguales se armó la figura F. Cada pieza triangular ABC tienen 24cm de perímetro, AC = 8cm , 3 AC = 4 AB . ¿Cuál es el perímetro de la figura F?



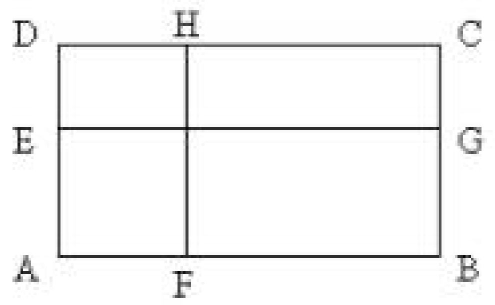


22) Dani recibe cada mes dinero para sus gastos. Durante la primera semana, gastó la mitad del dinero que recibió. Durante la segunda semana, gastó la quinta parte del dinero que recibió. A Dani le quedan todavía $24. ¿Cuánto dinero recibió Dani este mes para sus gastos?

23) Un terreno se descompone en una parcela rectangular y dos parcelas triangulares iguales. Se sabe que AE = DE = 100m, para cercar sólo una de las parcelas triangulares se necesitan 341,50m de alambre y si se quisiera cercar sólo la parcela rectangular se necesitaría el doble de alambre. ¿Cuántos metros de alambre se necesitarán para cercar todo el terreno?



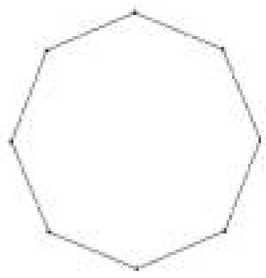
24) En una caja hay otro fichas. Las fichas llevan los números: 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 20 - 30. Se sacan tres fichas de la caja y, de los números que se pueden formar al ordenarlas, se escribe el mayor. Ejemplo: Si se sacan 30 - 9 - 5, se escribe 9530 (9 - 5 - 30). ¿Cuáles son los números mayores a 6510 que se pueden escribir?



25) Ismael dibuja rectángulos como el ABCD, que tienen todos la siguiente propiedad: si se los divide en cuatro partes por rectas paralelas a los lados, las longitudes de AF, FB, BG y GC son números enteros de cm, el área del rectángulo EIHD es 6 cm2, el área del rectángulo FBGI es 15 cm2. ¿Cuál es el rectángulo de mayor área que puede dibujar Ismael? Dibújalo y da las longitudes de sus lados.

26) Pedro y Juan están armando cada uno un sendero en el jardín. El sendero de Pedro y el sendero de Juan tienen la misma longitud. Pedro tarda 4 horas en armar su sendero. Juan tarda 5 horas en armar el suyo. A las 8 h 30 min, cada uno empieza a armar su sendero. Cuando suena la sirena, a Juan le queda por hacer el doble de lo que le queda a Pedro. ¿A qué hora sonó la sirena?

27) En un octógono regular se dibujan los triángulos isósceles que tienen por vértices tres vértices del octógono. ¿Cuántos son? Se pintan tres vértices cualesquiera del octógono rojo y los otros cinco de azul. Para cada forma de pintar los vértices, ¿cuántos triángulos isósceles tienen los tres vértices del mismo color?

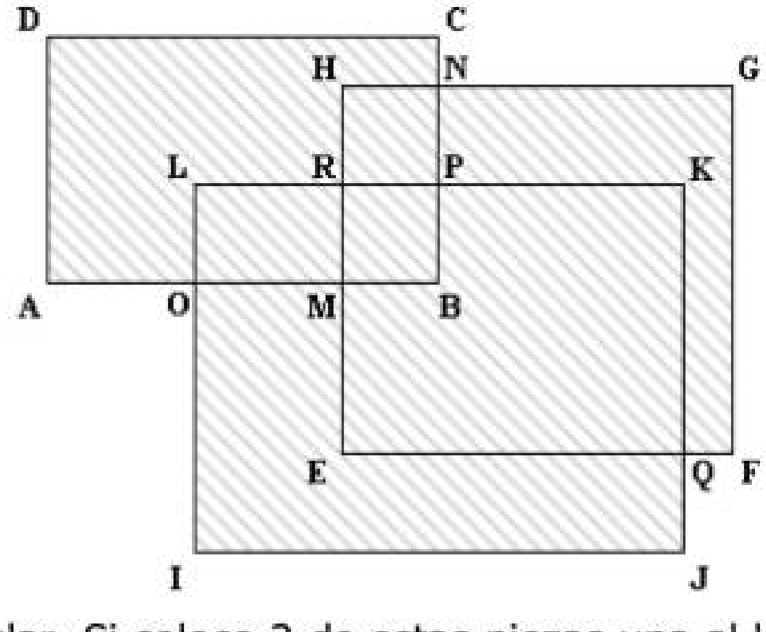


28) De lunes a sábado, Bianchi, García y López se turnan para llevar y traer a los chicos del club. Bianchi y García hacen viajes de ida. García y López hacen viajes de vuelta. Cada 6 días, cada uno debe hacer un total de 4 viajes y García no puede hacer dos viajes el mismo día. ¿De cuántas maneras distintas se pueden turnar?

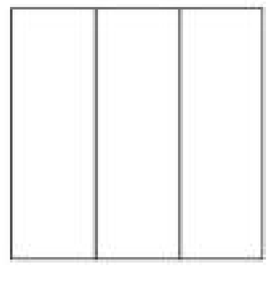
29) En cierto país, el 1 de enero de 1995, un producto A valía $50 y un producto B valía $400. Después, cada año, cada producto aumentó un mismo porcentaje sobre el precio del año anterior. Para el producto A el porcentaje de aumento de cada año fue del 300%. Los dos productos valían lo mismo el 1 de enero de 1998.
¿Cuál fue el porcentaje de aumento de cada año para el producto B?

30) ¿Cuál es el área de la figura rayada?

Área ABCD = 48 cm2
Área EFGH = 72 cm2
Área IJKL = 90 cm2
Área MBNH = 10 cm2
Área OBPL = 15 cm2
Área EQKR = 49 cm2
Área MBPR = 6 cm2



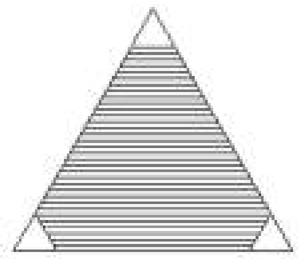
31) Tengo piezas de cartón de forma rectangular. Si coloco 3 de estas piezas una al lado de la otra sin superponerlas, como en la figura, obtengo un cuadrado de 24 cm de perímetro. Si ahora coloco las 3 piezas sin superponerlas, pero de otra manera, obtengo un rectángulo que no es un cuadrado. Dibuja este rectángulo e indica su perímetro.



32) En la biblioteca, un tercio de los libros son de Matemática. Hay 30 libros de Lengua. Hay 24 libros de Ciencias Sociales. Hay tantos libros de Ciencias Naturales como de Lengua. ¿Cuántos libros hay en total en la biblioteca?

33) Matías tiene 3 cajas: una roja, una verde y otra azul; y 4 medallas: una de oro, una de plata, una de bronce y una de cobre. Quiere guardar todas las medallas en las cajas de modo que ninguna caja quede vacía. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerlo? Enuméralas.

34) A un triángulo equilátero de 75cm de perímetro se le sacan 3 triangulitos, también equiláteros, de 5cm de lado, como en la figura. ¿Cuál es el perímetro de la figura rayada?



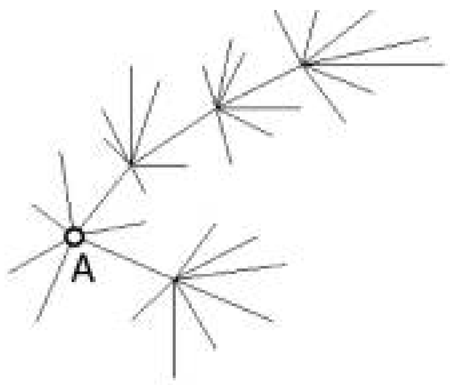
35) La cooperadora compró manuales y libros. Pagó, en total, \$624. Por los 15 libros, que son todos de igual precio, pagó \$240. Cada manual costó el doble de cada libro. ¿Cuántos manuales compró?

36) Un tren empieza su recorrido en la estación A y lo termina en la estación F. Entre la estación A y la estación F están las estaciones B, C, D y E. Se quiere ir de la estación A a la F parando en una o más de las estaciones intermedias. ¿De cuántas maneras distintas se puede organizar el viaje en tren? Enumérelas.

37) Daniel quiere comprar 2 libros de entre los 7 que le gustan. Cada libro cuesta una cantidad entera de \$; El precio más barato es \$ 2. Daniel observa que las distintas elecciones de dos libros, entre los 7 que le gustan, cuestan cantidades distintas de dinero. ¿Cuánto debe costar cada libro para que la suma de los precios de los 7 libros sea la menor posible?

38) Dibuja un cuadrado ABCD. Marca un punto P en el lado BC y un punto Q en el lado CD, de modo que los triángulos APB y AQD tengan áreas distintas y, además, el área del cuadrilátero APCQ sea el triple de la suma de las áreas del triángulo APB y del triángulo AQD. Explica cómo elegiste los puntos y por qué las áreas de las tres figuras cumplen las condiciones pedidas.

39) A es el punto de la figura. Se dibujan 7 segmentos con un extremo en A. Se eligen algunos extremos libres de los segmentos dibujados (distintos de A; A no es un extremo libre) y se dibujan 7 segmentos con un extremo en cada uno de los puntos elegidos. (ver ejemplo en la figura) Se continúa este proceso. ¿Es posible, después de varios pasos, tener: 55 extremos libres? 1997 extremos libres? Explica por qué.

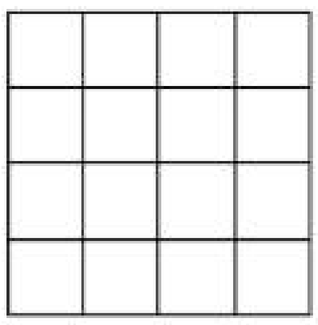


40) Todas las latas que había en el depósito se distribuyeron en 143 cajas. Todas las cajas tenían igual número de latas. Como resultaba imposible cargar todas las cajas en la camioneta, se vaciaron 11 cajas y se repartió su contenido entre las otras cajas. Ahora, cada una de las cajas que quedan tiene 2 latas más. ¿Cuántas latas hay en total?

41) Las figuras A y B están formadas por cuadrados de 1cm de lado.

Con ellas, sin superponerlas, se arman nuevas figuras de manera que, donde se tocan las figuras A y B tienen lados enteros en común. ¿Se puede armar una figura de 16cm de perímetro? Explica por qué.

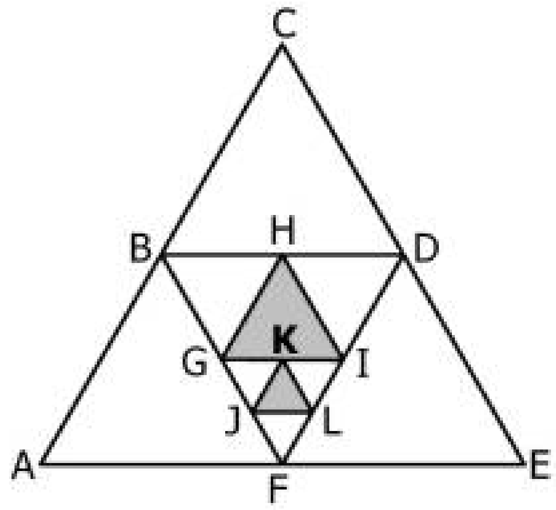
42) En la cuadrícula de la figura se quieren pintar de rojo 4 cuadraditos de modo que un cuadradito rojo no tenga a su alrededor ningún otro rojo. ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer?



43) Para hacerse socio del Club de Natación se debe pagar \$50. Cada vez que utilizan la pileta del Club, los socios pagan \$2,50 y los no socios pagan \$7,50. ¿Por lo menos cuántas veces hay que utilizar la pileta para que resulte más barato ser socio?

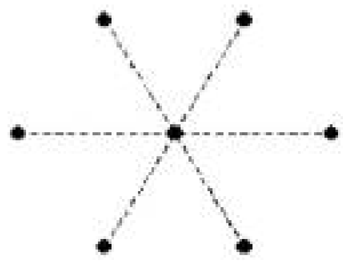
44) Con los dígitos: 1 - 2 - 3 - 4 - 5 y 0 , ¿cuántos números de cuatro cifras que son múltiplos de 5 y tienen todas las cifras distintas se pueden armar? Explica por qué.

45) ACE es un triángulo equilátero. B, D y F son puntos medios de los lados del triángulo ACE. G, H e I son puntos medios de los lados del triángulo BDF. J, K y L son puntos medios de los lados del triángulo GFI. ¿Qué fracción del cuadrilátero ABDE representa la zona rayada?

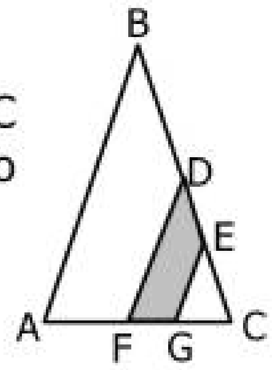


46) Una heladera se vende a \$660. Si se paga al contado rebajan la décima parte del precio. Si se compra a crédito el precio total resulta \$114 más que el precio de contado. Comprándola a crédito se pagan \$90 al momento de la compra., \$210 al momento de la entrega y el resto en 4 cuotas iguales. ¿Cuánto hay que pagar por cada cuota?

47) ¿Cuántos triángulos se pueden formar con sus vértices en los puntos de la figura?

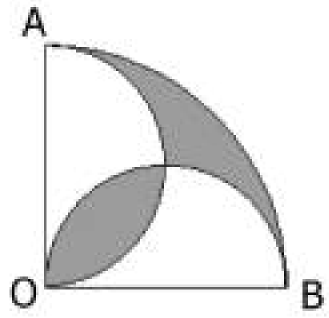


48) Los triángulos ABC, FDC y GEC son isósceles. AB = 3AC El perímetro de ABC es 84cm. D es punto medio de BC , E es punto medio de DC , F es punto medio de AC , G es punto medio de FC , ¿Cuál es el perímetro de la figura rayada?



49) Un comerciante compra bolsas de papas que siempre pesan un número entero de kilos. Recibió cuatro bolsas todas de distinto peso y como tiene una balanza que sólo marca pesos mayores de 100 kg las pesa de a dos. Sólo consigue cuatro resultados: 101, 112, 116 y 127 porque los otros dos pesos son menores de 100 kg. Con esta información se puede conocer el peso de cada una de las cuatro bolsas. ¿Cuáles son esos pesos?

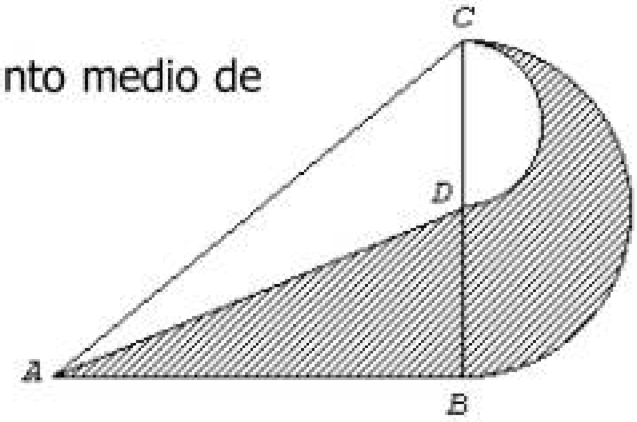
50) El arco AB es un cuarto de una circunferencia de centro O y radio 10cm. Los arcos OA y OB son semicircunferencias. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



51) Juan y Pedro ponen "1" y "2" en los vértices de un hexágono regular como el de la figura. Cada uno en su turno pone un uno o un dos, a su elección. Después de seis jugadas, cuando el juego termina, un árbitro pone, en cada lado del hexágono, el producto de los números de los dos vértices. Para finalizar, suma los doce números escritos. Si la suma es impar, gana Juan; si es par, gana Pedro. Uno de los dos puede ganar siempre, no importa lo bien que juegue el otro. Si empieza Juan, ¿quién gana y cuál es su estrategia ganadora?

52) En un campamento participan, en total, 240 chicos de Argentina, Brasil, Chile y Perú. El número de chicos del Perú es el 50% del número de chicos de Chile y (1)/(3) del de Argentina. El número de chicos de Argentina es el 75% del número de chicos de Brasil. ¿Cuántos participantes de cada país hay en el campamento?

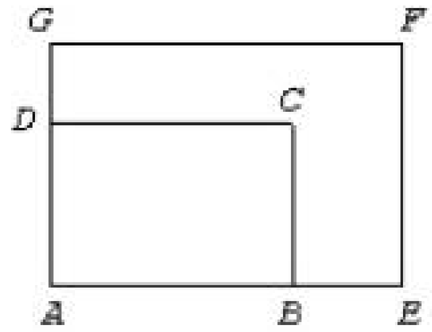
53) El triángulo ABC es rectángulo en B y tiene 50 cm2 área. D es el punto medio de BC y AB=12,5 cm. Los arcos BC y CD son semicircunferencias.
¿Cuál es el área de la zona rayada?



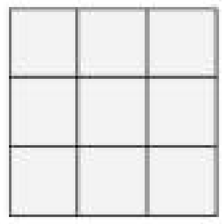
54) Sobre una circunferencia se marcan 33 puntos que la dividen en 33 partes iguales. Se numeran consecutivamente y en el sentido de las agujas del reloj con 0, 1, 2, 3, 4, ... , 32. Se pintan con rojo algunos de esos puntos de manera que no queden dos pares de puntos rojos a la misma distancia. ¿Cuál es el mayor número de puntos que pueden pintarse de rojo? Explica por qué y representa gráficamente.

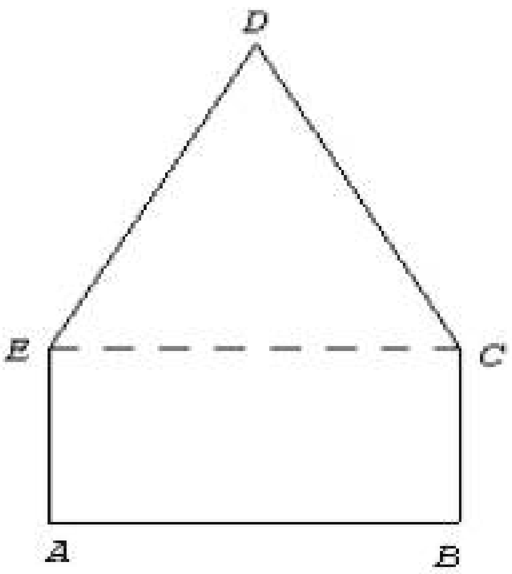
55) Un comerciante compró 28 cajones de frutas. Cada cajón contiene 8 kg. Pago $2 por cada kg y $21,40 por el traslado de todos los cajones. Por la venta del total obtuvo una ganancia de $90,60. ¿A qué precio vendió el kilo de fruta?

56) El rectángulo AEFG tiene 72 cm de perímetro y el ABCD tiene 48 cm de perímetro, AB=15cm y BE=2.DG . ¿Cuál es la longitud de AG?



57) Ubicar los números 1-2-3-4-5-6-7-8-9 en los casilleros de esta cuadrícula de modo que: el 9 ocupe el centro, los números de la primera fila sean todos impares y la suma de los números de cada fila y de cada columna sea la misma.

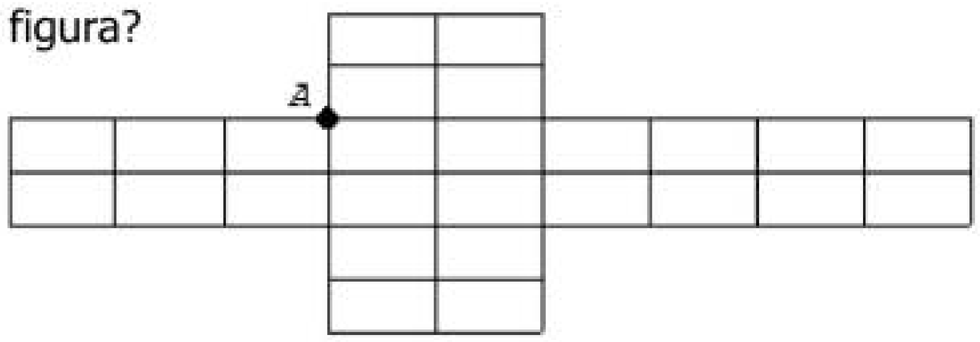




58) En el campo ABCDE de la figura AB=2.BC y el triángulo CDE es equilátero. Para alambrar el campo se necesitan 108 m de alambre. ¿Cuánto se necesita para alambrar la parcela triangular solamente?

59) Laura compró 2,50 m de tela a $9,60 el metro. De ese pedazo de tela, de 70 cm de ancho, corto cuadrados de 30 cm de lado para confeccionar pañuelitos. En ese mismo negocio se vendían trozos cuadrados de 30 cm de lado a $21,60 la docena. ¿Cuánto ahorró Laura al hacer ella misma los cortes?

60) ¿Cuántos rectángulos con algún vértice en A hay en la figura?



Nota del autor: Toda esta recopilación de ejercicios, fue tomada de ejercicios que formaron parte de las evaluaciones de "Olimpíadas Ñandú" en los certámenes interescolares, zonales, regionales y nacionales, desde 1996 hasta la actualidad. Por tratarse de un módulo muy particular como es el del "Compendio de ejercicio de Olimpíadas", y notando las necesidades educativas en este campo, me pareció lo más eficiente, es por ello que este módulo es el único de toda la colección "Logikamente" que contiene ejercicios que no son de autoría propia. Espero sea de Utilidad en la mejora de la enseñanza y la calidad educativa.

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Cuerpos

En el espacio

Número de Tema: **23**

Área: **Matemática**

¿Qué es un cuerpo?

Es "un objeto" que ocupa un lugar en el espacio
(El espacio es lo que comúnmente se dice las 3 dimensiones).

¿Qué es el volumen de un cuerpo?

Es la cantidad de espacio que ocupa.

Ejemplo: Una cacerola es un cuerpo. Ocupa un lugar en el espacio. El volumen de esa cacerola es la cantidad de espacio que ocupa. Mientras más grande sea la cacerola más espacio va a ocupar por lo tanto el volumen va a ser mayor.

¿Para qué sirve calcular el volumen de un cuerpo?

θ Los cuerpos macizos:

Son aquéllos cuerpos sólidos que no son huecos, suponemos que están hechos de un mismo material. Un ejemplo es una bolita de vidrio. Mientras más grande sea la bolita más volumen va a tener (esto ya la habíamos dicho). Pero ahora podemos decir que el volumen es la cantidad de vidrio necesaria para construir esa bolita. Para una bolita más grande necesitaré más vidrio.

Así calculando el volumen puedo saber no sólo la cantidad de vidrio que hace falta para hacer bolitas sino un montón de cosas más, como por ejemplo: la cantidad de madera para hacer puertas, o la cantidad de cemento para hacer paredes o la cantidad de plástico para hacer juguetes.

θ Los cuerpos huecos:

Son aquéllos cuerpos dentro de los cuáles se puede introducir "algo" como por ejemplo: Una caja, una cacerola, una botella, una valija, un jarrón, un vaso, un tanque de agua, etc. Como dijimos antes mientras más grande sea la caja, mayor va a ser su volumen. También podemos decir que el volumen es la cantidad de cosas que se pueden poner dentro de esa caja. O sea que mientras más grande sea el volumen de una caja, mas cosas puedo poner dentro de la misma.

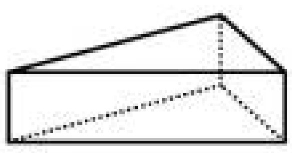
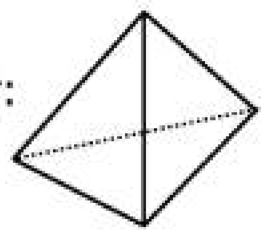
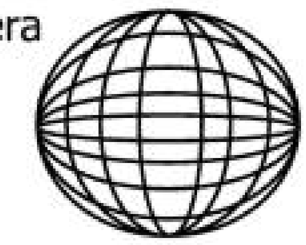
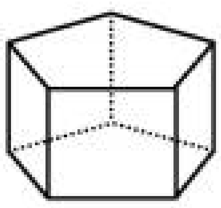
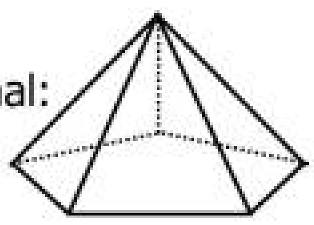
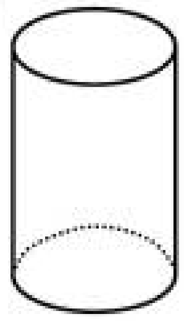
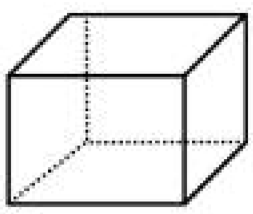
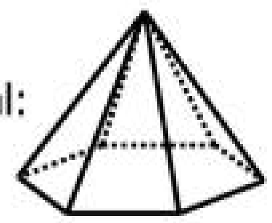
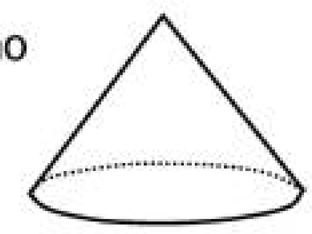
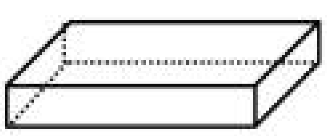
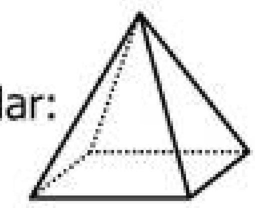
Así calculando el volumen puedo saber no sólo la cantidad de cosas que entran en una caja, sino también por ejemplo: la cantidad de agua que entra en una pileta, o la cantidad de comida que entra en una cacerola, o la cantidad de jugo que entra en una jarra, etc.

¿Qué es la superficie de un cuerpo?

Es la suma de las superficies de sus "caras externas".

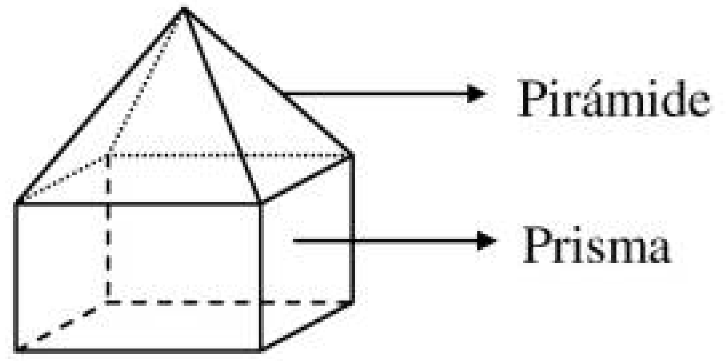
Y para qué sirve calcular la superficie de un cuerpo? Podemos calcular la superficie de un cuerpo para saber por ejemplo la cantidad de pintura que necesitamos para pintar ese cuerpo, o la cantidad de papel que necesitamos para forrarlo.

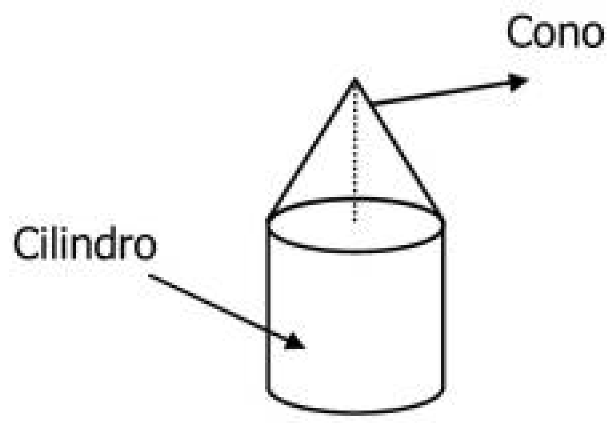
θ ¿Qué tipo de cuerpos hay?

PRISMAS	**PIRÁMIDES**	**CUERPOS CIRCULARES**
Base Triangular: 	Base Triangular: 	Esfera 
Base Pentagonal: 	Base Pentagonal: 	Cilindro 
Base Cuadrangular: 	Base Hexagonal: 	Cono 
Base Rectangular: 	Base Rectangular: 	

La GRAN DIFERENCIA entre el prisma y la pirámide es que los prismas tienen "Piso y Techo" (o dos superficies paralelas) , mientras que las pirámides sólo tienen "Piso" ya que terminan en una punta, las pirámides son "Puntiagudas" (También Al cilindro lo podemos poner dentro del conjunto de Prismas como un prisma de base circular y al cono dentro de las pirámides como una pirámide de base circular)

θ También vamos a ver cuerpos que resultan de la unión de estos que vimos recién:





FORMULAS:

En este cuadro tenemos las fórmulas que podemos usar para calcular el área lateral, total o el volumen de cualquier prisma o pirámide.

Para el cilindro se usan las fórmulas de los prismas (el cilindro es un prisma de base circular)
Para el cono se usan las fórmulas de las pirámides (el cono es una pirámide de base circular)

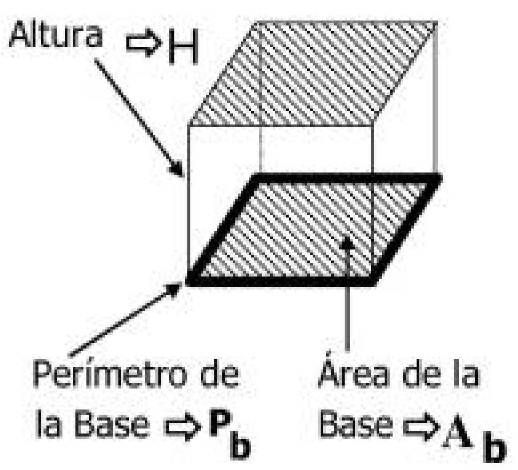
θ ***Prismas y Pirámides***

	PRISMAS	**PIRÁMIDES**
Área Lateral	Perímetro de la base * Altura	$\dfrac{\textit{Perímetro}_{(\textit{de la Base})} \cdot \textit{Apotema Lateral}^{(*)}}{2}$
Área Total	Área Lateral + 2 * Área base	Área Lateral + Área de la base
Volumen	Área de la base * Altura	$\dfrac{\textit{Área}_{(\textit{de la Base})} \cdot \textit{Altura}}{3}$

(*) Cabe aclarar que el apotema lateral es el segmento que une al punto mas alejado de la base con el punto medio de un lado de la base. En el caso del Cono en lugar de Apotema Lateral diremos Generatriz y es el segmento que une el punto mas alejado de la base con cualquier punto de la circunferencia de la base..

θ La Esfera ⇨ ***Área Total*** $= 4 * \pi * \text{Radio}^{2}$ ⇨ ***Volumen*** $= \dfrac{4 * \pi * \text{Radio}^{3}}{3}$

θ Prismas

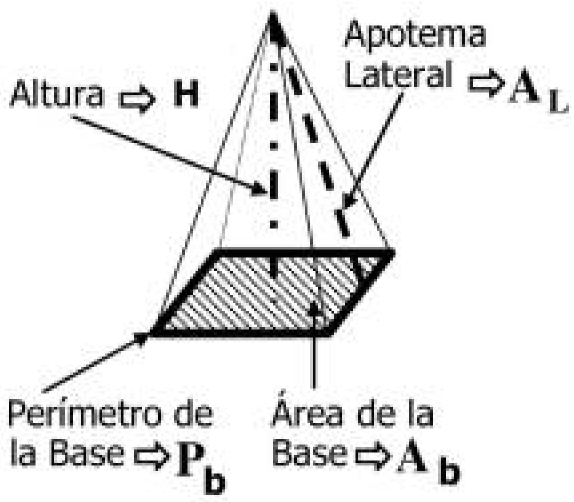


Área Lateral $= P_b \cdot H$

Área Total $=$ Área Lat $+ \ 2 \ A_b$

Volumen $= A_b \cdot H$

θ Pirámides

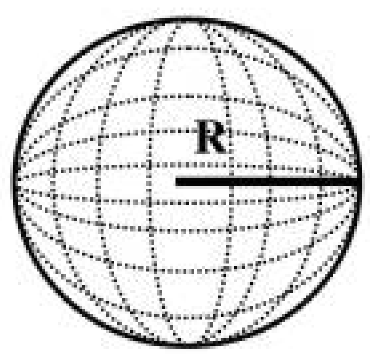


Área Lateral $= \dfrac{P_b \cdot A_L}{2}$

Área Total $=$ Área Lat $+ \ A_b$

Volumen $= \dfrac{A_b \cdot H}{3}$

θ Esferas



Área Total $= 4 \cdot \pi \cdot R^2$

Volumen $= \dfrac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$

❑ CONO

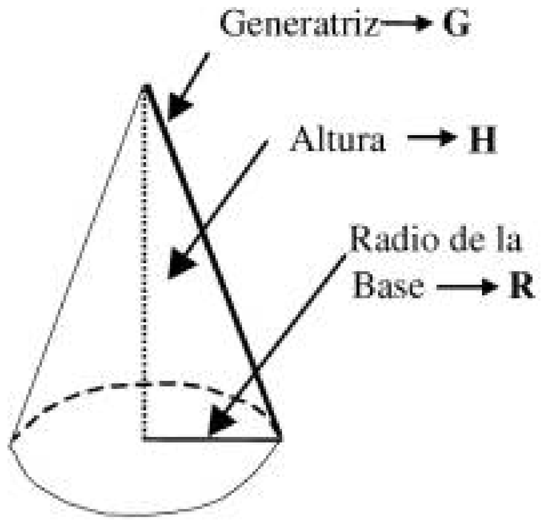
El cono es un caso especial de una pirámide de base circular

Sus fórmulas son similares a las de cualquier pirámide

$$\text{Área Lateral} = \pi \cdot R \cdot G$$

$$\text{Área Total} = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3}$$



❑ CILINDRO

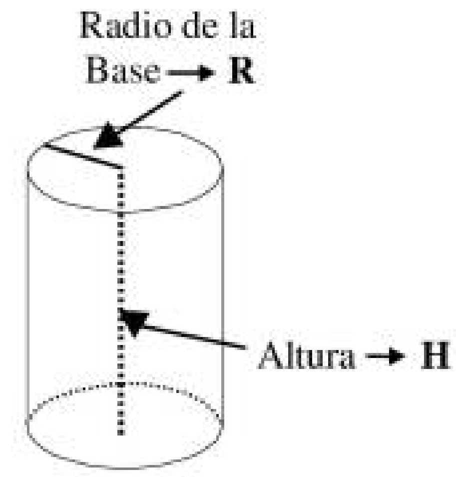
El cilindro es un caso especial de un prisma de base circular

Acá van sus fórmulas:

$$\text{Área Lateral} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H$$

$$\text{Área Total} = 2\pi \cdot R \cdot H + 2\pi \cdot R^2$$

$$\text{Volumen} = \pi \cdot R^2 \cdot H$$



Veamos un ejemplo: Calcular el área lateral y total, así como también el volumen de en cono de 4 cm de radio y 5 cm de generatriz.

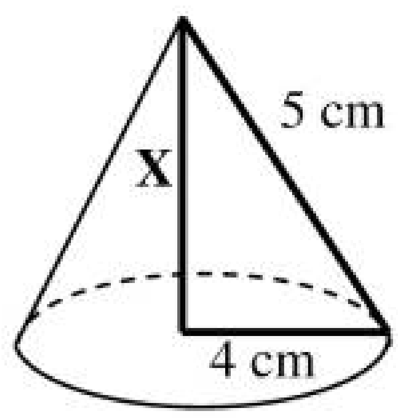
Primero calculamos el Área Lateral: $\textbf{Área Lateral} = \pi \cdot R \cdot G = 3{,}14 \cdot 4cm \cdot 5cm = 62{,}8cm^2$

Ahora el Área de la base: $\textbf{Área Base} = \pi \cdot R^2 = 3{,}14 \cdot (4cm)^2 = 50{,}24cm^2$

Y el Área Total: $\textbf{Área Total} = Area\ Lat + Area\ Base = 62{,}8cm^2 + 50{,}24cm^2 = 113{,}04cm^2$

Para calcular el volumen necesitamos la altura.. Y la vamos a calcular usando el teorema de Pitágoras.

$$\mathbf{X}^2 + (4\text{cm})^2 = (5cm)^2$$
$$\mathbf{X}^2 + 16\text{cm}^2 = 25\text{cm}^2$$
$$\mathbf{X}^2 = 25\text{cm}^2 - 16\text{cm}^2$$
$$\mathbf{X} = \sqrt{9\text{cm}^2}$$
$$\mathbf{X} = 3cm$$



Y Ahora que ya tenemos la altura del cono, vamos a calcular el volumen:

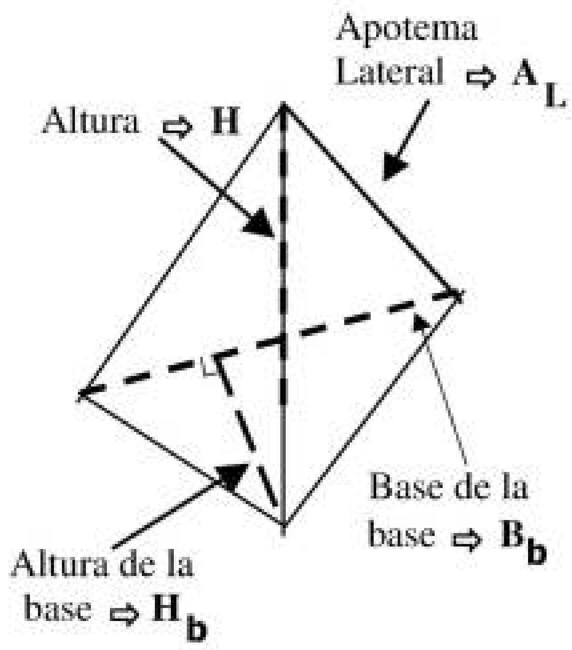
$$\textbf{Volumen} = \frac{A_b \cdot H}{3} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} = \frac{3{,}14 \cdot (4cm)^2 \cdot 3cm}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 16cm^2 \cdot 3cm}{3} = 50{,}24cm^3$$

Más Fórmulas:

Si bien, ya vimos fórmulas generales para los cuerpos según sean prismas o pirámides. También podemos utilizar estas fórmulas para los cuerpos mas comunes que ya están desarrolladas en función de los elementos de cada cuerpo en particular.

Pirámides mas comunes:

Pirámide Base triangular

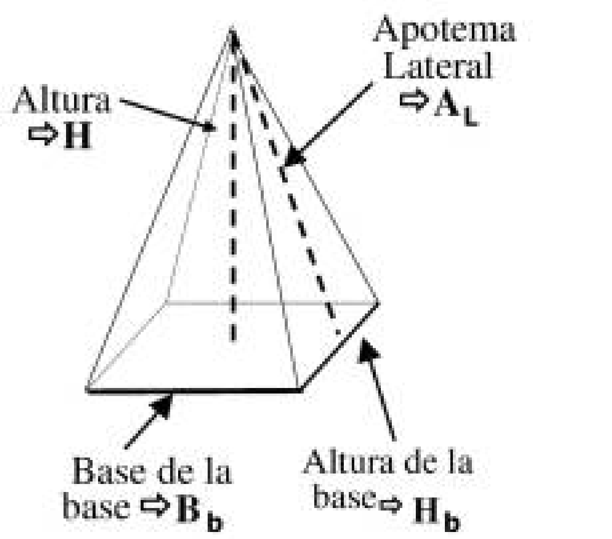


$$\textbf{Área Lateral} = \frac{P_b \cdot A_L}{2}$$

$$\textbf{Área Total} = \text{Área Lat} + \frac{H_b \cdot B_b}{2}$$

$$\textbf{Volumen} = \frac{\left(\frac{H_b \cdot B_b}{2}\right) \cdot H}{3}$$

Pirámide Base Cuadrangular

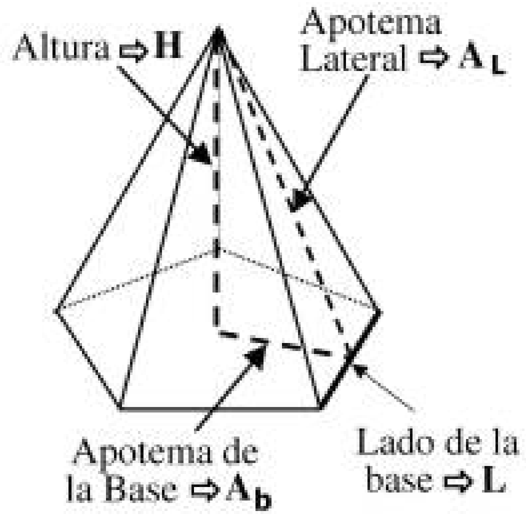


$$\textbf{Área Lateral} = \frac{(2B_b + 2H_b) \cdot A_L}{2}$$

$$\textbf{Área Total} = \text{Área Lat} + H_b \cdot B_b$$

$$\textbf{Volumen} = \frac{H_b \cdot B_b \cdot H}{3}$$

Pirámide Base Pentagonal



$$\textbf{Área Lateral} = \frac{5\, L \cdot A_L}{2}$$

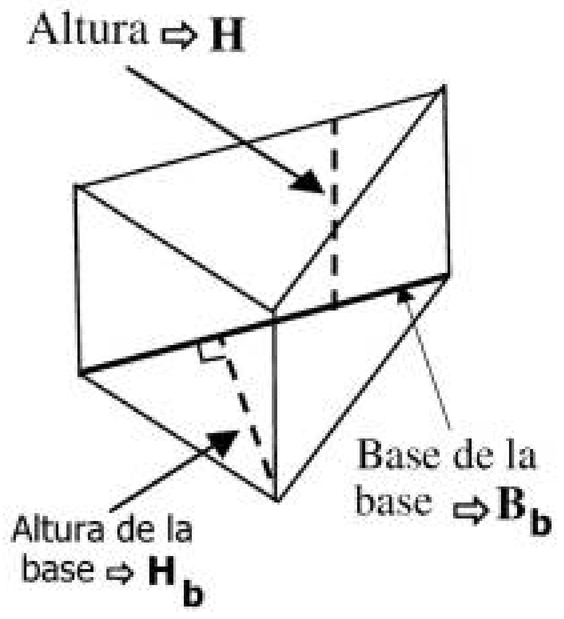
$$\textbf{Área Total} = \text{Área Lat} + \left(\frac{5\, L \cdot A_b}{2}\right)$$

$$\textbf{Volumen} = \frac{\left(\frac{5\, L \cdot A_b}{2}\right) \cdot H}{3}$$

Si la base fuera un polígono de más lados, por ejemplo un hexágono, en lugar de 5 debemos poner 6, o el número de lados que corresponda.

Prismas más comunes:

Prisma de base triangular

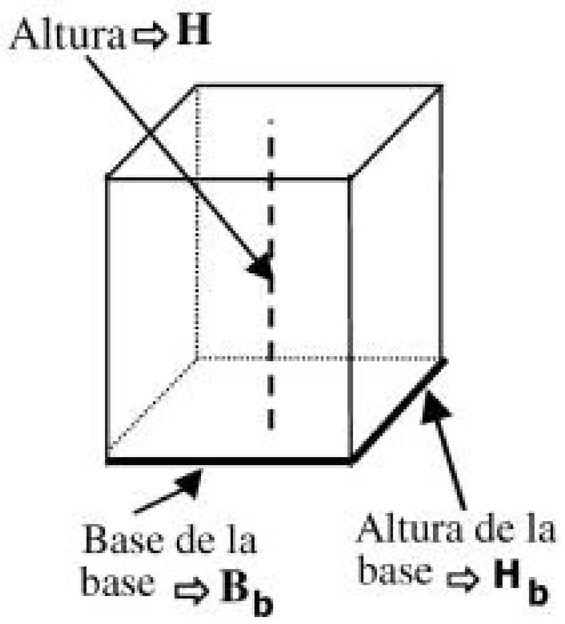


$$\textbf{Área Lateral} = P_b \cdot H$$

$$\textbf{Área Total} = \text{Área Lat} + H_b \cdot B_b$$

$$\textbf{Volumen} = \left(\frac{H_b \cdot B_b}{2}\right) \cdot H$$

Prisma de base Cuadrangular

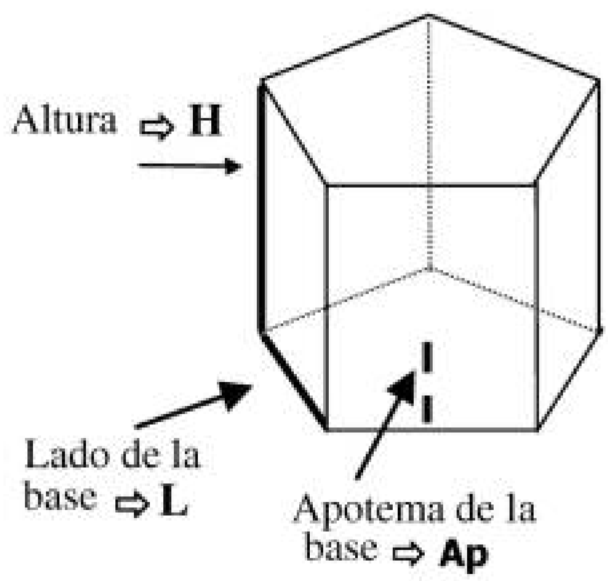


$$\textbf{Área Lateral} = (2B_b + 2H_b) \cdot H$$

$$\textbf{Área Total} = \text{Área Lat} + 2 \cdot H_b \cdot B_b$$

$$\textbf{Volumen} = H_b \cdot B_b \cdot H$$

Prisma de base Pentagonal



$$\textbf{Área Lateral} = 5\, L \cdot H$$

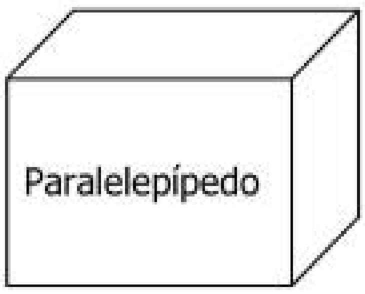
$$\textbf{Área Total} = \text{Área Lat} + 5\, L \cdot A_b$$

$$\textbf{Volumen} = \left(\frac{5\, L \cdot Ap}{2}\right) \cdot H$$

Completar Los Cuadros

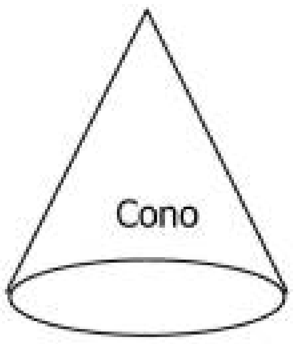
1)

Radio	Altura	Area Lateral	Area Total	Volúmen
2 cm	10 cm			
5 cm	6 cm			
3 cm	4 cm			
5 cm	20 cm			
4 cm	6 cm			
8 cm	7 cm			
8 cm	15 cm			



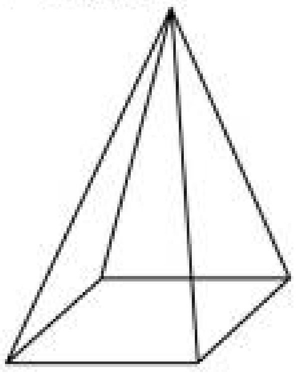
Base					
Base	Altura	Altura	Area Lateral	Area Total	Volúmen
2 cm	10 cm	5 cm			
5 cm	6 cm	4 cm			
3 cm	4 cm	1 cm			
5 cm	20 cm	2 cm			
4 cm	6 cm	2 cm			
8 cm	7 cm	3 cm			
8 cm	15 cm	10 cm			

3)



Radio	Generatriz	Altura	Area Lateral	Area Total	Volúmen
2 cm	10 cm	5 cm			
5 cm	6 cm	4 cm			
3 cm	4 cm	1 cm			
5 cm	20 cm	2 cm			
4 cm	6 cm	2 cm			
8 cm	7 cm	3 cm			
8 cm	15 cm	10 cm			

4) Pirámide

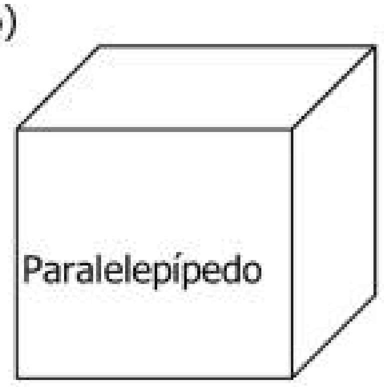


Base						
Base	Altura	Altura	Ap. lateral	Area Lateral	Area Total	Volúmen
2 cm	10 cm	5 cm	5 cm			
5 cm	6 cm	4 cm	4 cm			
3 cm	4 cm	1 cm	1 cm			
5 cm	20 cm	2 cm	2 cm			
4 cm	6 cm	2 cm	2 cm			
8 cm	7 cm	3 cm	3 cm			
8 cm	15 cm	10 cm	10 cm			

5)

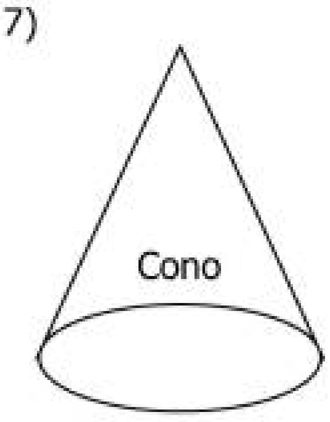
Radio	Altura	Area Lateral	Area Total	Volúmen
8 cm	cm	100,53 cm²	cm²	cm³
6 cm	cm	263,89 cm²	cm²	cm³
5 cm	cm	cm²	345,58 cm²	cm³
3 cm	cm	cm²	cm²	28,27 cm³
cm	2 cm	12,57 cm²	cm²	cm³
cm	3 cm	150,80 cm²	cm²	cm³
cm	5 cm	cm²	cm²	392,70 cm³

6)



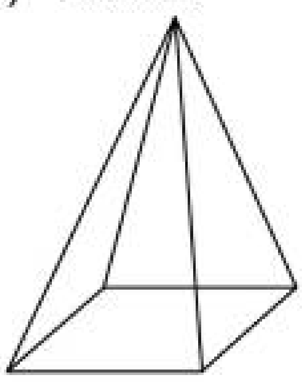
Base					
Base	Altura	Altura	Area Lateral	Area Total	Volúmen
	5 cm	6 cm	cm²	cm²	150,00 cm³
	6 cm	8 cm	cm²	cm²	192,00 cm³
8 cm		5 cm	cm²	cm²	40,00 cm³
9 cm		2 cm	cm²	cm²	36,00 cm³
7 cm	3 cm		cm²	cm²	21,00 cm³
	4 cm	4 cm	40,00 cm²	cm²	cm³
2 cm		8 cm	64,00 cm²	cm²	cm³

7)



Radio	Generatriz	Altura	Area Lateral	Area Total	Volúmen
cm	3 cm	9 cm	cm^2	cm^2	37,70 cm^3
cm	6 cm	1 cm	113,10 cm^2	cm^2	cm^3
cm	4 cm	3 cm	62,83 cm^2	cm^2	cm^3
8 cm	cm	7 cm	25,13 cm^2	cm^2	cm^3
4 cm	cm	cm	62,83 cm^2	cm^2	100,53 cm^3
3 cm	6 cm	cm	cm^2	cm^2	37,70 cm^3
1 cm	cm	cm	cm^2	15,71 cm^2	2,09 cm^3

8) Pirámide



Base						
Base	Altura	Altura	Apotema lateral	Area Lateral	Area Total	Volúmen
cm	5 cm	cm	5 cm	50,00 cm^2	cm^2	50,00 cm^3
cm	2 cm	4 cm	4 cm	32,00 cm^2	cm^2	cm^3
4 cm	cm	cm	1 cm	5,00 cm^2	cm^2	10,67 cm^3
1 cm	cm	2 cm	2 cm	12,00 cm^2	cm^2	cm^3
2 cm	cm	4 cm	cm	16,00 cm^2	28,00 cm^2	cm^3
cm	1 cm	1 cm	cm	12,00 cm^2	15,00 cm^2	cm^3
5 cm	2 cm	cm	10 cm	cm^2	cm^2	10,00 cm^3

9) Calcular el volumen de una esfera de 3 cm de radio

10) Calcular, en cm^3, el volumen de una pirámide de base cuadrangular si sabemos que el lado de la base mide 20 mm y la altura de la pirámide mide 0,03 metros

11) Calcular el volumen de un prisma de base hexagonal sabiendo que el perímetro de la base vale 28 cm , la apotema de la base es 4 cm y la altura del prisma 10 cm

12) ¿Cuánto vale la altura de una pirámide de base triangular cuyo volumen es 200 cm^3 y el área de la base es 50 cm^2 ?

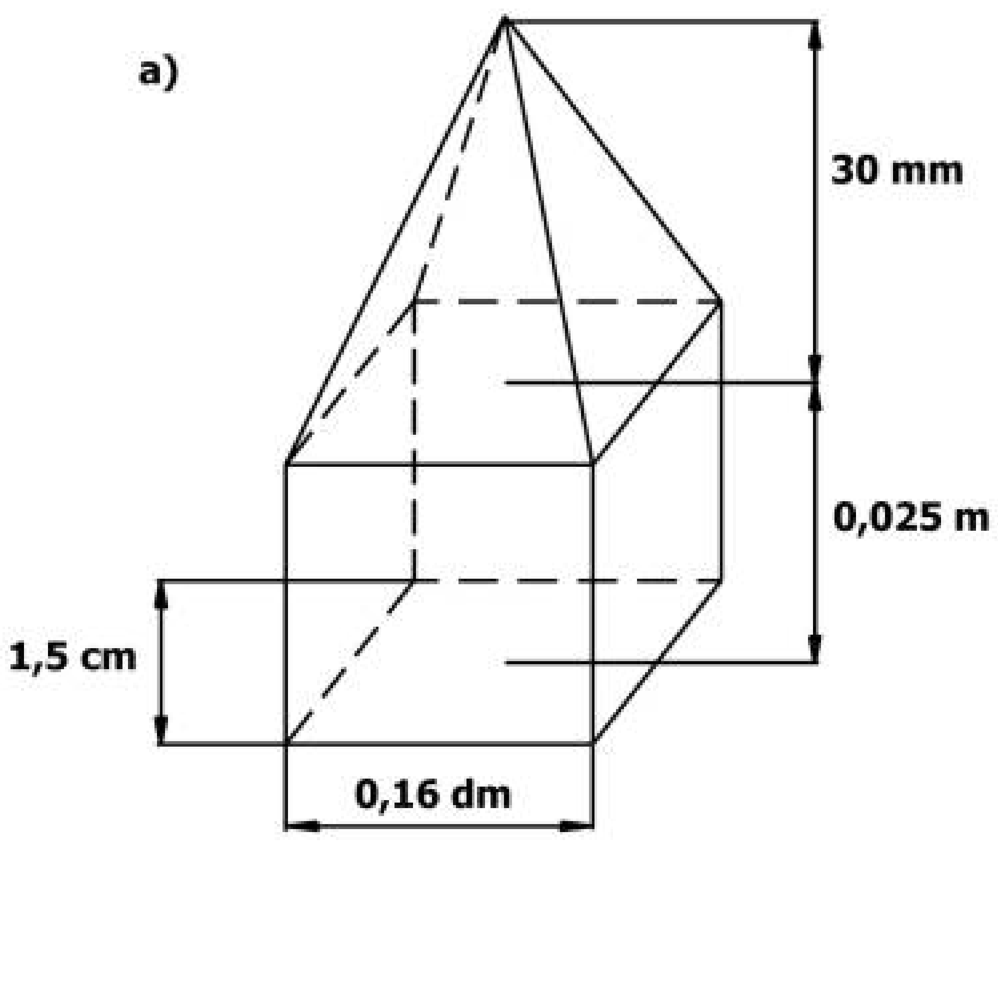
13) Calcular, en cm^3 el volumen de una pirámide de base pentagonal sabiendo que los lados de la base miden 0,06 metros, el apotema de la base mide 40 mm y la altura de la pirámide mide el triple del apotema de la base.

14) Calcular en cm^3, el volumen de un cono si la altura mide 0,21 metros y el radio de la base mide la tercera parte de la altura

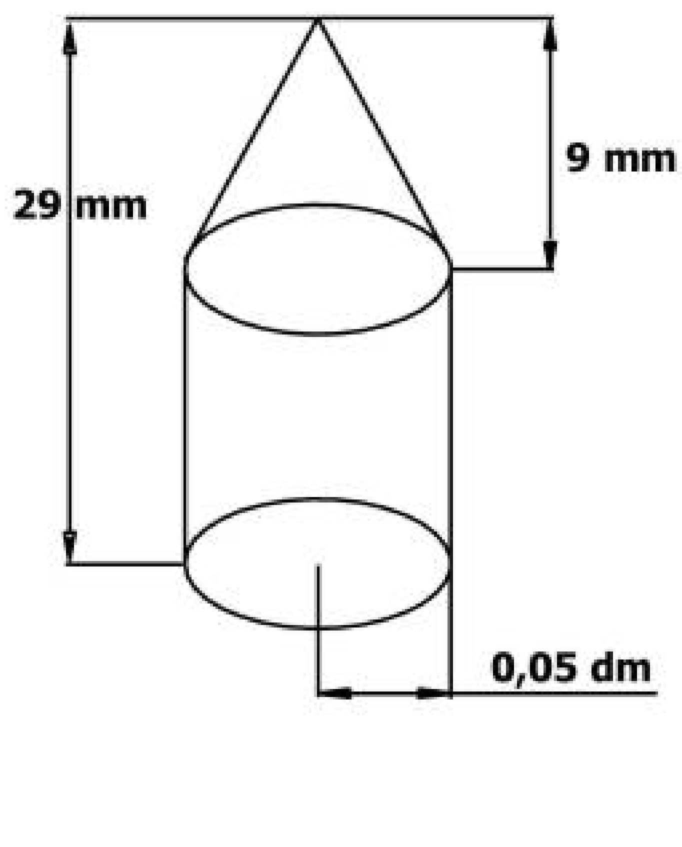
15) Averiguar la altura de un prisma cuya base es un rombo sabiendo que el volumen del prisma es 3 dm^3 y que las diagonales del rombo miden D = 40 cm y d = 15 cm.

16) Calcular el volumen de los siguientes cuerpos en mm^3

a)



b)



Ejercicios de Aplicación:

17) La pileta de la casa de Melisa mide 3,2 metros de ancho por 5,6 metros de largo y tiene una profundidad de 2,2 metros y la pileta de la casa de María tiene 2,1 metros de ancho por 6 metros de largo y su profundidad es de 3 metros. ¿Cuál de las dos piletas es mas grande?

18) Martín quiere volcar el contenido de 3 botellas de gaseosa de 2,25 litros en una jarra cilíndrica que tiene 30 cm de altura, el radio de la base de la jarra es de 9 cm. Nicolás dice que la jarra es chica y que no va a entrar toda la gaseosa, pero Martín está seguro que sí. ¿Quién tiene razón? Nota: 1 litro es lo mismo que 1 dm^3

19) Calcular el volumen de un cubo si se sabe que el perímetro de la base es 8cm.

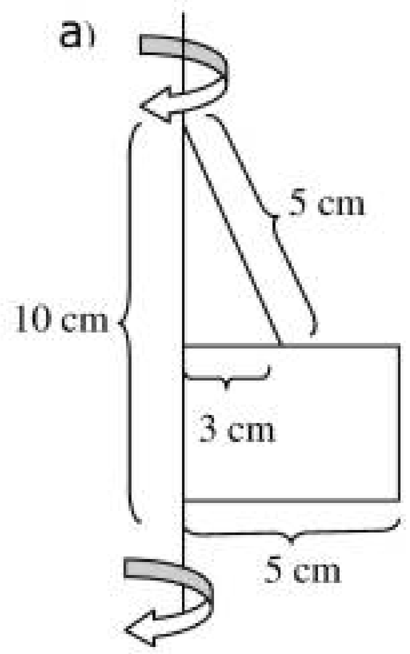
20) Calcular el volumen de una pirámide de base cuadrangular si se sabe que la apotema lateral de la pirámide es de 10 cm y la altura vale 8cm.

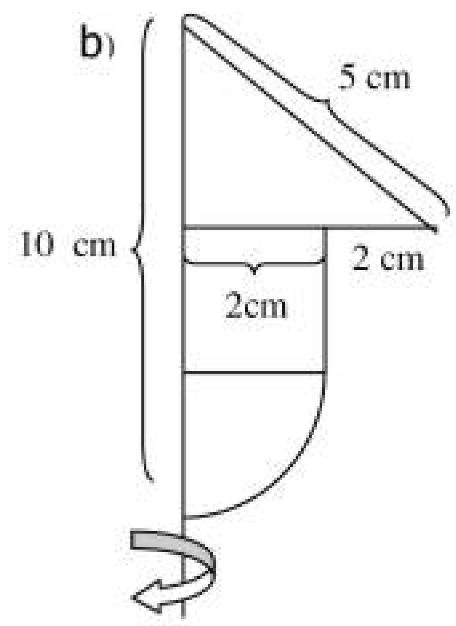
21) Calcular el volumen , en dm^3, de una pirámide de base hexagonal sabiendo que el lado de la base mide la mitad de la altura y la altura mide las tres quintas partes del radio de una circunferencia de 628 cm de perímetro.

22) Calcular el radio de un cilindro cuyo volumen es 785 cm^3 y su altura mide 10 cm.

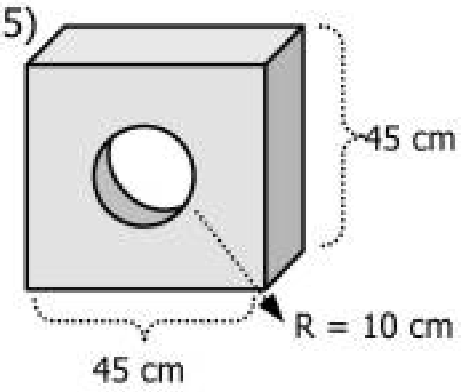
23) Calcular el volumen de un cascarón esférico cuyo radio menor es 5cm y el mayor es 6 cm.

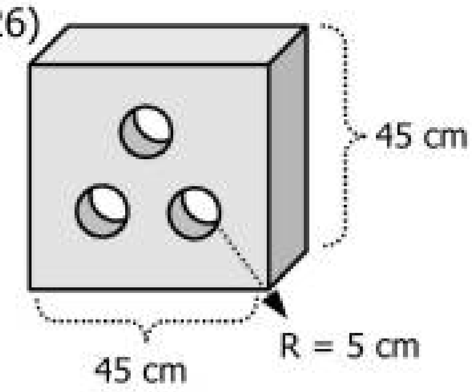
24) Dibujar los cuerpos que se forman al producir el giro a 360° y calcular su volumen:

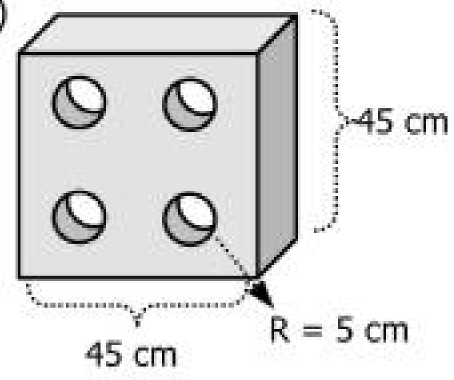


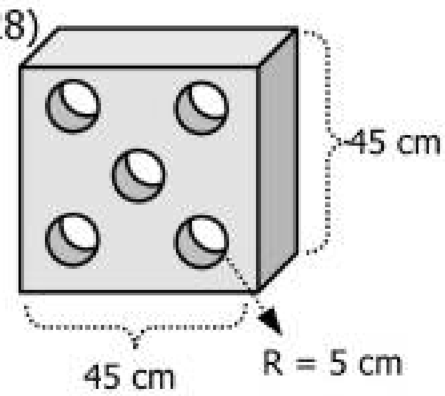


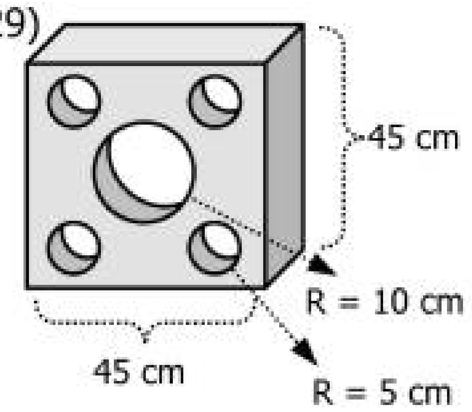
Calcular el Volumen de los siguientes cuerpos: (Todos los cuerpos tienen **4 cm de profundidad**)

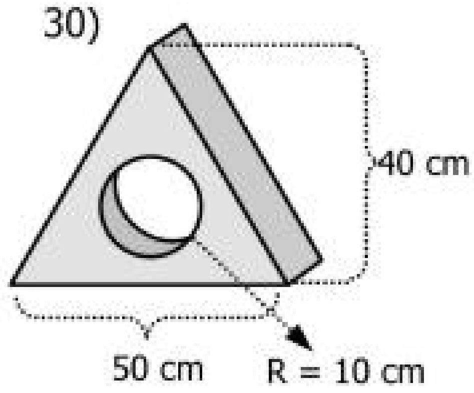
25)


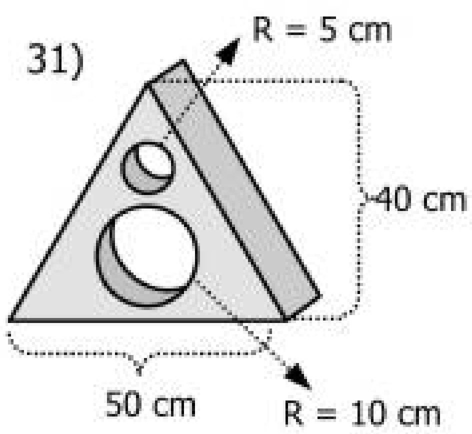
26)


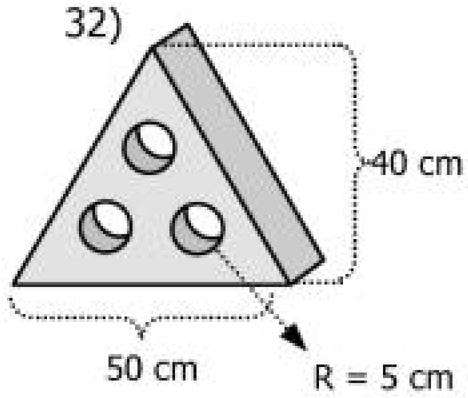
27)


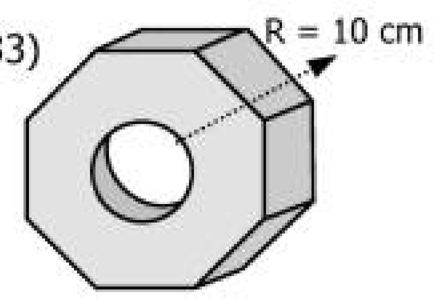
28)


29)


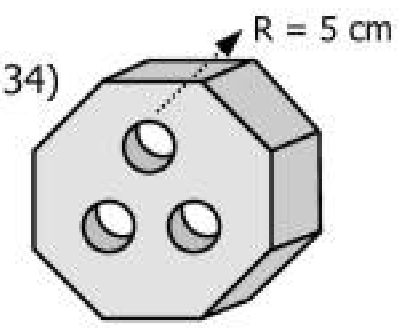
30)


31)


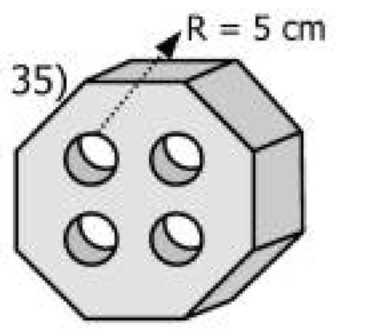
32)


33)


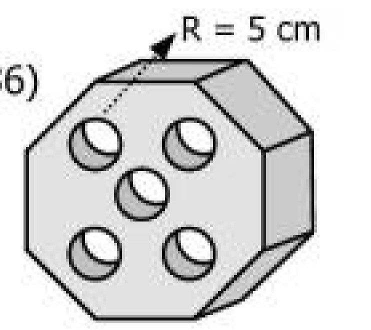
Lado Octógono = 24 cm
Apotema = 29 cm

34)


Lado Octógono = 24 cm
Apotema = 29 cm

35)


Lado Octógono = 24 cm
Apotema = 29 cm

36)


Lado Octógono = 24 cm
Apotema = 29 cm

Problemas para pensar un poco:

37) Martín tiene que llenar un cubetera para preparar 12 cubitos de hielo, los cubitos son efectivamente cubos de 3 cm de arista. Para ello tiene un vaso con capacidad de 250 cm^3 y una taza con capacidad de 300 cm^3 ¿Le alcanza con el vaso o con la tazo para llenar la cubetera con agua?

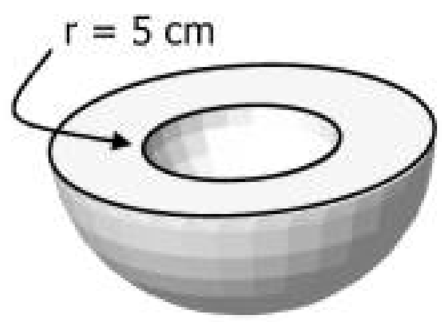
38) En una fiesta de cumpleaños les sirven a los chicos gaseosa en vasos con forma cilíndrica de 3 cm de radio y 10 cm de altura. Para que nadie vuelque la gaseosa se los llenan solo hasta el 75% de su volumen. A su vez sabemos que a la fiesta vienen 30 chicos y que a cada chico le servirán dos veces su vaso. Teniendo en cuenta que cada litro de gaseosa equivale a 1000cm^3 ¿Cuántas botellas de 2,25 Litros debemos comprar para que alcance la gaseosa para todos los chicos?

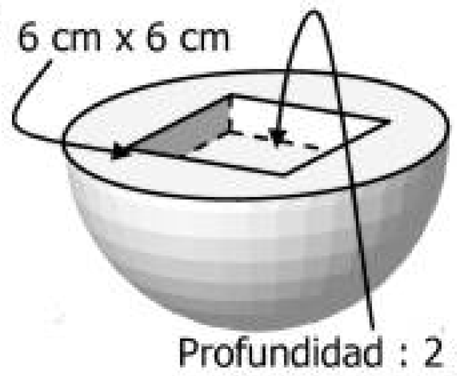
Los siguientes cuerpos son adornos que hace un artesano (con algunos moldes) en masilla. Hay 4 tipos o clases de adornos en la siguiente lista:

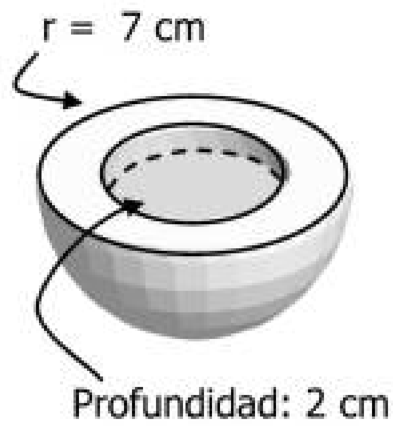
1. Las semiesferas ahuecadas (Radio de la semiesfera ahuecada: 10 cm)
2. Los prismas ahuecados (Dimensiones del prisma ahuecado: 15 cm x 15 cm x 4 cm)
3. Los cilindros ahuecados (Dimensiones del cilindro ahuecado: R = 8 cm L = 15 cm)
4. Los cono ahuecados (Dimensiones del cono: R = 8 cm H = 15 cm G = 17 cm)

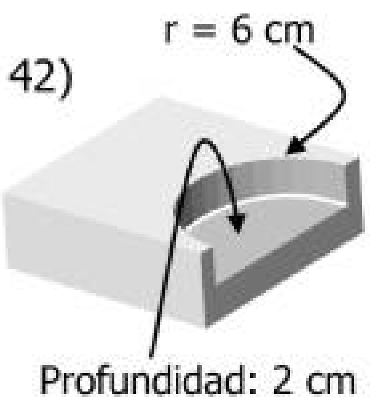
a) Calcular la cantidad de cm^3 de material que necesita para cada cuerpo

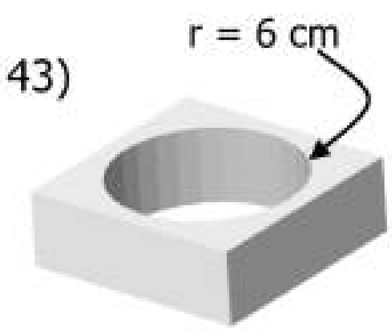
b) Calcular los cm^2 de superficie que tiene que pintar en cada cuerpo. *(Nota: Este punto "b" es más difícil, recomendado para los alumnos más "despiertos" del curso)*

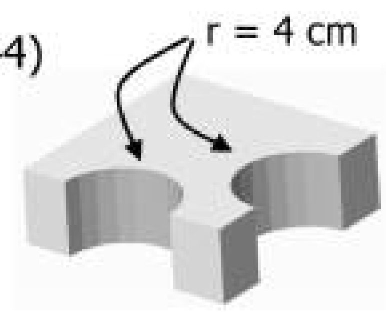
39)


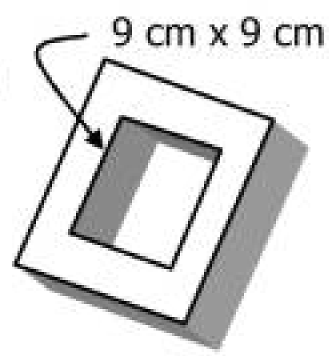
40)


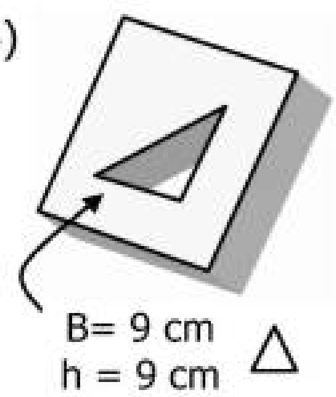
41)


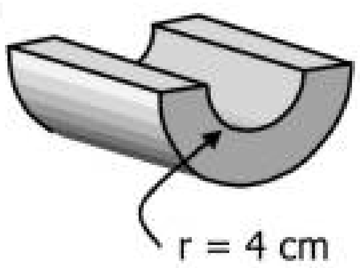
42)


43)


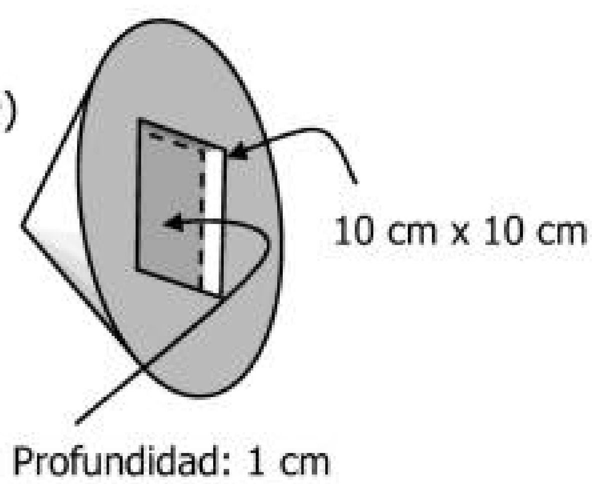
44)


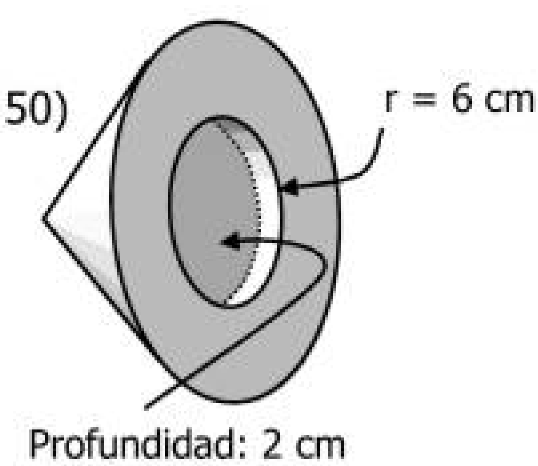
45)


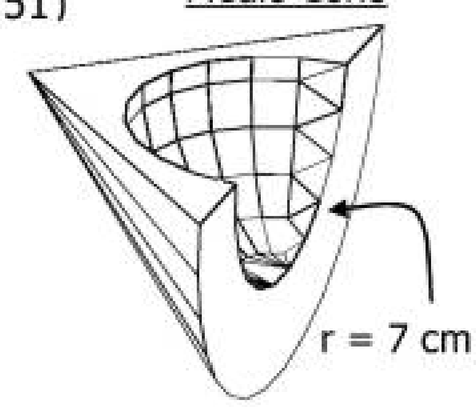
46)


47)


48)


49)


50)


51) Medio Cono


Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Sistema Sexagesimal

Número de Tema: **24**

Área: **Matemática**

Que es el Sistema Sexagesimal?

Es un *Sistema que reemplaza al Sistema decimal para definir algunas magnitudes como las angulares*, en este sistema la parte no entera se divide en 60 partes. Su uso más común es en las magnitudes de tiempo o en las angulares.

Por ejemplo: ¿Cómo expresaríamos un período de un cuarto de hora?

En el **Sistema decimal** $\frac{1}{4}$ de hora, serían: **0,25 Horas** (lo escribimos con decimales)

En el **Sistema Sexagesimal** serían: 0 horas 15 minutos 0 segundos | **0 Hs 15′ 0″**

Como cada hora tiene 60 minutos, por lo tanto un cuarto de hora es la cuarta parte de 60 minutos que da por resultado: 15 minutos. $\Rightarrow \frac{1}{4}$ X 60 minutos = 15 minutos

ν Aplicación del Sistema Sexagesimal en las magnitudes angulares

En el Sistema Sexagesimal, no se usan comas. Para anotar fracciones de entero se crearon en este Sistema, los minutos y los segundos. (Solo tendría sentido usar comas para expresar una fracción de segundo aunque no se suele utilizar tampoco)

OPERACIONES CON GRADOS MINUTOS Y SEGUNDOS

SUMA : Hay que empezar de **derecha a izquierda**, sumando primero los segundos, luego los minutos y por último los grados. Hay que tener en cuenta que *en el resultado final no puede haber mas de 60 minutos ni mas de 60 seg.*

Ejemplo:

+	15 º	26 ´	38 ´´
	25 º	28 ´	54 ´´
	40 º	54 ´	92 ´´
		+ 1 ´	2 60 ´´
		55 ´	32 ´´

Como 92 ´´ es mayor que 60, le resto 60 ´´ y le sumo 1 ´ a la columna de los minutos

Resultado final | 40º 55′ 32″

| Como 1 minuto son 60 segundos, 92 segundos es lo mismo que 1 minuto + 32 segundos, entonces lo que hicimos fue sacarle 60 segundos (1 minuto) a los 92 ´´ y se lo sumamos a la parte de los minutos.

Ahora, un ejemplo más difícil: ⇒

En este ejemplo vemos como a los segundos hay que restarle 60″ 2 VECES porque después de restarle 60″ la primera vez siguen quedando todavía 71″

Por otro lado, a los minutos también hay que restarle 60 porque quedan 98′ por lo tanto como resto 60 minutos, después sumo un grado.

	55 º	45 ´	45 ´´
+	38 º	20 ´	28 ´´
	26 º	31 ´	58 ´´
	119 º	96 ´	131 ´´
	+ 1 º	+ **2** ´	-60 ´´
	120º	98 ´	71 ´´
		- 60 ´	-60 ´´
		38 ´	11 ´´

***Como resto* 2 veces** 60″
Sumo **2′**

Último ejemplo:

+	12 º	05 ´	55 ´´
	31 º	11 ´	59 ´´
	137 º	26 ´	51 ´´
	33 º	7 ´	54 ´´
	213 º	49 ´	219 ´´
		+3	-60 ´´
		52 ´	159 ´´
			-60 ´´
			99 ´´
			-60 ´´
			39 ´´

Como le restamos 60′ ′ **3 veces**, tenemos que **sumar 3 minutos** a la columna de los minutos.

RESTA: Hay que empezar **de derecha a izquierda**, como en la suma, restando primero los segundos, **si los segundos no me alcanzan**, tengo que **"pedir prestado un minuto"** a la columna de al lado (y ese minuto lo escribo como **60 segundos)**.

EJEMPLO: –

38º 40′ 26″
26º 31′ 58″

Como los segundos no me alcanzan, tengo que "*PEDIR PRESTADO 1 MINUTO"*

38 º 40' 26"
2 1' + 60"
38 º 39' 86"

A la columna de los minutos le saco 1 minuto y le sumo 60 segundos a la columna de los segundos.

Y la cuenta ahora queda así: –

38º 39′ 86″
26º 31′ 58″
12º 08′ 28″

Para restar el proceso es el mismo que en la suma: Comienzo restando los segundos entre sí, luego los minutos y por último los grados.

MULTIPLICACION : Hay que multiplicar **de derecha a izquierda**, como en la suma y la resta. Primero multiplico los segundos, luego los minutos y luego los grados. Al final de la multiplicación hay que verificar, como en la suma, que no queden más de 60 segundos ni más de 60 minutos, si quedan más de 60 segundos o minutos, hay que hacer lo mismo que con la suma.

EJEMPLOS:

119 º 12 ´ 46´´
x 3
357 º 36 ´ 138´´
- 60´´
357 º 36 ´ 78´´
- 60´´
357 º 36 ´ 18´´
+ 2 ´
357 º 38 ´ 18´´

Multiplico a los grados, a los minutos y a los segundos por 3

Le resto dos veces 60´´ y sumo 2´

15 º 31 ´ 18´´
x 4
60 º 124 ´ 72´´
- 60″
60 º 124 ´ 12´´
- 60′
60 º 64 ´ 12´´
- 60′
60 º 04 ´ 12´´
+2 º +1′
62 º 5 ´ 12´´

Multiplico a todo por 4

Sumo 1′ porque resté 1 VEZ 60 ″

Sumo 2º porque resté 2 VECES 60 minutos

DIVISIÓN: Hay que empezar por los grados, luego seguir con los minutos y por último con los segundos. Hay que hacer como si fueran tres divisiones por separado (una para los grados otra para los minutos y otra para los segundos)

Hay que tener en cuenta que:

- Cada grado que sobra, se suma con los minutos (Si sobran por ejemplo dos grados le sumo 120′ a los minutos)
- Cada minuto que sobra, pasa a sumarse con los segundos (Si sobraran 3 minutos le sumo 180″ a los segundos)

Ejemplo:

119 º 10 ´ 46´´ | 3
2 º +120´ | 39º
130´

Estos 2º que sobraron se los tengo que sumar a los minutos como 120´

Empezamos con los GRADOS:
119 4 3 = 39
y Sobran 2º

119 º 10 ´ 46´´ | 3
2 º +120´ | 39º 43′
130´
1´ +60´´
106´´

Este 1′ que sobra se lo tengo que sumar a los segundos como 60″

Seguimos con los MINUTOS:
130 4 3 = 43
Sobra 1º

119º 10′ 46″ | 3
2º +120′ | 39 º 43′ 35″
130′
1′ +60″
106″
1″

Los SEGUNDOS:
106 4 3 = 35
Sobra 1″

Y el resultado final es 39º 43′ 35″
Y sobra 1″ (Resto)

by Dal-Or para TARINGA!

Realizar las siguientes Operaciones:

SUMA	***RESTA***	***PRODUCTO***	***DIVISION***	
1) + 63° 02' 19" 26° 55' 55"	11) – 63° 02' 19" 26° 55' 55"	21) 63° 02' 19" x 2	31) 63° 02' 19"	2
2) + 135° 52' 50" 97° 52' 50"	12) – 135° 52' 50" 97° 52' 50"	22) 32° 12' 15" x 3	32) 135° 52' 50"	3
3) + 70° 41' 33" 26° 41' 12"	13) – 70° 41' 33" 26° 41' 12"	23) 70° 41' 33" x 4	33) 70° 41' 33"	4
4) + 93° 04' 26" 15° 25' 26"	14) – 93° 04' 26" 15° 25' 26"	24) 14° 12' 21" x 5	34) 93° 04' 26"	5
5) + 55° 18' 28" 25° 18' 23"	15) – 55° 18' 28" 25° 18' 23"	25) 12° 56' 41" x 6	35) 55° 18' 28"	6
6) + 88° 08' 43" 66° 08' 40"	16) – 88° 08' 43" 66° 08' 40"	26) 88° 08' 43" x 2	36) 88° 08' 43"	2
7) + 49° 19' 32" 22° 45' 32"	17) – 49° 19' 32" 22° 45' 32"	27) 49° 19' 32" x 3	37) 49° 19' 32"	3
8) + 121° 58' 32" 25° 56' 45"	18) – 121° 58' 32" 25° 56' 45"	28) 42° 12' 51" x 4	38) 121° 58' 32"	4
9) + 91° 10' 35" 55° 45' 44"	19) – 91° 10' 35" 55° 45' 44"	29) 33° 35' 37" x 5	39) 91° 10' 35"	5
10) + 127° 13' 41" 120° 25' 06"	20) – 127° 13' 41" 120° 25' 06"	30) 21° 25' 57" x 6	40) 127° 13' 41"	6

Calcular:

41) El triple de 42º 21′ 22″ menos 12º 41′ 15″
42) La cuarta parte de 68º 24′ 12″ mas 13º 11′ 10″
43) La mitad del triple de 17º 15′ 36″
44) La tercera parte del doble de 74º 15′ 44″
45) El doble de la quinta parte de 152º 22′ 35″
46) El doble de la quinta parte del triple de 64º 12′ 55″

Resolver las siguientes ecuaciones con ángulos:

47) $15^\circ\, 25' + 2 \cdot \mathbf{x} = 98^\circ\, 23'\, 40''$
48) $18^\circ\, 20'\, 13'' + 3 \cdot \mathbf{x} = 72^\circ\, 28'\, 4''$
49) $\mathbf{x} - 12^\circ\, 15'\, 31'' = 40^\circ\, 11'\, 27''$
50) $\mathbf{x} + 73^\circ\, 34'\, 22'' = 2 \cdot 52^\circ\, 14'\, 38''$
51) $9^\circ\, 11'\, 10'' + \mathbf{x} = 98^\circ\, 23'\, 40'' : 4$
52) $\mathbf{x} + 42^\circ\, 13'\, 12'' = 3 \cdot 35^\circ\, 18'\, 11''$
53) $58^\circ\, 21'\, 18'' : 3 = 12^\circ\, 28'\, 3'' + \mathbf{x}$
54) $76^\circ\, 51'\, 28'' : 4 = 10^\circ\, 18'\, 26'' + 2\,\mathbf{x}$
55) $\mathbf{x} + 13^\circ\, 41'\, 24'' = 3 \cdot 10^\circ\, 15'\, 2''$
56) $2^\circ\, 14'\, 17'' + 3\,\mathbf{x} = 84^\circ\, 19'\, 56'' : 4$

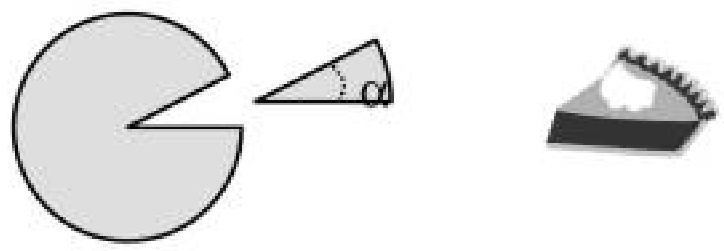
Completar el cuadro:

	Angulo	Cuarta parte	Tres quintas partes	Doble
57)	13º 15 ' 16 "			
58)	53º 12 ' 41 "			
59)	25º 41 ' 02 "			
60)	84º 12 ' 45 "			
61)				135º 55 ' 52 "
62)				56º 14 ' 28 "
63)				69º 39 ' 14 "
64)		4º 04 ' 04 "		
65)		6º 56 ' 56 "		
66)		20º 26 ' 41 "		

Algunas ecuaciones con ángulos:

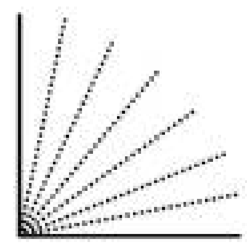
67) Hallar un ángulo que sumado a 15º 17′ de por resultado el doble de 19º 23′
68) Hallar un ángulo que si se le restan 25º 14′ y se multiplica este resultado por 3, la cuenta de 124º16′
69) Hallar un ángulo que sumado al doble de 13°26′15″ de 90°
70) Hallar un ángulo que sea igual a la tercera parte de la diferencia entre 68° 12′ 23″ y 45° 27′ 31″
71) Hallar el triple del ángulo que sumado a 60° da 76°23′53″
72) Hallar la cuarta parte del ángulo que multiplicado por 6 da 126° 54′ 36″
73) Hallar el ángulo que dividido por 5 de el mismo resultado que si multiplico por 6 a 13° 45′ 22″
74) Si a un ángulo le sumo 30º 20′ 12″ y al resultado lo divido por 11 obtengo 3º 58′ 35″ ¿De qué ángulo se trata?

75) La mamá de marina corta su torta de cumpleaños en 25 porciones. ¿Cuál es el ángulo que forma cada porción?



76) Si cortamos una pizza en 8 porciones ¿Cuál es el ángulo de cada porción?

77) Si dividimos el ángulo recto que forman dos paredes en 7 partes iguales ¿Cuál sería el ángulo de cada parte en que dividimos la zona?



Dados los ángulos "A" , "B" , "C" y "D"
Resolver los siguientes cálculos combinados con ángulos
A = 63° 02' 50" B = 26° 14' 24" C = 51° 01' 38" D = 25° 17' 36"

78) A + B + C =
79) A + D −C =
80) A + 2·B =
81) A −2·B =
82) A + 2·B −C =
83) B/3 + D =
84) 2·B + 3·D =
85) 2·A +2·B−3·C=
86) A −B −D =
87) A −(B−D) =
88) A + B −C −D =
89) A +B−(C−D) =
90) C/2 − B/6 =
91) B/2 + D =
92) B/2 + 3·D =
93) B/3 +C/2 +D/7 =
94) A + C/2 =
95) (A + C) /2 =
96) B + D/3 + B =
97) (B+D) /3 + B =
98) 2·A −C +B −D =
99) 2·(A−C) +B −D =
100) 2·(A−C+B) −D =
101) 2· (A −C + B −D) =
102) 6·A + B −7·C + D/4 =
103) 6·A + B −7·(C + D/4) =
104) 6·A + B−(7·C + D/4) =
105) 6·(A+B) −7·C + D/4 =
106) 3·C −2·A + B + D/4 =
107) 3·C −2·A + (B+D) /4 =
108) 2·A+3·(B/6−C/2)−D/7 =
109) 2·A + 3·B −C/2 −4·D =
110) 5·D + A −3·C + B/2 =
111) C + 3·B −2·A + D/2 =
112) (A+C)/2−(B+D)/3 =
113) A + C/2−(B+D)/3 =
114) (A + D −2·B) /2 + C/3 =
115) A+(C+B) /2 − 2·(D/7+B)=
116) A − (C/2−D)·9 − B/6 =
117) B − (D −B/2 + A/5) =

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

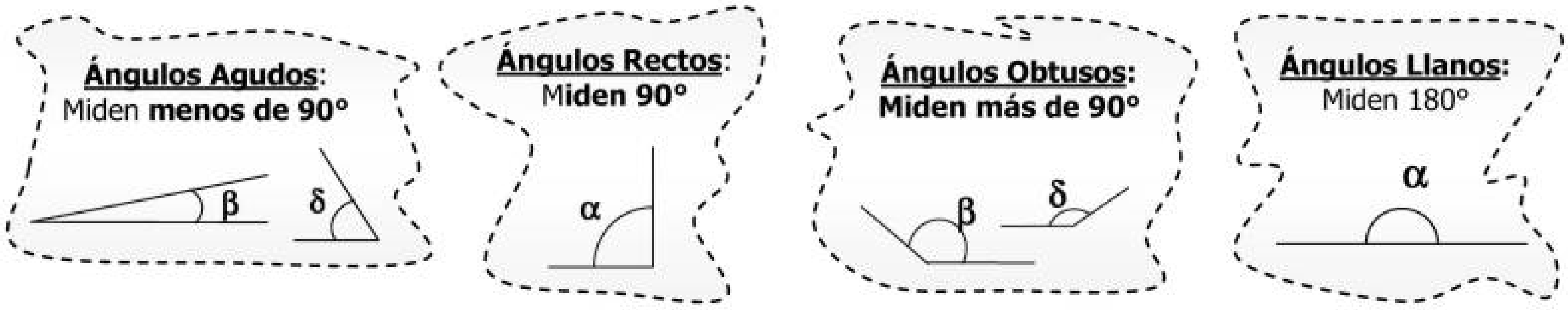
Título del Tema:

Ángulos

Número de Tema: **25**

Área: **Matemática**

CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS



Posiciones Relativas de las rectas:

Vamos a estudiar las posiciones relativas de las rectas en el plano, pero para ello necesitamos primero definir algunos elementos:

Recta: Es una sucesión de infinitos puntos todos alineados entre sí en la misma dirección.
Semirrecta: Es una parte de una recta limitada en un extremo por un punto.
Segmento: Es una parte de una recta limitada en dos extremos por dos puntos.

Importante: Dos rectas en un plano pueden ser según sus posiciones relativas:

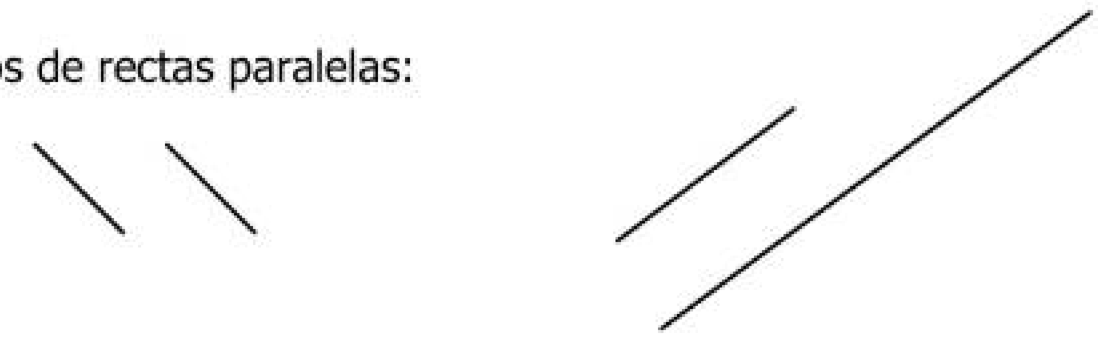
- Rectas Paralelas
- Rectas Perpendiculares
- Rectas Oblicuas

Vamos a estudiar cada una de estas posiciones relativas por separado:

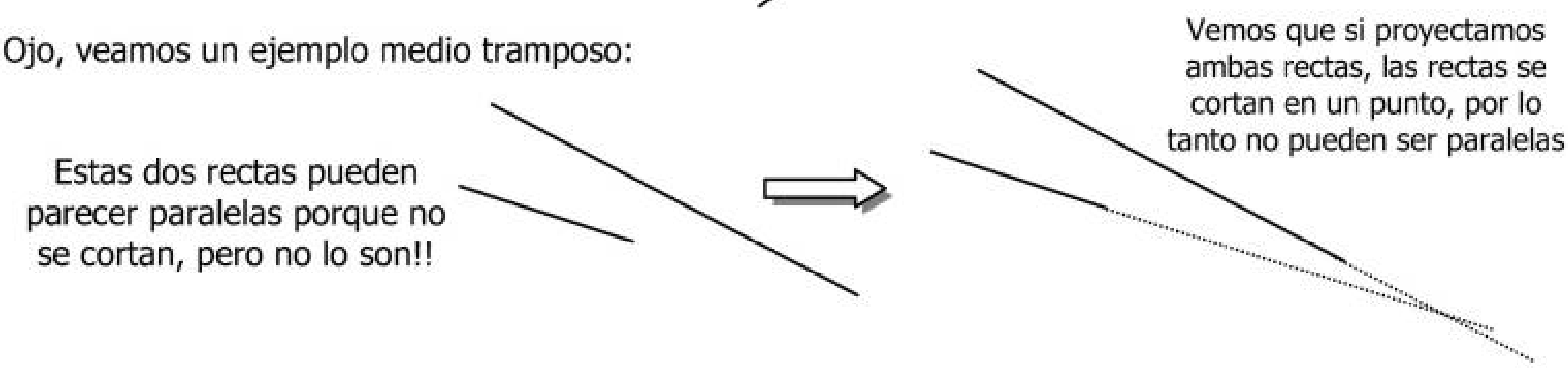
Rectas Paralelas: Dos rectas son paralelas cuando no se cortan o no tienen ningún punto en común.

En otras palabras podemos decir también que, teniendo en cuenta que las rectas no tienen principio ni fin, para saber si dos rectas son paralelas deberíamos imaginarlas proyectadas infinitamente, pero a nuestros objetivos alcanza con observar un tramo finito de una recta para deducir si son paralelas o no lo son.

Ejemplos gráficos de rectas paralelas:

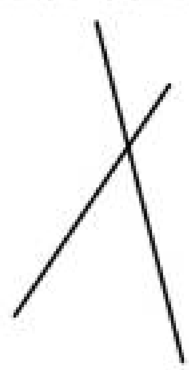


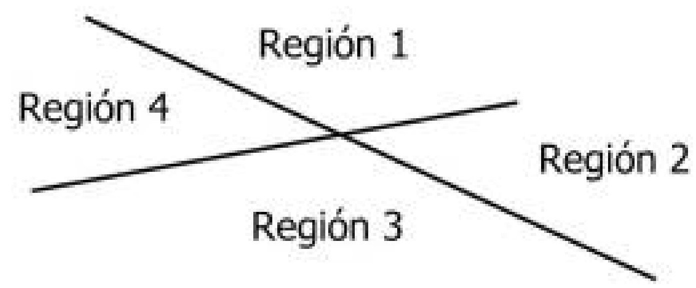
Ojo, veamos un ejemplo medio tramposo:



Rectas Oblicuas: Dos rectas son oblicuas o transversales cuando se cortan en un punto.
Es decir que todo par de rectas (En un plano) que no sean paralelas son oblicuas o transversales.
Lo que debemos tener en cuenta en este punto es que cuando dos rectas se cortan, dividen al plano que las contiene en 4 regiones.

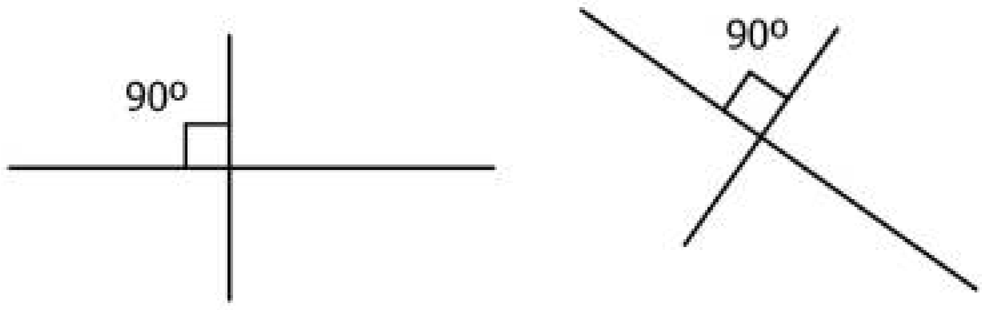
Ejemplos gráficos de rectas oblicuas o transversales:





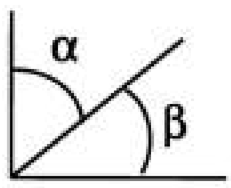
<u>Rectas Perpendiculares</u>: Dos rectas son perpendiculares entre sí cuando se cortan en un punto y además dividen al plano que las contiene en 4 regiones geométricas iguales. O bien cuando los ángulos que forman al cortarse son exactamente iguales.

Para que suceda esto el ángulo que deben formar dos rectas para ser perpendiculares es de 90º.
Veamos algunos ejemplos gráficos:



- <u>Ángulos Complementarios</u>:

α y β SON COMPLEMENTARIOS



Los ángulos **complementarios** son los que sumandos dan **90º**

Si quiero calcular el complementario de un ángulo cualquiera "α" tengo que hacer la cuenta: "90º2 α"

<u>Ejemplo</u>: Calculemos el complementario del Ángulo 36° 25′ 42″

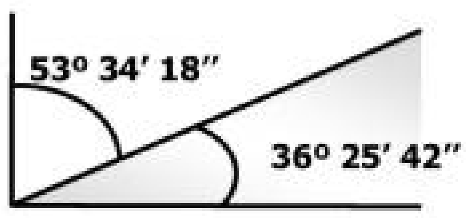
hago la cuenta: $$\begin{array}{r} 90^\circ\ 00'\ 00'' \\ -\ 36^\circ\ 25'\ 42'' \\ \hline \end{array}$$

Como no tengo segundos ni minutos: Los grados le dan 1° a los minutos (que son 60′) y quedan 89° y 60′ 00″ y a su vez los minutos le dan 1′ a los segundos y quedan 89° 59′ 60″

$$\begin{array}{r} 89^\circ\ 59'\ 60'' \\ -\ 36^\circ\ 25'\ 42'' \\ \hline 53^\circ\ 34'\ 18'' \end{array}$$

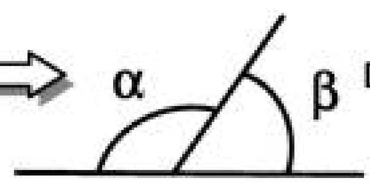
Entonces: El Complementario de 36° 25′ 42″ es 53° 34′ 18″

<u>Gráficamente</u>: *Si a 90º le quito (área sombreada) 36º 25′ 42″, obtengo el complementario*



- <u>Ángulos Suplementarios</u>:

α y β SON SUPLEMENTARIOS



Los ángulos **Suplementarios** son los que sumandos dan **180º**

Para calcular el complementario de un ángulo "α" tengo que hacer la cuenta: 180º2 α =

<u>Ejemplo</u>: Vamos a calcular el Suplemento o el Suplementario de 75° 52´ 13´´

hago la cuenta: $$\begin{array}{r} 180^\circ\ 00'\ 00'' \\ -\ 75^\circ\ 52'\ 13'' \\ \hline \end{array}$$

Como no tengo segundos ni minutos: Los grados le dan 1° a los minutos (que son 60′) y quedan 179° y 60′ 00″ y a su vez los minutos le dan 1′ a los segundos y quedan 179° 59′ 60″

$$\begin{array}{r} 179^\circ\ 59'\ 60'' \\ -\ 75^\circ\ 52'\ 13'' \\ \hline 104^\circ\ 07'\ 47'' \end{array}$$

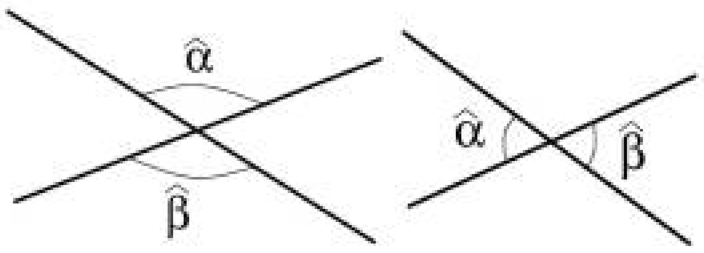
Entonces: El Suplementario de 75° 52′ 13″ es 104° 07′ 47″

<u>Gráficamente</u>: *Si a 180º le quito (área sombreada) 75º 52′ 13″, obtengo el suplementario que es 104º 07′ 47″*

by Dal-0r para TARINGA!

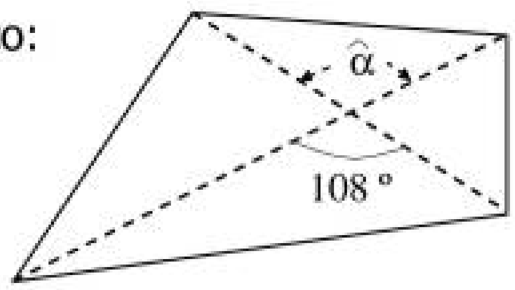
Ángulos Especiales: Vamos a ver ahora algunos casos de ángulos que se forman al cortarse dos rectas Recordemos que al cortarse dos rectas forman ángulos entre ellas, ahora vamos a estudiar que relación guardan entre sí estos ángulos formados por dos rectas que se cortan.

- <u>Ángulos Opuestos por el vértice</u>: Al cortarse dos semirrectas. Los 2 pares de ángulos que no comparten ningún lado entre sí, se llaman **OPUESTOS POR EL VÉRTICE** y Siempre **son iguales** entre sí.



$\boxed{\hat{\alpha} = \hat{\beta}}$ ⇒ Los ángulos Opuestos por el Vértice, siempre SON IGUALES

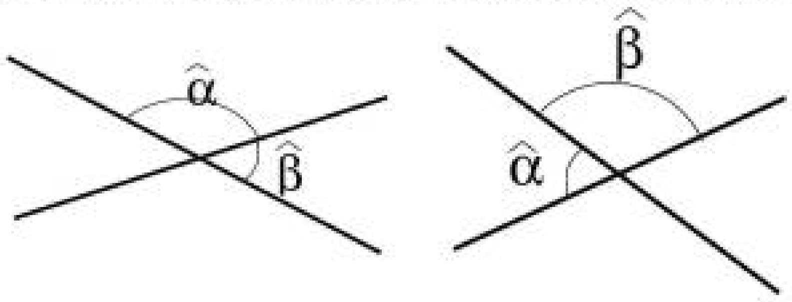
Ejemplo gráfico:



Supongamos que en ese cuadrilátero debemos hallar el ángulo alfa..

Como sabemos que es opuesto con el vértice al ángulo que vale 108º, podemos decir que alfa vale lo mismo.. por lo tanto la respuesta sería que alfa vale 108º..

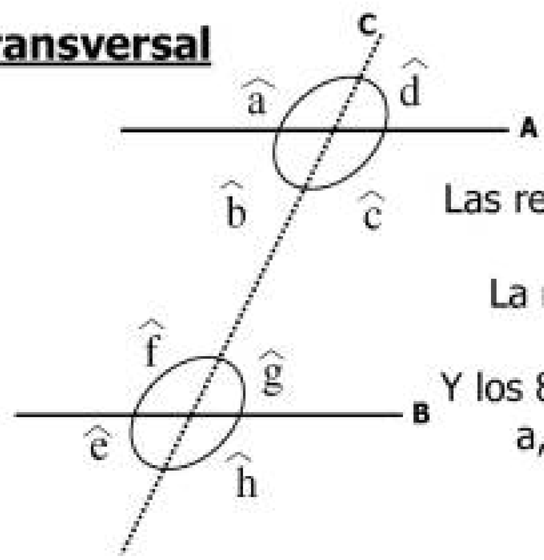
- <u>Ángulos Adyacentes</u>: Los dos Ángulos que quedan separados por la misma semirrecta, o que comparten un lado, se llaman ÁNGULOS ADYACENTES y suman siempre 180º.



$\boxed{\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ}$ ⇒ Los ángulos Adyacentes SON SUPLEMENTARIOS, o sea que suman 180º

- **<u>Ángulos Entre 2 Paralelas Cortadas Por Una Transversal</u>**

Ahora vamos a estudiar las relaciones que hay entre los ángulos que se forman cuando trazamos dos rectas paralelas entre si y las cortamos a ambas por una transversal.. Veamos primero como queda esto graficado:

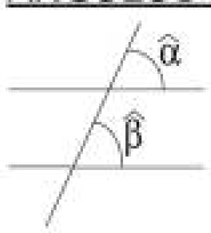


Las rectas paralelas son A y B

La recta transversal es C

Y los 8 ángulos formados son: a, b, c, d, e, f, g y h

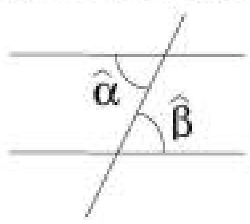
<u>ÁNGULOS CORRESPONDIENTES ENTRE PARALELAS</u>



Para que dos ángulos sean correspondientes entre paralelas, deben estar EN **EL MISMO SEMIPLANO** tal que **uno de ellos quede "ADENTRO"** (β) de las paralelas **y el otro "AFUERA"** (α) (Y no son adyacentes)

⇒ $\boxed{\hat{\alpha} = \hat{\beta}}$ Los ángulos correspondientes entre paralelas siempre son iguales

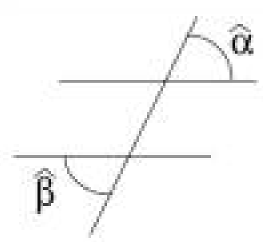
<u>ÁNGULOS ALTERNOS INTERNOS</u>



Para que dos ángulos sean alternos internos, deben estar **EN DISTINTO SEMIPLANO** ("Distito lado de la transversal") de modo que **los dos queden "ADENTRO"** de las paralelas.

⇒ $\boxed{\hat{\alpha} = \hat{\beta}}$ Los ángulos alternos internos siempre son iguales

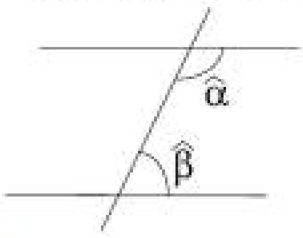
<u>ÁNGULOS ALTERNOS EXTERNOS</u>



Para que dos ángulos sean alternos externos, deben estar **EN DISTINTO SEMIPLANO** ("Distito lado de la transversal") de modo que **los dos queden "AFUERA"** de las paralelas.

⇒ $\boxed{\hat{\alpha} = \hat{\beta}}$ Los ángulos alternos externos siempre son iguales

ÁNGULOS CONJUGADOS INTERNOS

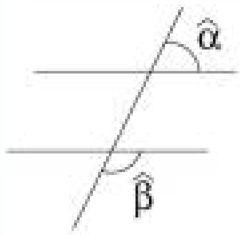


Para que dos ángulos sean conjugados internos, deben estar EN **EL MISMO SEMIPLANO** ("del mismo lado de la transversal") de modo que **los dos queden "ADENTRO"** de las paralelas.

$$\boxed{\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^{\circ}}$$

Los ángulos conjugados internos son suplementarios (suman 180º)

ÁNGULOS CONJUGADOS EXTERNOS



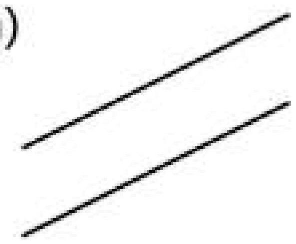
Para que dos ángulos sean conjugados externos, deben estar EN **EL MISMO SEMIPLANO** ("El mismo lado de la transversal") de modo que **los dos queden "AFUERA"** de las paralelas.

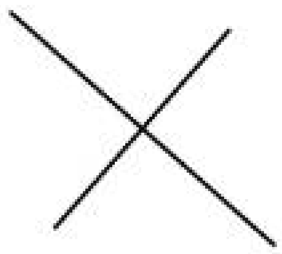
$$\boxed{\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^{\circ}}$$

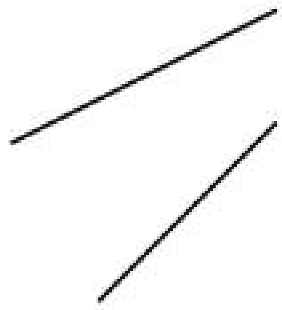
Los ángulos Conjugados externos son suplementarios (suman 180º)

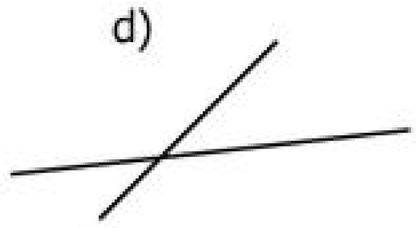
Comenzamos con algunos ejercicios teóricos:

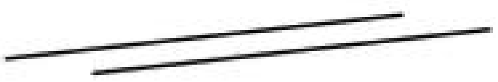
Decir en cada caso cuales de estos pares de rectas son: Paralelas, oblicuas o perpendiculares:

a)


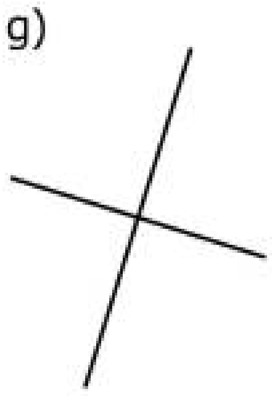
b)


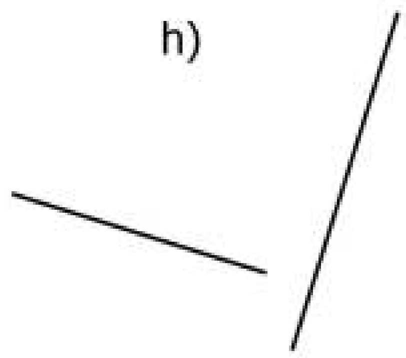
c)


d)


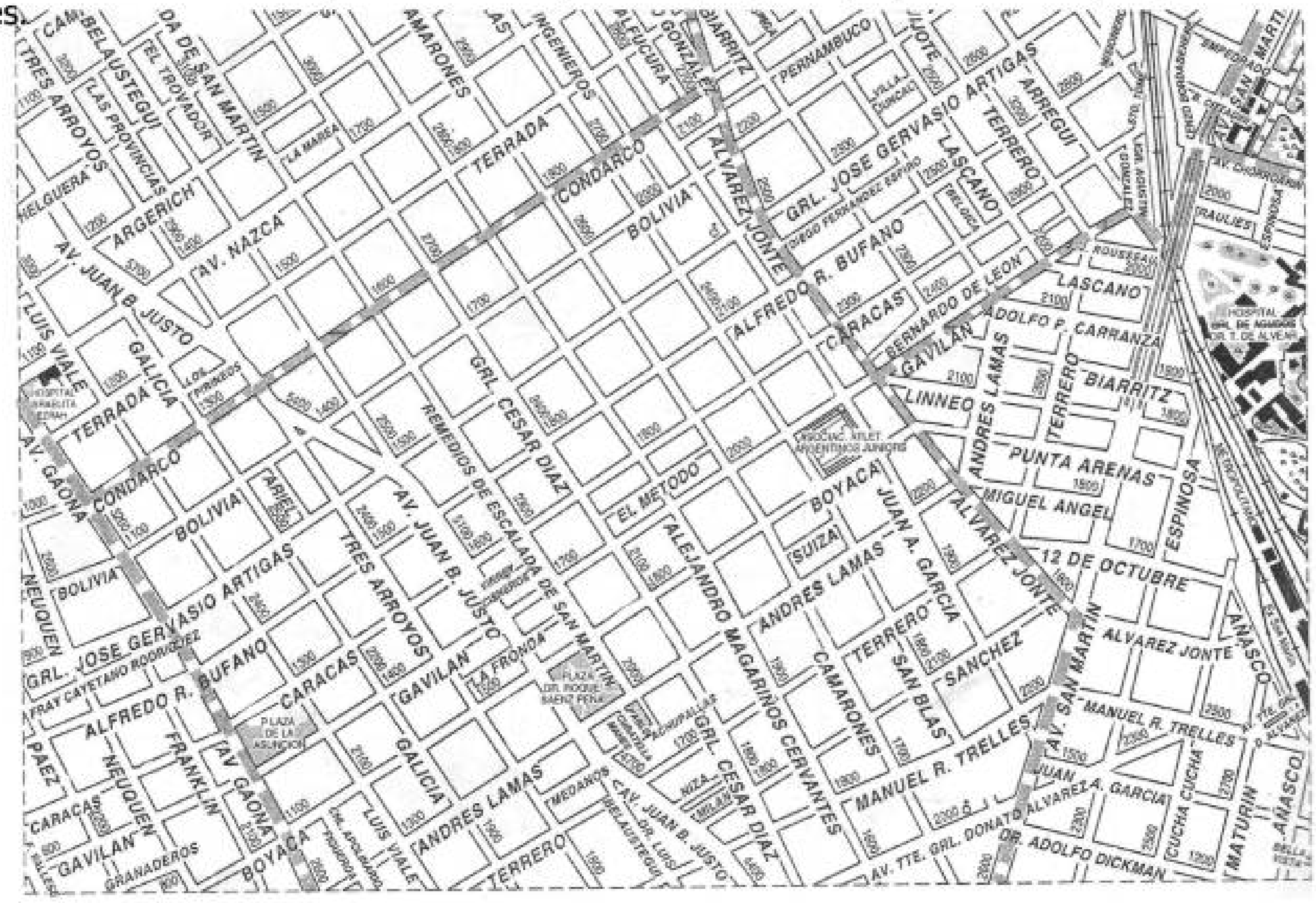
e)


f)

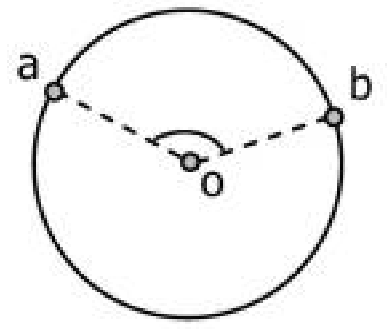

g)


h)


Tenemos a continuación un mapa de calles de una parte de la Ciudad de Buenos Aires. Imaginemos que cada calle representa una recta. Nombrar 4 pares de calles paralelas, 4 pares perpendiculares y 4 pares oblicuas o transversales.



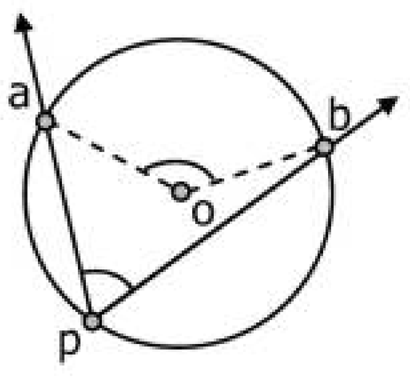
Arco de Circunferencia y Ángulo Central: Si desde el centro "o" de una circunferencia trazamos un ángulo cuyos lados sean "ao" y bo" (Siendo "a" y "b" dos puntos cualesquiera de la circunferencia) Entonces el ángulo trazado al que llamaremos "aob" es un ángulo central de la circunferencia y divide a la misma en dos arcos de circunferencia.



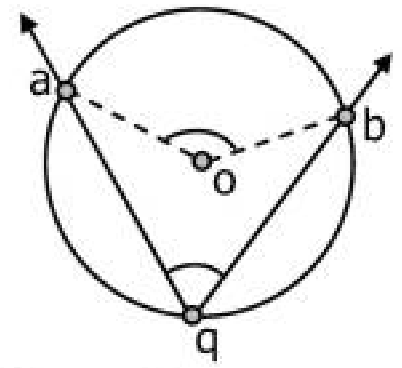
$\widehat{aob}$ *es ángulo central*

Ángulos Inscriptos en una Circunferencia: Dada una circunferencia de centro "o" y con dos puntos "a" y "b" pertenecientes a la misma, se llama ángulo inscripto asociado al arco "aob" al ángulo formado por dos semirrectas que pasen por "a" y "b" respectivamente y tengan origen en un punto "p" de la circunferencia que no pertenezca al arco "aob".

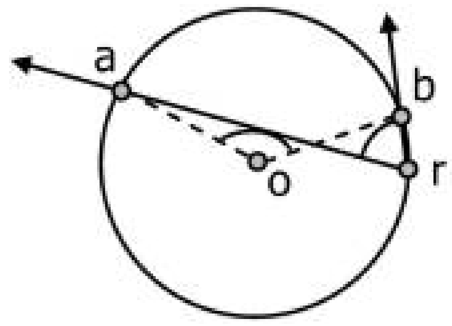
Veamos algunos ejemplos partiendo del gráfico anterior (En el que ya teníamos un ángulo central):



$\widehat{aob}$ es ángulo central
$\widehat{apb}$ es ángulo inscripto



$\widehat{aob}$ es ángulo central
$\widehat{aqb}$ es ángulo inscripto



$\widehat{aob}$ es ángulo central
$\widehat{arb}$ es ángulo inscripto

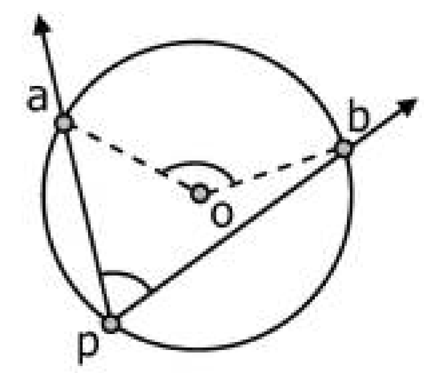
Es importante remarcar que los ángulos inscriptos están siempre asociados a su ángulo central, (Dado que el ángulo central es el que define al arco de la circunferencia) En los tres ejemplos que vimos, podemos afirmar que los tres ángulos inscriptos son iguales.

Esto pasa porque los tres ángulos inscriptos están asociados al mismo ángulo central.

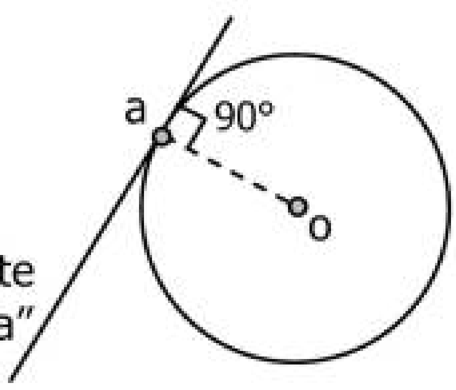
Consecuencia: *Dada una circunferencia y determinado un ángulo central y un arco de circunferencia, este ángulo central tiene asociados infinitos ángulos inscriptos, todos iguales entre sí.*

Propiedad de los ángulos inscriptos: Como dijimos hay una relación entre un ángulo inscripto y su ángulo central. Esta relación es muy sencilla y se cumple siempre!! Resulta que siempre el ángulo inscripto es la mitad del ángulo central correspondiente.

Por lo tanto sea: $\left.\begin{array}{l}\widehat{aob} \text{ ángulo central de la circunferencia} \\ \widehat{apb} \text{ ángulo inscripto de la circunferencia}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{apb} = \dfrac{\widehat{aob}}{2}$

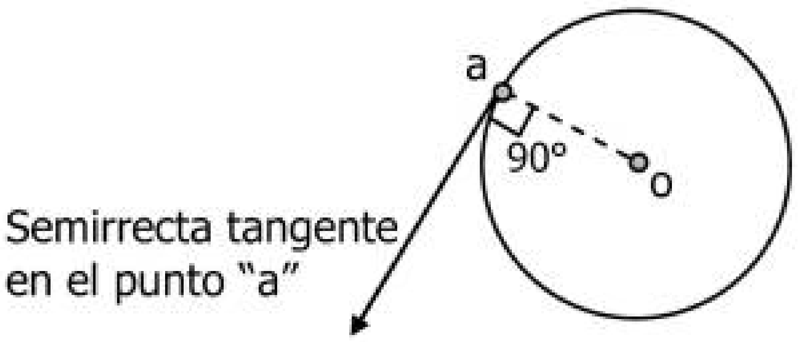


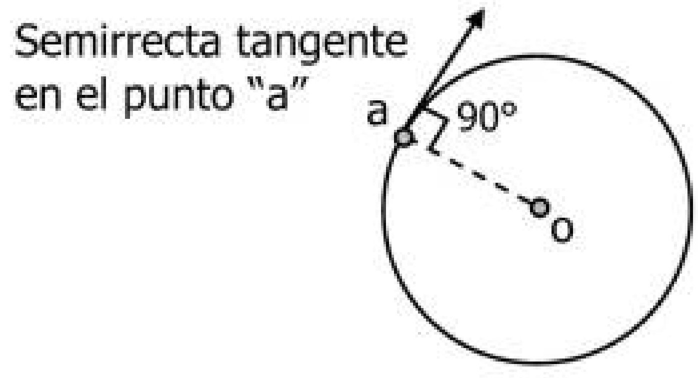
Recta tangente a una circunferencia: Es una recta que corta a la circunferencia en un solo punto. La recta tangente a la circunferencia de centro "o" en el punto "a" es perpendicular al segmento "oa"



Recta tangente
en el punto "a"

Semirrectas tangentes a una circunferencia: Es una semirrecta que corta a la circunferencia en un solo punto. La semirrecta tangente a la circunferencia de centro "o" en el punto "a" son perpendiculares al segmento "oa"



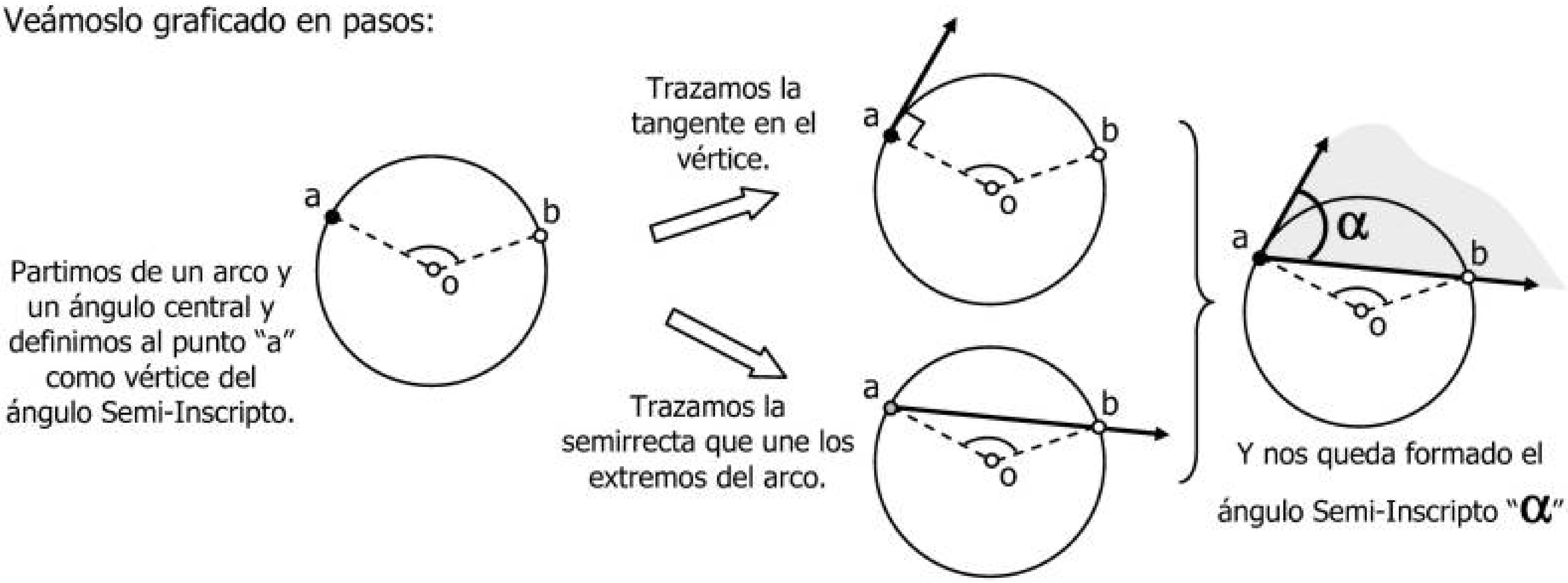


Ángulos Semi-inscriptos en una Circunferencia:

Dada una circunferencia de coentro "o" y dos puntos "a" y "b" de la misma que formen el arco "aob", Un ángulo es Semi-Inscripto asociado a ese arco, cuando tiene como vértice a un extremo de un arco de la circunferencia (por ejemplo "a"), y sus lados son:

* Uno, la semirrecta tangente a la circunferencia en este vértice. (Semirrecta tangente en "a")
* Y el otro, La semirrecta que une ambos extremos del arco. (Semirrecta que pasa por "a" y "b")

Veámoslo graficado en pasos:

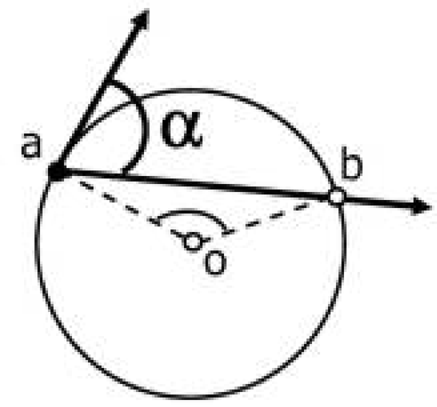


Aclaración: El ángulo Semi-Inscripto debe contener cualquier punto que contenga el arco, es decir que debe contener todos los puntos del arco que forma el ángulo central. Esta aclaración puede servirnos si no sabemos para que lado orientar la semirrecta tangente.

> **Propiedad de los ángulos Semi-Inscriptos**: El ángulo Semi-Inscripto a una circunferencia para cualquier arco "ab" debe ser igual a cualquier ángulo Inscripto a la misma circunferencia para el mismo arco. O sea que también los ángulos Semi-Inscriptos valen la mitad del ángulo central.

Por lo tanto sea:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{aob}\ \text{ángulo central de la circunferencia}\\ \alpha\ \text{ángulo Semi-Inscripto de la circunferencia}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\widehat{aob}}{2}$$

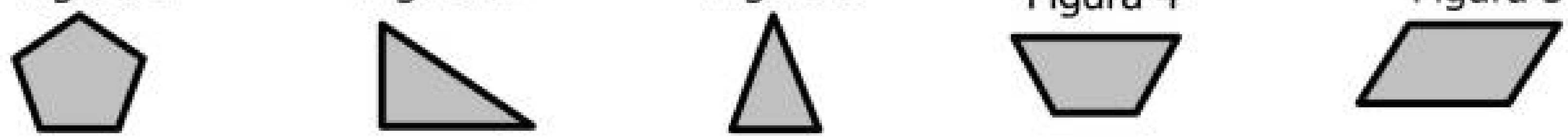


Nota: Dada un circunferencia y un arco "ab" de la misma, se puede decir que si bien hay infinitos ángulos inscriptos para ese arco, hay solo un ángulo semi-Inscripto a dicha circunferencia para cada vértice del arco. O sea que cada arco tiene 2 ángulos semi-inscriptos asociados.

EJERCICIOS

Múltiple Choice

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5



1- ¿Qué figura tiene un ángulo recto?

a) Figura 1 b) Figura 2 c) Figura 3 d) Figura 4 e) Figura 5

2- ¿Cuántas figuras no tienen ángulos agudos?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

3- ¿Cuál/es figura/s tiene/n más de dos ángulos obtusos?

a) Figura 1 b) Figura 4 c) Figura 5 d) Fig 1 y 4 e) Ninguna

4- ¿Cuál/es figura/s tiene/n más de dos ángulos agudos?

a) Figura 1 b) Figura 2 c) Figura 3 d) Ninguna e) Todas

5- ¿Qué figura/s tiene/n dos ángulos agudos dos obtusos?

a) Figura 1 b) Figura 4 c) Figura 5 d) Fig 3 y 5 e) Fig 4 y 5

6- ¿Qué figura/s no tiene/n ningún ángulo obtuso?

a) Figura 3 b) Figura 4 c) Fig 2 y 3 d) Fig 2 y 4 e) Fig 3 y 4

7- ¿Qué figura tiene solo un ángulo agudo?

a) Figura 1 b) Figura 2 c) Figura 3 d) Fig 2 y 3 e) Ninguna

8- ¿Cuántas figuras tienen al menos un ángulo obtuso?

a) 1 b) 2 c) 3 d) Ninguna e) Todas

9- Cuántas figuras tienen dos tipos de ángulos diferentes?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Ninguna

10- ¿Qué figura/s tiene/n más de un ángulo obtuso?

a) Figura 1 b) Figura 2 c) Figura 3 d) Fig 1-4-5 e) Ninguna

11- ¿Cuántos ángulos agudos hay en total entre los de todas las figuras?

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 12

12- ¿Cuántos ángulos obtusos hay en total entre los de todas las figuras?

a) 4 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

13- ¿Qué figura/s tiene/n todos los ángulos del mismo tipo?

a) Figura 1 b) Figura 3 c) Figura 5 d) Fig 1 y 3 e) Fig 1 y 5

14- ¿Cuántas figuras tienen más de un ángulo recto?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Ninguna

15- ¿Qué figuras tienen exactamente la misma cantidad de ángulos agudos entre sí?

a) 2 y 3 b) 2, 3 y 4 c) 3, 4 y 5 d) 2, 4 y 5 e) 2, 3 y 5

Completar con V o con F según sea verdadero o falso *(Ojo: Hay algunos que son tramposos)*

16) Dos ángulos opuestos por el vértice siempre son iguales
17) Dos ángulos opuestos por el vértice son suplementarios
18) Dos ángulos opuestos por el vértice son complementarios
19) La suma de dos ángulos agudos siempre es menor a 90°
20) Los ángulos agudos miden menos de 90°
21) Dos ángulos que miden 25° y 65° son suplementarios
22) Los ángulos obtusos miden más de 90°
23) Los ángulos que sumados dan 180° son suplementarios
24) Los ángulos opuestos por el vértice siempre son agudos
25) Los ángulos opuestos por el vértice nunca son rectos
26) Dos ángulos rectos son complementarios
27) Dos ángulos rectos son suplementarios
28) Los ángulos rectos no son ni agudos ni obtusos
29) Los ángulos rectos miden 90°
30) Dos ángulos que miden 39° y 51° son complementarios
31) Dos ángulos que miden 124° y 56° son suplementarios
32) Los ángulos llanos miden 180°
33) Tres ángulos consecutivos pueden formar un ángulo llano
34) Tres ángulos consecutivos siempre forman un ángulo llano
35) Los opuestos por el vértice tienen un lado en común

Múltiple Choice

36- ¿Qué figura tiene un ángulo recto?
a) Figura 2 b) Figura 3 c) Figura 4 d) 2 y 3 e) 2, 3 y 4

37- ¿Cuántas figuras no tienen ángulos agudos?
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

38- ¿Cuál/es figura/s tiene/n más de dos ángulos obtusos?
a) Figura 1 b) Figura 4 c) Figura 5 d) Fig 1 y 4 e) Ninguna

39- ¿Cuál/es figura/s tiene/n más de dos ángulos agudos?
a) Figura 1 b) Figura 2 c) Figura 4 d) Figura 5 e) Ninguna

40- ¿Qué figura/s tiene/n dos ángulos agudos dos obtusos?
a) Figura 1 b) Figura 4 c) Figura 5 d) Fig 3 y 5 e) Fig 4 y 5

41- ¿Qué figura/s no tiene/n ningún ángulo obtuso?
a) Figura 2 b) Figura 3 c) Figura 4 d) Fig 2 y 4 e) Fig 3 y 4

42- ¿Qué figura tiene solo un ángulo agudo?
a) Figura 1 b) Figura 2 c) Figura 3 d) Fig 2 y 3 e) Ninguna

43- ¿Cuántas figuras tienen al menos un ángulo obtuso?
a) 2 b) 3 c) 4 d) Ninguna e) Todas

44- Cuántas figuras tienen dos tipos de ángulos diferentes?
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Ninguna

45- ¿Qué figura/s tiene/n más de un ángulo obtuso?
a) Figura 1 b) Figura 3 c) Figura 4 d) 3 y 4 e) 1, 3 y 4

46- ¿Cuántos ángulos agudos hay en total entre los de todas las figuras?
a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

47- ¿Cuántos ángulos obtusos hay en total entre los de todas las figuras?
a) 7 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

48- ¿Qué figura/s tiene/n todos los ángulos del mismo tipo?
a) Figura 1 b) Figura 2 c) Figura 4 d) Fig 1 y 2 e) Fig 1 y 4

49- ¿Cuántas figuras tienen más de un ángulo recto?
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Ninguna

50- ¿Qué figuras tienen más ángulos rectos que obtusos?
a) Figura 2 b) Figura 3 c) Figura 4 d) 2 y 3 e) 2, 3 y 4

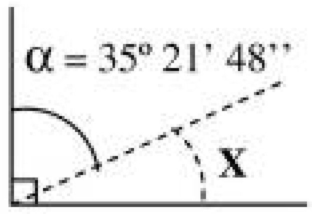
Hallar el Complementario de:

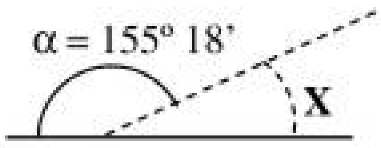
51) 26º 55′ 55″	55) 25º 18′ 23″	59) 55º 45′ 44″	63) 22º 23′ 34″	67) 27º 34′ 06″
52) 35º 15′ 06″	56) 66º 08′ 40″	60) 20º 55′ 57″	64) 56º 56′ 56″	68) 33º 07′ 09″
53) 26º 41′ 12″	57) 22º 45′ 32″	61) 54º 34′ 47″	65) 56º 45′ 43″	69) 22º 45′ 12″
54) 15º 25′ 26″	58) 25º 56′ 45″	62) 05º 41′ 32″	66) 12º 54′ 08″	70) 11º 04′ 06″

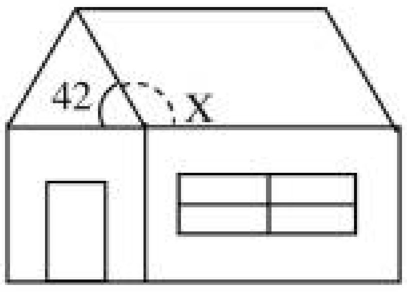
Hallar el Suplementario de:

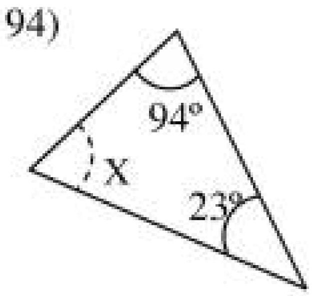
71) 123º 32′ 54″	75) 111º 09′ 51″	79) 156º 23′ 59″	83) 123º 06′ 52″	87) 121º 04′ 21″
72) 97º 52′ 50″	76) 92º 12′ 54″	80) 120º 25′ 06″	84) 128º 36′ 15″	88) 141º 50′ 10″
73) 109º 43′ 12″	77) 105º 52′ 14″	81) 44º 07′ 31″	85) 98º 45′ 02″	89) 123º 56′ 12″
74) 152º 21′ 01″	78) 102º 57′ 23″	82) 41º 56′ 01″	86) 91º 12′ 32″	90) 101º 01′ 10″

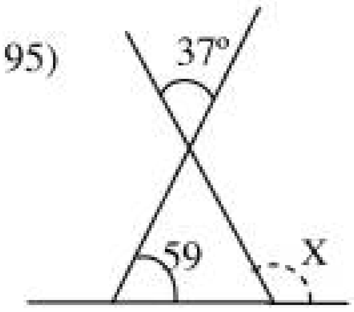
Hallar el ángulo "X"

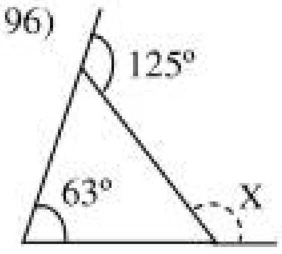
91) 

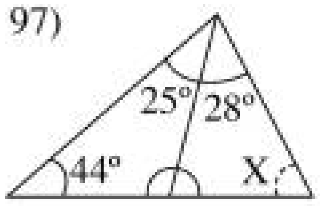
92) 

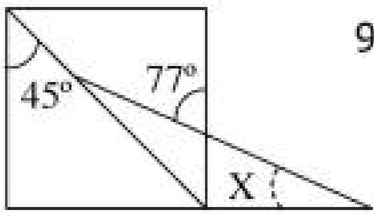
93) 

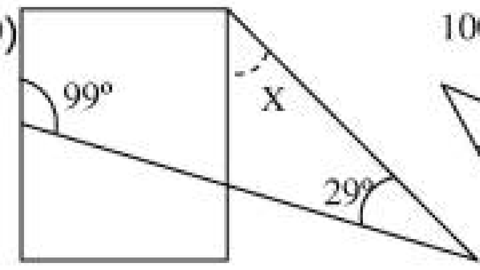
94) 

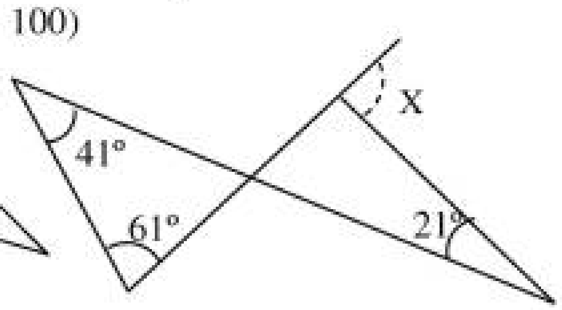
95) 

96) 

97) 

98) 

99) 

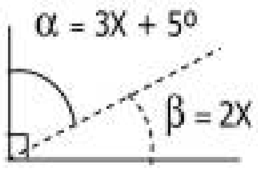
100) 

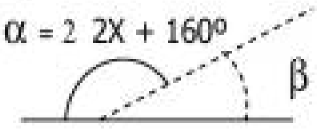
Problemas con triángulos:

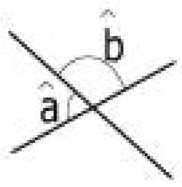
101) Hallar el ángulo obtuso de un triángulo obtusángulo, sabiendo que sus dos ángulos agudos valen 50º y 35º.
102) Hallar el tercer ángulo de un triángulo isósceles si sus ángulos iguales valen 65º.
103) ¿Cuánto vale el mayor de los ángulos externos de un triángulo cuyos ángulos interiores valen 40º, 60º y 80º?
104) ¿Cuánto valen los ángulos interiores de un triángulo equilátero?

Hallar "X"

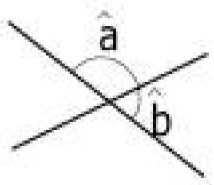
105) Los ángulos A y B son complementarios y sus valores son: A = 3X + 20º B = 8X 2 40º
106) A y B son suplementarios y valen: A = 5X 2 20º B = 3X + 40º
107) A y B son opuestos por el vértice y sus valores son: A = 6X 2 20º B = 3X + 10º

108) 

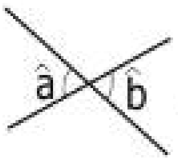
109) 

110) 

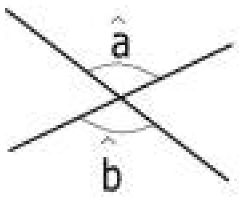
Datos:
a = 2 **X** + 20°
b = 9 **X** + 50°

111) 

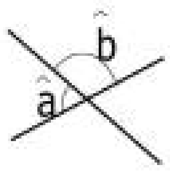
Datos:
a = 3 **X** + 3°
b = 4 **X** - 26°

112) 

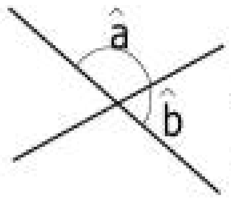
Datos:
a = 20° - **X**
b = 2 **X** - 19°

113) 

Datos:
a = **X** + 2°
b = 3 **X** - 22°

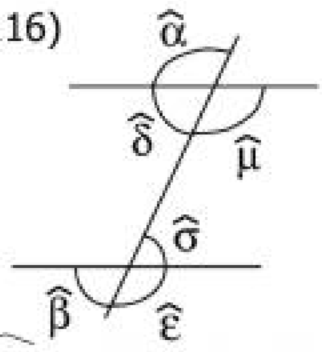
114) 

Datos:
a = 5 **X** + 60°
b = 80 **X** + 35°

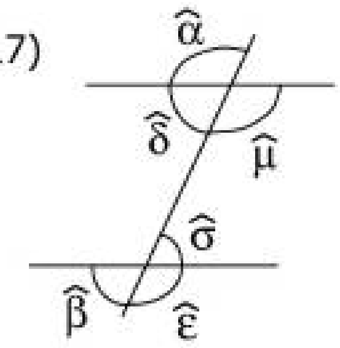
115) 

Datos:
a = 20 **X** + 50°
b = 85° - 2 **X**

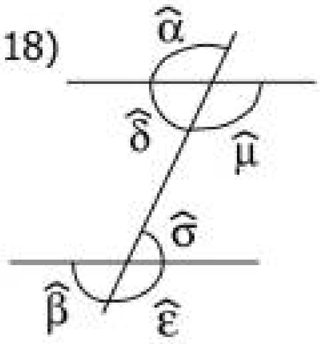
Hallar los ángulos que faltan: (Justificar cada paso)

116) 

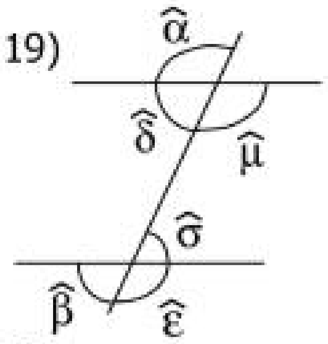
$\widehat{\alpha}$ = 126° 18' 16''

117) 

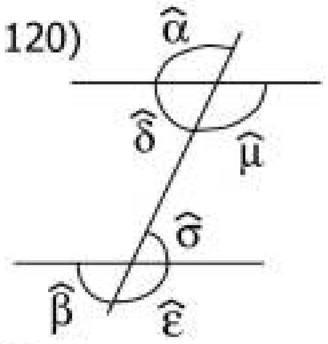
$\widehat{\mu}$ = 121° 40' 12''

118) 

$\widehat{\sigma}$ = 33° 25'

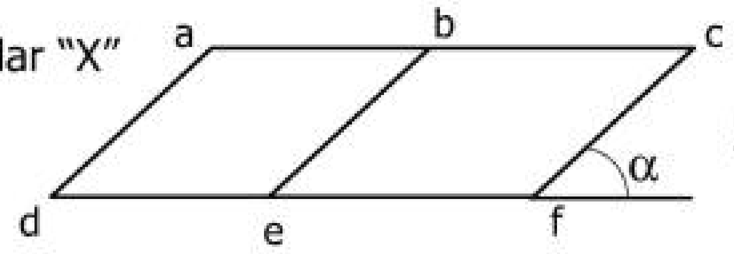
119) 

$\widehat{\beta}$ = 15° 11' 10''

120) 

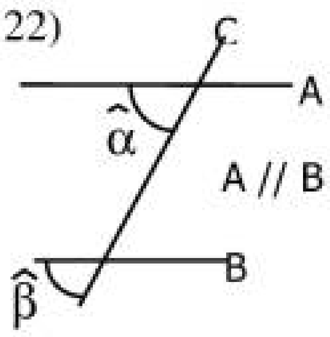
$\widehat{\delta}$ = 31° 16' 30''

121) Ejercicio para pensar: Hallar "X"

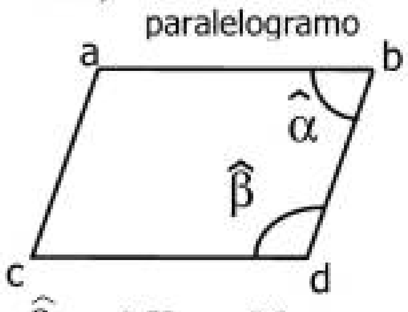


Datos: $\begin{cases} \overline{ad} \parallel \overline{be} \parallel \overline{cf} \\ \overline{ac} \parallel \overline{df} \end{cases}$ $\measuredangle ade = 40º$ $\alpha = \measuredangle cfe - 5x$

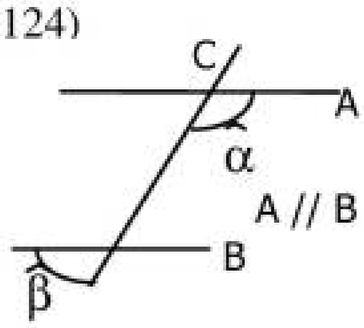
Hallar X

122) 

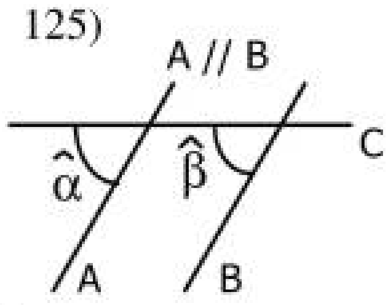
$\widehat{\beta}$ = 5 **X** + 13 °
$\widehat{\alpha}$ = 7 **X** 2 7 °

123) abcd es un paralelogramo


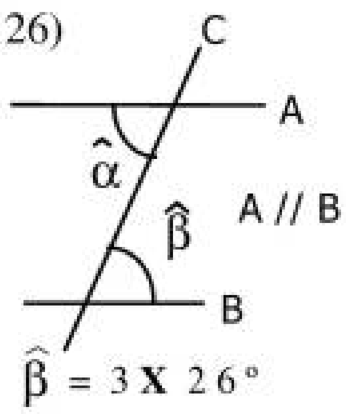
$\widehat{\beta}$ = 8 **X** + 5 °
$\widehat{\alpha}$ = 7 **X** 2 20 °

124) 

$\widehat{\beta}$ = 4 **X** + 25 °
$\widehat{\alpha}$ = 80° 2 **X**

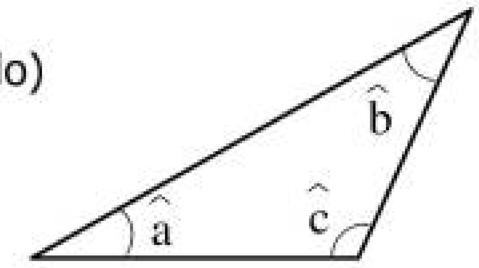
125) 

$\widehat{\beta}$ = 7 **X** + 30 °
$\widehat{\alpha}$ = 11 **X** 2 30 °

126) 

$\widehat{\beta}$ = 3 **X** 2 6 °
$\widehat{\alpha}$ = 10 **X** 290 °

Hallar X (a, b y c son los ángulos interiores de un triángulo)



Nota: Para esto hay que recordar que la suma de los ángulos interiores de los triángulos vale

127) a = 3X + 5º
b = 2X + 45º
c = 9X − 10º

128) a = 5X + 12º
b = 6X + 1º
c = 3X − 1º

129) a = 3X −21º
b = 2X + 43º
c = 9X − 24º

130) a = 2X + 72º
b = X + 26º
c = 5X −30º

131) a = 4X− 10º
b = 7X + 5º
c = 3X − 25º

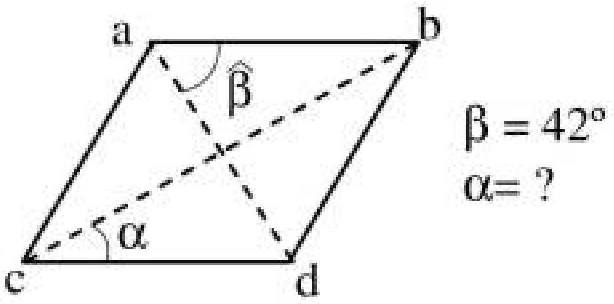
132) a = X + 34º
b = 4X − 14º
c = 8X − 48º

Hallar el cuarto ángulo interior de un cuadrilátero cuyos otros ángulos interiores valen:

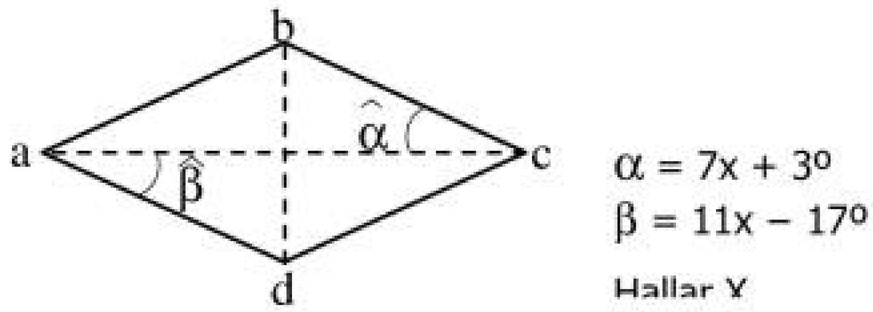
133) 75º ; 80º y 100º
134) 130º ; 50º y 102º
135) 45º ; 60º y 113º
136) 107º ; 103º y 45º
137) 88º ; 77º y 91º
138) 105º ; 103º y 17º
139) 101º ; 67º y 121º
140) 111º ; 111º y 41º
141) 13º ; 11º y 172º

Nota: Recordar que la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros vale siempre 360º

142) abcd es un paralelogramo

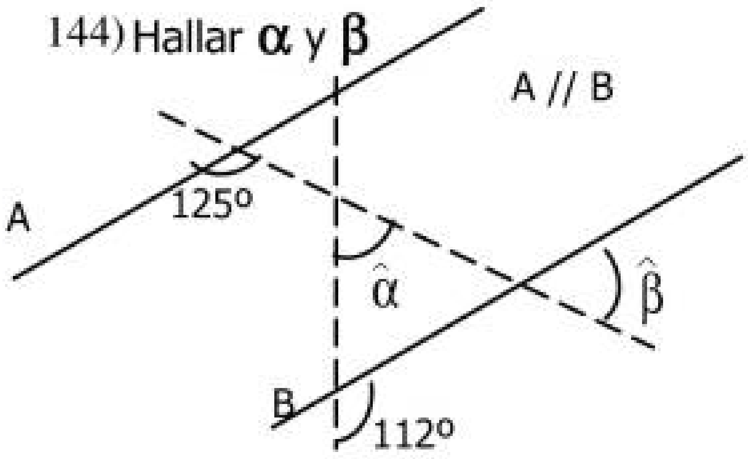


143) abcd es un Rombo

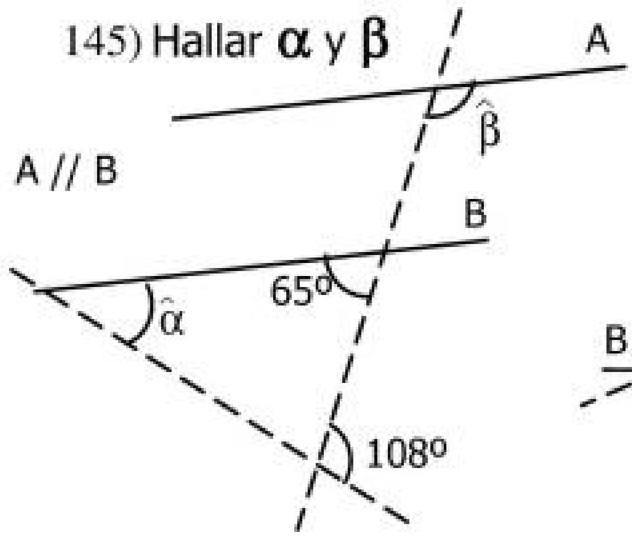


➢ **Calcular los ángulos pedidos justificando cada paso**:

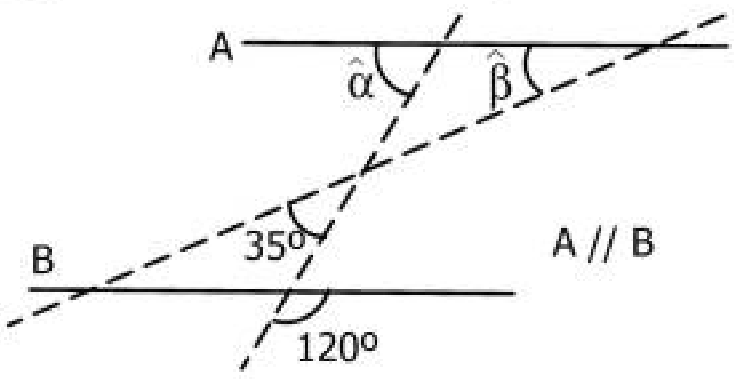
144) Hallar α y β



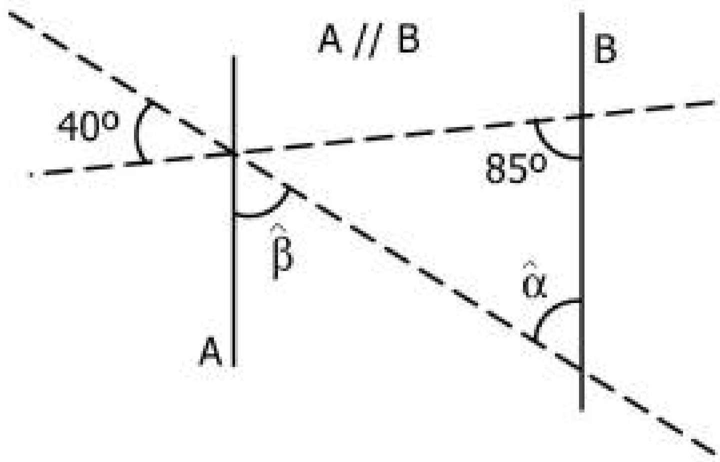
145) Hallar α y β



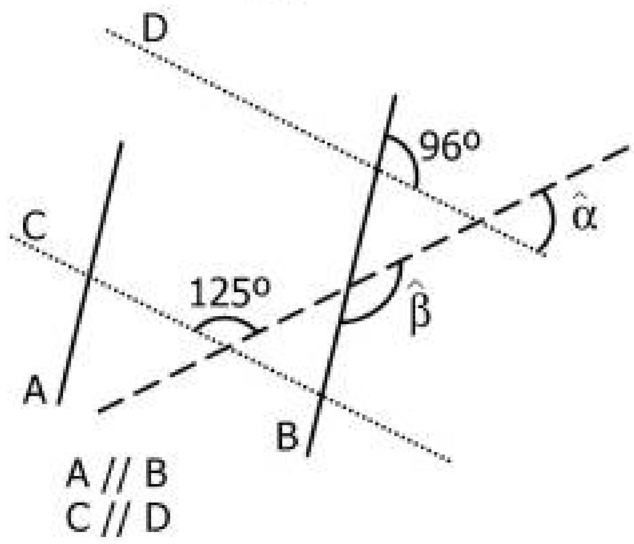
146) Hallar α y β



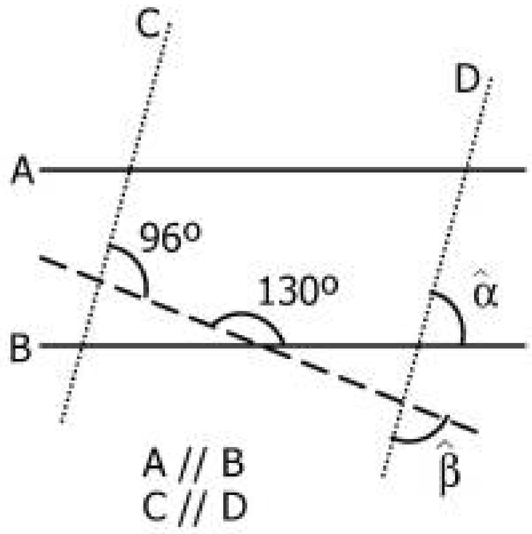
147) Hallar α y β



148) Hallar α y β



149) Hallar α y β



Responder Verdadero o Falso:

150) Dado un arco de circunferencia cuyo ángulo central es igual a 50°, todo ángulo Inscripto para ese arco será de 100°

151) Dado un arco de circunferencia cuyo ángulo central es 80°, cualquier ángulo Inscripto para ese arco será de 40°.

152) Dada una circunferencia y un arco de la misma, existen infinitos ángulos Inscriptos asociados a ese arco.

153) Dada una circunferencia y un arco de la misma, existen infinitos ángulos Semi-Inscriptos asociados al arco.

154) Cada lado de cualquier ángulo inscripto en una circunferencia corta a la misma en dos puntos.

155) Cada lado de un ángulo Semi-Inscripto en una circunferencia corta a la misma en dos puntos.

156) Cada lado de un ángulo Semi-Inscripto en una circunferencia corta a la misma en un solo punto.

157) Un lado de un ángulo Semi-Inscripto en una circunferencia corta a la misma en un solo punto y el otro lado la corta en dos puntos.

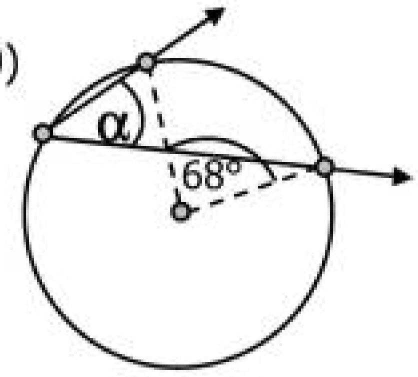
158) Un ángulo Inscripto en una circunferencia puede valer cualquier valor entre 0° y 360°.

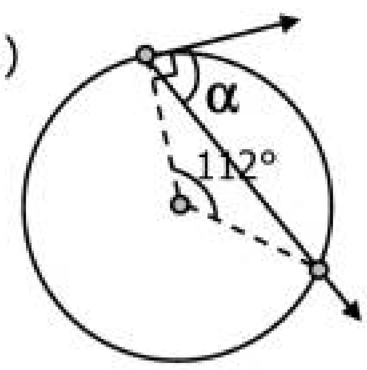
159) Un ángulo Inscripto en una circunferencia debe ser menor a 180°.

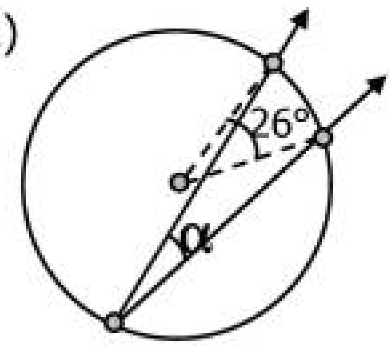
Completar el siguiente Cuadro:

	Angulo Central	Angulo Inscripto	Angulo Semi-Inscripto
160)	54° 15' 10"		
161)	79° 20' 00"		
162)			28° 41' 45"
163)			51° 07' 10"
164)		27° 19' 08"	
165)		15° 08' 24"	
166)	106° 10' 52"		
167)			63° 00' 00"
168)		40° 42' 37"	
169)			29° 35' 30"

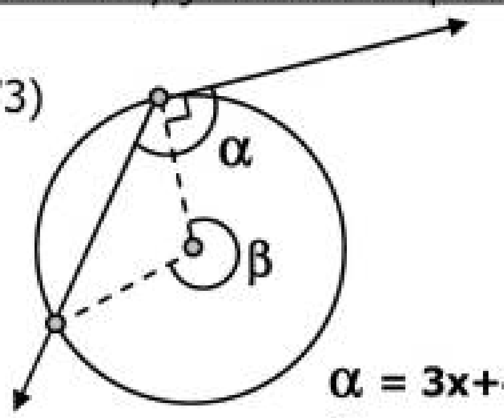
Hallar "α" y justificar la respuesta:

170)


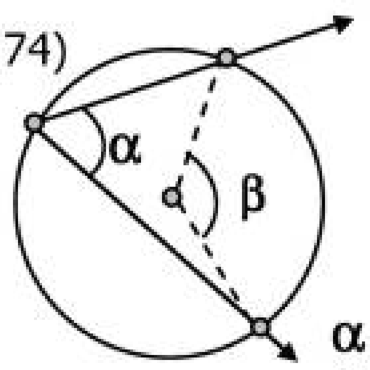
171)


172)


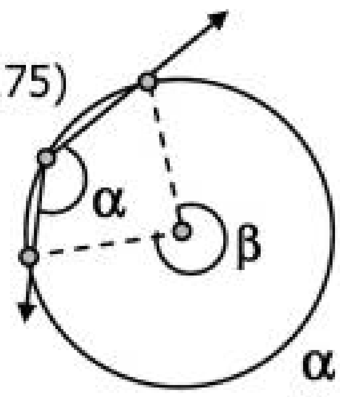
Hallar "x" y justificar los pasos:

173)


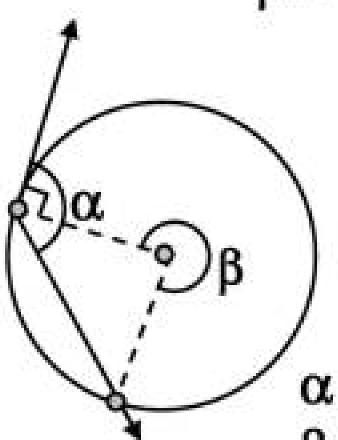
$\alpha = 3x+40°$
$\beta = 9x-10°$

174)


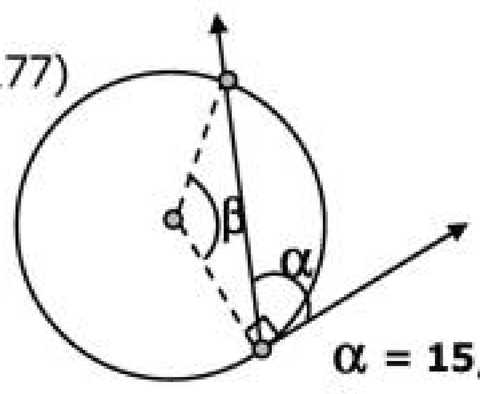
$\alpha = 4x-1°$
$\beta = 5x+43°$

175)


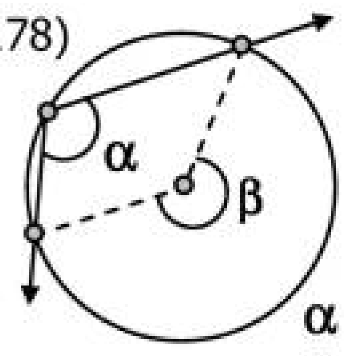
$\alpha = 2x-3°$
$\beta = 3x+64°$

176)


$\alpha = 8/3\, x + 1°$
$\beta = 5x+15°$

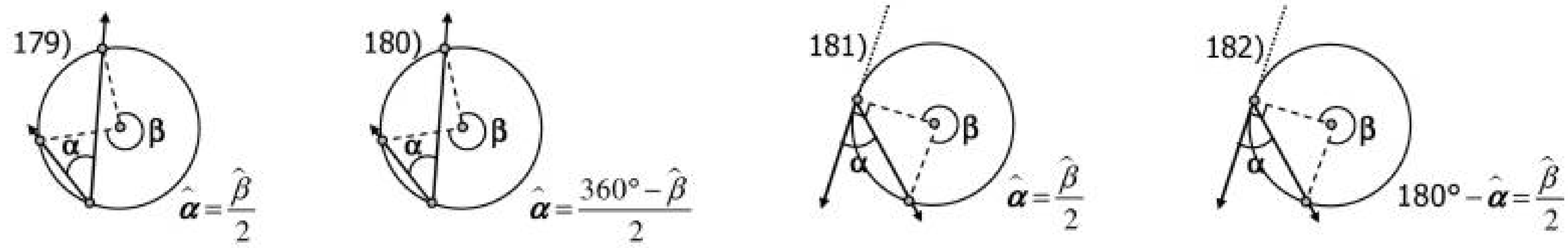
177)


$\alpha = 15/7\, x +8°$
$\beta = 5x-4°$

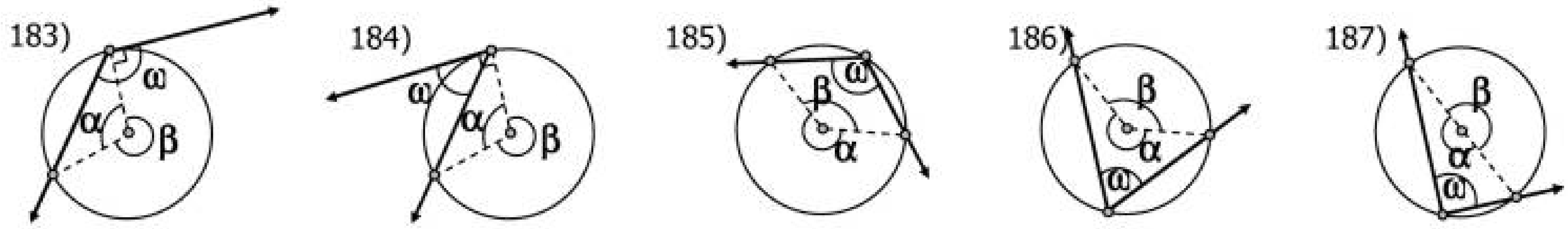
178)


$\alpha = 9/5\, x-2°$
$\beta = 46/13\, x$

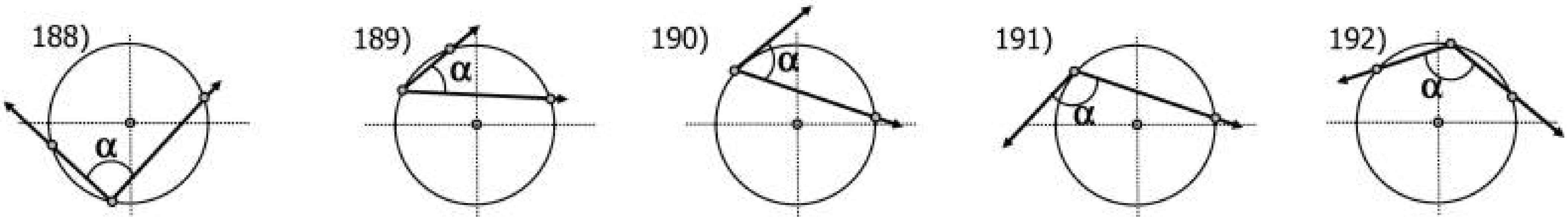
Decir cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas y cuales son falsas según su gráfico:



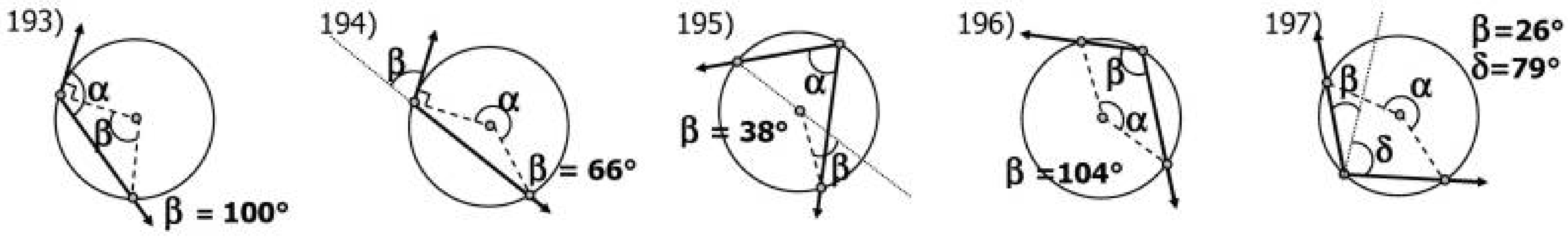
Decir cuando "ω" es Inscripto con respecto al ángulo central "α" o "β" y cuando es Semi-Inscripto (Aclarar con respecto a qué ángulo central es Inscripto o Semi-Inscripto).



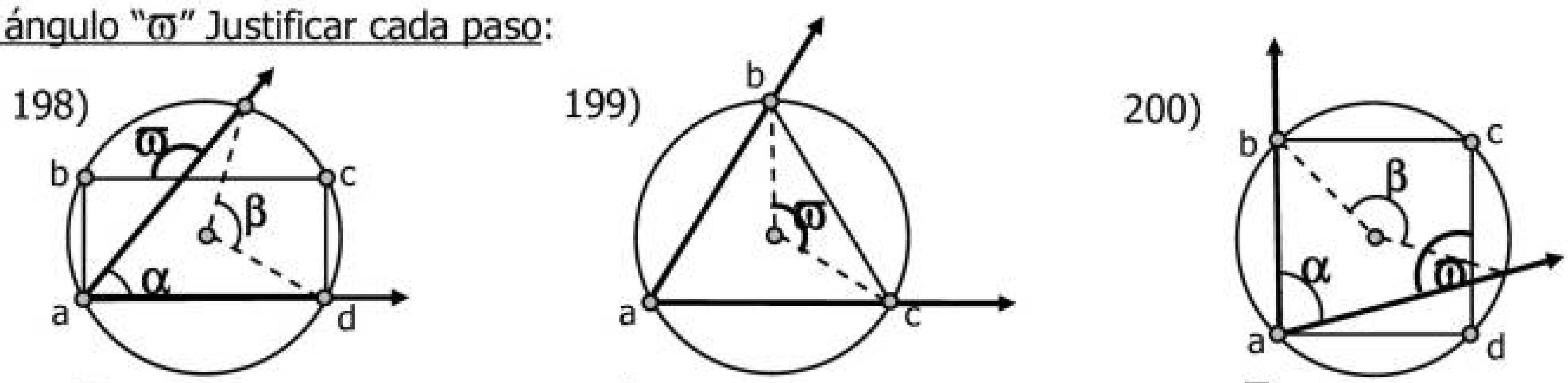
Decir en qué caso "α" es Inscripto y en qué caso es Semi-Inscripto en la circunferencia. Realiza el gráfico aproximado en tu carpeta y grafica también en cada caso el ángulo central respecto del cual "α" es Inscripto o Semi-Inscripto.



Hallar el ángulo "α"



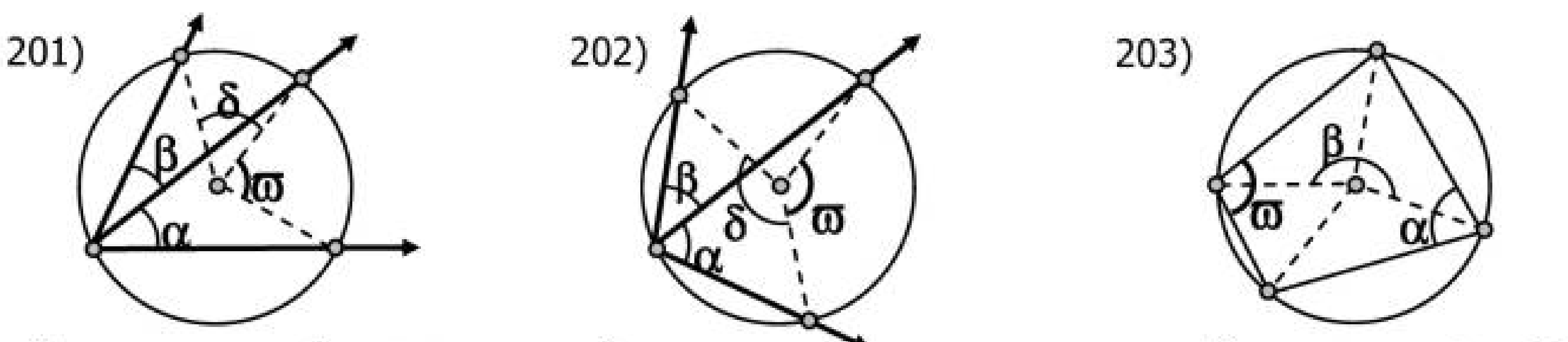
Hallar el ángulo "ϖ" Justificar cada paso:



▭ abcd Es un rectángulo
β = 116°

△ abc Es un triángulo equilátero

□ abcd Es un cuadrado
β = 158°



δ = 56° α + β = 71°

β = 37° δ = α +67°

β = 186° α = 83°

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Teorema de Thales

Número de Tema: **26**

Área: **Matemática**

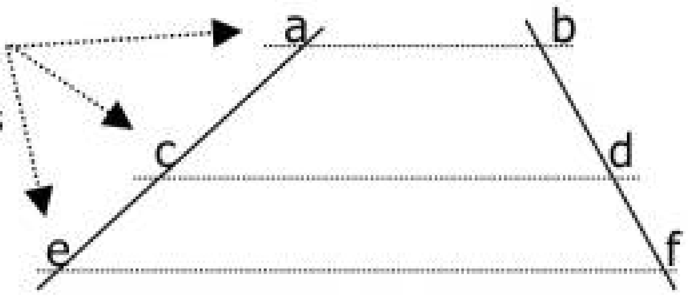
Dadas tres rectas paralelas: $\overline{ab} // \overline{cd} // \overline{ef}$

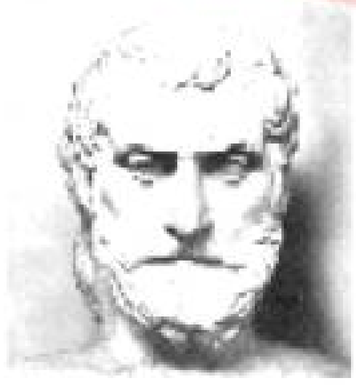
Cortadas por dos transversales:

Los segmentos formados en ambas transversales son proporcionales.

Las tres paralelas

$$\boxed{\frac{\overline{ac}}{\overline{bd}} = \frac{\overline{ce}}{\overline{df}}}$$





Bueno con fórmulas parece más difícil. La cuestión es que del lado izquierdo se forman dos segmentos que van a ser proporcionales a los del lado derecho.

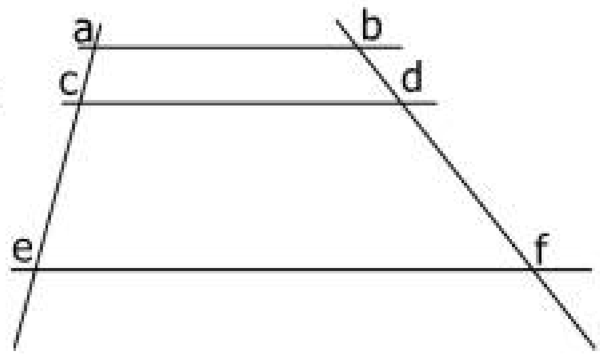
¿Qué significa que los segmentos sean proporcionales? Significa que si divido un segmento del lado izquierdo por el que le corresponde del lado derecho, obtengo como resultado una constante, que va a ser igual a la que obtengo si divido al otro segmento del lado izquierdo por su correspondiente del lado derecho.

También puedo dividir al "segmento grande" del lado izquierdo por el "segmento grande" del lado derecho.

$$\boxed{\frac{\overline{ac}}{\overline{bd}} = \frac{\overline{ce}}{\overline{df}} = \frac{\overline{ae}}{\overline{bf}} = \text{Constante de proporcion alidad}}$$

Ejemplo: Vamos a ver como funciona el teorema de Thales con un ejemplo:

Supongamos que tenemos el siguiente gráfico: Hallar $\overline{df}$



Datos:

$$\begin{cases} \overline{ab} \ // \ \overline{cd} \ // \ \overline{ef} \\ \overline{ac} = 2 \text{ cm} \\ \overline{ce} = 6 \text{ cm} \\ \overline{bd} = 3 \text{ cm} \\ \overline{df} = ??? \end{cases}$$

Podemos entonces plantear la fórmula de Thales: $\frac{\overline{ac}}{\overline{bd}} = \frac{\overline{ce}}{\overline{df}}$

Remplazamos los valores que conocemos, y al que queremos calcular, "lo llamamos" X:

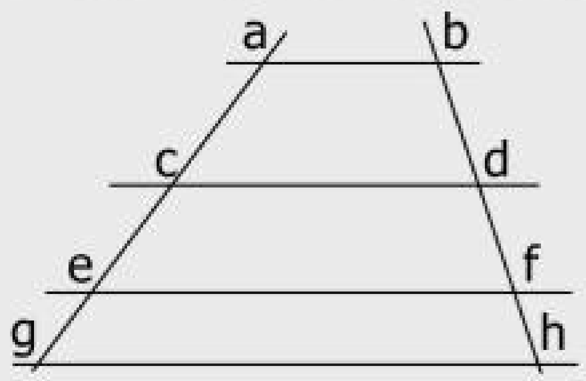
$$\frac{2 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \frac{6 \text{ cm}}{X} \Rightarrow \frac{2 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} \times \frac{6 \text{ cm}}{X} \Rightarrow 2\text{cm} \cdot X = 3\text{cm} \cdot 6\text{cm} \Rightarrow X = \frac{18 \text{ cm}^2}{2 \text{ cm}} \Rightarrow X = \frac{\cancel{18}^{9} \cancel{\text{cm}^2}}{\cancel{2}_{1} \cancel{\text{cm}}} \quad \boxed{= 9 \ cm}$$

Multiplico miembro a miembro "cruzado"

Despejo X

Simplifico el 18 con el 2 y el cm² con el cm.

θ <u>El teorema de Thales también funciona si tengo más de tres paralelas</u>:



$\overline{ab} // \overline{cd} // \overline{ef} // \overline{gh}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\overline{ac}}{\overline{bd}} = \frac{\overline{ce}}{\overline{df}} = \frac{\overline{eg}}{\overline{fh}}}$$

Y también puedo decir que son proporcionales los "segmentos grandes" (los que se forman con dos o más segmentos) Un "segmento grande" de la izquierda va a ser proporcional al "segmento grande" que le corresponde del lado derecho.

$$\boxed{\frac{\overline{ae}}{\overline{bf}} = \frac{\overline{cg}}{\overline{dh}} = \frac{\overline{ag}}{\overline{bh}}}$$

También se pueden expresar proporciones con sumas, como por ejemplo:

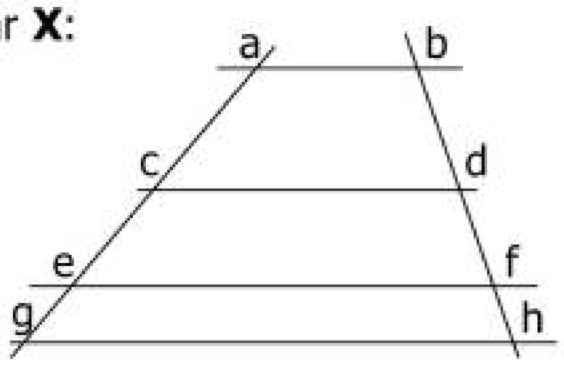
$$\frac{\overline{ac}+\overline{ce}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{bd}+\overline{df}}{\overline{bd}} \qquad \frac{\overline{ac}+\overline{ce}}{\overline{ce}} = \frac{\overline{bd}+\overline{df}}{\overline{df}} \qquad \frac{\overline{ae}+\overline{eg}}{\overline{ae}} = \frac{\overline{bf}+\overline{fh}}{\overline{bf}}$$

$$\frac{\overline{ce}+\overline{eg}}{\overline{ce}} = \frac{\overline{df}+\overline{fh}}{\overline{df}} \qquad \frac{\overline{ce}+\overline{eg}}{\overline{eg}} = \frac{\overline{df}+\overline{fh}}{\overline{fh}} \qquad \frac{\overline{ac}+\overline{cg}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{bd}+\overline{dh}}{\overline{dh}}$$

Y así sucesivamente....

Podría plantear muchas proporciones más.

Otro ejemplo: Avancemos un poco... ahora en lugar de tener datos concretos, voy a tener datos con "**X**".
Y el ejercicio es hallar **X**:



Datos:
$$\begin{cases} \overline{ab} \,//\, \overline{cd} \,//\, \overline{ef} \,//\, \overline{gh} \\ \overline{ac} = X+2 \\ \overline{cg} = X+5 \\ \overline{bd} = 2 \\ \overline{dh} = 4 \end{cases}$$

Empezamos escribiendo una proporción: *(una proporción que involucre los datos que tengo)* $\Rightarrow \dfrac{\overline{ac}}{\overline{cg}} = \dfrac{\overline{bd}}{\overline{dh}}$

Remplazamos los valores $\dfrac{X+2}{X+5} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow \dfrac{X+2}{X+5} \times \dfrac{2}{4} \Rightarrow 4 \cdot (X+2) = 2 \cdot (X+5)$

Acá usamos la propiedad fundamental de las proporciones numéricas: **"El producto de los medios es igual al producto de los extremos"** (Que sería esa multiplicación "cruzada" lo que nos hace mas simple poder despejar x)

Sigamos:

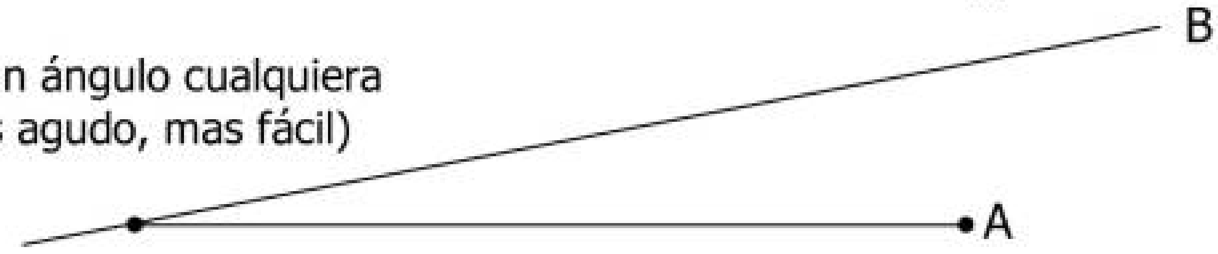
$$4 \cdot (X+2) = 2 \cdot (X+5) \Rightarrow 4X + 8 = 2X + 10 \Rightarrow 4X - 2X = 10 - 8 \Rightarrow 2X = 2 \Rightarrow \boxed{X = 1}$$

Distributiva — Las "X" de un lado
Los números del otro

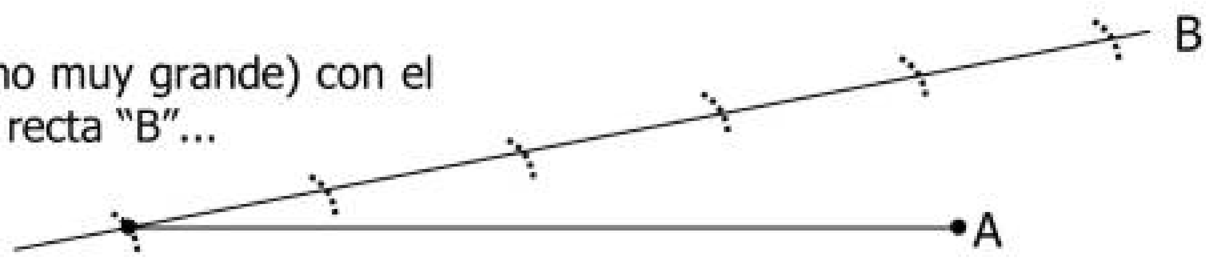
Aplicación del teorema de Thales: Podemos usar el teorema de Thales para dividir un segmento en una cantidad cualquiera de partes iguales sin tener que tomar medidas ni hacer cuentas!

Vamos a ver como se hace:
Tenemos trazado un segmento "A" - **Queremos dividirlo en 5 partes iguales.**

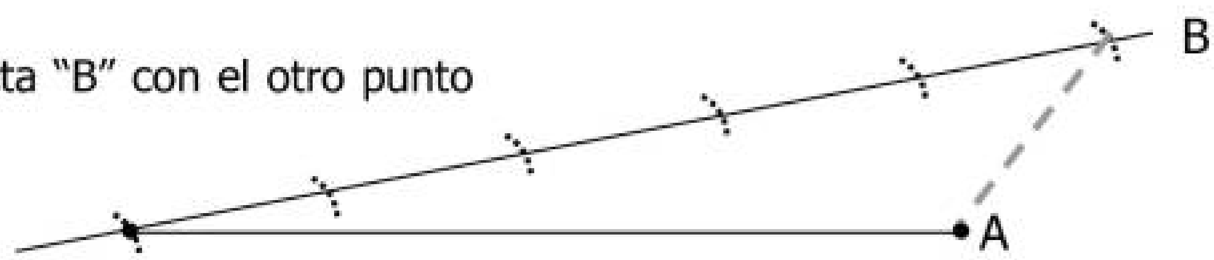
1. Vamos a trazar otra recta "B" con un ángulo cualquiera
Por un extremo del segmento (si es agudo, mas fácil)



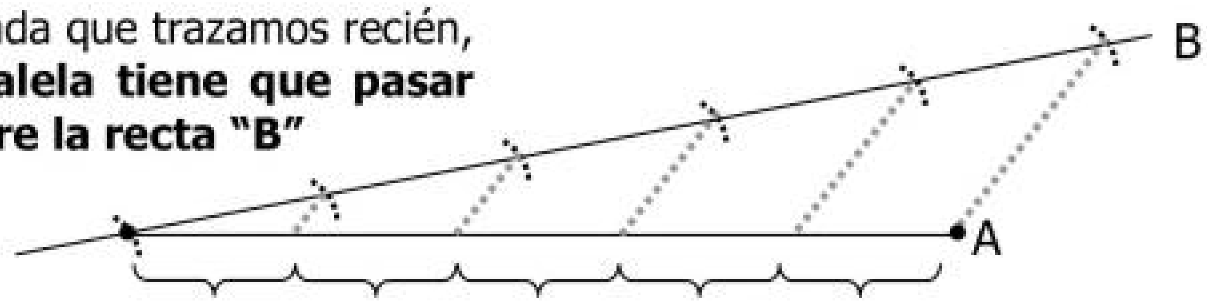
2. Tomamos una unidad "cualquiera" (no muy grande) con el compás y la marcamos 5 veces en la recta "B"...



3. Unimos la última marca sobre la recta "B" con el otro punto del segmento "A"



4. Trazamos paralelas a la recta punteada que trazamos recién, teniendo en cuenta que **cada paralela tiene que pasar por cada marca que hicimos sobre la recta "B"**

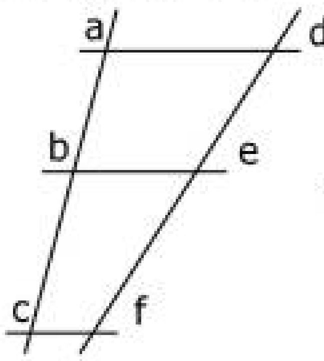


Y me quedó la recta "A" dividida en 5 partes iguales.

¿Qué tiene que ver Thales con todo esto? Justamente estamos aplicando su Teorema, ya que al ser paralelas las rectas de línea punteada:

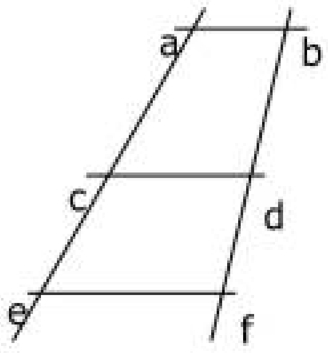
- Las unidades marcadas en la recta "B" van a ser proporcionales a las de la recta "A".
- Como las unidades de la recta "B" son iguales entre sí, Las de la recta "A" también lo van a ser (porque son proporcionales) -> Por lo tanto la recta "A" queda dividida en partes iguales.

1) Hallar $\overline{ab}$



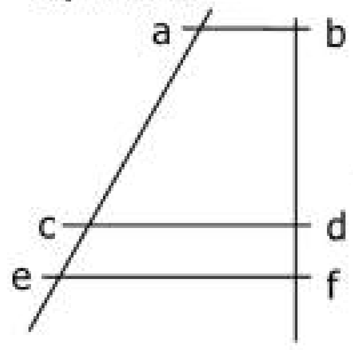
Datos:
$$\begin{cases} \overline{ad} \parallel \overline{be} \parallel \overline{cf} \\ \overline{bc} = 4{,}5\,cm \\ \overline{de} = 2\,cm \\ \overline{ef} = 3\,cm \end{cases}$$

2) Hallar $\overline{df}$



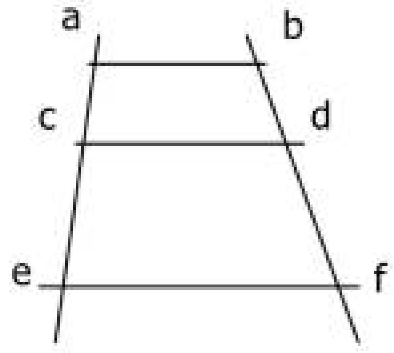
Datos:
$$\begin{cases} \overline{ab} \parallel \overline{cd} \parallel \overline{ef} \\ \overline{ae} = 24\,cm \\ \overline{ce} = 9\,cm \\ \overline{bf} = 20\,cm \end{cases}$$

3) Hallar $\overline{ae}$



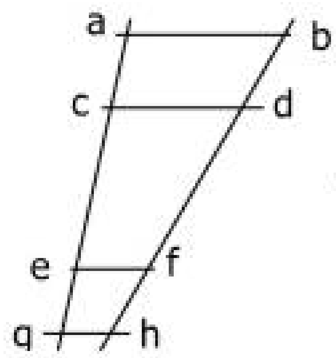
Datos:
$$\begin{cases} \overline{ab} \parallel \overline{cd} \parallel \overline{ef} \\ \overline{ce} = 4\,cm \\ \overline{df} = 3\,cm \\ \overline{bd} = 9\,cm \end{cases}$$

4) Hallar $\overline{bd}$



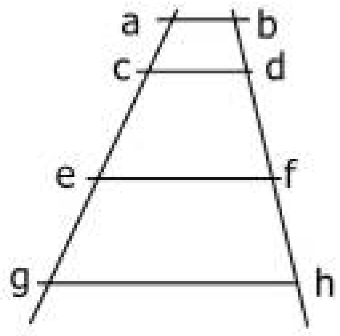
Datos:
$$\begin{cases} \overline{ab} \parallel \overline{cd} \parallel \overline{ef} \\ \overline{ac} = 4\,cm \\ \overline{ce} = 8\,cm \\ \overline{df} = 6\,cm \end{cases}$$

5) Hallar $\overline{ce}$



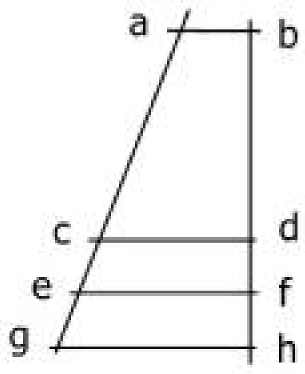
Datos:
$$\begin{cases} \overline{ab} \parallel \overline{cd} \parallel \overline{ef} \parallel \overline{gh} \\ \overline{ac} = 2\,cm \\ \overline{bd} = 3\,cm \\ \overline{dh} = 12\,cm \\ \overline{fh} = 3\,cm \end{cases}$$

6) Hallar $\overline{df}$



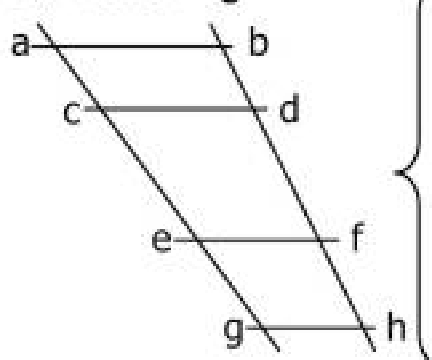
Datos:
$$\begin{cases} \overline{ab} \parallel \overline{cd} \parallel \overline{ef} \parallel \overline{gh} \\ \overline{ga} = 7{,}5\,cm \\ \overline{ea} = 4{,}5\,cm \\ \overline{bf} = \overline{dh} = 3\,cm \end{cases}$$

7) Hallar $\overline{dh}$



Datos:
$$\begin{cases} \overline{ab} \parallel \overline{cd} \parallel \overline{ef} \parallel \overline{gh} \\ \overline{ce} = \overline{eg} = 4\,cm \\ \overline{ac} = 16\,cm \\ \overline{bf} = 15\,cm \end{cases}$$

8) Hallar $\overline{eg}$

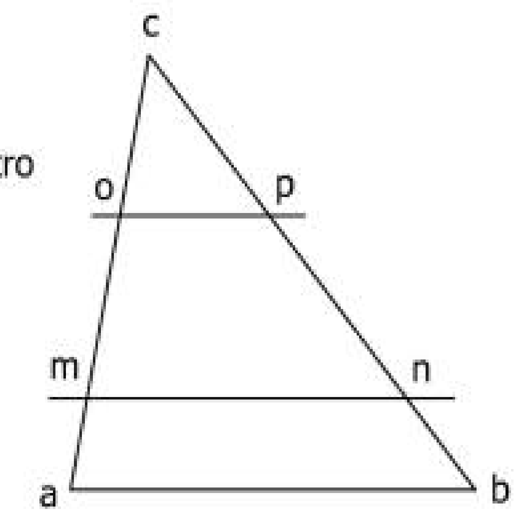


Datos:
$$\begin{cases} \overline{ab} \parallel \overline{cd} \parallel \overline{ef} \parallel \overline{gh} \\ \overline{ae} = 60\,cm \\ \overline{bd} = 16\,cm \\ \overline{ac} = 20\,cm \\ \overline{dh} = 56\,cm \end{cases}$$

9)

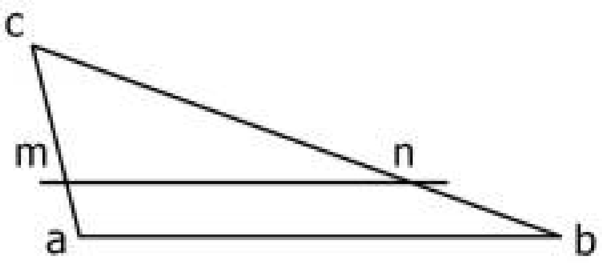
A - Hallar el perímetro del triángulo abc

B - ¿Qué tipo de triángulo es?



Datos:
$$\begin{cases} \overline{ab} \parallel \overline{op} \parallel \overline{mn} \\ \overline{co} = \overline{op} = 20\,cm \\ \overline{om} = 30\,cm \\ \overline{pn} = 36\,cm \\ \overline{nb} = 12\,cm \end{cases}$$

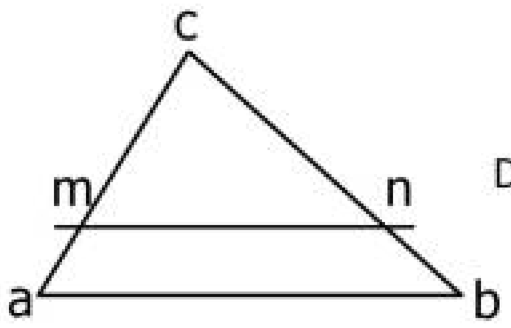
Hallar el perímetro del triángulo abc



10)
$$\begin{cases} \overline{mn} = 8\,cm \\ \overline{cm} = 4\,cm \\ \overline{am} = 1\,cm \\ \overline{bc} = 15\,cm \end{cases}$$

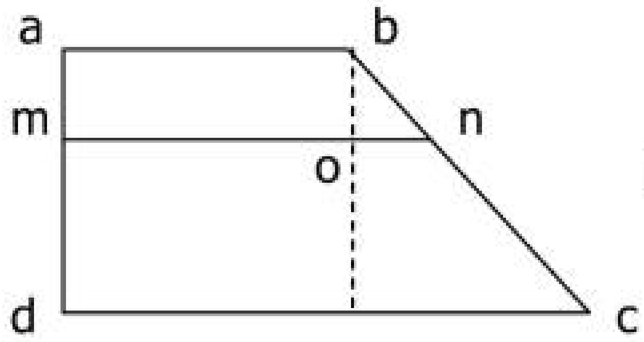
11)
$$\begin{cases} \overline{mn} = 12\,cm \\ \overline{nb} = 4{,}5\,cm \\ \overline{cm} = 6\,cm \\ \overline{ca} = 7{,}5\,cm \end{cases}$$

12) Hallar $\overline{mn}$



Datos: $\begin{cases} \overline{cm} = 15\,cm \\ \overline{am} = 3\,cm \end{cases}$ $\overline{ab} \parallel \overline{mn}$ $\overline{ab} = 24\,cm$

Hallar el perímetro del Trapecio abcd.



$\overline{mn} \,//\, \overline{dc}$

13)

Datos $\begin{cases} \overline{ab} = 8\,\text{cm} \\ \overline{am} = 4\,\text{cm} \\ \overline{md} = 8\,\text{cm} \\ \overline{bn} = 5\,\text{cm} \end{cases}$

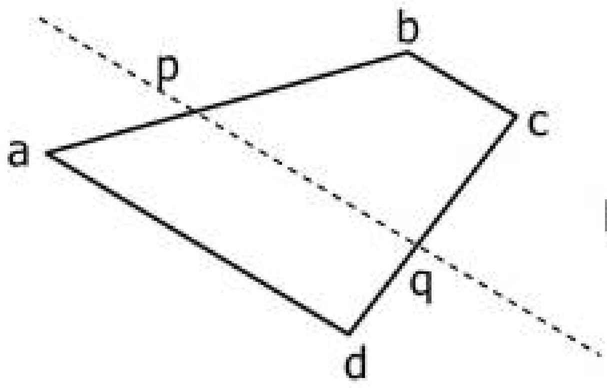
14)

Datos $\begin{cases} \overline{mn} = 15\,\text{cm} \\ \overline{am} = 12\,\text{cm} \\ \overline{bn} = 13\,\text{cm} \\ \overline{nc} = 19{,}5\,\text{cm} \end{cases}$

Nota: Repasar el teorema de pitágoras para resolver estos dos ejercicios

15) abcd es un cuedrilátero irregular.

Incógnitas: $\begin{cases} \overline{dc} = ?? \\ \overline{qc} = ?? \end{cases}$



Datos: $\begin{cases} \overline{ad} \,//\, \overline{bc} \,//\, \overline{pq} \\ \overline{pb} = 2 \cdot \overline{pa} \\ \overline{ab} = 15\ cm \\ \overline{dq} = 4\ cm \end{cases}$

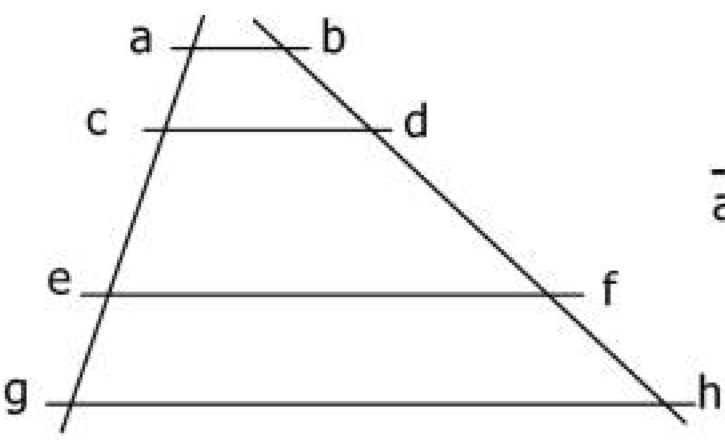
16) Dibujar un segmento de 20 cm de lado y dividirlo en 6 partes iguales, ayudados por una semirecta auxiliar, utilizando el teorema de tales, una regla y un compás. Luego verificar con la regla que las seis partes sean iguales y que equivalgan cada una a la sexta parte del segmento de 20 cm.

17) Dibujar un segmento de 5 cm de largo y luego, ayudados por una semirecta auxiliar, utilizando tus conceptos sobre proporcionalidad geométrica, una regla y un compás, trazar sobre la semirecta auxiliar un segmento que mida las 3/7 partes del primero (sin usar la regla para medir en ningún momento).

Ejercicios para Hallar **X**

El siguiente gráfico es la referencia para resolver los ejercicios que están a continuación.

Tomar todos los ejercicios como ejercicios independientes uno del otro.



$\overline{ab} \,//\, \overline{cd} \,//\, \overline{ef} \,//\, \overline{gh}$

18) $\begin{cases} \overline{ae} = 8X + 1\,\text{cm} \\ \overline{eg} = 5X - 2\,\text{cm} \\ \overline{bf} = 12\,\text{cm} \\ \overline{fh} = 4\,\text{cm} \end{cases}$

19) $\begin{cases} \overline{ae} = 2X + 2\,\text{cm} \\ \overline{ce} = 5X - 6\,\text{cm} \\ \overline{bf} = 9\,\text{cm} \\ \overline{df} = 6\,\text{cm} \end{cases}$

20) $\begin{cases} \overline{ac} = X + 1\,\text{cm} \\ \overline{eg} = 3X - 3\,\text{cm} \\ \overline{bd} = 5\,\text{cm} \\ \overline{fh} = 7{,}5\,\text{cm} \end{cases}$

21) $\begin{cases} \overline{ac} = 2X - 3\ \text{cm} \\ \overline{ag} = 2X + 12\ \text{cm} \\ \overline{bd} = 6\ \text{cm} \\ \overline{bh} = 24\ \text{cm} \end{cases}$

22) $\begin{cases} \overline{ac} = 2X \\ \overline{cg} = 5X - 5\ \text{cm} \\ \overline{bd} = 8\ \text{cm} \\ \overline{bh} = 24\ \text{cm} \end{cases}$

23) $\begin{cases} \overline{ce} = X + 1\ \text{cm} \\ \overline{cg} = 2X - 2\ \text{cm} \\ \overline{df} = 14\ \text{cm} \\ \overline{fh} = 6\ \text{cm} \end{cases}$

24) $\begin{cases} \overline{ae} = \frac{3}{7}X + 1\,cm \\ \overline{eg} = \frac{1}{2}X - 1{,}5\,cm \\ \overline{bf} = 6\ \text{cm} \\ \overline{fh} = 3\ \text{cm} \end{cases}$

25) $\begin{cases} \overline{ce} = \frac{3}{8}X + 1\ \text{cm} \\ \overline{ag} = \frac{1}{2}X + 6\ \text{cm} \\ \overline{df} = 6\ \text{cm} \\ \overline{bh} = 15\ \text{cm} \end{cases}$

26) $\begin{cases} \overline{ac} = \frac{5}{9}X - 1\ \text{cm} \\ \overline{cg} = \frac{1}{3}X + 7\ \text{cm} \\ \overline{bd} = 9\ \text{cm} \\ \overline{bh} = 24\ \text{cm} \end{cases}$

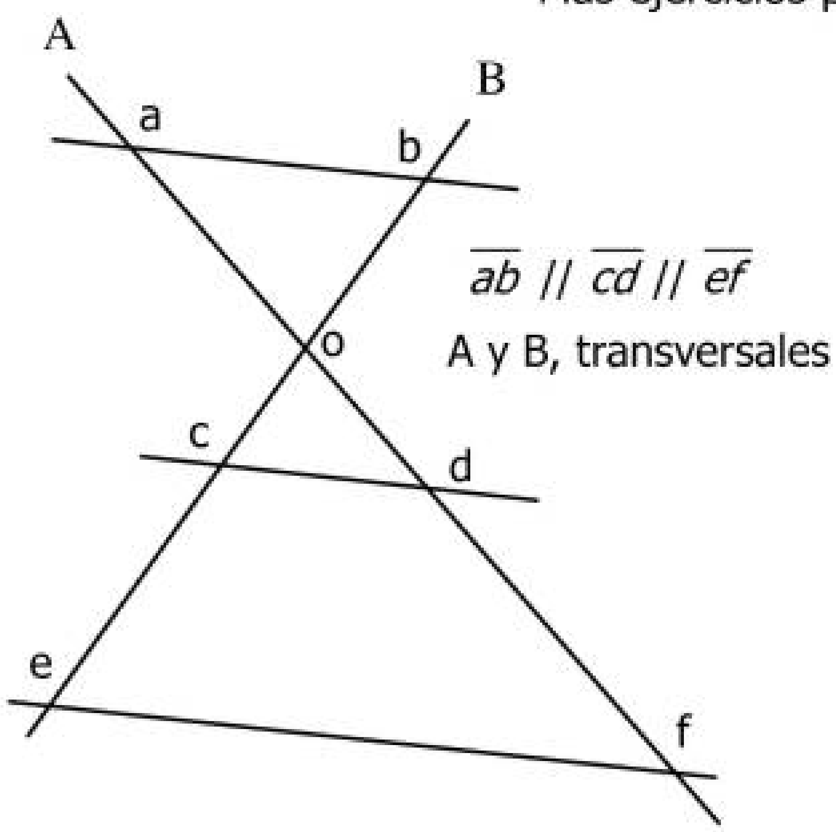
27) $\begin{cases} \overline{eg} = \frac{7}{10}X - 5\ \text{cm} \\ \overline{cg} = \frac{1}{2}X + 1\ \text{cm} \\ \overline{df} = 5\ \text{cm} \\ \overline{fh} = 2{,}5\ \text{cm} \end{cases}$

28) $\begin{cases} \overline{ce} = \frac{3}{11}X + 1\ \text{cm} \\ \overline{eg} = X - 7\ \text{cm} \\ \overline{df} = 7\ \text{cm} \\ \overline{dh} = 14\ \text{cm} \end{cases}$

29) $\begin{cases} \overline{ac} = \frac{5}{6}X - 6\ \text{cm} \\ \overline{ce} = \frac{1}{3}X + 4\ \text{cm} \\ \overline{bd} = 5\ \text{cm} \\ \overline{bf} = 15\ \text{cm} \end{cases}$

Más ejercicios para Hallar **X**

Tomar todos los ejercicios como ejercicios independientes uno del otro.



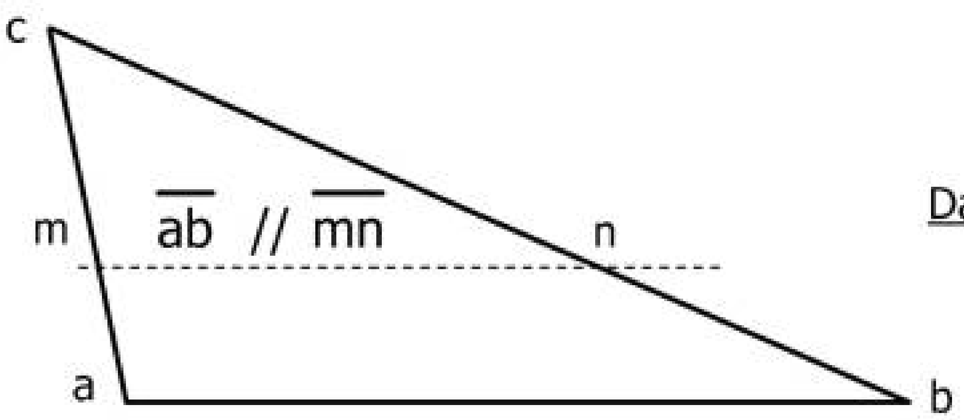
30) $\begin{cases} \overline{co} = 4{,}8\ cm \\ \overline{eo} = 12\ cm \\ \overline{do} = 4\ cm \\ \overline{fo} = X - 1cm \end{cases}$

31) $\begin{cases} \overline{co} = X + 1{,}8\ cm \\ \overline{bo} = 6\ cm \\ \overline{do} = X + 1\ cm \\ \overline{ao} = 5cm \end{cases}$

32) $\begin{cases} \overline{ao} = 15\ cm \\ \overline{fo} = 2 \cdot \overline{ao} \\ \overline{bo} = X + 11\ cm \\ \overline{eo} = 36\ cm \end{cases}$

33) $\begin{cases} \overline{ao} = 25\ cm \\ \overline{do} = 20\ cm \\ \overline{bo} = 30\ cm \\ \overline{df} = \overline{do} + 10cm \\ \overline{eo} = 7X - 31cm \end{cases}$

Consigna del ejercicio: **Hallar X**



34) Datos: $\begin{cases} \overline{mn} = 4X + 4cm \\ \overline{ab} = 7X + 3cm \\ \overline{am} = 1cm \\ \overline{cm} = 4\ cm \end{cases}$

35) Datos: $\begin{cases} \overline{cn} = 7X + 4cm \\ \overline{nb} = X + 2{,}5\ cm \\ \overline{cm} = 6cm \\ \overline{ca} = 7{,}5\ cm \end{cases}$

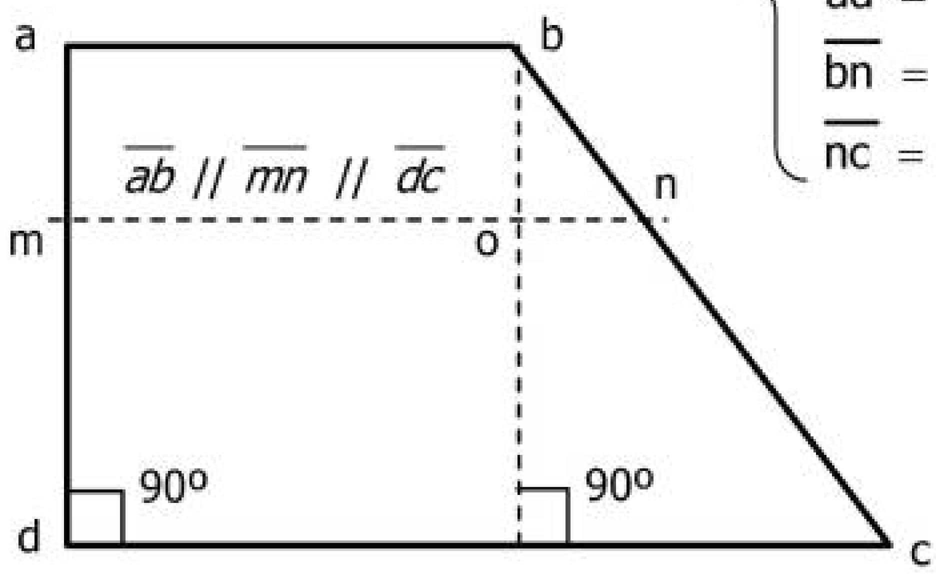
36) Datos: $\begin{cases} \overline{mn} = X + 1\ cm \\ \overline{ab} = 5cm \\ \overline{cn} = X + 3cm \\ \overline{bc} = 7{,}5\ cm \end{cases}$

37) Datos: $\begin{cases} \overline{mn} = 4X \\ \overline{ab} = 4X + 4cm \\ \overline{cm} = 8cm \\ \overline{ma} = 2cm \end{cases}$

38) Datos: $\begin{cases} \overline{mn} = 2X + 2cm \\ \overline{ab} = 15cm \\ \overline{cm} = 11cm - X \\ \overline{ma} = X - 3{,}5cm \end{cases}$

Más para **Hallar X**

Ahora según este esquema con el siguiente trapecio rectángulo



Tomar todos los ejercicios de esta serie como ejercicios independientes uno del otro.

39) Datos: $\begin{cases} \overline{ab} = 8\ cm \\ \overline{mn} = 11\ cm \\ \overline{ad} = 12\ cm \\ \overline{bn} = 5\ cm \\ \overline{nc} = X + 4cm \end{cases}$

40) Datos: $\begin{cases} \overline{mn} = 15\ cm \\ \overline{ab} = 10\ cm \\ \overline{bn} = 13\ cm \\ \overline{ad} = 30\ cm \\ \overline{nc} = \frac{5}{2}X + 2cm \end{cases}$

41) Datos: $\begin{cases} \overline{ab} = 4cm \\ \overline{am} = 2cm \\ \overline{nc} = 5cm \\ \overline{bn} = 2{,}5cm \\ \overline{dc} = \frac{15}{16}X + 1cm \end{cases}$

42) Datos: $\begin{cases} \overline{bc} = 15cm \\ \overline{am} = \frac{1}{9}X + 3\ cm \\ \overline{md} = \frac{2}{3}X + 2cm \\ \overline{bn} = 5cm \end{cases}$

43) Datos: $\begin{cases} \overline{dc} = 22{,}5cm \\ \overline{ab} = 10cm \\ \overline{ad} = 30cm \\ \overline{md} = 18cm \\ \overline{bn} = X + 3cm \end{cases}$

44) Dibujar un segmento de 20cm de lado y dividirlo en 2 partes, tales que una sea las 3/4 partes de la otra

Ayudados por una semirecta auxiliar, utilizando el teorema de tales, una regla y un compás (Sin usar la regla para medir, ni hacer ninguna cuenta). Luego, una vez hecho esto, verificar con la regla que las partes en las que se dividió al segmento sean tales que una equivalga a las 3/4 partes de la otra.
Sugerencia: Trazar sobre la semirecta auxiliar 7 (o sea 3+4) segmentos iguales de cualquier medida con el compás

45) Dibujar un segmento de 18 cm y de modo similar al ejercicio anterior (Utilizando el teorema de Thales y un compás), con la ayuda de una semirrecta auxiliar, dividir al segmento de 18 cm en 2 partes tal que una se las 2/5 partes de la otra.

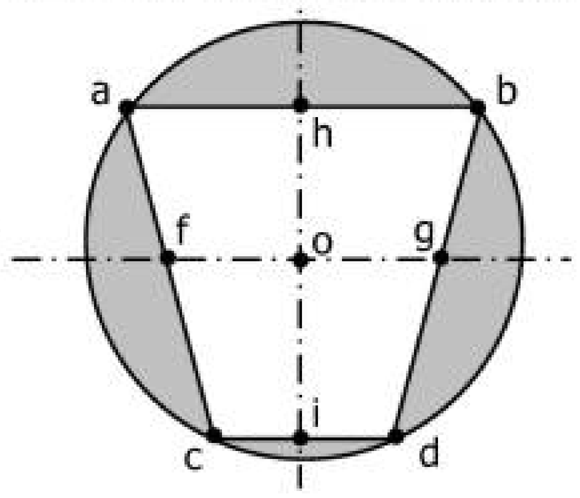
Ejercicio Integrador:

(Debe saberse el teorema de Pitágoras y operaciones con irracionales)

46) Hallar el radio del círculo

47) Hallar $\overline{ab}$

48) Hallar el área sombreada.
(Expresarla como número real)
(Sin decimales)

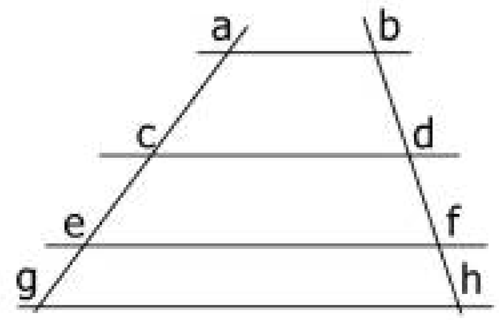


Datos:

- $\overset{\frown}{abcd}$ es un trapecio isósceles.
- El punto "o" es el centro del círculo.
- $\overline{bg} = 8$ cm $\overline{gd} = 3x - 3$ cm
- $\overline{ho} = 6$ cm $\overline{oi} = \frac{1}{2}\overline{bg} + 3$cm
- $\overline{cd} = 2\sqrt{19}$ cm

Dados el siguiente gráfico y las proporciones geométricas responder Verdadero o Falso según si la proporción planteada en cada ejercicio es correcta o no.

Nota: Prestar atención con los segmentos si hay correspondencia en las proporciones.



49) $\frac{\overline{ac}}{\overline{bd}} = \frac{\overline{cg}}{\overline{dh}}$

50) $\frac{\overline{ac}}{\overline{bd}} = \frac{\overline{ce}}{\overline{dh}}$

51) $\frac{\overline{ce}}{\overline{df}} = \frac{\overline{cg}}{\overline{df}}$

52) $\frac{\overline{eg}}{\overline{fh}} = \frac{\overline{ag}}{\overline{bh}}$

53) $\frac{\overline{ac}}{\overline{ag}} = \frac{\overline{db}}{\overline{bh}}$

54) $\frac{\overline{ce}}{\overline{ae}} = \frac{\overline{df}}{\overline{bf}}$

55) $\frac{\overline{df}}{\overline{bh}} = \frac{\overline{ce}}{\overline{ag}}$

56) $\frac{\overline{ae}}{\overline{bf}} = \frac{\overline{cg}}{\overline{df}}$

57) $\frac{\overline{ae}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{bf}}{\overline{dh}}$

58) $\frac{\overline{ac}}{\overline{bd}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{gh}}$

59) $\frac{\overline{ae}}{\overline{bf}} = \frac{\overline{cg}}{\overline{bf}}$

60) $\frac{\overline{ae}}{\overline{bf}} = \frac{\overline{ag}}{\overline{bh}}$

61) $\frac{\overline{ce}}{\overline{df}} = \frac{\overline{ag}}{\overline{bf}}$

62) $\frac{\overline{ce}}{\overline{ag}} = \frac{\overline{df}}{\overline{bh}}$

63) $\frac{\overline{eg}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{fh}}{\overline{dh}}$

64) $\frac{\overline{eg}}{\overline{fh}} = \frac{\overline{ae}}{\overline{df}}$

65) $\frac{\overline{ag}}{\overline{ae}} = \frac{\overline{bh}}{\overline{bf}}$

66) $\frac{\overline{ag}}{\overline{ae}} = \frac{\overline{bh}}{\overline{bd}}$

67) $\frac{\overline{ce}+\overline{eg}}{\overline{eg}} = \frac{\overline{df}+\overline{fh}}{\overline{fh}}$

68) $\frac{\overline{ce}+\overline{eg}}{\overline{eg}} = \frac{\overline{df}+\overline{fh}}{\overline{df}}$

69) $\frac{\overline{ag}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{bf}+\overline{fh}}{\overline{bd}}$

70) $\frac{\overline{ae}+\overline{eg}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{bf}+\overline{fh}}{\overline{fh}}$

71) $\frac{\overline{ae}+\overline{eg}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{bf}+\overline{fh}}{\overline{df}}$

72) $\frac{\overline{ae}+\overline{ag}}{\overline{ce}} = \frac{\overline{bf}+\overline{bh}}{\overline{df}}$

73) $\frac{\overline{ae}+\overline{ce}}{\overline{eg}} = \frac{\overline{bf}+\overline{df}}{\overline{fh}}$

74) $\frac{\overline{ae}+\overline{ac}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{bf}+\overline{bd}}{\overline{df}}$

75) $\frac{\overline{ac}+\overline{eg}}{\overline{ce}} = \frac{\overline{bd}+\overline{fh}}{\overline{df}}$

76) $\frac{\overline{cg}+\overline{ce}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{df}+\overline{dh}}{\overline{bd}}$

77) $\frac{\overline{ac}+\overline{ce}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{bf}}{\overline{dh}}$

78) $\frac{\overline{ac}+\overline{ce}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{bd}+\overline{dh}}{\overline{dh}}$

79) $\frac{\overline{ag}-\overline{eg}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{bh}-\overline{fh}}{\overline{bd}}$

80) $\frac{\overline{ag}-\overline{eg}}{\overline{ac}+\overline{ce}} = \frac{\overline{bh}-\overline{fh}}{\overline{bd}+\overline{dh}}$

81) $\frac{\overline{cg}+\overline{ce}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{df}+\overline{dh}}{\overline{df}}$

82) $\frac{\overline{ac}+\overline{ce}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{bd}+\overline{df}}{\overline{dh}}$

83) $\frac{\overline{ag}-\overline{eg}}{\overline{ae}} = \frac{\overline{bh}-\overline{fh}}{\overline{bh}}$

84) $\frac{\overline{ac}+\overline{ce}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{bf}+\overline{df}}{\overline{dh}}$

85) $\frac{\overline{cg}-\overline{ce}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{fh}}{\overline{dh}}$

86) $\frac{\overline{ac}+\overline{ce}}{\overline{cg}-\overline{eg}} = \frac{\overline{bf}}{\overline{dh}-\overline{fh}}$

87) $\frac{\overline{ac}+\overline{ce}}{\overline{ce}} = \frac{\overline{bf}}{\overline{bh}-\overline{fh}}$

88) $\frac{\overline{ac}+\overline{cg}}{\overline{cg}-\overline{ce}} = \frac{\overline{bh}}{\overline{dh}-\overline{df}}$

89) $\frac{\overline{ac}+\overline{cg}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{bf}+\overline{dh}}{\overline{dh}}$

90) $\frac{\overline{ac}+\overline{eg}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{bd}+\overline{fh}}{\overline{bf}}$

91) $\frac{\overline{ae}}{\overline{eg}} = \frac{\overline{bd}+\overline{df}}{\overline{fh}}$

92) $\frac{\overline{ag}}{\overline{ag}-\overline{ae}} = \frac{\overline{bf}+\overline{fh}}{\overline{fh}}$

93) $\frac{\overline{ac}+\overline{cg}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{bf}+\overline{dh}}{\overline{dh}}$

Nota: Cualquiera de las proporciones anteriores puede verificarse numéricamente con un ejemplo real. Para ayudarte si tenés dudas en alguno te damos los números de un ejemplo real, para que con estos valores puedas verificar si respondiste bien cada ejercicio. $\overline{ac} = 24$ cm ; $\overline{ce} = 20$ cm ; $\overline{eg} = 12$ cm ; $\overline{bd} = 18$ cm ; $\overline{df} = 15$ cm ; $\overline{fh} = 9$ cm

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Proporcionalidad Numérica

Número de Tema: **27**

Área: **Matemática**

- **¿Qué es una proporción numérica?** Es una relación entre números,

Veamos un caso real de proporcionalidad numérica: "**Una máquina que fabrica caramelos, los hace a una razón de 6 caramelos cada 11 segundos"**

Si en 11 segundos hizo 6 caramelos, en 22 segundos (el doble de tiempo) habrá hecho el doble, o sea 12 caramelos. Si escribimos estos valores en forma de fracciones o razones nos quedaría así:

$$\frac{6\ \textit{Caramelos}}{11\ \textit{Segundos}}\ ;\ \frac{12\ \textit{Caramelos}}{22\ \textit{Segundos}}$$

Ahora bien, como ambas razones, se refieren a la misma "causa" de proporcionalidad (en este caso a la máquina que fabrica caramelos) podemos entonces escribir ambas razones igualadas (y ahora obviamos las unidades) $\frac{6}{11} = \frac{12}{22}$

Cada una de las razones igualadas (6/11 y 12/22) son las razones de esta proporción. ⇐ **Y aquí tenemos lo que se denomina una proporcionalidad numérica**

Otro ejemplo: Entre 3 y 6 hay una razón, en este caso la razón es 1/2. Y es 1/2 porque el primero es la mitad del otro. Si igualamos esta razón a otra razón equivalente (por ejemplo 2 y 4, cuya razón también es 1/2), obtenemos una proporcionalidad entre ambas razones.

- **Proporciones numéricas y constante de proporcionalidad**

Todo este tema de las proporciones se pone interesante cuando igualamos 2 o más razones o fracciones equivalentes. Cuando igualamos dos razones, aparece la denominada **constante de proporcionalidad.**

Veamos un ejemplo:
Acá tenemos dos razones igualadas: $\frac{8}{2} = \frac{20}{5}$

Estudiemos un poco esta igualdad:
¿Cuál es la razón entre 8 y 2? La respuesta es 4, porque 8 es cuatro veces 2
¿Cuál es la razón entre 20 y 5? La respuesta es 4, porque 20 es cuatro veces 5

En este caso la constante de proporcionalidad es 4

Veamos otro ejemplo:
Tenemos estas tres razones igualadas: $\frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{20}{15}$

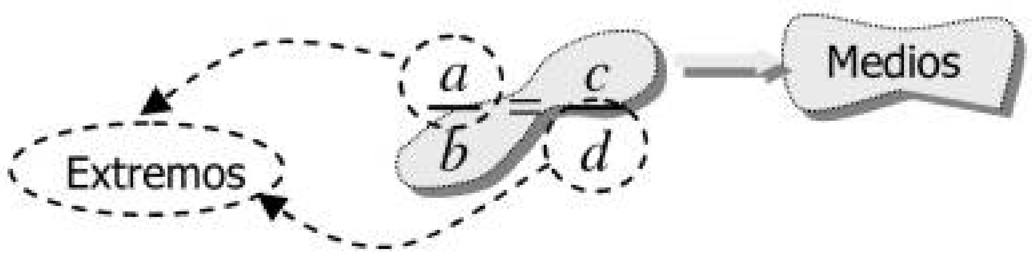
Ahora la pregunta es: **¿Cuál es la constante de proporcionalidad en este caso?**
Para calcular la constante de proporcionalidad, lo único que tenemos que hacer es calcular la razón de cualquiera de las partes de la igualdad, por ejemplo, calculemos en este caso la razón entre 8 y 6:

- Para calcular la razón entre dos números tenemos que dividir uno por el otro, en este caso no son divisibles, lo que no significa que no haya proporción, el hecho de que no sean divisibles significa que la razón va a ser una fracción, en este caso 4/3 (que es la cuenta que resulta de dividir a 8 por 6)

⇒ $\frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{20}{15} = \text{Constante de Proporcionalidad} = \frac{4}{3}$ ⇒ **La constante de proporcionalidad es 4/3**

- **Medios y Extremos de las proporciones**

Dada una proporcionalidad, se **llaman medios al denominador de la primera razón y al numerador de la segunda** y extremos al numerador de la primera razón y al denominador de la segunda



Ejemplo:
Dada la siguiente proporción: $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$ ⇒
- Los medios son: 5 y 24
- Los extremos son: 3 y 40

Propiedad Fundamental de las Proporciones

La propiedad fundamental de las proporciones dice así:
"El producto de los medios es igual al producto de los extremos"

Si en una proporción multiplico los medios y los extremos, ambos productos me tienen que dar lo mismo.

Verifiquemos esta propiedad para las proporciones que vimos recién como ejemplo: $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$

Multiplico medios y extremos (Siempre queda la multiplicación así cruzada) $\frac{3}{5} \times \frac{24}{40}$

Y me queda: ⇨ **3 . 40 = 5 . 24** ⇨ **120 = 120** ⇨ Y como da lo mismo, se verifica la propiedad

- **Si no se llegara a verificar la propiedad es porque las razones no son fracciones equivalentes, o dicho de otra forma porque no hay proporcionalidad entre los términos de la igualdad**

Propiedades Importantes de las Proporciones: (Siempre con valores de "a", "b", "c" y "d" distintos de 0)

(a) En una proporción pueden invertirse las razones. Si a/b = c/d, entonces b/a = d/c.

$$Si\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow Entonces \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$ ⇨ Ejemplo: $$Si\ \frac{3}{5}=\frac{24}{40} \Rightarrow Entonces \Rightarrow \frac{5}{3}=\frac{40}{24}$$

(b) En una proporción a cada antecedente se puede sumar su respectivo consecuente, o a cada consecuente sumar su respectivo antecedente. Si a/b = c/d, entonces (a+b) / b = (c+d) / d
o bien a/ (a+b) = c / (c+d)

$$Si\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow Entonces \left.\begin{array}{l} \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d} \end{array}\right\} \quad \forall\, a \neq -b \wedge \forall\, d \neq -c$$

⇨ Ejemplo: $$Si\ \frac{3}{5}=\frac{24}{40} \Rightarrow Entonces \begin{array}{l} \frac{3+5}{5}=\frac{24+40}{40} \\ \frac{3}{3+5}=\frac{24}{24+40} \end{array}$$

(c) En una proporción a cada antecedente se puede restar su respectivo consecuente, o a cada consecuente restar su respectivo antecedente. Si a/b = c/d, entonces (a-b)/b = (c-d)/d ó
a/(b-a) =c/(d-c)

$$Si\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow Entonces \left.\begin{array}{l} \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \\ \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c} \end{array}\right\} \quad \forall\, a \neq b \wedge \forall\, d \neq c$$

⇨ Ejemplo: $$Si\ \frac{3}{5}=\frac{24}{40} \Rightarrow Entonces \begin{array}{l} \frac{3-5}{5}=\frac{24-40}{40} \\ \frac{3}{5-3}=\frac{24}{40-24} \end{array}$$

(d) En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como cualquiera de sus antecedentes es a su respectivo consecuente. Es decir, la razón entre suma de antecedentes y suma de consecuentes es la constante de proporcionalidad. Si a/b=c/d=e/f, entonces a+c+e / b+d+f = a/b=c/d=e/f

$$Si\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=Cte \Rightarrow Entonces\ \frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=Cte$$ ⇨ Ejemplo: $$Si\ \frac{3}{5}=\frac{24}{40} \Rightarrow \frac{3+24}{5+40}=\frac{3}{5}=\frac{24}{40}$$

Nota: Estas propiedades son muy útiles para resolver sistemas con ecuaciones en los que tenemos más de una incógnita, pero sabemos el valor de la suma de alguna de ellas o de la resta.

Ejemplo. La suma de dos números es 33 y su razón es 3/8 ¿Cuáles son esos números?

Planteo la razón: $\frac{A}{B}=\frac{3}{8}$ ⇨ Utilizo la propiedad (b) ⇨ $\frac{A+B}{B}=\frac{3+8}{8}$ ⇨ Remplazo "A+B" por 33 ⇨ $\frac{33}{B}=\frac{3+8}{8}$

Y me queda una sola incógnita que puedo despejar fácilmente.

- Escribir otra razón, y que se mantenga la proporcionalidad:

1) $\frac{50}{6}=\frac{75}{9}$ 4) $\frac{12}{8}=\frac{21}{14}$ 7) $\frac{4}{5}=\frac{36}{45}$ 10) $\frac{1}{5}=\frac{7}{35}$

2) $\frac{3}{24}=\frac{7}{56}$ 5) $\frac{5}{12}=\frac{10}{60}$ 8) $\frac{11}{12}=\frac{33}{36}$ 11) $3=\frac{24}{8}$

3) $\frac{2}{18}=\frac{3}{27}$ 6) $\frac{1}{2}=\frac{9}{18}$ 9) $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$ 12) $11=\frac{143}{13}$

- Hallar la constante de proporcionalidad:

13) $\frac{50}{6}=\frac{75}{9}$ 16) $\frac{12}{21}=\frac{20}{35}$ 19) $\frac{5}{2}=\frac{25}{10}$ 22) $\frac{14}{16}=\frac{49}{56}$

14) $\frac{10}{8}=\frac{25}{20}$ 17) $\frac{9}{15}=\frac{12}{20}$ 20) $\frac{16}{4}=\frac{52}{13}$ 23) $\frac{2}{10}=\frac{7}{35}=\frac{11}{55}$

15) $\frac{26}{2}=\frac{65}{5}$ 18) $\frac{10}{6}=\frac{45}{27}$ 21) $\frac{12}{13}=\frac{28}{35}$ 24) $\frac{15}{20}=\frac{21}{28}=\frac{39}{52}$

- Problemas de proporcionalidad:

25) En un negocio nos dicen que los precios de los estéreos varían en forma proporcional a los precios de los equipos de música. Por otro lado sabemos que un determinado equipo de música en ese mismo negocio pasó de estar \$800 el mes pasado a estar \$900 este mes, y vemos que un estéreo importado está \$200. Con estos datos, ¿Cuánto debería haber sido el precio del estéreo el mes pasado? Resolver aplicando la propiedad de las proporciones.

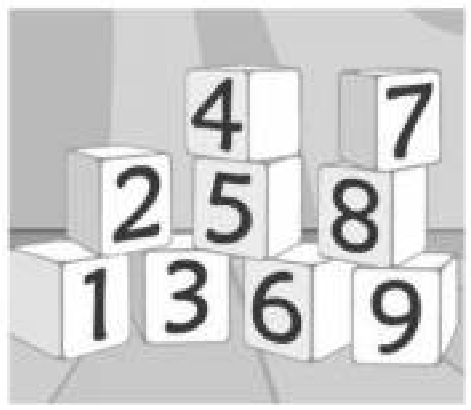
26) Un insumo importado que cuesta actualmente \$40, varía su precio de venta en forma proporcional al precio del dólar, si el dólar aumenta un 5% ¿Cuál será el nuevo precio de este insumo?

27) La profesora de matemáticas dice en una prueba que la nota va a ser proporcional a la cantidad de ejercicios bien resueltos. La prueba consta de 8 ejercicios.

a) Plantear una razón de proporcionalidad entre la nota y la cantidad de ejercicios bien resueltos por cada alumno.

b) Con esa razón de proporcionalidad calcular qué nota va a tener un alumno que resuelva correctamente 5 ejercicios

c) Con la misma razón de proporcionalidad calcular cuántos ejercicios tiene que tener alumno bien resueltos para sacarse exactamente un 5.



28) El espacio recorrido por el sonido a través del aire es proporcional a su velocidad. Sabemos que la velocidad del sonido es de 340 metros por segundo, y que a esa velocidad, escuchamos por ejemplo el sonido de un avión que pasa a 800 metros de distancia unos más tarde, planteando una razón de proporcionalidad entre la velocidad del sonido y el espacio que recorre, calcular a cuántos metros tendría que pasar el avión para escuchar el sonido en el mismo intervalo de tiempo que dijimos recién, pero si la velocidad del sonido fuera de 400 metros por segundo.

29) El espacio recorrido por un ciclista es proporcional a la cantidad de vueltas que da la rueda de la bicicleta. Mediante planteo de proporciones, completar el siguiente cuadro:

Cantidad de vueltas de la rueda	5		120	315		300	
Espacio recorrido (en metros)	6	36			252		228

- Hallar "M" para que las fracciones sean equivalentes y se pueda armar con ellas una proporcionalidad:

30) $\frac{2}{5};\frac{4}{M}$ 32) $\frac{24}{18};\frac{36}{M}$ 34) $\frac{M}{4};\frac{3}{2}$ 36) $\frac{2}{3};\frac{6}{M}$

31) $\frac{4}{9};\frac{8}{M}$ 33) $\frac{24}{M};\frac{6}{1}$ 35) $\frac{4}{9};\frac{M}{18}$ 37) $\frac{2}{M+1};\frac{2}{18}$

- Hallar el valor de "K" que verifica la proporcionalidad

38) $\frac{k+1}{6}=\frac{k}{4}$ 41) $\frac{3k-2}{4}=\frac{11k-21}{1}$ 44) $\frac{\frac{k}{2}+1}{3}=\frac{3k-2}{6}$

39) $\frac{k-1}{3}=\frac{7k-12}{6}$ 42) $\frac{2}{3k}=\frac{1}{k+1}$ 45) $\frac{1}{k-1}=\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{2}}$

40) $\frac{5k+2}{6}=\frac{13k-25}{\frac{1}{2}}$ 43) $\frac{1}{\frac{k}{2}}=1$ 46) $\frac{1}{\frac{1}{k}}=\frac{4}{\frac{2}{k-1}}$

- Problemas de Repartición proporcional:

47) Tres amigos pintaron una casa y les van a pagar \$ 660 por el trabajo. La plata que van a cobrar se la van a repartir proporcionalmente a las horas que trabajó cada uno: Martín trabajó 10 horas en total, Mariano trabajó 7 horas y Matías trabajó 5 horas. ¿Cuánta plata le corresponde a cada uno?

48) Melisa, Anabel y Belén son hermanas, sus padres les regalaron \$ 32 para las tres y les dijeron que se los repartan. Las hermanas decidieron hacer un juego: Como ellas juegan al basket, decidieron tirar cada una 10 tiros libres y repartirse la plata proporcionalmente a los puntos que consiga cada una. Melisa hizo 5 puntos, Anabel hizo 7 y Belén hizo 4. Siguiendo las pautas que pusieron las hermanas para repartir el dinero: ¿Cuánta plata le corresponde a cada una?

49) En un partido de RIVER-BOCA deciden distribuir la recaudación proporcionalmente a los goles que hace cada equipo. Si la recaudación fue de \$ 1.200.000.

Si el partido terminó RIVER:2 BOCA:1
¿Cuánto le corresponde a cada equipo?

50) Los chicos de 7ºA y 7ºB organizaron un baile en la escuela para juntar plata para un viaje y deciden repartir las ganancias proporcionalmente a las entradas vendidas por cada grado. Si recaudaron en total: \$531 Y los de 7º A vendieron 84 entradas y 93 los de 7ºB. ¿Cuántos \$ corresponden a c/grado?

51) Fernando y Pablo iban caminando por la calle y de repente se encontraron una caja con 16 CDs. Para que sea justo, deciden repartírselos proporcionalmente al número que saque cada uno tirando un dado. Fernando sacó un 5 y Pablo un 3. ¿Cuántos CDs le corresponden a cada uno?

Problemas de aplicación:

52) La razón entre la distancia media de la tierra a la luna y de la tierra al sol es de 1/392. La distancia media (aproximada) de la tierra al sol es de 150 millones de kilómetros. Calcular, usando proporciones la distancia media de la tierra a la luna.

53) Volviendo a tomar la distancia aproximada de la tierra al sol (150 millones de kilómetros) y sabiendo que la razón entre esta distancia y la distancia de Saturno al sol es de 2/19. Calcular utilizando proporciones la distancia de Saturno al sol.

54) Con las mediciones más modernas se llegó a la conclusión (bastante exacta) de que la razón entre la circunferencia de la luna y la de la tierra es de 20/73. Suponiendo que la luna y la tierra son esferas perfectas, y sabiendo que la anchura de la luna es de 3450 kilómetros, calcular el ancho (O diámetro si fuera una esfera perfecta) de la tierra utilizando proporciones.

55) Un libro tiene 37 hojas y otro libro tiene 84 hojas, ¿Cuántas hojas más debería tener el segundo libro para que la razón entre ambos fuera de 1/3?

56) Dos tanques con agua tienen 497 litros y 664 litros respectivamente ¿Cuántos litros debo sacarle al segundo tanque para que la razón entre la cantidad de agua de ambos sea 7/9?

57) La razón entre dos números es 3/5 y la suma entre ambos es 32. ¿Cuáles son esos números? Resolver con propiedades de las proporciones.

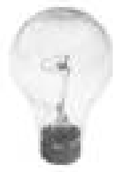
58) La diferencia entre dos números es de 20 y su razón es de 7/3 ¿Cuáles son esos números? Resolver con propiedades de las proporciones.

59) La suma de las edades de Carina y Marcela es 33 y la división entre ambas es 4/7. ¿Qué edad tiene cada una?

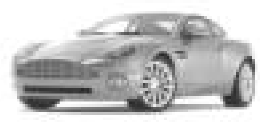
60) La suma total de los valores de alquiler de los seis locales de una galería asciende a \$4560. El valor del alquiler es proporcional a la superficie de cada local, si hay tres locales de $40m^2$, 2 locales de $50m^2$ y un local de $65m^2$ ¿Cuánto debe pagar por el alquiler cada uno de ellos? Resolver planteando proporciones y utilizando sus propiedades.

Expresar razones que reflejen los siguientes enunciados:

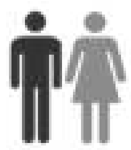
61) Una lámpara de 100 W, consume, como promedio, 14 KW por mes.



62) Un auto 0 Km. actual recorre a su máxima velocidad 650 metros por cada 13 segundos.



63) En un censo se determinó que hay 12 mujeres en Argentina por cada 10 hombres.



64) Una impresora láser imprime 5 páginas en 20 segundos.

65) Florencia prepara un litro y medio de jugo con 100 mililitros de jugo concentrado para diluir y agua.

Con cada una de las siguientes razones, plantear una proporción numérica (con al menos 5 razones, o 5 proporciones diferentes) y redactar un ejemplo en el que podría aplicarse dicha proporción o dichas razones:

66) $\frac{1}{2}$ 67) $\frac{3}{5}$ 68) $\frac{\frac{2}{3}}{4}$ 69) $\frac{3}{1,4}$ 70) $\frac{0,\widehat{3}}{3}$ 71) $\frac{\sqrt{0,\widehat{4}}}{2}$

Calcular en los siguientes casos el valor de "x" para que exista proporcionalidad:

72) $\dfrac{3(x+1)}{5}=\dfrac{2(3x-4)+2}{6}$

73) $\dfrac{2(x-3)}{3}=\dfrac{4(x-2)\div 3}{\dfrac{5}{2}}$

74) $\dfrac{7(x-1)}{2}=\dfrac{(5x-3)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}-3}{3}$

75) $\dfrac{x+2(1+x)}{8}=\dfrac{7(3-x)-2}{5}$

76) $\dfrac{3x-(x+2)}{\dfrac{6}{5}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}(10-2x)+9}{2}$

77) $\dfrac{0,\widehat{4}x-0,2\widehat{6}(7x-3)}{6}=\dfrac{11-x}{-1}$

78) $\dfrac{0,2\widehat{4}\cdot\dfrac{5}{11}x}{0,\widehat{2}}=\dfrac{-2x\div 45+0,3\widehat{6}}{-\dfrac{1}{6}+0,2}$

79) $\dfrac{3x+2}{2}=\dfrac{3x^2-5,5}{2x-3}$

80) $\dfrac{3^2(x+1)}{\left(\dfrac{1}{2}+1\right)^2}=\dfrac{5(x-1)+1}{\dfrac{1}{2}}$

81) $\dfrac{x^2+3(x+2)}{\left(\dfrac{2}{3}+0,1\widehat{6}\right)^2+1,30\widehat{5}}=\dfrac{x^2+21}{2}$

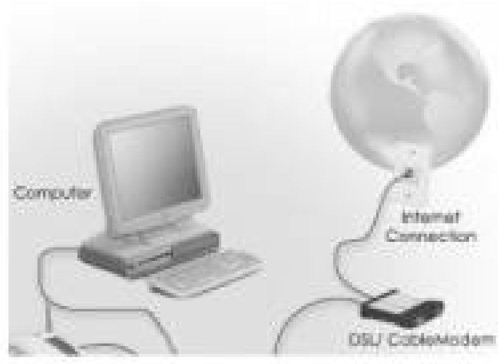
82) $\dfrac{\sqrt{6}(x-7)}{\sqrt{1,\widehat{36}+\dfrac{7}{11}}}=\dfrac{x\sqrt{3}}{8}$

83) $\dfrac{x\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{5x+2\sqrt{2}-2}{4}$

84) $\dfrac{5\sqrt{3}+2x}{\sqrt{3}}=\dfrac{2x\sqrt{3}+15}{3}$

85) $\dfrac{2\sqrt{5}-x}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\left(3x-6\sqrt{5}\right)+6}{\left(0,0\widehat{6}\right)^{-1}}$

Últimos problemas de Aplicación:
Resolver estos problemas planteando una proporción.



86) *La razón de trasferencia de datos de internet de Alan para bajar películas de un sitio WEB es de 120 Kb por segundo. Si está bajando al mismo tiempo 2 películas* ¿En una hora que cantidad de Mb pudo bajar de cada película? (Nota: 1 MB = 1024 Kb)

Marina gasta por mes de crédito en su celular $33. A su vez ella manda en promedio 110 SMS por mes (En su compañía el costo por SMS es de $0,12 con IVA incluido). La Compañía telefónica le anuncia una oferta que dice "Si la proporción de crédito consumido en SMS es mayor a 3/5 la regalamos 50 SMS gratis por mes"

87) ¿Llega a la proporción indicada Marina para entrar en la promoción?
88) Si no llega ¿Cuántos SMS debe mandar como mínimo para entrar en la promoción?

Resuelve aplicando las propiedades de las proporciones:

89) $\dfrac{4}{7}=\dfrac{a}{b}$ *Sabiendo que* $a+b=55$; *Hallar* "a" *y* "b"

90) $\dfrac{-2}{5}=\dfrac{a}{b}$ *Sabiendo que* $a+b=9$; *Hallar* "a" *y* "b"

91) $\dfrac{0,7}{a}=\dfrac{2,\widehat{3}}{b}$ *Sabiendo que* $a+b=26$; *Hallar* "a" *y* "b"

92) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{a}{b}$ *Sabiendo que* $a-b=\sqrt{2}$; *Hallar* "a" *y* "b"

93) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}=\dfrac{a}{b}$ *Sabiendo que* $b-a=\sqrt{2}$;

Hallar $\sqrt[3]{\left(2+\dfrac{a+1}{b}\right)^2}$

by Dal-0r para TARINGA!

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Olimpíadas

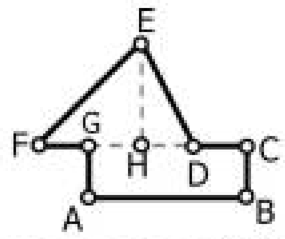
Nivel II

Número de Tema: **28**

Área: **Matemática**

1) Con los dígitos 0–1–2–8 , se arman números de cuatro cifras, repetidas o no, que son divisibles por 4. ¿Cuántos de estos números se pueden armar?

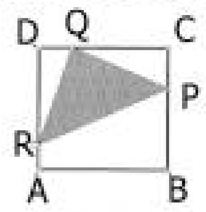
2) ABCG es un rectángulo de 72 cm de perímetro. HE es la altura del triángulo DEF ; y AB = 3BC , FD = AB y HE = 2BC ¿Cuál es el área de la figura de vértices ABCDEFG?



3) Un local que hace fotocopias cobra, por cada una: $ 0,10 si se piden menos de 100 fotocopias; $ 0,07 si se piden entre 100 y 199 fotocopias y $ 0,05 si se piden 200 fotocopias o más. Esta mañana, entraron 4 clientes que pagaron, en total $ 45. El primero pidió 65 fotocopias, el segundo pidió el doble que el primero y el tercero pidió el doble que el segundo. ¿Cuántas fotocopias hizo el cuarto cliente?

4) En una escuela, las dos terceras partes del alumnado son varones y hay 136 alumnas (mujeres). Un cuarto del alumnado tiene computadora, un sexto de los alumnos con computadora son varones.
¿Cuántas alumnas (mujeres) no tienen computadora? ¿Qué fracción del total del alumnado representan?

5) El cuadrado ABCD tiene 144 CM2 de área. BC = 3 PC, CD = 4 DQ y AD = 5 AR.
¿Cuál es el área del triángulo PQR?

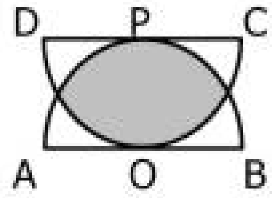


6) Luís Debe trabajar: 14 horas por semana, de lunes a viernes, y por día, no menos de 2 horas y siempre un número entero de horas. ¿De cuántas maneras puede repartir sus horas de trabajo durante la semana?

7) En la farmacia compro remedios y artículos de perfumería. Por los remedios hacen el 60% de descuento. Por los artículos de perfumería hacen el 20% de descuento. Con el descuento pago, en total, $52,60. Sin el descuento debería pagar, en total, $105. ¿Cuál es el precio de los remedios sin descuento?

8) Usando algunos (o todos) los dígitos de la lista: 4 - 5 - 6 - 7 - 9 una ó más veces, hay que armar dos números de tres cifras de modo que cada número no tenga cifras repetidas y la suma de los dos números sea múltiplo de 9. ¿Cuántas soluciones se pueden armar? Explica por qué. Observación: No importe el orden en que se suman los números.

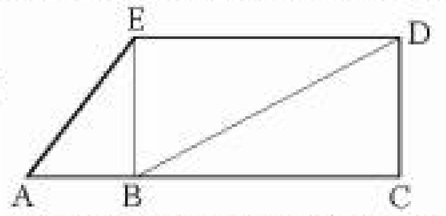
9) ABCD es un rectángulo de 96crn de perímetro; AO = OB y DP = PC.
Los arcos APB y DOC son semicircunferencias. ¿Cuál es el área de la zona sombreado?



10) El Sr. Pérez compró 4 juguetes: un avión, un bote, un coche y una grúa para regalar a sus tres nietos: Pedro, Tomás y Martín. El Sr. Pérez quiere repartir los 4 juguetes y no quiere que ningún nieto se quede sin juguetes. ¿De cuántas maneras distintas puede regalarlos?

11) El ferretero, cada 40 tornillos que compra encuentra 4 fallados y los devuelve. Por cada 100 tornillos que vende regala 5. Vendió 1200 tornillos y no le quedó ninguno, ¿cuántos tornillos había comprado?

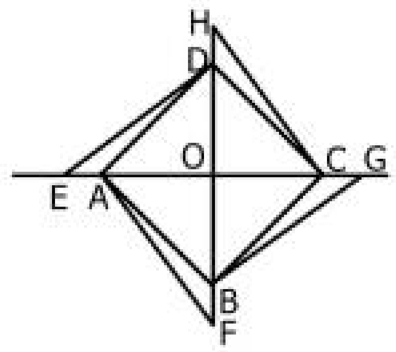
12) En la figura BC = 2 AB; el ABE es un triángulo isósceles de 72 cm2 de área y BCDE es un rectángulo. Calcula el área del cuadrilátero ABDE.

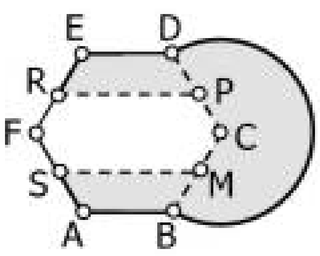


13) El lunes se vendieron el 30 % de los paquetes de galletitas que había en total. El martes se vendió la cuarta parte de lo que quedaba. Aún quedan 945 paquetes. ¿Cuántos paquetes había al comienzo?

14) Con los dígitos 1 - 2 - 3 - 4 y 6 , Juan escribe sólo los números de cuatro cifras distintas en los cuales el número formado por las dos últimas cifras (decenas y unidades) es divisible por el dígito que ocupa el lugar de las centenas. ¿Cuántos números distintos puede escribir Juan? Ejemplo: Juan escribe 6123 porque 23 es divisible por 1; Juan no escribe 6423 porque 23 no es divisible por 4.

15) En el cuadrado ABCD, las diagonales AC y BD se cortan en "O". Sobre las prolongaciones de las diagonales se marcan los puntos E, F, G y H de modo que OE = OF = OG = OH. El área del triángulo BOC es de 72 cm2 y OB = 3/4 OF. ¿Cuál es el área de la figura de vértices AFBGCHDE ?





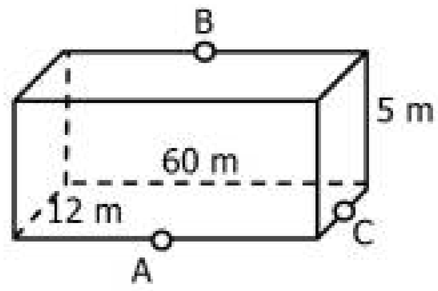
16) ABCDEF es un hexágono regular; M, P, R y S son los puntos medios de los lados BC, CD, EF y FA, respectivamente; BD es un arco de circunferencia de centro C y radio CD. El perímetro de la figura es aproximadamente 65,5 cm. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?

17) Juan sumó 99 números impares consecutivos, obtuvo como resultado 12375. ¿Cuál es el mayor número que sumó Juan? Por ejemplo: 5 y 7 son dos impares consecutivos; 39; 41 y 43 son 3 impares consecutivos.

18) Un comerciante compró tres artículos por un total de $ 440 y después los vendió y obtuvo una ganancia del 30%. Uno de los artículos le dio una ganancia del 20%, otro una ganancia del 25% y el tercero una ganancia del 50%.Lo que pagó por el artículo que le dio menor porcentaje de ganancia es igual a la suma de los precios de venta de los otros dos artículos.¿Cuánto pagó el comerciante por cada artículo?

19) La distancia entre Ciudad Vieja y Ciudad Nueva es de 480 krn. Los trenes A y B van de Ciudad Viejo a Ciudad Nueva. El tren B tarda una hora y media más que el A en unir las dos ciudades. La velocidad del tren B es 16 km/h menor que la velocidad del A. ¿Cuál es la velocidad de cada tren?

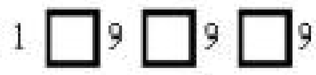
20) Un galpón tiene forma de prisma recto de base rectangular como el de la figura. Los puntos A, B y C son medios de las aristas que los contienen. El galpón tiene 60 m de frente, 12 m de fondo y 5 m de altura. En el interior se coloca un alambre que va de A a B y de B a C. ¿Cuál es la longitud del alambre?



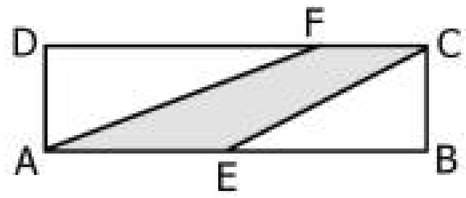
21) En un torneo de ajedrez se inscriben 12 jugadores. Los participantes son tres pares de hermanos varones y tres pares de hermanas mujeres. Los hermanos Álvarez están casados con las hermanas Bianco. Los hermanos Fernández están casados con las hermanas Caril. Los hermanos Pérez están casados con las hermanas Pusso. Cada partido de la primera ronda se disputará entre un hombre y una mujer pero, ninguna mujer puede enfrentarse ni con su esposo ni con el esposo de su hermana. ¿De cuántas maneras se pueden armar los 6 partidos de la primera ronda?

22) El Sr. Pérez compró un departamento por $54.000. Pagó el 40% al contado y el resto en 80 cuotas iguales. Por la suma financiada se le hizo un recargo del 75%. ¿Cuántas cuotas tenía pagas el Sr. Pérez el día en que su deuda era de $11.340?

23) Si se reemplaza cada cuadradito por un dígito, ¿cuántos números de siete cifras que sean múltiplos de 9 se pueden obtener? Explica por qué.

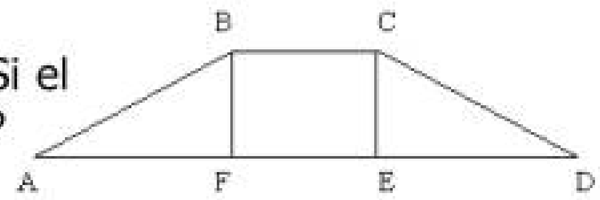


24) El rectángulo ABCD tiene 128 cm^2 de área ; AB = 2 AD; AE = EB; DC = 4 FC
¿Cuál es el área del cuadrilátero AECF?



25) Un fabricante de jabones vende cada paquete a $57,60. Un paquete tiene una docena de cajas y cada caja tiene 4 jabones. Si un comprador pide más de 100 paquetes, el fabricante hace un descuento del 5% del total. Ayer recibió un pedido de 6000 jabones. ¿Cuánto deberá pagar el comprador por este pedido?

26) ABCD es un trapecio isósceles; BCEF es un cuadrado de 36m2 de área; Si el área del trapecio es el triple del área de BCEF, ¿Cuánto mide el segmento AD?

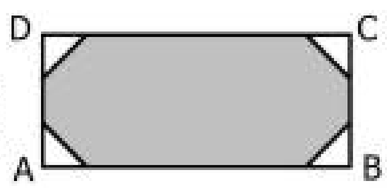


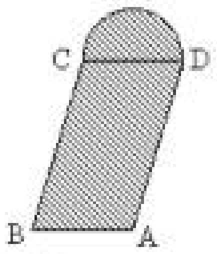
27) Con los dígitos 1 - 2 - 3 - 4 y 5 se arman números de 4 cifras que son múltiplos de 3 y de 5. Si se pueden repetir cifras, ¿cuántos números se pueden formar? Explica por qué.

28) Juan escribe una lista de 5000 dígitos. El primer tramo de la lista es: 1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 8 9 0 y después repite este tramo desde el principio al fin. ¿Cuál es la cifra que ocupa el lugar número 1997? ¿Cuál es la cifra que ocupa el lugar número 1998? Explica por qué.

29) Ani y Beti tenían algunos ahorros. Este mes cada una gastó una parte. Ani gastó 2/3 de sus ahorros y le quedaron $36. Beti gastó 3/4 de sus ahorros. Si el mes pasado tenían entre las dos $280, ¿cuántos pesos le quedaron a Beti?

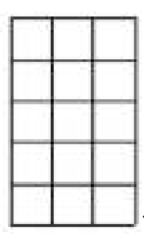
30) Un rectángulo ABCD tiene 96 cm de perímetro y AB = 3 BC. Cada vértice se cortó, como muestra la figura, un triángulo rectángulo isósceles de 2 cm de cateto. ¿Cuánto vale el área sombreada?





31) El arco CD es una semicircunferencia de 7 cm de diámetro. El paralelogramo ABCD tiene 84cm2 de área.Si se traza la recta que pasa por C y es perpendicular a AB, esa recta corta al segmento AB en su punto medio. ¿Cuál es el perímetro de la figura rayada?

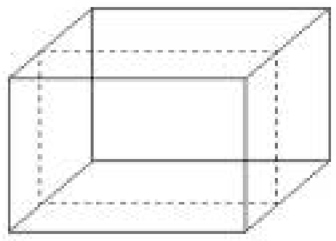
32) En una cuadrícula de 5 filas y 3 columnas se quieren pintar 6 cuadraditos de modo que, en cada columna haya exactamente 2 pintados y en cada fila haya al menos 1 pintado. ¿De cuántas maneras puede hacerse?



by Dal-Or para TARINGA!

33) Agustín, Bruno, Carlos, Diego, Ezequiel y Federico son coleccionistas de cuadros y dos de ellos son hermanos. Un día fueron juntos a una exposición y compraron de la siguiente manera:
Agustín compró 1 cuadro, Bruno compró 2, Carlos 3, Diego 4, Ezequiel 5 y Federico 6. Los dos hermanos pagaron igual cantidad de dinero por cada uno de los cuadros que compraron. Los demás del grupo pagaron el doble por cada cuadro de los que pagaron los hermanos. En total pagaron $100000. El precio de cada cuadro era un número entero de pesos. ¿Quiénes son hermanos? Explica por qué.

34) En un prisma recto de base rectangular, de 10 cm de altura y 1440 cm3 de volumen, se efectuó un corte paralelo a una de las caras laterales como muestra la figura. El menor de los dos prismas en que quedó dividido tiene un área total de 616 cm2 y su volumen es un tercio del volumen del prisma original. ¿Cuáles son el largo y el ancho del prisma original? Da todas las posibilidades.



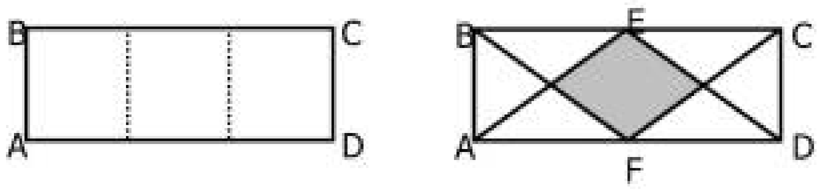
35) N = 9 + 99 + 999 + ... + 9999..........9 ; donde cada sumando tiene un dígito 9 más que el anterior y el último sumando es el número formado por 1998 dígitos iguales a 9. ¿Cuántas veces aparecerá el dígito 1 en el número N?

36) Dos trenes viajan a velocidad constante, El tren más lento recorre, en 15 minutos, 1 km menos que el más rápido. El tren más lento tarda 15 segundos más que el más rápido en recorrer 4km. ¿A cuántos km/h marcha el tren más rápido?

37) Lucía fue a la feria del libro. Pagó $5 de entrada. Compró varios libros y un diccionario. Los libros costaban $84; al agregar el diccionario, el total superaba los $100. Por compras superiores a $100 se hace un descuento del 15% y, además, se devuelve el importe de la entrada. Lucía pagó con un billete de $100 y uno de $20. Le devolvieron $14,50.¿Cuál era el precio de venta del diccionario?

38) Marcela olvidó las 4 cifras de su clave de mail. Recuerda que su clave no tiene cifras repetidas, que las tres primeras cifras están, en algún orden en su número de documento y que la cuarta cifra no está en su número de documento. El número de documento de Marcela es 27127887. ¿Cuántos son los posibles números de la clave de mail de Marcela?

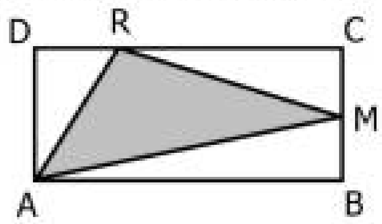
39) ABCD está formado por 3 cuadrados de $1m^2$ de área.
E es punto medio de BC; F es punto medio de AD.
¿Cuál es el área de la figura rayada?



40) En la escuela hay 360 alumnos. El 10% de los alumnos usa anteojos. De los que no usan anteojos, la cuarta parte practica natación. ¿Cuántos alumnos no usan anteojos y no practican natación?

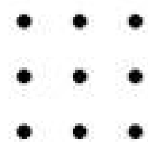
41) Con los dígitos 9; 7; 6; 5 y 0, ¿cuántos múltiplos de 5 menores que 10000 se pueden armar? ¿Por qué?

42) El rectángulo ABCD tiene $32cm^2$ de área.
M es punto medio de BC ; AB = 2.AD; DR = BM
¿Cuál es el área del triángulo ARM?



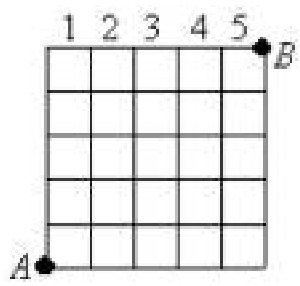
43) Mezclando jugos de naranja, kiwi y pomelo se preparan los jugos A, B y C en botellones de 5 litros.
Para 5 litros del jugo A se necesitan: 1 litro de jugo de naranja, 2 de jugo de kiwi y 2 de jugo de pomelo.
Para 5 litros del jugo B se necesitan: 2 litros de jugo de naranja, 1 de jugo de kiwi y 2 de jugo de pomelo.
Para 5 litros del jugo C se necesitan: 2 litros de jugo de naranja, 2 de jugo de kiwi y 1 de jugo de pomelo.
Con 80 litros de jugo de naranja, 55 litros de jugo de kiwi y 70 litros de jugo de pomelo, ¿cuántos botellones de 5 litros de cada clase de jugo se pueden preparar?

44) Los puntos de la figura están en una cuadrícula. Cada cuadradito de la cuadrícula tiene 1cm de lado. Se quiere dibujar un triángulo con vértices en los puntos de la cuadrícula que tenga 1/2 cm2 de área. ¿Cuántas posibilidades distintas hay? Explica por qué.



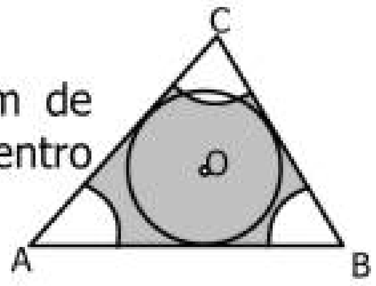
45) Un tren tarda 45 seg en pasar completamente a través de un túnel de 430m de largo. A la misma velocidad tarda 15 seg en pasar completamente al poste del teléfono. ¿Qué largo tiene el tren?

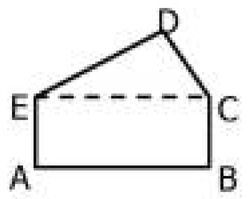
46) Juan tiene que llevar una ficha desde A hasta B moviéndola por las líneas de la cuadrícula del tablero de la figura. Puede moverse hacia arriba, abajo, izquierda o derecha. Cada vez que la ficha se mueve en sentido horizontal, Juan anota el número de la columna que atraviesa. Cuando la ficha llega a B, Juan multiplica todos los números que anotó. ¿Hay algún camino para el cual el resultado es 4320? ¿Hay algún camino para el cual el resultado es 6000? Si la respuesta es no, explicar por qué. Si la respuesta es si, mostrar el camino.



47) Ariel, Bruno y Carla tienen, entre los tres, 35 monedas. Los tres tienen monedas de $ 1, de $0,5 y de $0,25. En total tienen $ 17. Los tres tienen igual cantidad de monedas de $ 1. Ariel tiene el doble de monedas $0,5 que Bruno y Carla juntos. Bruno tiene 2 monedas de $0,25 más que Ariel. Carla tiene 4 monedas de $0,25 más que Bruno. ¿Cuántas monedas de cada clase tiene cada uno? Dar todas las soluciones posibles.

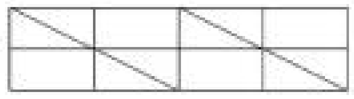
48) La circunferencia de centro O tiene 5 cm de radio. El triángulo ABC tiene 84 cm de perímetro y sus lados son tangentes a la circunferencia. Los arcos de circunferencia con centro en cada vértice del triángulo tienen 4 cm de radio. ¿Cuál es el área de la zona rayada?





49) El triángulo CDE y el rectángulo ABCE tienen igual altura. El área del polígono ABCDE es 72 cm2. Si AB=9,6 cm. ¿Cuál es la longitud de la altura del triángulo?

50) Mariano compra un diario todos los días y una revista deportiva todos los domingos; paga por el total a fin de mes. En un mes de 30 días en el que hubo cuatro domingos pagó $71. El diario cuesta $1,50 de lunes a sábado y $2,50 los domingos. Sobre el precio de venta, el dueño del quiosco tiene una ganancia del 20% por los diarios y del 30% por las revistas. ¿Cuánto ganó ese mes con las compras de Mariano?

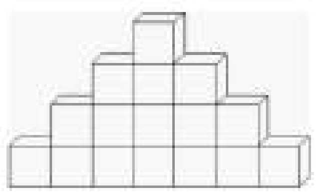
51) ¿Cuántos cuadriláteros (polígonos de 4 lados) hay en la figura? 

52) Aldo y Bruno tenían cada uno la misma cantidad de dinero para gastar durante dos semanas de vacaciones. Aldo gastó 1/3 la primera semana, 1/2 la segunda y el resto lo ahorró. Bruno gastó 1/4 la primera semana pero ahorró el doble de lo que ahorró Aldo. Si Bruno ahorró $156. ¿Cuántos pesos gastó Bruno la segunda semana?

53) Con los dígitos 0-1-2-3-4-5-6 y 7 se forman números cuyas cifras suman 9. ¿Cuántos de esos números que sean menores que 5000 y no tengan cifras repetidas se pueden formar? Explica por qué.

54) El área del triángulo ABF es el 10% del área del trapecio isósceles ADEF.
El rectángulo BCEF tiene 144 cm2 de área y CD = CE. ¿Cuál es la longitud de AD?

55) Con cubos de madera todos iguales Cristian armó esta torre de 864 cm2 de área total. Con todos los cubos que Cristian usó se llena una caja de 16 cm de largo y 8 cm de ancho. ¿Cuál es la altura de esa caja?

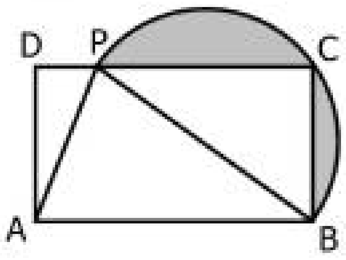


56) Luís pasa sus vacaciones en Playa Linda y su amigo Matías en Playa Hermosa, distantes entre sí 20 km. Planearon encontrarse una mañana. Los dos salieron a las 9 hs, Luís caminaba a 5 km/h y Matías a 7 km/h. ¿A qué hora y a qué distancia de Playa Linda se encontraron?

57) En un triángulo equilátero ABC se marcan los puntos medios de los lados: M en AB, N en BC y P en AC. Se trazan todos los segmentos que tienen por extremos los puntos A, B, C, M, N y P. ¿Cuántos triángulos hay en esta figura? Explica como los contaste.

58) En un recipiente cúbico de 1m de arista hay 3cm de agua. Se introduce un cubo de plomo en el recipiente y, cuando queda apoyado en el fondo, la altura del agua en el recipiente es de 4cm.
¿Cuál es la longitud de la arista del cubo de plomo?

59) ABCD es rectángulo; P es un punto de CD y PB = AB. El arco PCB es una semicircunferencia. Área del triángulo BCP = 4 Área del triángulo APD. Área del triángulo ABP = 4,8 dm^2. ¿Cuál es el perímetro de la zona rayada?



60) Ariel, Germán, Martín y Raúl son integrantes del centro de estudiantes y uno de ellos es, además el presidente del centro y compañero de curso de uno de los otros tres. En la fiesta de fin de curso, cada uno de ellos vendió bonos contribución. Ariel sólo vendió bonos de $3 , Germán bonos de $4 , Martín de $6 y Raúl de $8. Cada uno vendió un número distinto de bonos. El presidente del centro vendió el mayor número de bonos y recaudó en total $72. Su compañero de curso vendió el menor número de bonos y recaudó $24 en total. Entre todos recaudaron $161. ¿Quién es el presidente y quién su compañero de curso?

Nota del autor: Toda esta recopilación de ejercicios, fue tomada de ejercicios que formaron parte de las evaluaciones de "Olimpíadas Ñandú" en los certámenes interescolares, zonales, regionales y nacionales, desde 1996 hasta la actualidad. Por tratarse de un módulo muy particular como es el del "Compendio de ejercicio de Olimpíadas", y notando las necesidades educativas en este campo, me pareció lo más eficiente, es por ello que este módulo es el único de toda la colección "Logikamente" que contiene ejercicios que no son de autoría propia. Espero sea de Utilidad en la mejora de la enseñanza y la calidad educativa.

by Dal-Or para TARINGA!

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Triángulos
Nivel I

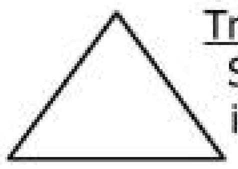
Número de Tema: **29**

Área: **Matemática**

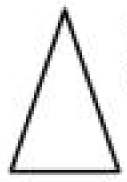
Antes de comenzar a estudiar los triángulos, damos por sabido que nos vamos a referir a figuras planas de tres lados y tres vértices. Aunque en realidad *la manera más correcta de definir al triángulo es como una figura plana de tres ángulos interiores.* Por eso mismo se llaman "Tri-ángulos"

Como veremos en esta unidad y más adelante a lo largo de nuestros estudios, los triángulos son figuras muy importantes y además son muy importantes sus ángulos, razón por la cual seguramente a lo largo de la historia, ha prosperado el nombre de "triángulos". Fíjense la diferencia que hay cuando nos referimos a figuras de cuatro lados o cuatro ángulos interiores, que por lo general los llamamos "Cuadriláteros" cuando nos podemos referir a ellos como "Cuadrángulos". En realidad es lo mismo llamar a los cuadriláteros de ambas formas, simplemente es una cuestión de usos, por ello quería dejar en claro esta explicación en el caso de los triángulos.

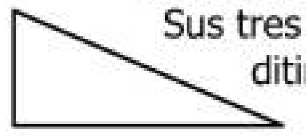
- **Clasificación de un Triángulo:**



Triángulo Equilátero: Sus tres lados son iguales. (miden lo mismo)



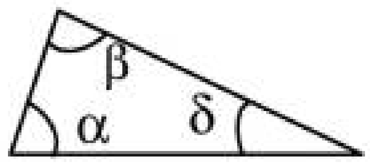
Triángulo Isósceles: Tienen dos lados iguales (El tercero puede ser igual o no)



Triángulo Escaleno: Sus tres lados son ditintos.

- **Propiedades de los Ángulos de un Triángulo:** Hay muchísimas propiedades respecto a los ángulos de un triángulo, en principio, veremos solo las más básicas.

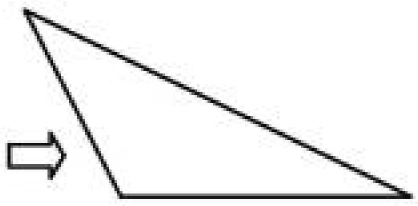
La **SUMA** de los ÁNGULOS INTERIORES de cualquier triángulo es **180º**



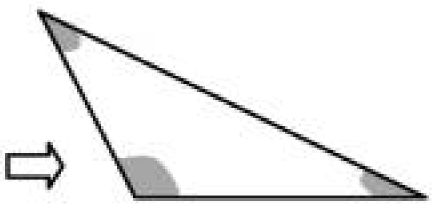
$$\alpha + \beta + \delta = \mathbf{180^o}$$

Esta propiedad es muy, pero muy utilizada y recomiendo que la memoricen bien porque les va a ser muy útil a lo largo de sus estudios. De hecho es tan importante que les voy a proponer una manera muy simple y didáctica de demostrar esta propiedad.

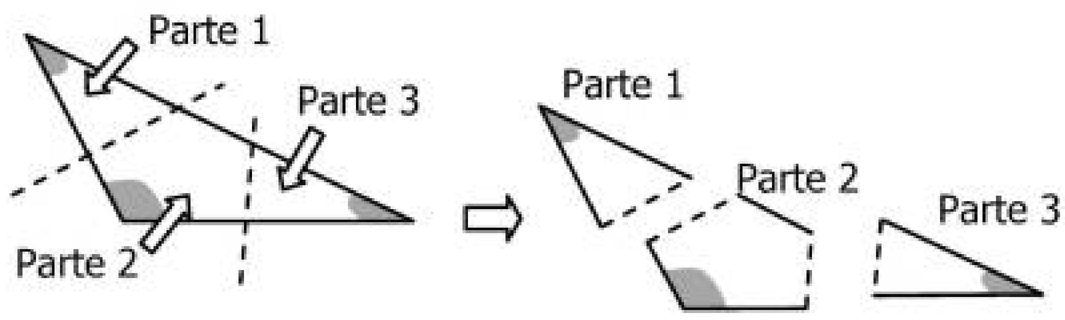
Tomemos un triángulo cualquiera de papel.
A continuación les dibujo uno cualquiera yo: ⇨



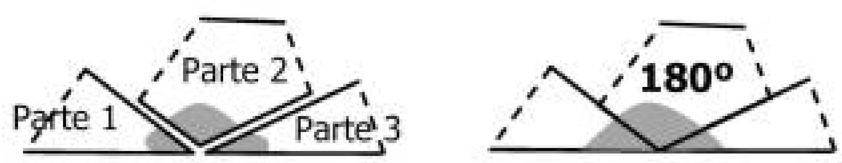
Luego, vamos a pintar con color las zonas cercanas a los ángulos interiores: ⇨



Y luego vamos a cortar el triángulo en tres partes diferentes, de modo tal que cada parte resultante contenga a un solo ángulo.



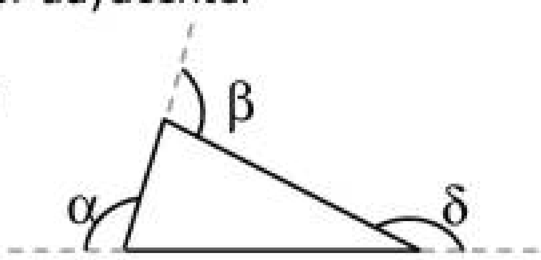
Y por último lo que vamos a hacer es unir los ángulos interiores en el mismo vértice, con lo cual debemos verificar que los tres ángulos interiores juntos, o sumados, forman un ángulo llano que equivale a 180º ⇨



Creo que es una experiencia que vale la pena hacer, para corroborar esta propiedad y no quede como algo que sucede porque "el libro lo dice" y además es una buena manera de que les quede grabada la idea entre sus conceptos, ya que como dije antes, les va a ser muy útil en el futuro.

Los ángulos exteriores: Todo triángulo tiene además de tres ángulos interiores, otros tres ángulos exteriores, cada uno suplementario a su ángulo interior adyacente.

Para ver esta idea más clara dibujemos un triángulo y veamos primero cuáles son sus ángulos exteriores.

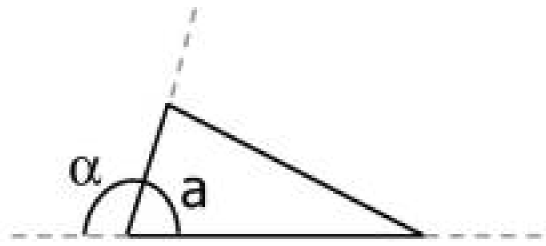


Y aquí tenemos otra propiedad importante:

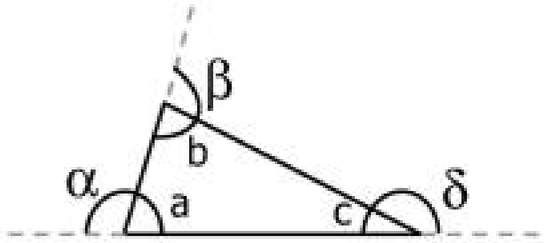
La **SUMA** de los ÁNGULOS EXTERIORES de cualquier triángulo es **360º** ⇨ $\alpha + \beta + \delta = \mathbf{360^o}$

Esta propiedad de los ángulos exteriores también vale la pena demostrarla ya que es un ejercicio interesante de lógica. Veamos esto en detalle:

➢ Como dijimos antes, cada ángulo interior de un triángulo es adyacente a su ángulo exterior, esto quiere decir que entre ambos suman 180º. En el gráfico vemos por ejemplo como el ángulo "α"es suplementario a su adyacente interior "a" y que ambos suman 180º porque forman un ángulo llano.



➢ Por otro lado pensemos que pasaría si sumara todos los ángulos interiores con todos los exteriores. Para ello, puedo armar la suma en "parejas" sabiendo que "α+a=180" y "β+b=180" y también "δ+c=180"



Con esto tengo que la suma de los seis ángulos es 3 veces 180º, o sea que la suma de los 6 ángulos es 540º

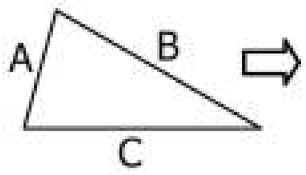
➢ Entonces luego tenemos que:

- La suma de los 6 ángulos es 540º (Exteriores + Interiores)
- La suma de los 3 ángulos interiores es 180º

Por lo tanto la suma de solo los tres exteriores debe ser la diferencia entre ambas:
O sea 540º – 180º = Suma ángulos exteriores = 360º

- **Propiedades de Los LADOS:**

La Suma de dos lados cualesquiera debe ser mayor al tercer lado



A + B > C

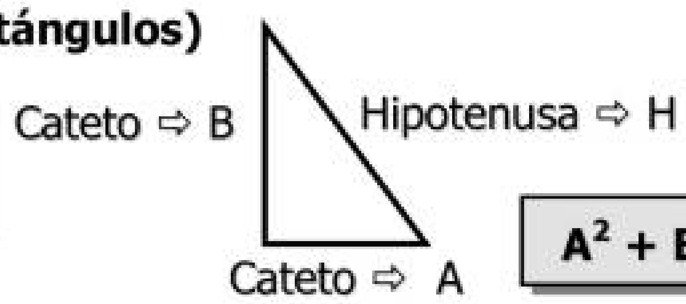
A + C > B

B + C > A

Esta propiedad es muy importante ya que de otro modo no se podría construir un triángulo en el cual haya un lado tan grande de los tres que la suma de los otros dos sea inferior. Para ello, piensen por ejemplo en dibujar un triángulo de lados: 20 cm, 1 cm y 2 cm y verán enseguida que es imposible dibujarlo, esto se debe a que no cumple con esta propiedad tan importante.

Y **El Teorema de Pitágoras: (Sólo para triángulos rectángulos)**

" La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa "



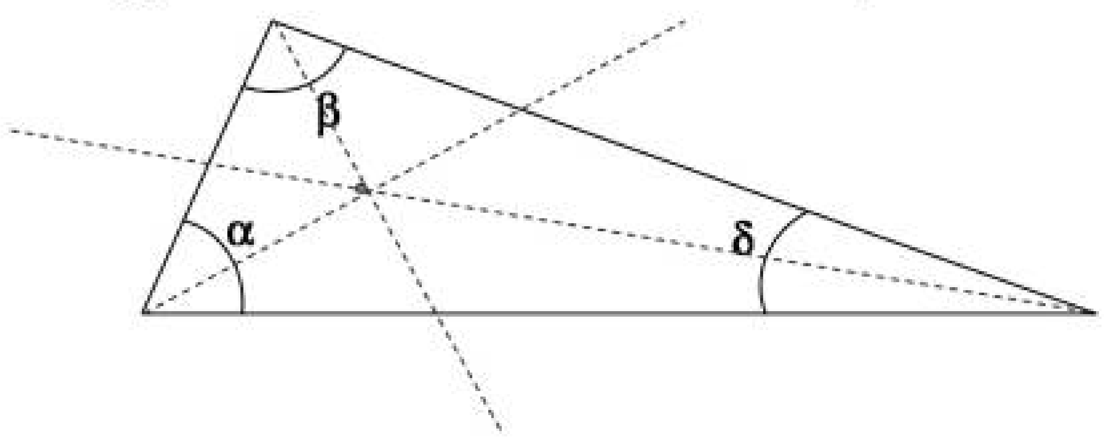
$$A^2 + B^2 = H^2$$

- **Elementos del Triángulo**: Los triángulos tienen los siguientes elementos:

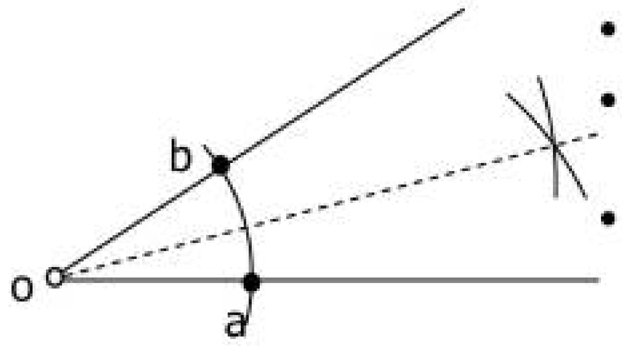
Y Bisectrices
Y Mediatrices
Y Medianas
Y Alturas.

Cada uno de estos elementos tiene sus propiedades y su importancia
Es por eso que los vamos a ver uno por uno, bien detenidamente:

Y **Bisectrices: "Son las semirrectas que dividen a los ángulos interiores en dos ángulos iguales"** Visto en el siguiente dibujo, las Bisectrices son las semirrectas punteadas



¿Cómo se dibujan las bisectrices?

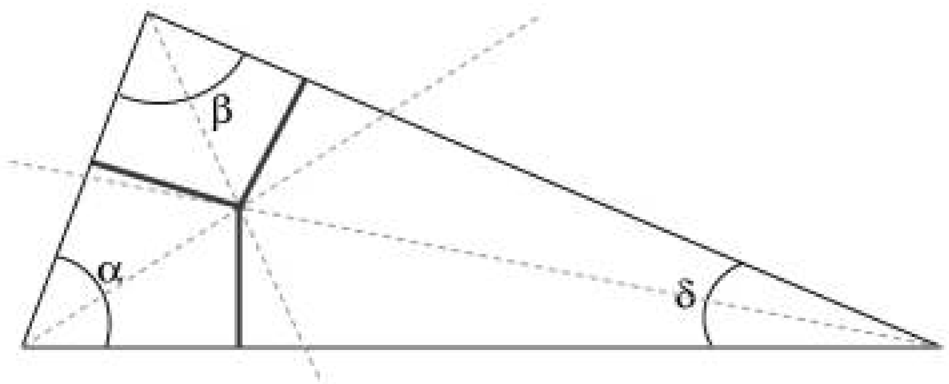


- 1° Haciendo centro en "o" marcamos el arco ab
- 2° Haciendo centro en "a" primero y en "b" después, marcamos en cada caso un arco que quede dentro de los límites del ángulo, sin cambiar la abertura del compás.
- 3° Trazamos una semirecta punteada con origen en "o" que pase por el punto donde se cortan los arcos que marcamos antes Esa semirecta es la bisectriz del ángulo.

> Y **Propiedad de las Bisectrices**: El punto donde se cortan las Bisectrices de un triángulo equidista de los LADOS. Este punto se llama **INCENTRO**

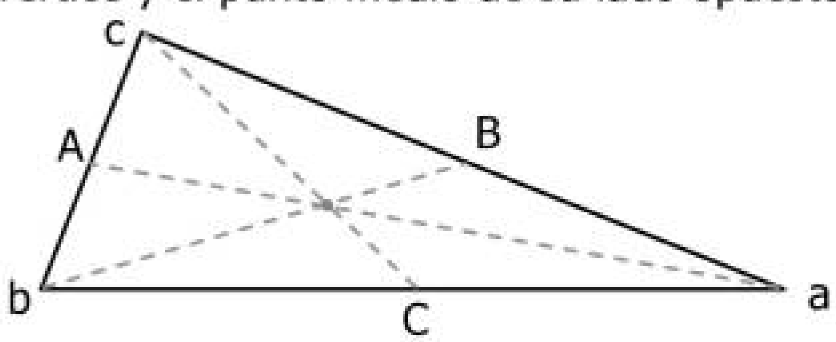
Verifiquemos la propiedad con el triángulo anterior: En este gráfico remarcamos las distancias a los lados para que las puedas medir mejor! *Si medimos las distancias desde el punto donde se cortan las Bisectrices a cada lado, en los tres casos nos da lo mismo: 12 mm*

Atención: Para medir la mínima distancia del punto donde se cortan las Bisectrices a cada uno de los lados, el método consiste en medir una "distancia perpendicular a cada lado" o sea que las distancias siempre deben ser perpendiculares a los lados, de esta manera me aseguro que la distancia que mido es la mínima posible y con este criterio mido la misma distancia para los tres lados.



Y **Medianas:** "Son los segmentos con extremos en un vértice y el punto medio de su lado opuesto"

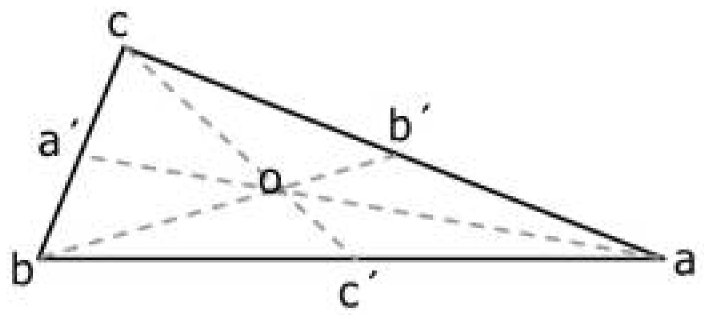
Van desde cada vértice hasta la mitad del lado opuesto.



¿Cómo se dibujan las Medianas?

- Midiendo con la regla, marco la mitad de cada lado
- Desde cada vértice trazo un segmento hasta la mitad del lado opuesto.

> Y **Propiedad:** Las Medianas de cualquier triángulo se cortan en un punto que divide a cada Mediana en dos partes, tal que una mide siempre el doble de la otra. Este punto se llama **BARICENTRO**



Para la Mediana del lado bc

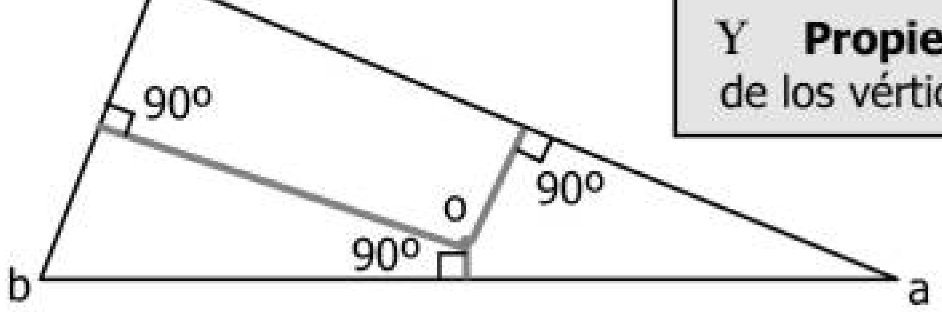
$$\left.\begin{array}{l}\overline{a'o} = \frac{1}{3}\overline{aa'} \\ \overline{ao} = \frac{2}{3}\overline{aa'}\end{array}\right\} \overline{ao} = 2 \cdot \overline{a'o}$$

Para la Mediana del lado ab

$$\left.\begin{array}{l}\overline{c'o} = \frac{1}{3}\overline{cc'} \\ \overline{co} = \frac{2}{3}\overline{cc'}\end{array}\right\} \overline{co} = 2 \cdot \overline{c'o}$$

El BARICENTRO es el Centro de Gravedad del triángulo. ¿Que es el centro de gravedad? Si yo construyo un cuerpo, todo el peso de ese cuerpo se va a concentrar en un punto: El centro de gravedad. Prueba: Recortar en un cartón grueso un triángulo (lo más grande posible). Trazar su centro de gravedad. Realizar un pequeño agujero en el centro de gravedad y apoyar el centro de gravedad del triángulo en la punta de un lápiz. Si el centro de gravedad está bien trazado, el triángulo no se va a caer.

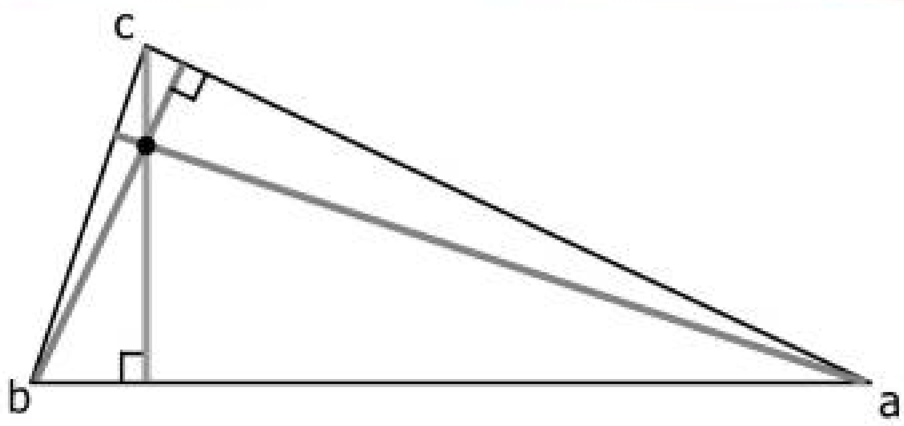
Y **Mediatrices:** Son las semirrectas que pasan por el punto medio de cada lado y lo cortan perpendicularmente.



> Y **Propiedad:** El punto donde se cortan las Mediatrices, equidista de los vértices del triángulo. Este punto se llama **CIRCUNCENTRO**

$$\overline{ao} = \overline{bo} = \overline{co}$$

Y **Alturas:** Semirrectas que pasan por los vértices y cortan a los lados opuestos perpendicularmente



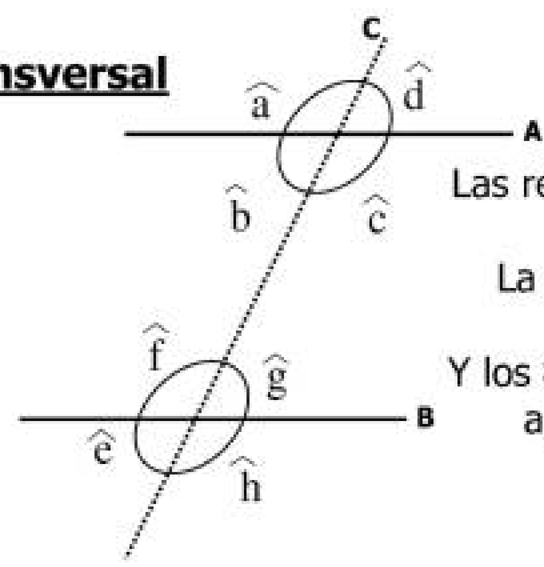
¿Cómo se dibujan las Alturas?

- Apoyo un cateto de la escuadra sobre un lado.
- Apoyo una regla sobre el cateto de la escuadra que apoyé sobre el lado.
- Muevo la escuadra sobre la guía de la regla hasta que el otro cateto "pase por el vértice opuesto".
- Trazo la Altura del lado uniendo el vértice con el lado opuesto "en forma perpendicular" (ya que la escuadra estará en ese momento formando 90º con respecto al lado).
- De la misma manera trazo las Alturas de los otros dos lados.

Y **Propiedad:** El punto donde se cruzan las Alturas se llama ORTOCENTRO del triángulo.

Ángulos Entre Paralelas Cortadas Por Una Transversal

Ahora vamos a estudiar las relaciones que hay entre los ángulos que se forman cuando trazamos dos rectas paralelas entre si y las cortamos a ambas por una transversal.. Veamos primero como queda esto graficado:

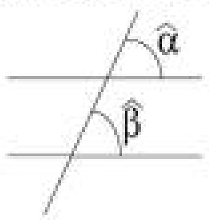


Las rectas paralelas son A y B

La recta transversal es C

Y los 8 ángulos formados son: a, b, c, d, e, f, g y h

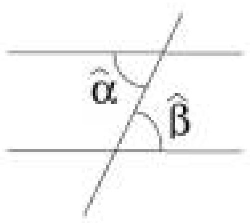
ÁNGULOS CORRESPONDIENTES ENTRE PARALELAS



Para que dos ángulos sean correspondientes entre paralelas, deben estar EN **EL MISMO SEMIPLANO** tal que **uno de ellos quede "ADENTRO"** (β) de las paralelas **y el otro "AFUERA"** (α) (Y no son adyacentes) ⇒ $\boxed{\hat{\alpha} = \hat{\beta}}$

Los ángulos correspondientes entre paralelas siempre son iguales

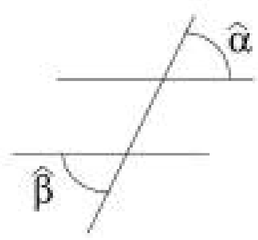
ÁNGULOS ALTERNOS INTERNOS



Para que dos ángulos sean alternos internos, deben estar **EN DISTINTO SEMIPLANO** ("Distito lado de la transversal") de modo que **los dos queden "ADENTRO"** de las paralelas. ⇒ $\boxed{\hat{\alpha} = \hat{\beta}}$

Los ángulos alternos internos siempre son iguales

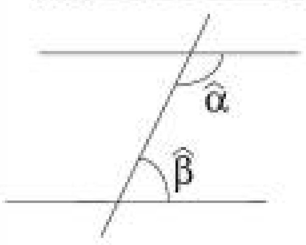
ÁNGULOS ALTERNOS EXTERNOS



Para que dos ángulos sean alternos externos, deben estar **EN DISTINTO SEMIPLANO** ("Distito lado de la transversal") de modo que **los dos queden "AFUERA"** de las paralelas. ⇒ $\boxed{\hat{\alpha} = \hat{\beta}}$

Los ángulos alternos externos siempre son iguales

ÁNGULOS CONJUGADOS INTERNOS

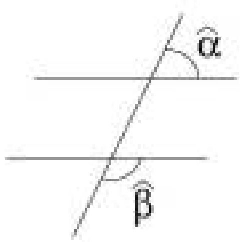


Para que dos ángulos sean conjugados internos, deben estar EN **EL MISMO SEMIPLANO** ("del mismo lado de la transversal") de modo que **los dos queden "ADENTRO"** de las paralelas.

$$\boxed{\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^{\circ}}$$

Los ángulos conjugados internos son suplementarios (suman 180º)

ÁNGULOS CONJUGADOS EXTERNOS



Para que dos ángulos sean conjugados externos, deben estar EN **EL MISMO SEMIPLANO** ("El mismo lado de la transversal") de modo que **los dos queden "AFUERA"** de las paralelas.

$$\boxed{\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^{\circ}}$$

Los ángulos Conjugados externos son suplementarios (suman 180º)

Ejercicios - Hallar el ángulo que falta:

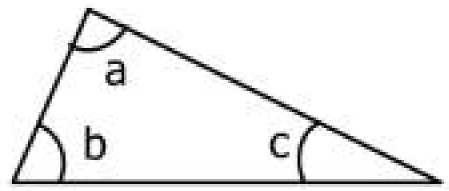
1) a = 95º
b = 45º

2) a = 124º
c = 31º

3) b = 65º
c = 28º

4) a = 90º
b = 51º

5) b = 45º 34′ 17″
c = 27º 22′ 31″



Problemas con ángulos interiores:

6) ¿Puede un triángulo tener dos ángulos interiores obtusos? ¿Por qué?

7) Si tenemos un triángulo con un ángulo interior de 22º 15′ y sabemos que otro de sus ángulos interiores tiene una abertura de 56º 11′ mayor al primero. ¿Cuál es el valor del tercer ángulo interior?

8) Si en un triángulo el mayor de los ángulos interiores mide 90º 0′ 8″ y el menor es la séptima parte de este ¿Cuál es el valor del tercer ángulo?

Ahora algunos ejercicios para resolver ecuaciones:
Hallar X (a, b y c son los ángulos interiores de un triángulo)

9) $a = 3X + 5º$
$b = 2X + 45º$
$c = 9X - 10º$

10) $a = 5X + 12º$
$b = 6X + 1º$
$c = 3X - 1º$

11) $a = 3X - 21º$
$b = 2X + 43º$
$c = 9X - 24º$

12) $a = 2X + 72º$
$b = X + 26º$
$c = 5X - 30º$

13) $a = 4X - 10º$
$b = 7X + 5º$
$c = 3X - 25º$

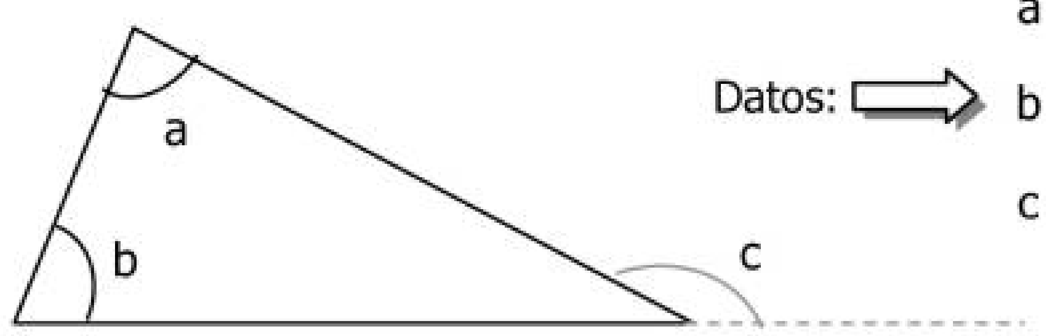
14) $a = X + 34º$
$b = 4X - 14º$
$c = 8X - 48º$

15) $a = \frac{38}{17}X + 12º$
$b = 6X + 3º$
$c = 2X - 9º$

16) $a = \frac{37}{9}X - 12º$
$b = \frac{17}{6}X + 9º$
$c = \frac{7}{2}X - 5º$

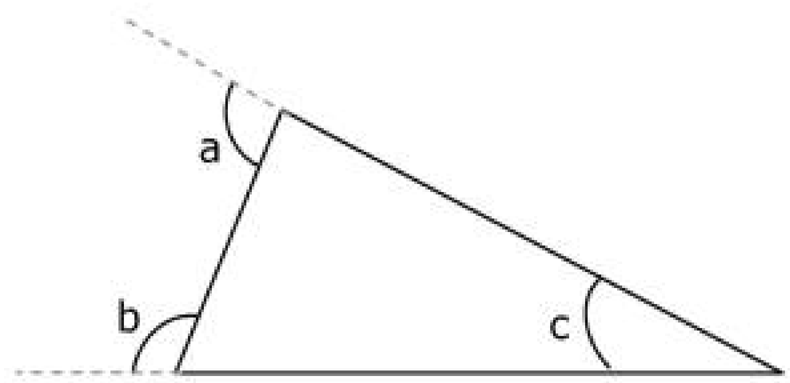
Hallar X en los siguientes ejercicios

17)

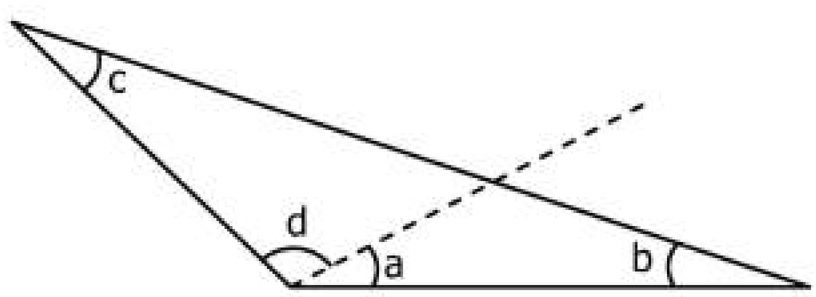


Datos: ⇨
$a = \frac{13}{5}X + 64º$
$b = 6X$
$c = \frac{31}{2}X - 5º$

18) Datos: ⇨
$a = \frac{17}{3}X + 22º$
$b = 11X - 12º$
$c = \frac{9}{2}X - 24º$

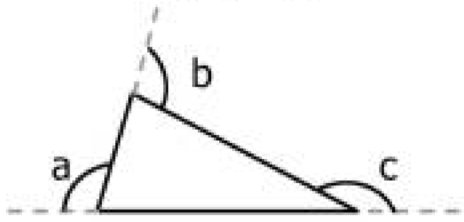


19)



Datos: ⇨
$\widehat{a} = \frac{5}{7}X + 19º$
$\widehat{b} = 4X - 3º$
$\widehat{c} = 3X + 9º$
$\widehat{d} = 15X - 4º$

Hallar X (a, b y c son los ángulos exteriores de un triángulo)



20) $a = -10X + 36^\circ\, 13'$
$b = 11X + 41^\circ\, 44'$
$c = 5X - 18^\circ\, 33'$

21) $a = 6X + 73^\circ\, 12'\, 24''$
$b = 7X + 42^\circ\, 15'\, 23''$
$c = -2X + 24^\circ\, 32'\, 13''$

22) $a = 2X + 32^\circ\, 13'\, 45''$
$b = X + 26^\circ\, 42'\, 32''$
$c = 5X - 18^\circ\, 56'\, 17''$

23) $a = X - 23^\circ$
$b = 9X - 6^\circ$
$c = -6X + 149^\circ$

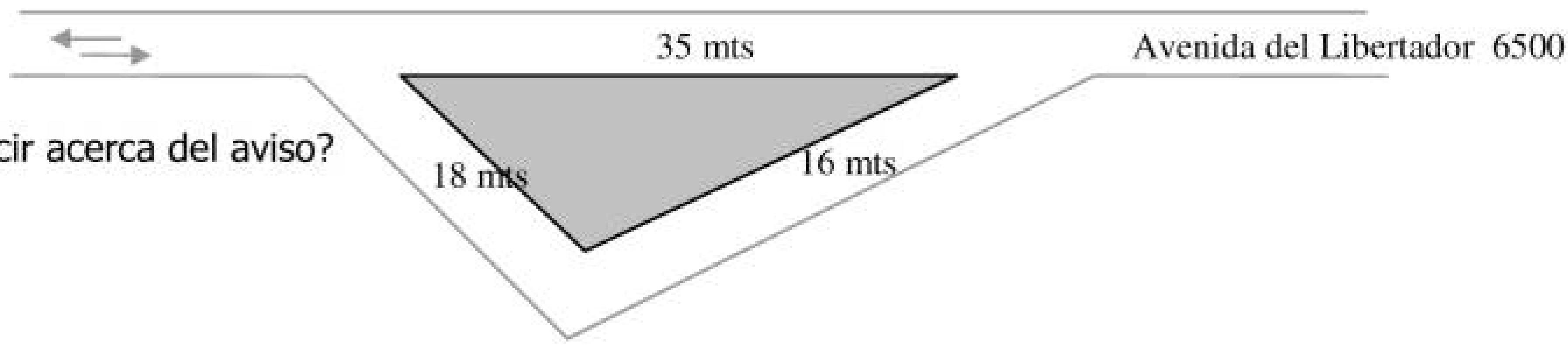
24) $a = -8X + 32^\circ$
$b = 11X - 14^\circ$
$c = 7X - 8^\circ$

25) $a = \frac{17}{6}X + 3^\circ$
$b = \frac{7}{4}X + 32^\circ$
$c = 5X - 20^\circ$

26) $a = \frac{37}{10}X - 14^\circ$
$b = \frac{11}{5}X + 16^\circ$
$c = \frac{13}{4}X - 8^\circ$

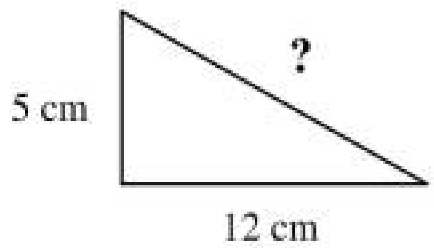
27) Una inmobiliaria publica la venta de un terreno triangular en una revista, presentando el siguiente croquis del terreno y sus medidas:

¿Qué podrías decir acerca del aviso? ¿Hay engaños?

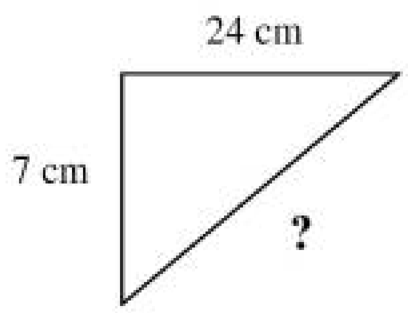


Hallar el lado que falta:

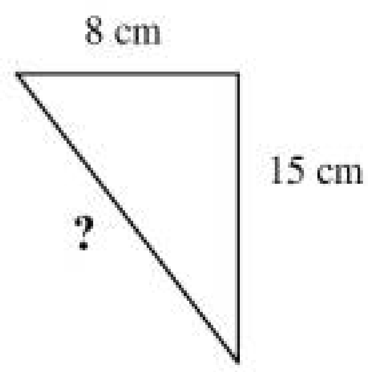
28)



29)



30)



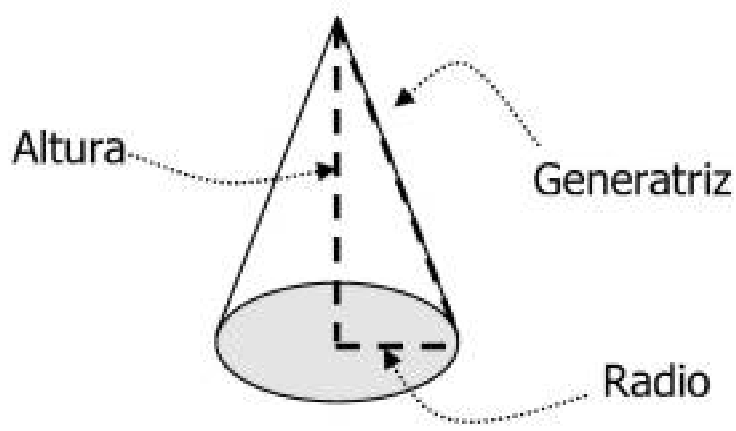
Problemas:

31) En una esquina de una plaza rectangular se para Anabel, María se para frente a Anabel por uno de los senderos a 9 metros de distancia, y Leticia se para sobre el otro sendero a una distancia desconocida de Anabel. Si sabemos que la distancia entre Leticia y María es de 41 metros ¿A qué distancia de Anabel estaba Leticia? (Los senderos son perpendiculares entre sí)

32) Fernando apoya una tabla de 61 cm de largo, en diagonal contra una pared, la punta superior de la tabla se apoya en la pared a una distancia de 11 cm del piso ¿Cuál es la distancia que separa el borde inferior de la tabla de la pared?

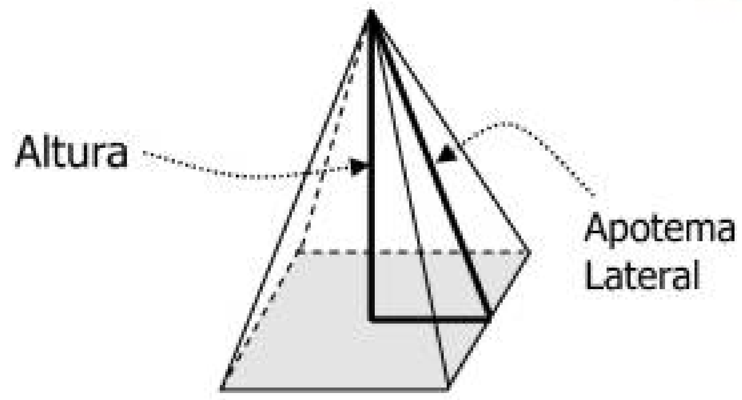
33) Martín dibuja un rectángulo de 12 cm por 35 cm ¿Cuánto debe valer la diagonal de dicho rectángulo?

34) hallar la Altura de un cono cuya generatriz mide 15 centímetros y el radio de su base mide 9 centímetros.



Más Problemas:

35) Hallar la apotema lateral de una pirámide de base cuadrangular si el lado de la base mide 16 centímetros y la Altura de la pirámide es de 30 centímetros.

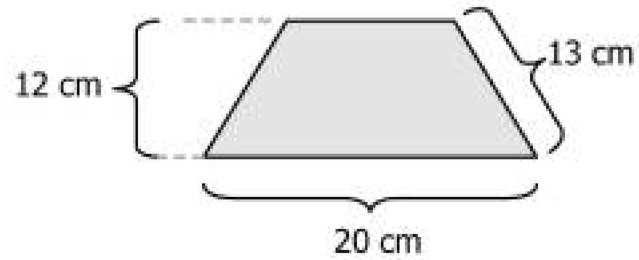


36) Hallar la Altura de una torre que proyecta en el suelo una sombra de 20 metros de largo. Si se sabe que la distancia entre el punto donde termina su sombra y la punta más alta de la torre es de 25 metros.

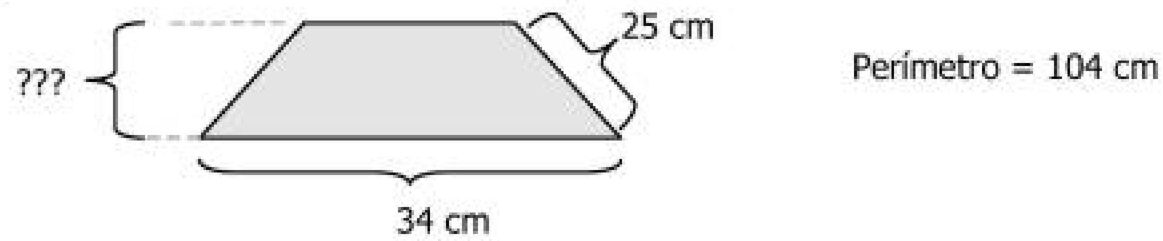
37) Unos obreros usan una escalera de 3,40 metros de largo para pintar el frente de un edificio que tiene 5 metros. Apoyan la escalera con una separación de 52 centímetros de la pared. Si los obreros con las manos levantadas llegan a una Altura de 2 metros (en el suelo).
¿Alcanzarán a pintar el punto más alto del frente del edificio, parados en el punto más alto de la escalera? ¿Cuánto les falta o les sobra?

38) Calcular cuanto mide el largo de un tobogán de 1,5 metros de Altura, si desde la escalerita hasta donde termina el tobogán hay 2 metros.

39) Calcular la base menor de un trapecio isósceles de 12 centímetros de Altura, si sabemos que la base mayor mide 20 cm, y los lados iguales miden 13 cm.



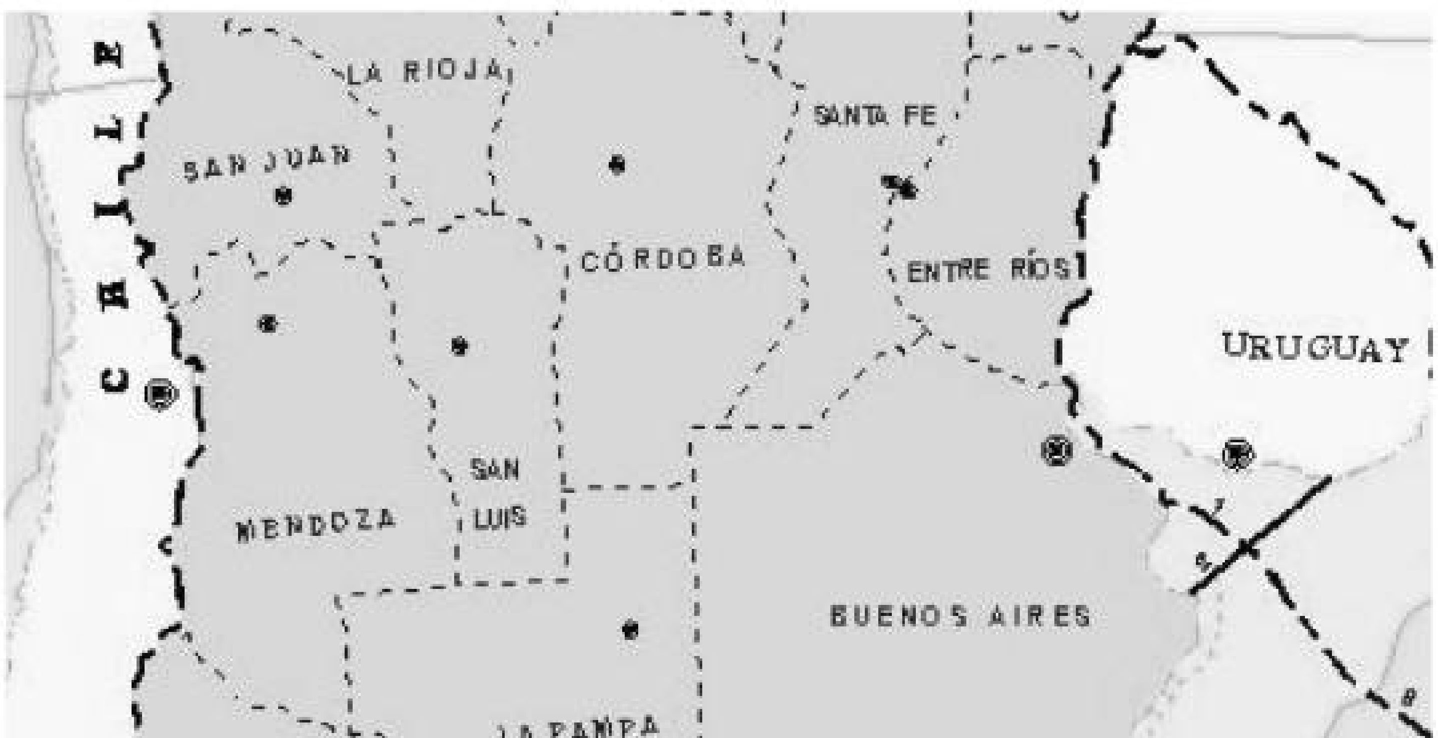
40) Calcular la Altura de un trapecio isósceles, si sabemos que la base mayor mide 34 centímetros, los lados iguales miden 25 centímetros y el perímetro es 104 centímetros.



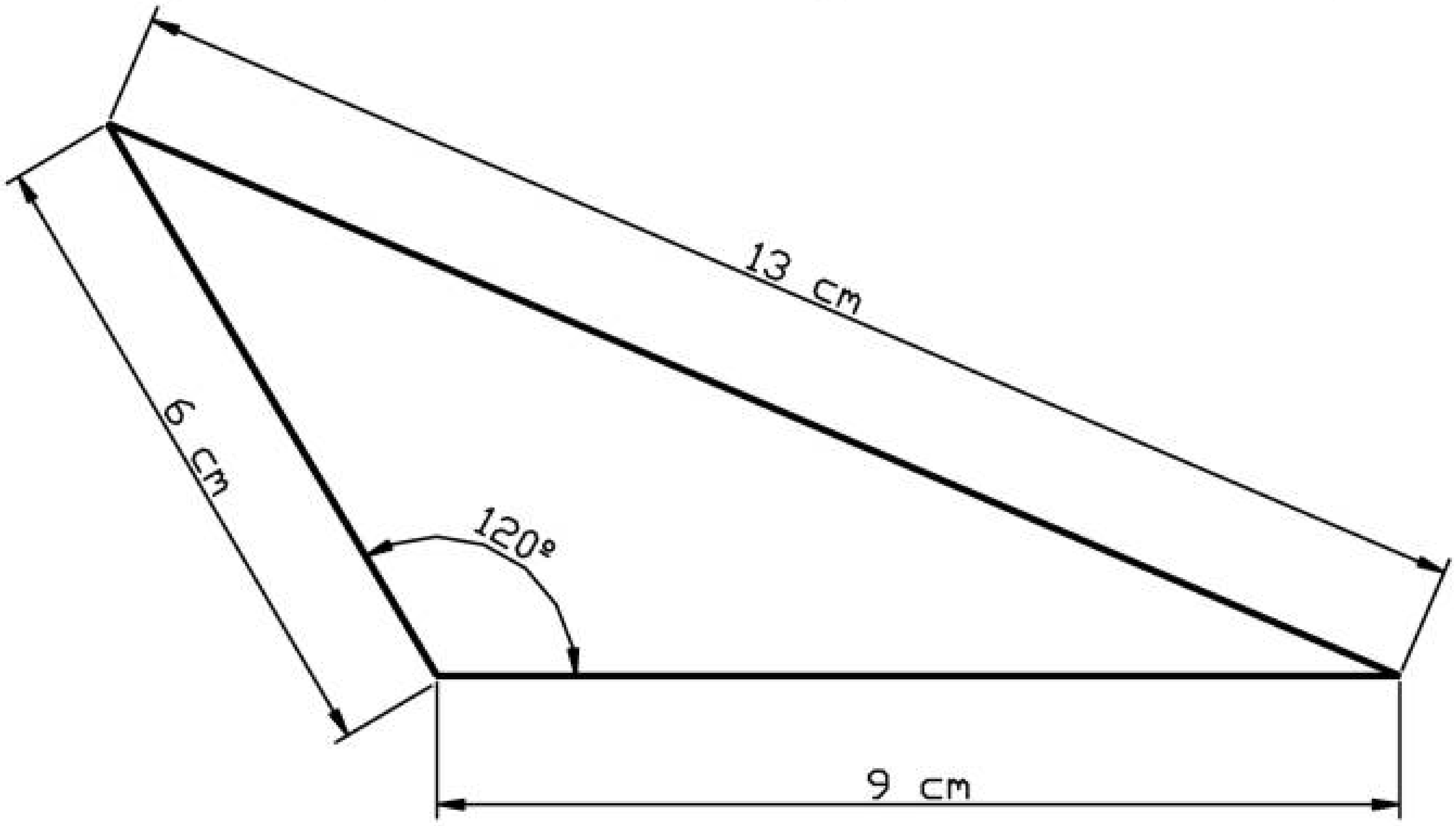
41) Hallar la diagonal de un rectángulo de 15 cm por 8 cm.

42) Supongamos que comenzamos a dibujar un triángulo, el primer lado de 12 cm, el segundo lado de 15 cm. Para cualquier ángulo que haya usado, ¿Cuál será la medida máxima del tercer lado del triángulo?

43) Tres equipos de Fútbol deciden jugar un campeonato amistoso entre ellos. Quieren definir además un estadio neutral que quede a la misma distancia de los tres equipos, uno es de Bs. As, otro es de Córdoba y otro de Santa Fe. ¿Qué método puedo utilizar para definir el punto que quede a la misma distancia de los tres estadios? Resuelve este problema con un mapa de Argentina, ubicando las tres ciudades y formando un triángulo con estos vértices.



44) Dibujar un triángulo con las siguientes medidas en una hoja 4 veces: Vas a necesitar 2 hojas



En cada uno de los dibujo tenés que realizar cada consigna:

A- **Trazá las Bisectrices** de los ángulos y medí cual es la distancia desde el punto donde se cortan las Bisectrices a cada uno de los lados. ¿Por qué la distancia es la misma?

B- **Trazá las Medianas** de cada uno de los lados y calculá la relación entre la parte chica y la parte grande de cada Mediana. ¿Por qué en las tres Medianas esa relación es la misma?

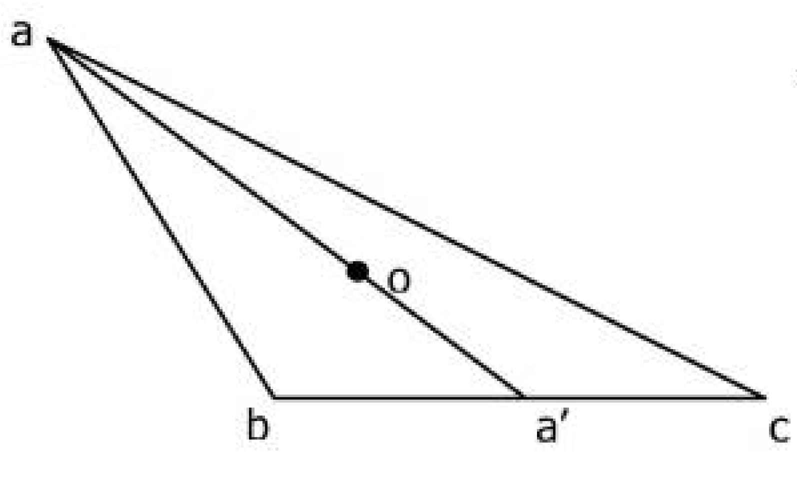
C- **Trazá las Mediatrices** de cada lado.

- C1. ¿Está bien que se crucen las tres medaitrices afuera del triángulo?
- C2. Medí la distancia entre el punto donde se cortan las Mediatrices y los vértices ¿Por qué la distancia es la misma?

D- **Trazá las Alturas** de cada lado y medilas.

- D1. Calculá el área del triángulo, (usando la fórmula área = B.H/2) tomando como base primero el lado de 9 cm, después el de 6 cm y después el de 13 cm. Usá el valor de las alturas que mediste ¿Dan lo mismo? ¿Por qué?

Algunos ejercicios más para hallar "x"



45) $\overline{ba'}=\overline{a'c}$
$\overline{ao}=2x+2cm$
$\overline{oa'}=3x-13cm$
Hallar X

46) $\overline{ba'}=\overline{a'c}$
$\overline{ao}=7x-3cm$
$\overline{oa'}=3x+1cm$
Hallar X

Sugerencia: Utilizar para resolver ambos ejercicios, las propiedades de las medianas.

Dado el siguiente esquema de un triángulo $\overset{\triangle}{abc}$, resolver los siguientes ejercicios: Hallar "x"

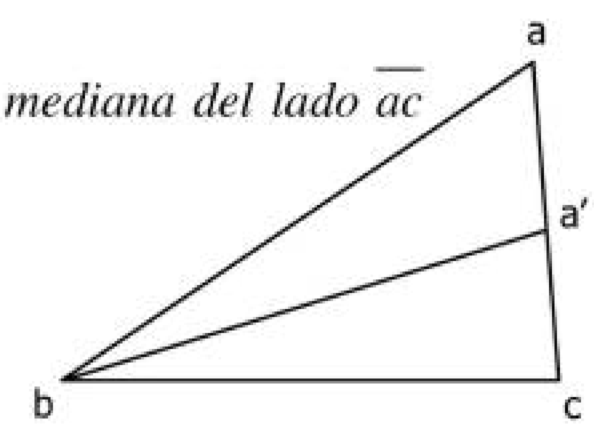
47) $\overline{aa'}=3x+1cm$
$\overline{a'c}=4x-5cm$

48) $\overline{aa'}=\frac{3}{4}x+3cm$
$\overline{a'c}=\frac{1}{2}x+4cm$

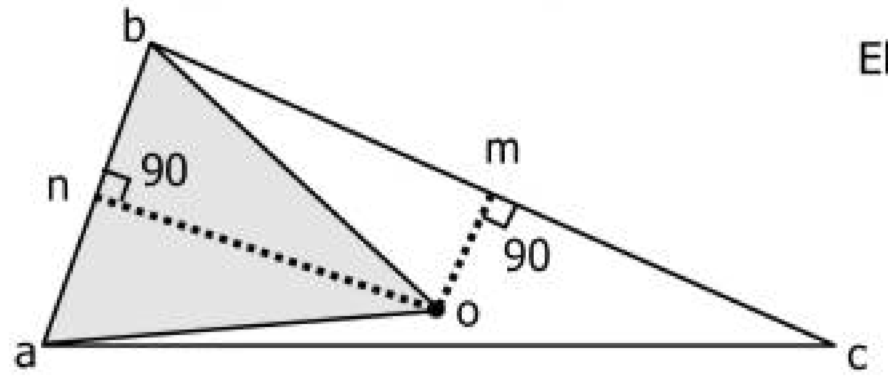
49) $\overline{aa'}=\frac{2}{9}x+3cm$
$\overline{a'c}=\frac{2}{3}x-1cm$

50) $\overline{aa'}=5x+17cm$
$\overline{a'c}=11x-1cm$

$\overline{ba'}$ *es mediana del lado* $\overline{ac}$



51) Dado el triángulo $\overset{\triangle}{abc}$, hallar el perímetro del triángulo $\overset{\triangle}{aob}$, con los siguientes datos



El punto "o" es el circuncentro del triángulo $\overset{\triangle}{abc}$.

$\overline{bn} = 8\,cm$

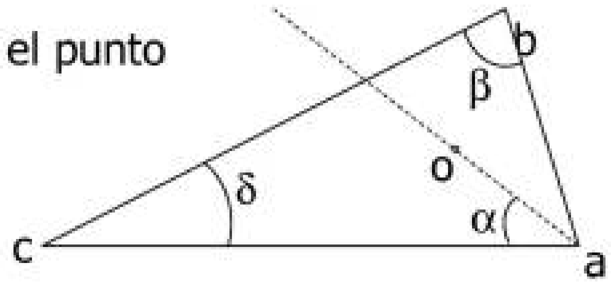
$\overline{no} = 15\,cm$

Justificar cada paso y las propiedades usadas.

52) Dado el triángulo abc, cuyo INCENTRO es el punto "o", y dados los siguientes datos, hallar x

$\alpha = x + 25°$

$\beta = 9x - 15°$ $\qquad \delta = \frac{7}{2}x$

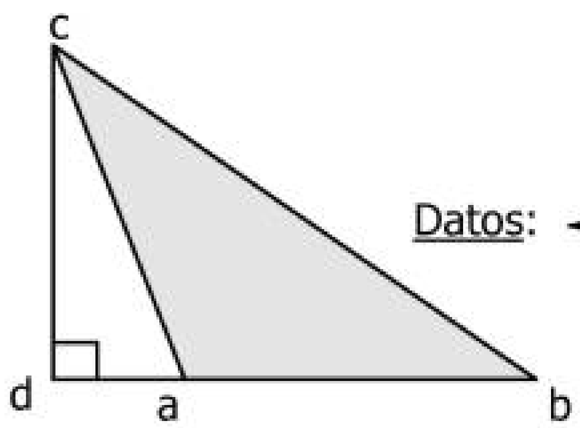


Justificar cada paso y las propiedades usadas.

Responder Verdadero o Falso:

53) Las medianas quedan divididas por el Baricentro en dos partes iguales.
54) Las medianas de cada lado lo dividen en dos partes iguales.
55) Las Mediatrices de cada lado lo dividen en dos partes iguales.
56) La bisectriz de cada ángulo divide al lado opuesto en partes iguales.
57) El punto donde se cortan las bisectrices está a la misma distancia de todos los lados.
58) El punto donde se cortan las medianas, está a la misma distancia de todos los vértices del triángulo.
59) El punto donde se cortan las mediatrices, está a la misma distancia de todos los vértices del triángulo.
60) Las alturas se cortan en el mismo punto donde se cortan las bisectrices.

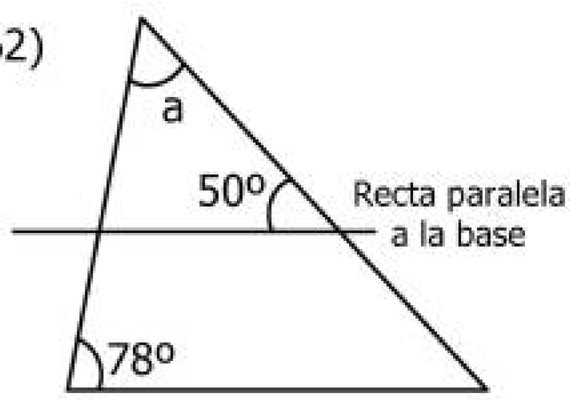
61) Hallar área y perímetro del triángulo $\overset{\triangle}{abc}$



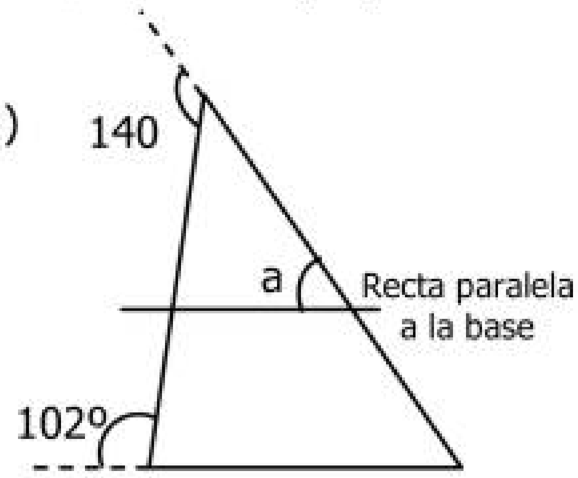
Datos: $\begin{cases} \overline{ab} = 12\ cm \\ \overline{ac} = 17\ cm \\ \overline{ad} = 8\ cm \end{cases}$

Hallar el ángulo "a" indicado en cada caso, aplicando propiedades de los ángulos interiores del triángulo y de ángulos entre paralelas:

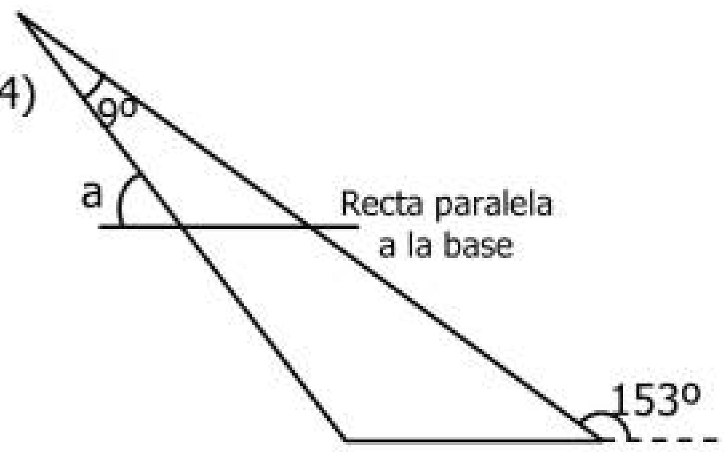
62)



63)



64)



Responder Verdadero o Falso:

65) El ángulo interior más grande de un triángulo no puede ser mayor o igual a 90º
66) El ángulo interior más grande de un triángulo no puede ser mayor o igual a 180º
67) Los ángulos exteriores de un triángulo siempre son mayores a sus ángulos interiores adyacentes
68) La suma de los dos lados más pequeños de un triángulo debe ser *menor* al lado mayor.
69) No se puede construir ningún triángulo con dos ángulos exteriores agudos.
70) Sabiendo el valor de dos lados de cualquier triángulo puedo calcular el valor del tercero con el Teorema de Pitágoras.

Ejercicio integrador

Dado el siguiente gráfico, hallar en cada caso el ángulo pedido:

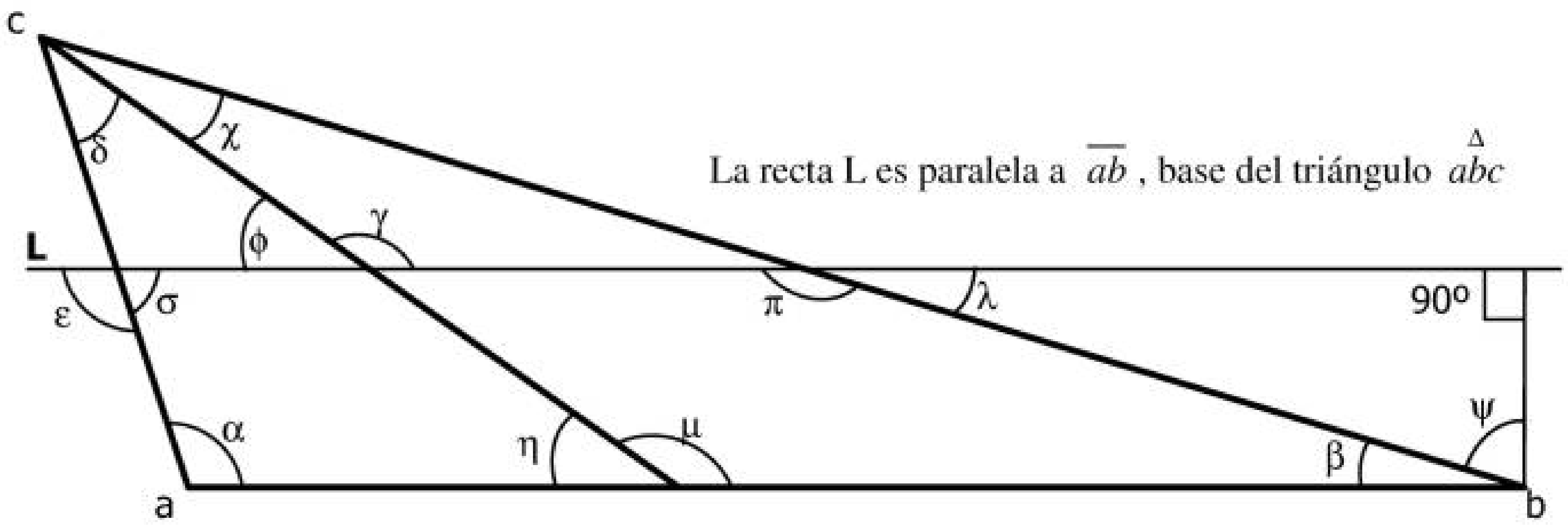
Datos:

$\lambda = \frac{1}{2}x + 11^\circ$

$\chi = \frac{5}{6}x + 8^\circ$

$\mu = 14x - 23^\circ$

$\sigma = 6x$



71) Hallar "x"

72) Hallar el ángulo λ

73) Hallar el ángulo μ

74) Hallar el ángulo χ

75) Hallar el ángulo σ

76) Hallar el ángulo β

77) Hallar el ángulo ψ

78) Hallar el ángulo π

79) Hallar el ángulo γ

80) Hallar el ángulo ϕ

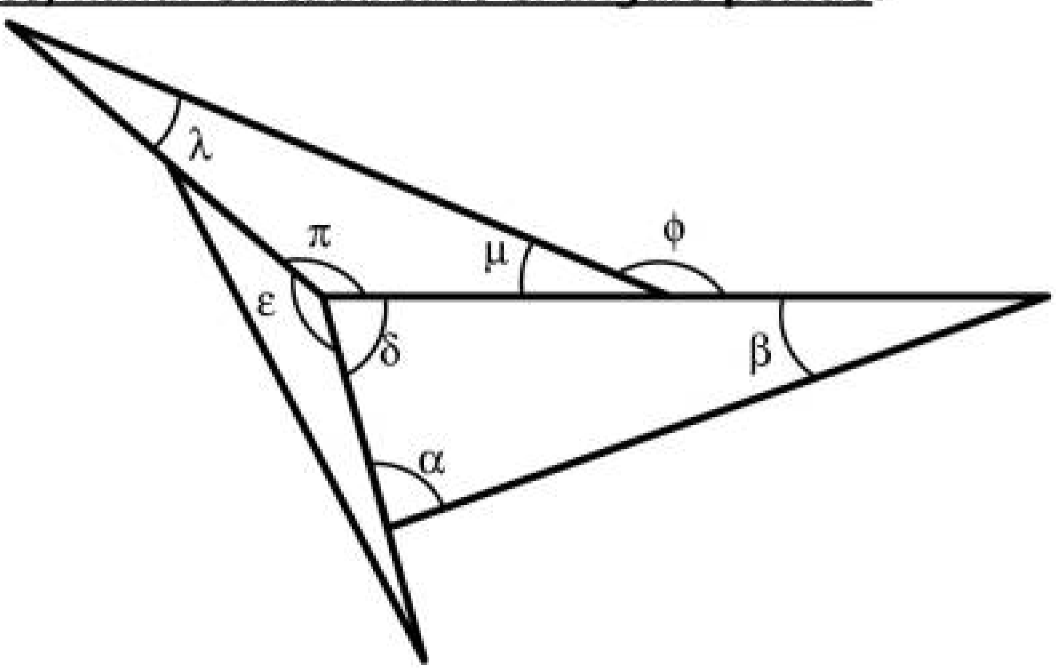
81) Hallar el ángulo ε

82) Hallar el ángulo δ

83) Hallar el ángulo α

84) Hallar el ángulo η

Dado el gráfico, hallar en cada caso el ángulo pedido:



Datos:

$\delta = 4x - 18^\circ$

$\varepsilon = 7(x - 2^\circ)$

$\pi = 6x + 1^\circ$

$\mu = x - 1^\circ$

$\alpha = 4\mu - 2^\circ$

Hallar:

85) x

86) ángulo π

87) ángulo δ

88) ángulo ε

89) ángulo α

90) ángulo μ

91) ángulo λ

92) ángulo ϕ

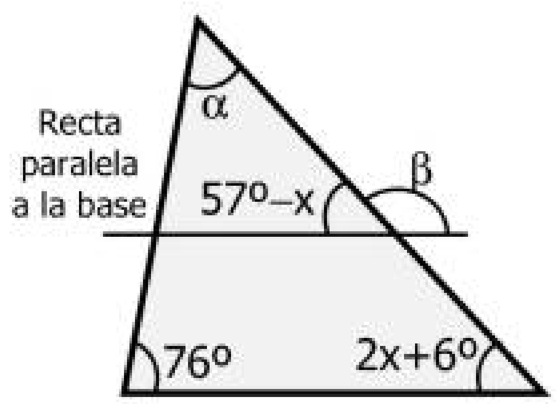
93) ángulo β

Dados los siguientes ejercicios hallar en cada caso los valores pedidos:

94) Hallar "x"

95) Hallar α

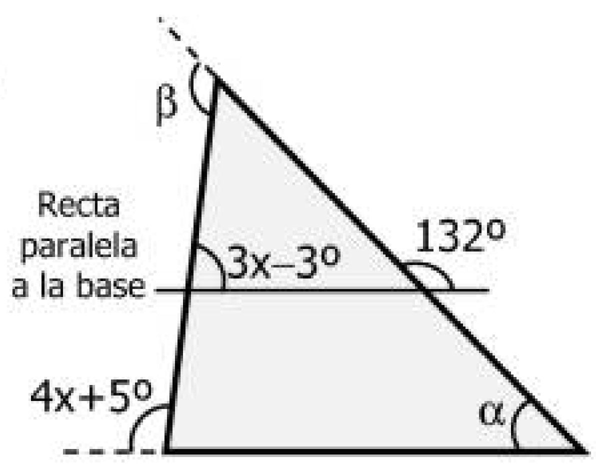
96) Hallar β



97) Hallar "x"

98) Hallar α

99) Hallar β

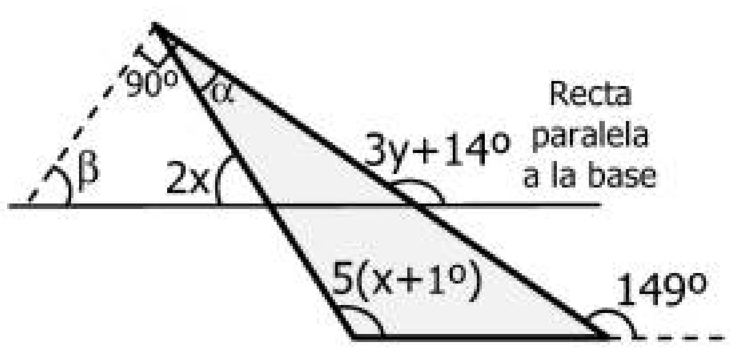


100) Hallar "x"

101) Hallar α

102) Hallar β

103) Hallar "y"



Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

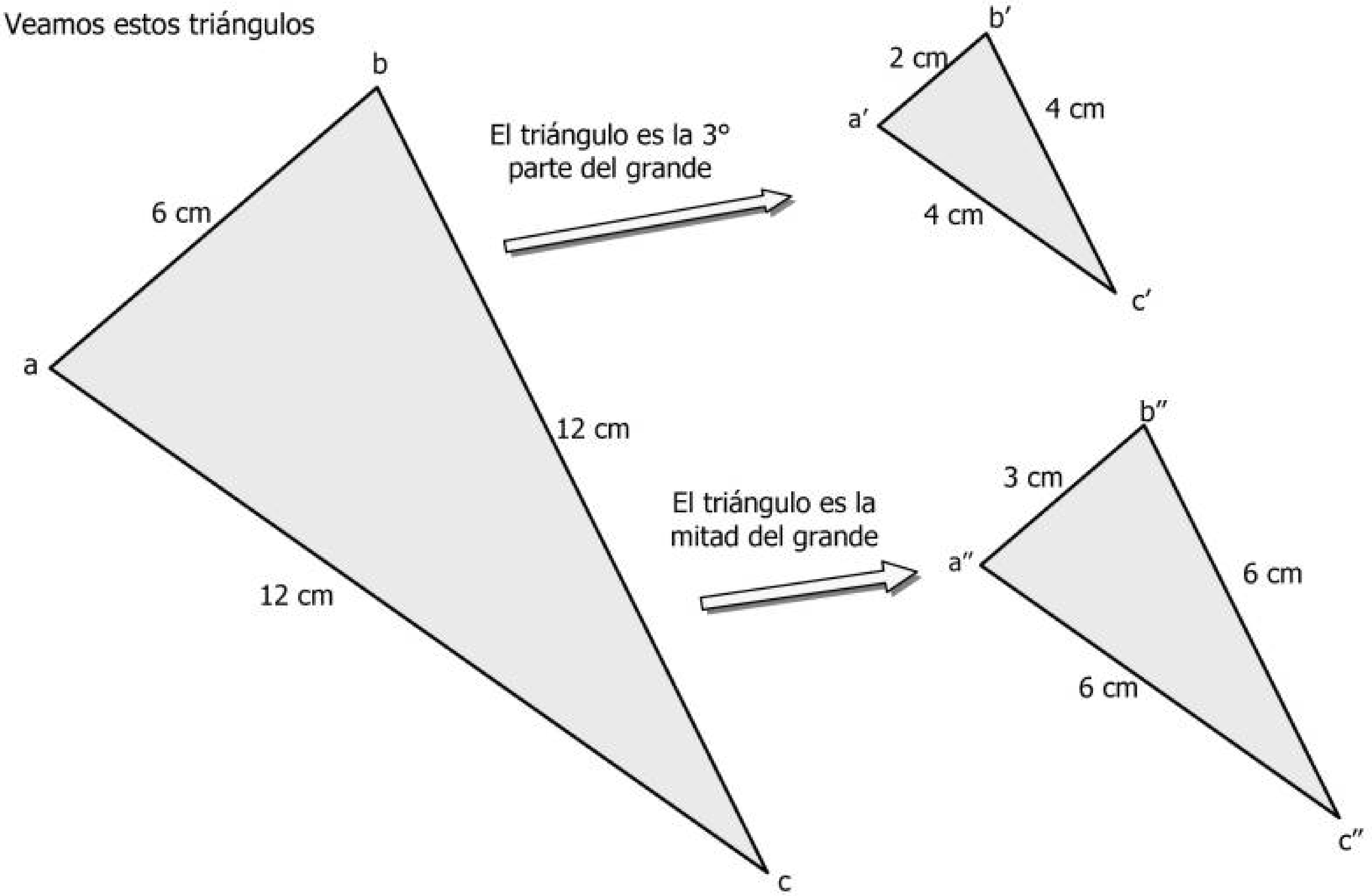
Triángulos
Nivel II

Número de Tema: **30**

Área: **Matemática**

- **Proporciones geométricas y semejanza de triángulos:**

Veamos estos triángulos



Los triángulos abc , a′b′c′ y a″b″c″ son semejantes, esto significa que entre ellos hay una ***razón de proporcionalidad.***

> - Cuando tenemos dos triángulos semejantes se cumple que:
>   - ✓ Todos sus ángulos interiores son iguales.
>   - ✓ Todos sus lados son proporcionales.

Entonces:

$\hat{a} \simeq \hat{a}'$ $\quad \hat{b} \simeq \hat{b}'$ $\quad \hat{c} \simeq \hat{c}'$ $\qquad \hat{a} \simeq \hat{a}''$ $\quad \hat{b} \simeq \hat{b}''$ $\quad \hat{c} \simeq \hat{c}''$

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{b'c'}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{a'c'}} = \boxed{3} \qquad \frac{\overline{ab}}{\overline{a''b''}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{b''c''}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{a''c''}} = \boxed{2}$$

Razón de Proporcionalidad $\qquad$ Razón de Proporcionalidad

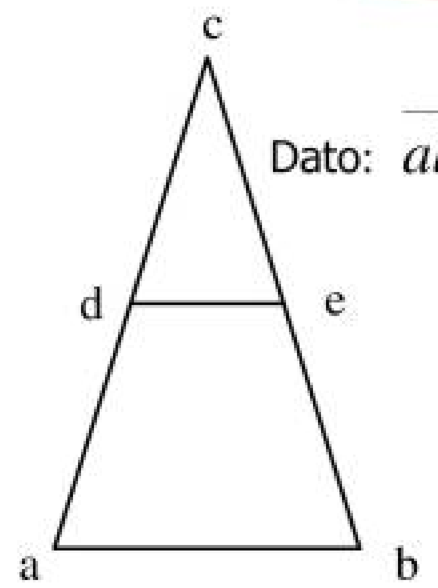
$\overset{\triangle}{abc}$ es el triple de $\overset{\triangle}{a'b'c'}$ $\qquad$ $\overset{\triangle}{abc}$ es el doble de $\overset{\triangle}{a''b''c''}$

- **Criterios de Semejanza de Triángulos**: Los criterios que vamos a estudiar, son en cierta manera "formas de asegurarse de que dos triángulos son semejantes"

  - ✓ 1° Criterio: 2 Ángulos iguales
  - ✓ 2° Criterio: 1 Ángulo igual y 2 pares de lados proporcionales
  - ✓ 3° Criterio: 3 pares de lados proporcionales

1° Criterio

Supongamos que tenemos que demostrar que $\overset{\triangle}{abc}$ es semejante a $\overset{\triangle}{dec}$



Dato: $\overline{ab} \,//\, \overline{de}$

> Como no tenemos ningún dato acerca del valor de los lados, sí o sí, vamos a tener que usar el 1° criterio, que es en función de los ángulos

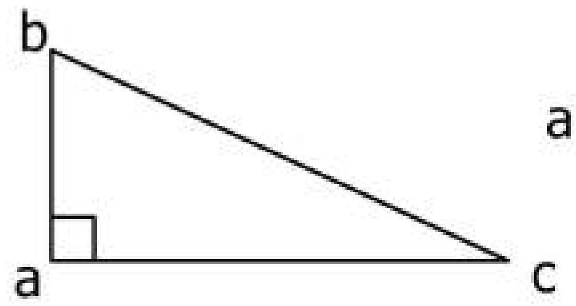
- ✓ El ángulo "a" es igual al ángulo "d" porque son correspondientes entre paralelas
- ✓ El ángulo "b" es igual al ángulo "e" también porque son correspondientes entre paralelas

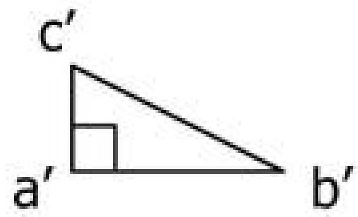
Como tienen **2 ángulos iguales,** queda demostrado por el **1° criterio** que los triángulos **son semejantes**.

2° Criterio:

Supongamos que tenemos que demostrar que $\overset{\triangle}{abc}$ es semejante con $\overset{\triangle}{a'b'c'}$

$$\text{Datos: } \begin{cases} \overline{ab} = 4cm & \overline{a'b'} = 3cm \\ \overline{bc} = 6cm & \overline{b'c'} = 4{,}5cm \end{cases}$$





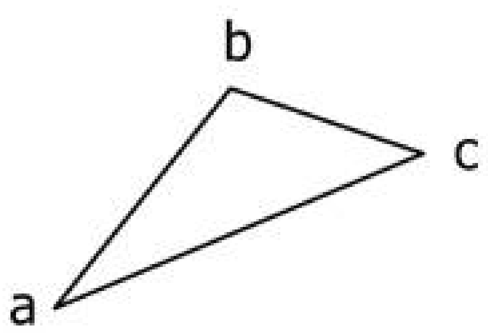
- ✓ Por un lado sabemos que: a = a′ = 90°
Ya tenemos **1 ángulo igual**.
- ✓ Y haciendo las cuentas, verificamos que **2 lados son proporcionales**

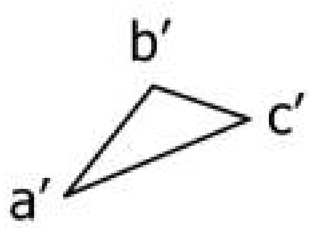
Como tienen 1 ángulo igual y un par de lados proporcionales, queda demostrado por el **2° criterio** que los triángulos **son semejantes**.

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \frac{4cm}{3cm} = \frac{4}{3} \qquad \frac{\overline{bc}}{\overline{b'c'}} = \frac{6cn}{4{,}5cm} = \frac{4}{3}$$

3° Criterio:

Supongamos que tenemos que demostrar que $\overset{\triangle}{abc}$ es semejante con $\overset{\triangle}{a'b'c'}$





$$\text{Datos: } \begin{cases} \overline{ab} = 4cm & \overline{a'b'} = 2cm \\ \overline{bc} = 6cm & \overline{b'c'} = 3cm \\ \overline{ac} = 8cm & \overline{a'c'} = 4cm \end{cases}$$

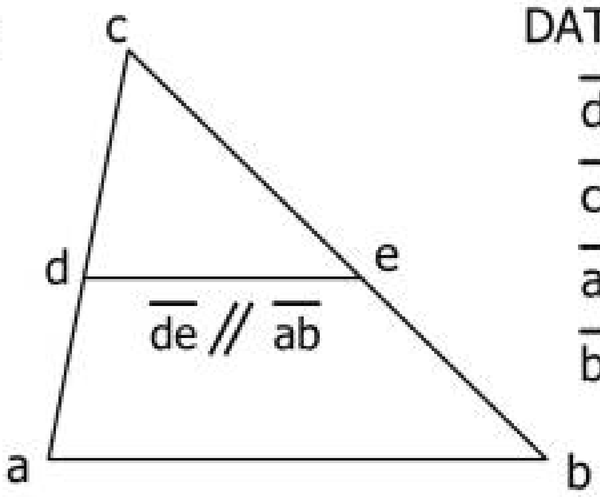
Planteamos las razones entre los lados: $\boxed{\frac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \frac{4cm}{2cm} = 2}$ $\boxed{\frac{\overline{bc}}{\overline{b'c'}} = \frac{6cn}{3cm} = 2}$ $\boxed{\frac{\overline{ac}}{\overline{a'c'}} = \frac{8cn}{4cm} = 2}$

✓ Como los 3 pares de lados tienen la misma razón de proporcionalidad, **los 3 lados son proporcionales**, por lo tanto queda demostrado por el **3° criterio** que **los triángulos son semejantes**.

by Dal-0r
para
TARINGA!

✓ **Hallar X**

1)



DATOS:

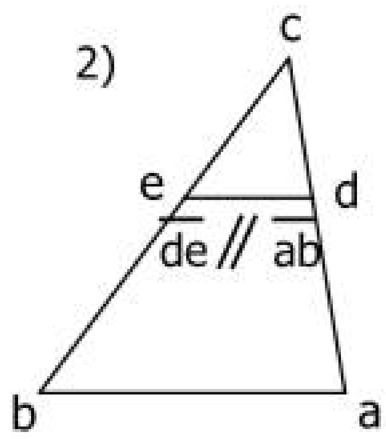
$\overline{dc} = 4cm$

$\overline{ce} = 5cm$

$\overline{ac} = 3X - 1cm$

$\overline{bc} = 2X + 4cm$

2)



DATOS:

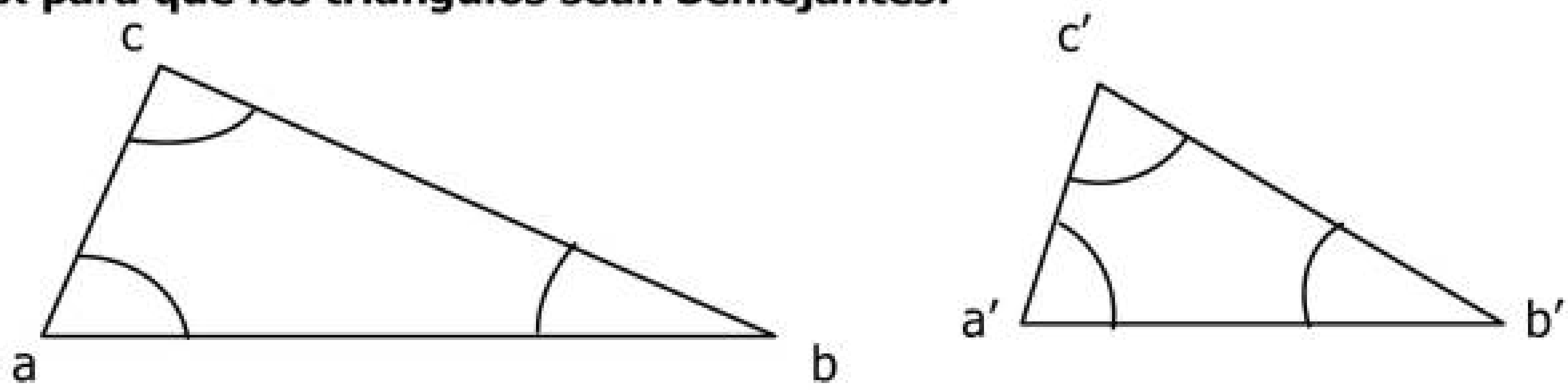
$\overline{dc} = X + 4cm$

$\overline{ce} = 2X - 1cm$

$\overline{ac} = 33cm$

$\overline{be} = 40cm - 2X$

✓ **Hallar X para que los triángulos sean Semejantes:**



3) $\begin{cases} \hat{a} = 2X - 30^o \\ \hat{a}' = \frac{5}{6}X + 15^o \end{cases}$

4) $\begin{cases} \hat{b} = 3X + 13^o \\ \hat{b}' = \frac{3}{4}X + 58^o \end{cases}$

5) $\begin{cases} \hat{c} = \frac{3}{5}X + 12^o \\ \hat{c}' = \frac{7}{6}X - 5^o \end{cases}$

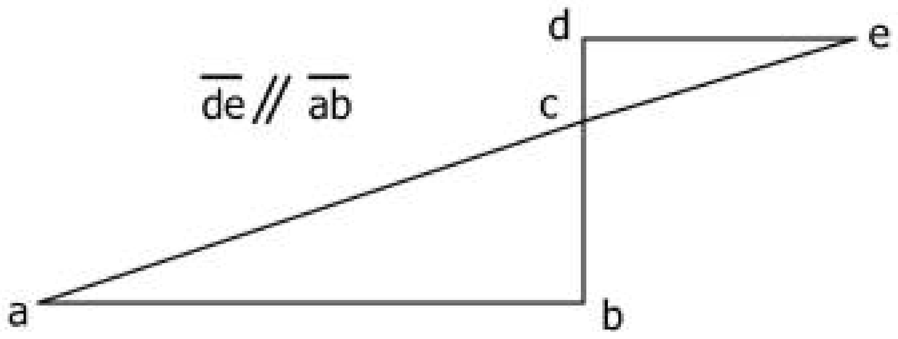
6) $\begin{cases} \hat{a} = 2X + 8^o \\ \hat{b} = 9X - 9^o \\ \hat{c}' = 4X + 16^o \end{cases}$

7) $\begin{cases} \hat{a} = 3X + 21^o \\ \hat{c} = 8X - 34^o \\ \hat{b}' = 63^o - X \end{cases}$

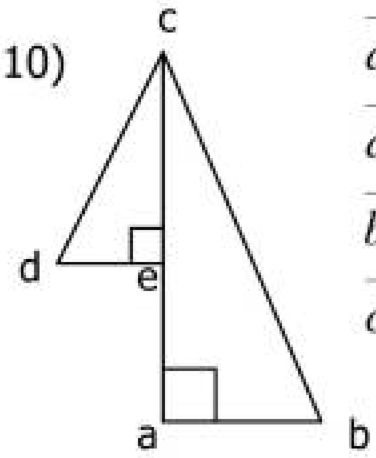
8) $\begin{cases} \overline{ab} = 9X - 3cm \\ \overline{ac} = 2X + 2cm \\ \overline{a'b'} = 3cm \quad y \quad \overline{a'c'} = 2cm \end{cases}$

✓ **Demostrar que los siguientes triángulos son semejantes:**

9)



10)



$\overline{ab} = 28cm$

$\overline{de} = 16cm$

$\overline{bc} = 35cm$

$\overline{cd} = 20cm$

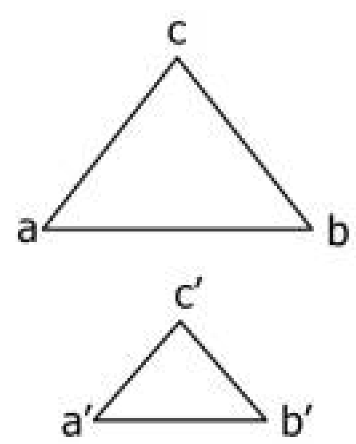
✓ Decir si los triángulos abc y a´b´c´ son semejantes o no según los datos dados en cada caso:

11) $\overline{ab} = 20\,cm$
$\overline{a'b'} = 4\,cm$
$\overline{bc} = 40\,cm$
$\overline{b'c'} = 8\,cm$
$\hat{a} = \hat{a}' = 60°$

12) $\overline{ab} = 25\,cm$
$\overline{a'b'} = 10\,cm$
$\overline{bc} = 10\,cm$
$\overline{b'c'} = 4\,cm$
$\hat{a} = 50° \quad \hat{b} = 70°$
$\hat{c}' = 60°$

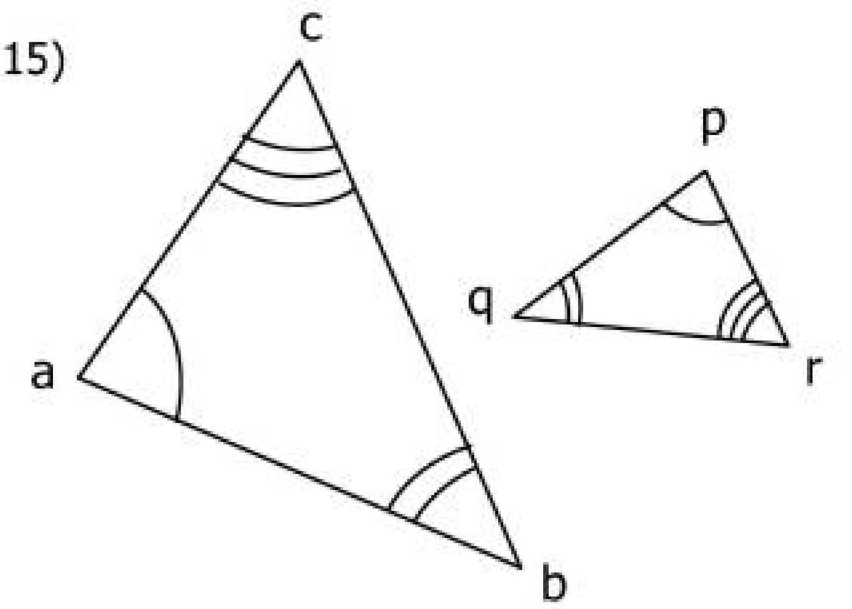
13) $\overline{ab} = 42\,cm$
$\overline{a'b'} = 35\,cm$
$\overline{bc} = 30\,cm$
$\overline{b'c'} = 25\,cm$
$\overline{ac} = 24\,cm$
$\overline{a'c'} = 18\,cm$

14) $\overline{ab} = 49\,cm$
$\overline{a'b'} = 35cm$
$\overline{bc} = 42\,cm$
$\overline{b'c'} = 30\,cm$
$\overline{ac} = 35\,cm$
$\overline{a'c'} = 25\,cm$

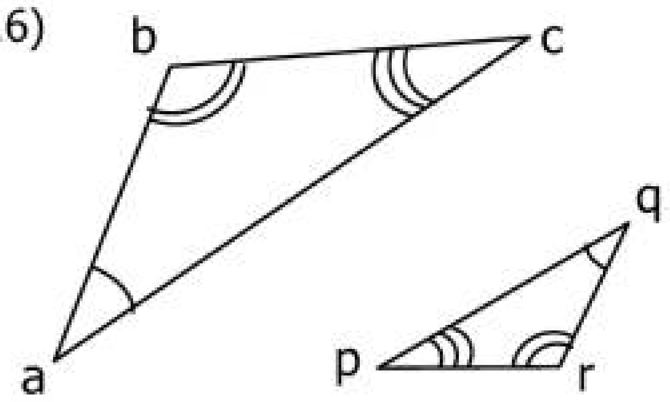


✓ **Plantear la proporcionalidad de los tres lados, sabiendo que los triángulos son semejantes:**

15)

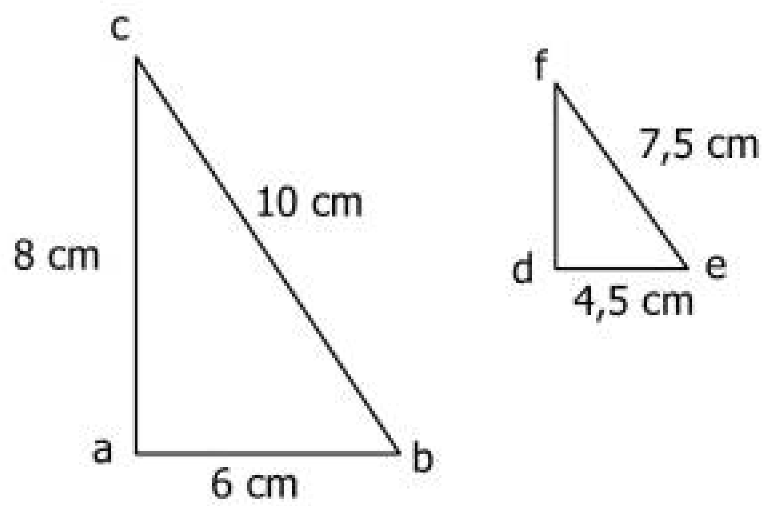


16)

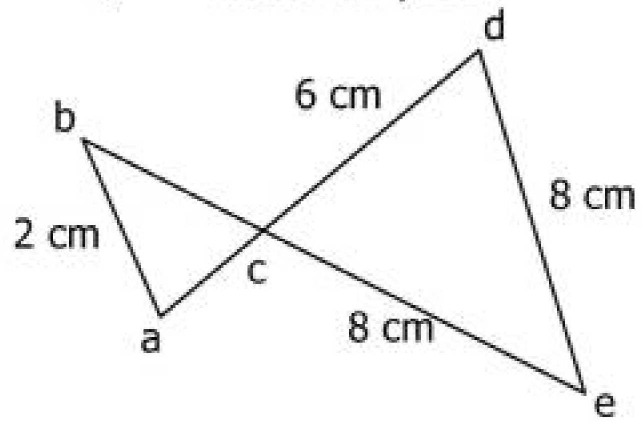


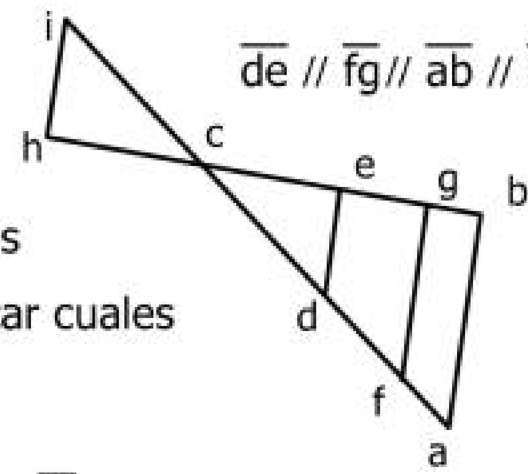
✓ Hallar el valor del lado que se pide en cada caso, sabiendo que los triángulos son semejantes:

17) • Hallar df



18) • Hallar ac y bc





$\overline{de} \,//\, \overline{fg} \,//\, \overline{ab} \,//\, \overline{hi}$

Dado el siguiente gráfico y las siguientes proporciones geométricas:
19) Demostrar que los triángulos abc ; dec ; fgc y hic son todos semejantes

Luego partiendo de la base de que estos triángulos son semejantes, verificar cuales de las siguientes igualdades son verdaderas y cuáles son falsas.

20) $\frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{de}}$

21) $\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{ce}}$

22) $\frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{cf}}{\overline{ce}}$

23) $\frac{\overline{cf}}{\overline{fg}} = \frac{\overline{ce}}{\overline{de}}$

24) $\frac{\overline{cf}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{ce}}$

25) $\frac{\overline{cf}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{cb}}$

26) $\frac{\overline{cf}}{\overline{cg}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{de}}$

27) $\frac{\overline{fg}}{\overline{de}} = \frac{\overline{cf}}{\overline{cd}}$

28) $\frac{\overline{fg}}{\overline{de}} = \frac{\overline{cg}}{\overline{ce}}$

29) $\frac{\overline{fg}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{cf}}{\overline{ac}}$

30) $\frac{\overline{ab}}{\overline{de}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ce}}$

31) $\frac{\overline{ab}}{\overline{de}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{cd}}$

32) $\frac{\overline{cf}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{cg}}{\overline{ce}}$

33) $\frac{\overline{ac}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{cg}}$

34) $\frac{\overline{ac}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ce}}$

35) $\frac{\overline{hi}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{ci}}{\overline{bc}}$

36) $\frac{\overline{hi}}{\overline{fg}} = \frac{\overline{ci}}{\overline{cf}}$

37) $\frac{\overline{ch}}{\overline{ci}} = \frac{\overline{ce}}{\overline{cd}}$

38) $\frac{\overline{ch}}{\overline{ci}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{ce}}$

39) $\frac{\overline{ci}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{hi}}{\overline{de}}$

40) $\frac{\overline{hi}}{\overline{de}} = \frac{\overline{ch}}{\overline{ce}}$

41) $\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{ch}}{\overline{ci}}$

42) $h\hat{c}i = d\hat{c}e$

43) $h\hat{c}i = a\hat{c}b$

44) $h\hat{c}i = f\hat{c}g$

45) $\frac{\overline{ci}}{\overline{ch}} = \frac{\overline{cg}}{\overline{cf}}$

46) $\frac{\overline{ci}}{\overline{ch}} = \frac{\overline{cf}}{\overline{cg}}$

47) $\frac{\overline{fg}}{\overline{hi}} = \frac{\overline{cg}}{\overline{ch}}$

48) $\frac{\overline{fg}}{\overline{hi}} = \frac{\overline{ch}}{\overline{cg}}$

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Cuadriláteros

Número de Tema: **31**

Área: **Matemática**

θ **Propiedad General para todos los cuadriláteros:**

La suma de los Ángulos Interiores de cualquier cuadrilátero es 360°

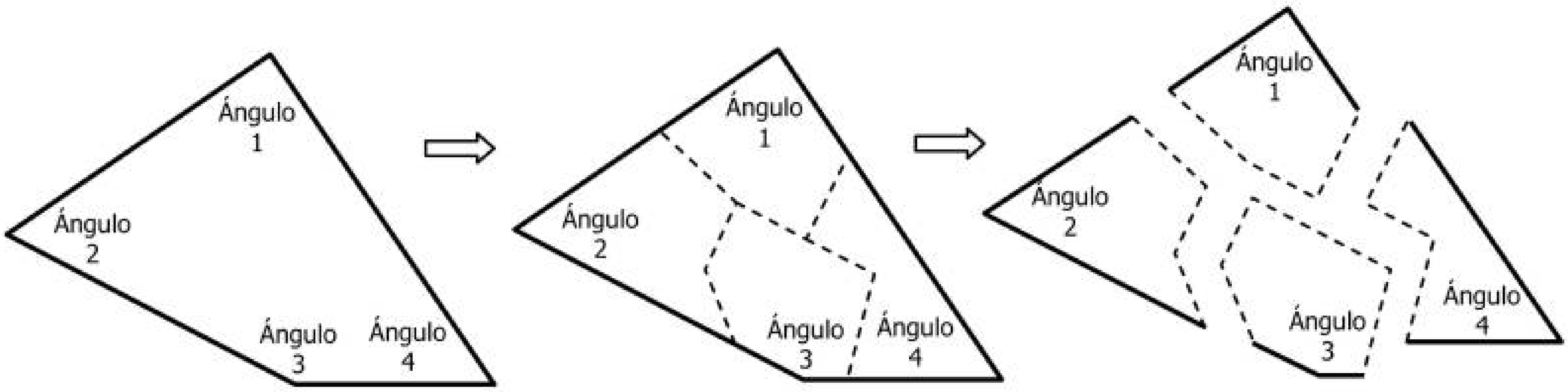
Me imagino que se estarán preguntando ¿Por qué?
O que dudan de esto o que simplemente les gustaría comprobarlo.

Bueno, como es una propiedad muy importante, les voy a proponer que hagamos "una prueba" para corroborar que esto sea cierto.

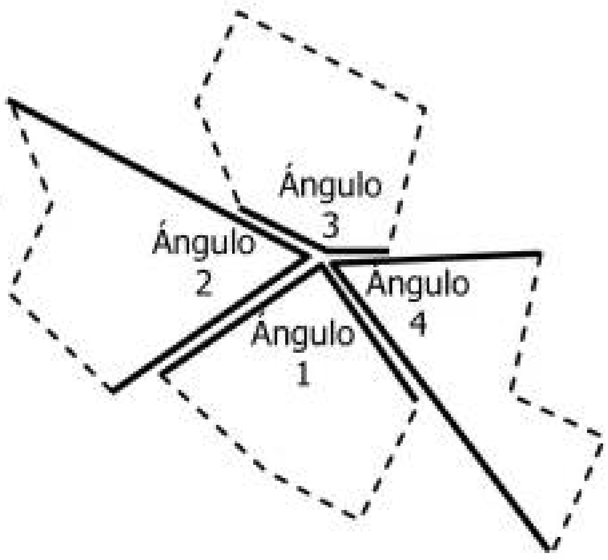
En primer lugar, sabemos que 360º equivalen a un giro completo, por lo tanto mi propuesta es que hagamos lo siguiente:

- Dibujemos en un papel un Cuadrilátero cualquiera (De cualquier forma)
- Luego recortémoslo en 4 partes, tal que en cada parte quede un vértice.
- Por último unamos los 4 vértices y comprobaremos que juntos los ángulos interiores completan un giro.

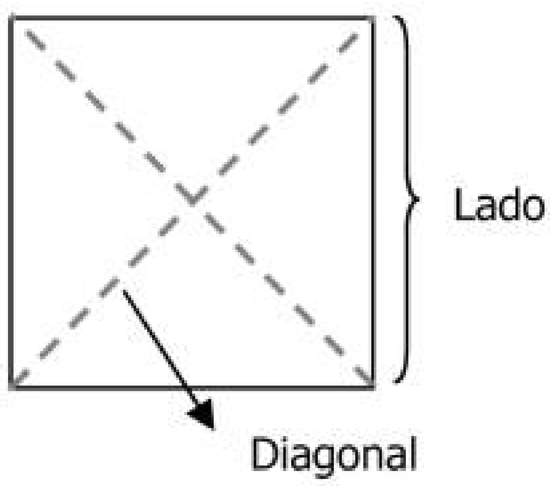
Yo les dibujo uno cualquiera y ustedes pueden hacer alguno parecido o el cuadrilátero que se les ocurra para verificarlo.



Vemos que si rearmamos la figura uniendo sus vértices, los 4 ángulos interiores forman exactamente un giro, lo que equivale a 360º



θ **El Cuadrado:**



Y **Propiedades Básicas**

- Todos sus **lados son iguales**.
- Sus 4 ángulos interiores son rectos (miden 90º).
- Sus **diagonales** son **iguales** y se cruzan en un punto que las divide en partes iguales.

Y **Fórmulas**

$$\begin{cases} \text{Perímetro} = 4 \cdot L \\ \text{Área} = L^2 \\ \text{Diagonal} = \sqrt{2} \cdot L \end{cases}$$

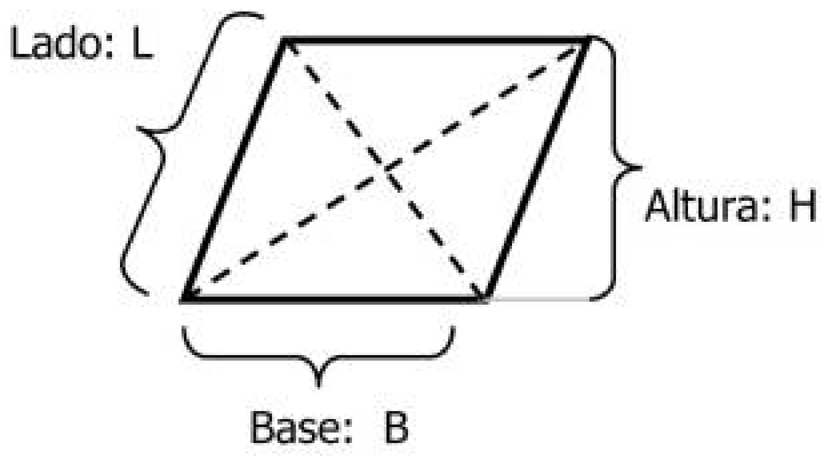
Ejemplo, supongamos que tenemos un cuadrado de 2 cm de lado y queremos averiguar: El perímetro, el área y el valor de su diagonal.

Comenzamos con las fórmulas y remplazamos "L" por "2 cm":

$$Per = 4 \cdot L = 4 \cdot 2\,cm = 8\,cm$$

$$Área = L^2 = (2\,cm)^2 = 4\,cm^2 \qquad Diagonal = \sqrt{2} \cdot L = \sqrt{2} \cdot 2\,cm = 2{,}82\,cm$$

θ El Paralelogramo:

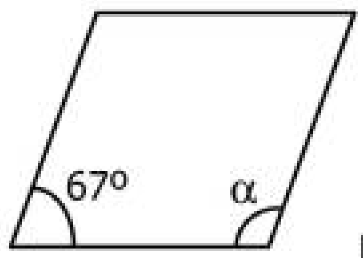


Y **Propiedades Básicas**

- Sus **lados Opuestos** son **iguales**.
- Sus Ángulos interiores opuestos son iguales.
- Sus **diagonales** son **distintas** pero se cortan en un punto que las divide en partes iguales.

Y **Fórmulas**
$$\begin{cases} \text{Perímetro} = 2\,.\,L + 2\,.\,B \\ \text{Área} = B\,.\,H \end{cases}$$

Ejemplo de un ejercicio, dado el siguiente paralelogramos, decir cuánto vale el ángulo "α"

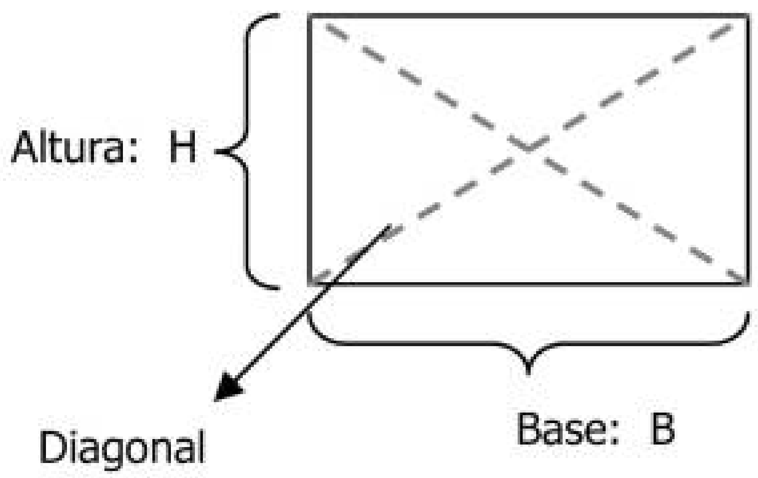


Primero sabemos que la suma de los 4 ángulos es 360º
También sabemos que los ángulos opuestos son iguales:
Por lo tanto los cuatro ángulos son: 67º; α; 67º; α

Entonces: $67^\circ+\alpha+67^\circ+\alpha = 360^\circ$ ⇨ Agrupando: $134^\circ + 2\alpha = 360^\circ$

Despejando: $2\alpha = 360^\circ - 134^\circ$ ⇨ $2\alpha = 226^\circ$ ⇨ $\alpha = 226^\circ / 2$ ⇨ $\alpha = 113^\circ$

θ El Rectángulo:



Y **Propiedades Básicas**

- Sus **lados Opuestos** son i**guales.**
- Sus 4 ángulos interiores son rectos
- Sus **diagonales** son **iguales** y se cruzan en un punto que las divide en partes iguales.

Y **Fórmulas**
$$\begin{cases} \text{Perímetro} = 2\,.\,H + 2\,.\,B \\ \text{Área} = B\,.\,H \\ \text{Diagonal} = \sqrt{B^2 + H^2} \end{cases}$$

Nota: El cuadrado es un caso especial de un rectángulo, que tiene altura y base iguales entre sí, por lo tanto en los cuadrados también se cumplen las propiedades de los rectángulos. Por eso se dice que las propiedades de los rectángulos están incluidas en las propiedades de los cuadrados, lo que no significa que sean iguales, ya que las propiedades de los cuadrados son aún más "estrictas que las de los rectángulos.

Ejercicio Tipo con un Rectángulo: Dado un rectángulo de 16 cm de base por 12 cm de altura, hallar el perímetro del triángulo que queda formado luego de trazar las diagonales del rectángulo, cuya base es la misma que la del rectángulo.

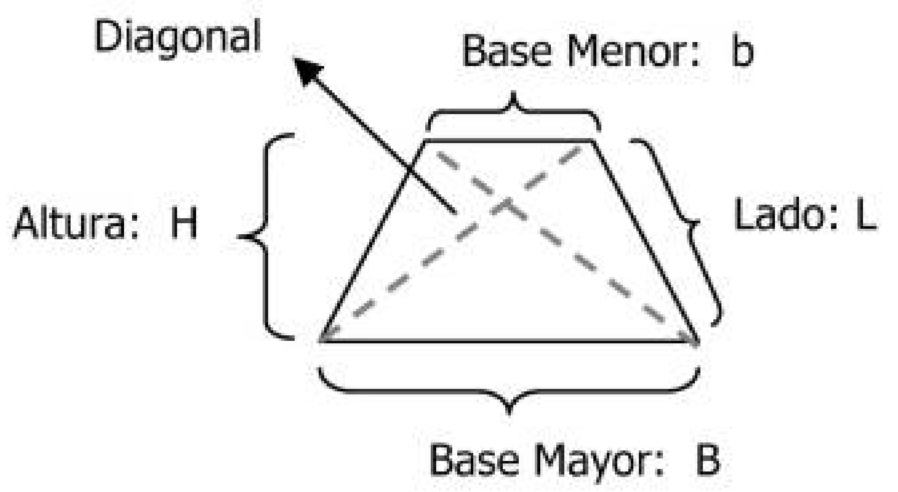
El ejercicio es muy simple, lo primero que debemos calcular es la diagonal del rectángulo, que como vimos, ambas son iguales. Luego para calcular el perímetro del triángulo cuya base es la misma que la del rectángulo, tenemos la base (16 cm que es dato) y sabemos que los lados del triángulo son la mitad del valor de la diagonal del rectángulo. Entonces dividiendo por 2 a la diagonal tenemos los lados del triángulo.

$$Diagonal = \sqrt{B^2 + H^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20\,cm$$

Por lo tanto los lados del triángulo valen 10 cm
Y el perímetro de este triángulo será: Perímetro = L + L + Base

Y remplazando los valores tenemos: Perímetro = 10 cm + 10 cm + 16 cm
Y llegamos al resultado final: Perímetro = 36 cm

θ El Trapecio Isósceles:



Y Propiedades Básicas

- Sus **lados laterales** son **iguales.**
- Sus 2 ángulos interiores obtusos son iguales.
- Sus 2 ángulos interiores agudos son iguales.
- Sus **diagonales** son **iguales**.

Y Fórmulas

$$\begin{cases} \text{Perímetro} = B + b + 2 \, . \, L \\ \text{Área} = \dfrac{(B+b)\cdot H}{2} \\ \text{Diagonal} = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(B+b)^2 + 4H^2} \\ \text{Lado} = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(B-b)^2 + 4H^2} \end{cases}$$

Nota: Las fórmulas tan "raras" que ven para calcular las diagonales o los lados del trapecio, teniendo como dato sus bases y su altura, no hace falta que se la aprendan de memoria, simplemente, pueden ustedes mismos realizar estos cálculos aplicando el Teorema de Pitágoras.

Veamos algunos ejemplos de Ejercicios Tipo con Trapecios isósceles.

Dado un trapecio de 19 cm de base mayor y 7 cm de base menor, con 8 cm de altura
Calcular su área y su perímetro.

En primer lugar podemos calcular el área ya que tenemos todos los datos necesarios para hacerlo.

$$Área = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(19\,cm + 7\,cm)\cdot 8\,cm}{2} = \boxed{104\,cm^2}$$

Ahora queremos calcular el perímetro, pero como vemos necesitamos el valor de los lados iguales.
Primero les muestro como calcularlo con la fórmula que vimos antes en el cuadro.

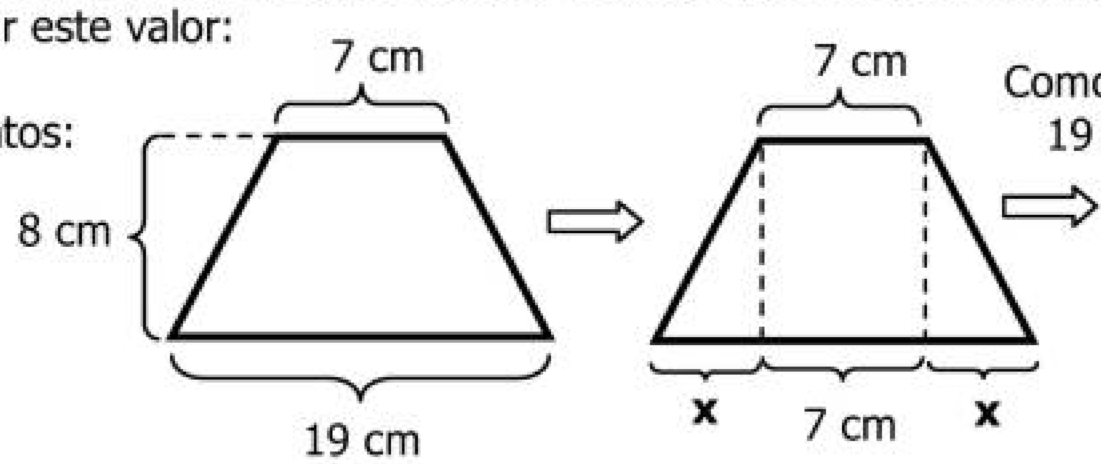
$$Lado = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(B-b)^2 + 4H^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(19-7)^2 + 4\cdot 8^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{12^2 + 4\cdot 64} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{144+256} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{400} = \frac{1}{2}\cdot 20 = \boxed{10\,cm}$$

Ahora sabiendo que el lado vale 10 cm, podemos calcular sin problemas el perímetro:

$$Perímetro = B + b + 2L = 19\,cm + 7\,cm + 2\cdot 10\,cm = \boxed{46\,cm}$$

Como les decía antes les voy a mostrar como calcular el lado, si no se acuerdan la fórmula del cuadro de arriba y necesitan calcular este valor:

Primero dibujamos los datos:



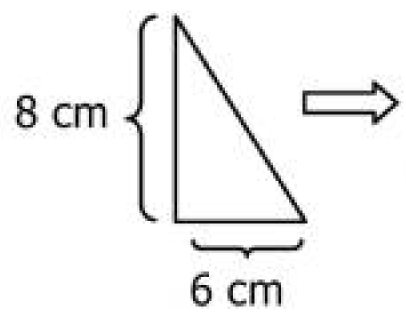
Como: 7cm + 2x tiene que valer 19 cm que es la Base Mayor

2x + 7cm = 19 cm

2x = 19 cm – 7 cm

x = 12 cm / 2 = 6 cm

Y ahora podemos dibujar el siguiente triángulo:

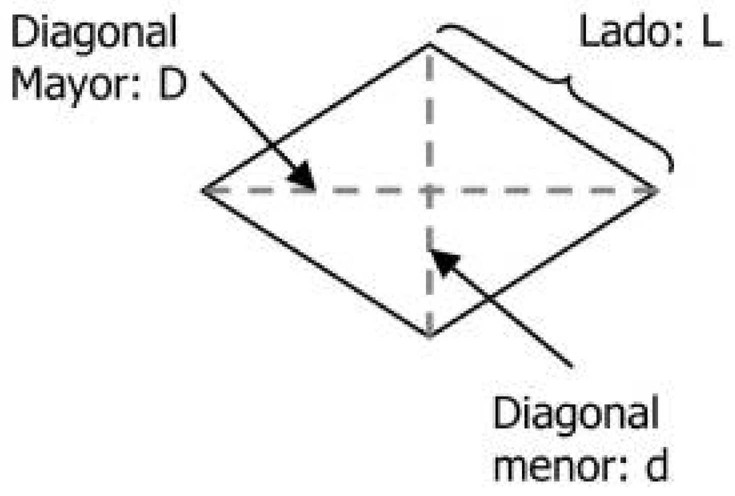


Y con el Teorema de Pitágoras calculamos la Hipotenusa, que es el lado del trapecio nuestro.

$$L^2 = 6^2 + 8^2$$
$$L = \sqrt{36+64}$$
$$L = \sqrt{100}$$
$$L = 10\,cm$$

Y como vemos llegamos al mismo resultado sin usar esa fórmula para calcular el Lado

θ El Rombo



Y Propiedades Básicas

- Sus **4 lados son iguales.**
- Sus ángulos interiores **opuestos** son iguales.
- Sus **diagonales** son **distintas** y se cruzan en un punto que las divide en partes **iguales**.

Y Fórmulas

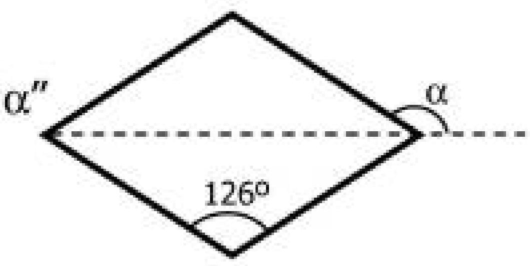
$$\begin{cases} \text{Perímetro} = 4 \cdot L \\ \text{Área} = \dfrac{D \cdot d}{2} \\ \text{Lado} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{D^2 + d^2} \end{cases}$$

Propiedad: Las diagonales son bisectrices de sus ángulos interiores. Por lo tanto, dividen a los mismos en dos ángulos iguales, que miden la mitad del ángulo interior.

* Caso Especial del rombo: Ojo, hay un caso especial de los rombos que es cuando tienen sus 4 ángulos interiores iguales, y miden ellos 90º, este "rombo especial" es un cuadrado. Pero no confundan cualquier rombo con un cuadrado porque son diferentes. También pasa que las propiedades de los rombos están incluidas dentro de las propiedades del cuadrado. Porque dicho de otra forma podemos decir que un cuadrado sería un rombo o podría definirse con las propiedades de los rombos si le agregamos la condición de que sus 4 ángulos interiores deben ser iguales.

* Además los rombos también cumplen todas las propiedades de los paralelogramos, ya que efectivamente, cualquier rombo es también un paralelogramo.

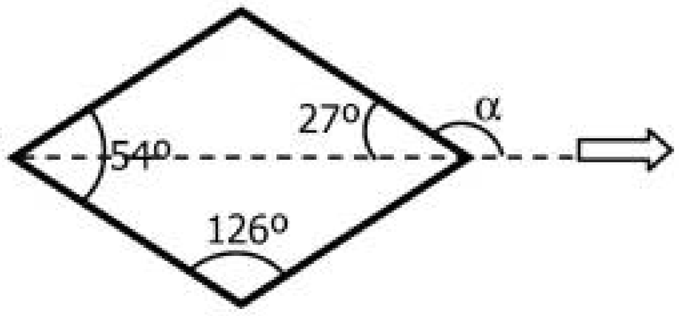
Ejercicio Tipo con un Rombo: Dado el siguiente rombo, calcular el ángulo "α"



El primer paso es calcular el ángulo interior adyacente a "α" Para ello, sumo todos los ángulos interiores e igualo a 360º ⇨

$$126^\circ + x + 126^\circ + x = 360^\circ$$
$$252^\circ + 2x = 360^\circ$$
$$2x = 360^\circ - 252^\circ$$
$$x = 108^\circ / 2 \Rightarrow x = 54^\circ$$

Ahora por la propiedad anunciada antes, yo sé que la diagonal divide al ángulo de 54º en dos partes iguales de 27º (La mitad) ⇨

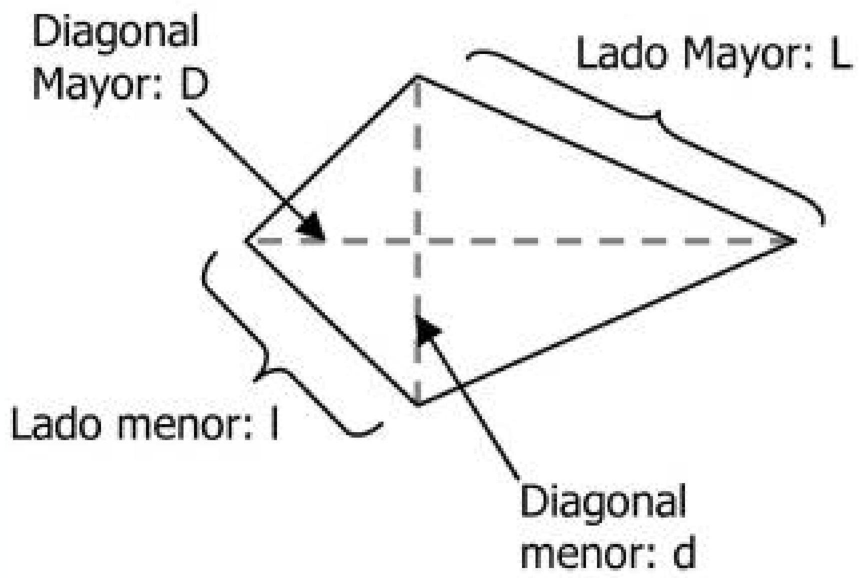


⇨ $\alpha = 180^\circ - 27^\circ$

$\alpha = 153^\circ$

Al formar un ángulo llano suman 180º

θ El Romboide:



Y Propiedades Básicas

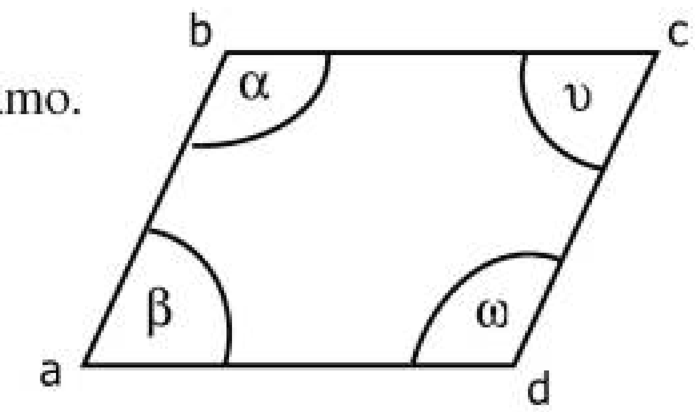
- Hay 2 **pares de lados consecutivos iguales.**
- Sólo 2 de sus ángulos interiores son iguales.
- Sus **diagonales** son **distintas** y se cruzan en un punto que divide a una de ellas en partes distintas y a la otra en partes iguales

Y Fórmulas

$$\begin{cases} \text{Perímetro} = 2 \cdot L + 2 \cdot l \\ \text{Área} = \dfrac{D \cdot d}{2} \end{cases}$$

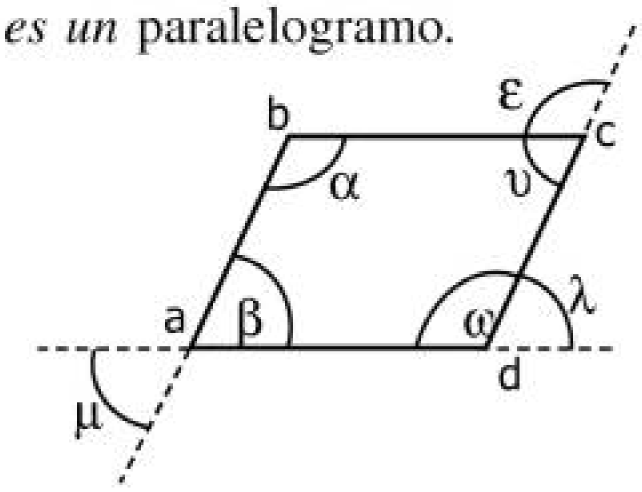
- **Completar los espacios en blanco: (**Podés hacerlo en tu carpeta).

1) ▱ *abcd es un* paralelogramo.



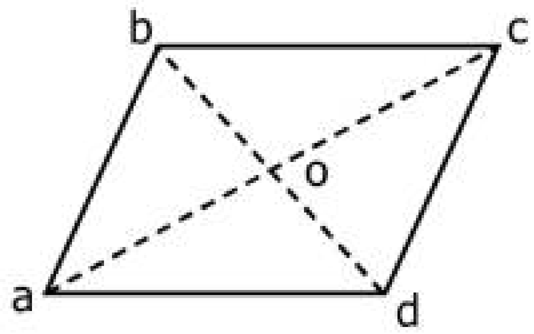
$$\begin{cases} \alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha + \beta = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha + \upsilon = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega + \upsilon = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha + \beta + \omega + \upsilon = \ldots\ldots \end{cases}$$

2) ▱ *abcd es un* paralelogramo.



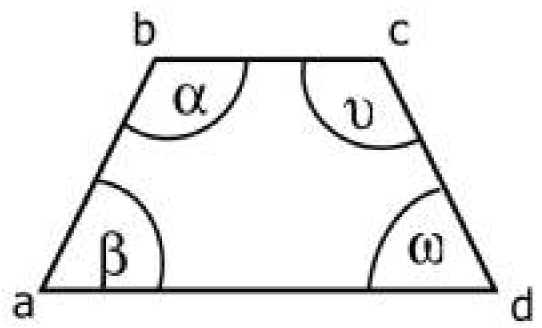
$$\begin{cases} \mu = \ldots = \ldots = \ldots \\ \alpha = \ldots = \ldots \\ \lambda + \omega = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda + \alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda + \varepsilon = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha + \omega + \lambda - \mu = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

3) ▱ *abcd es un* paralelogramo.



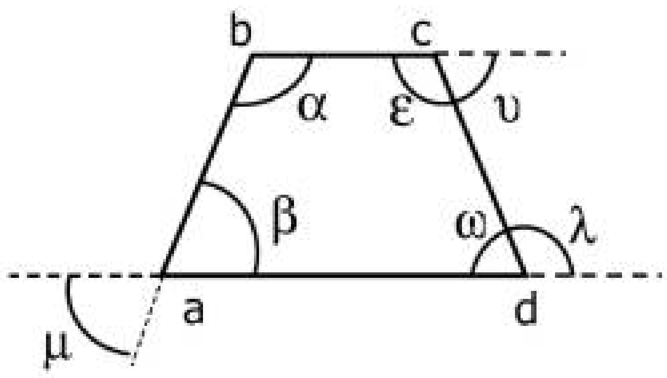
$$\begin{cases} \overline{bc} \;//\; \ldots\ldots\ldots \\ \overline{ab} \;//\; \ldots\ldots\ldots \\ \overline{ab} = \ldots\ldots\ldots \\ \overline{ad} = \ldots\ldots\ldots \\ \overline{ao} = \ldots\ldots\ldots \\ \overline{bo} = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

4) ⏢ *abcd es un trapecio isósceles.*



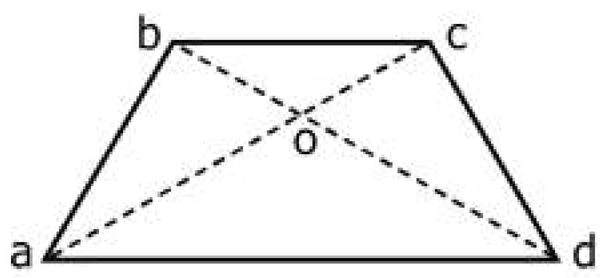
$$\begin{cases} \alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha + \beta = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega + \upsilon = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta + \upsilon = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha + \beta + \omega + \upsilon = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

5) ⏢ *abcd es un trapecio isósceles.*



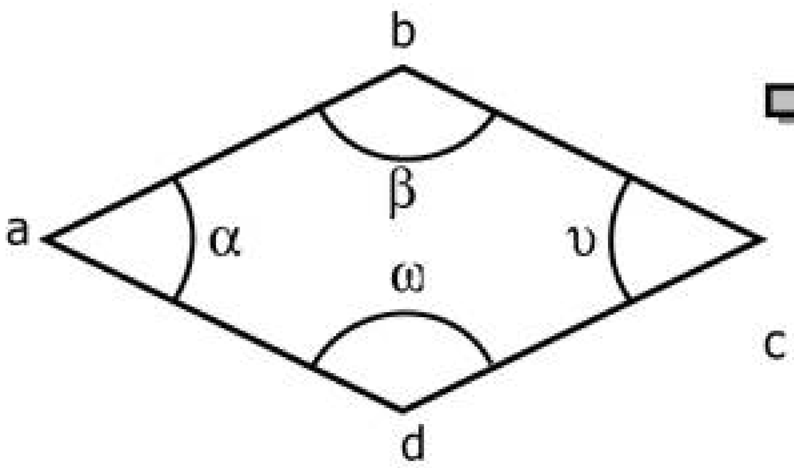
$$\begin{cases} \mu = \ldots = \ldots = \ldots \\ \alpha = \ldots = \ldots \\ \lambda + \omega = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda + \upsilon = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda + \beta = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha + \omega + \lambda - \varepsilon = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

6) ⏢ *abcd es un trapecio isósceles.*



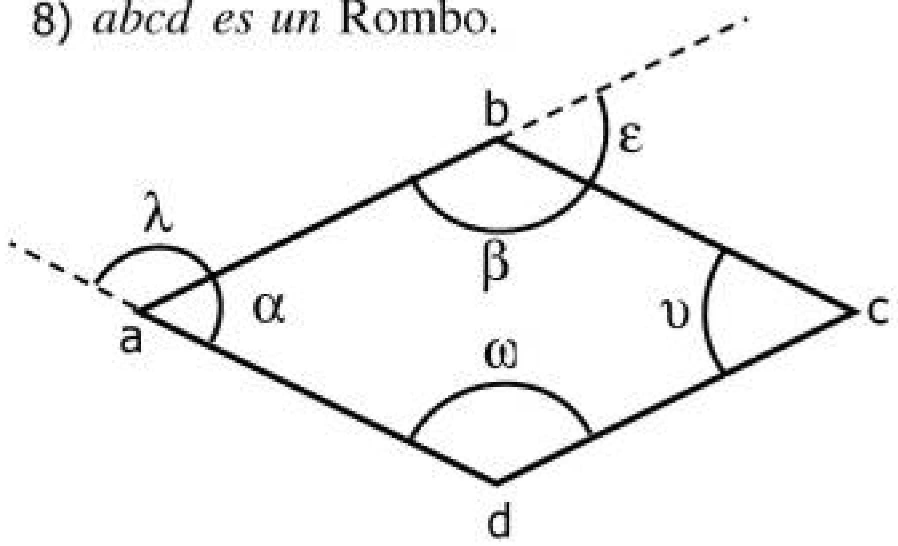
$$\begin{cases} \overline{bc} \;//\; \ldots\ldots \\ \overline{ab} = \ldots\ldots \\ \overline{bo} = \ldots\ldots \\ \overline{ao} = \ldots\ldots \\ \overline{bd} = \ldots\ldots \end{cases}$$

7) $\overset{\diamond}{abcd}$ *es un* Rombo.



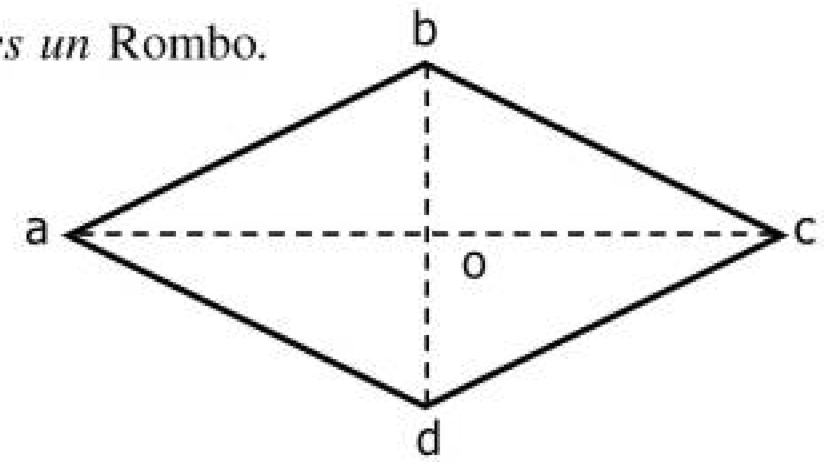
$$\begin{cases} \alpha = \dots\dots\dots \\ \beta = \dots\dots\dots \\ \alpha + \beta = \dots\dots\dots \\ \omega + \upsilon = \dots\dots\dots \\ \beta + \upsilon = \dots\dots\dots \\ \alpha + \beta + \omega + \upsilon = \dots\dots\dots \end{cases}$$

8) $\overset{\diamond}{abcd}$ *es un* Rombo.



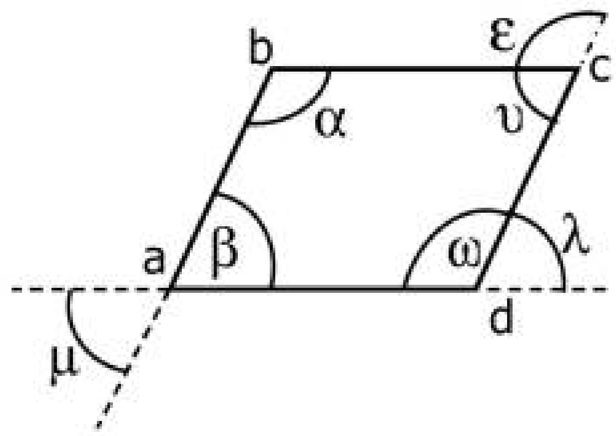
$$\begin{cases} \alpha = \dots = \dots \\ \beta = \dots = \dots \\ \lambda + \alpha = \dots\dots\dots \\ \varepsilon + \beta = \dots\dots\dots \\ \beta + \upsilon = \dots\dots\dots \\ \alpha + \omega + \varepsilon - \upsilon = \dots\dots\dots \end{cases}$$

9) $\overset{\diamond}{abcd}$ *es un* Rombo.



$$\begin{cases} \overline{bc} = \dots = \dots = \dots \\ \overline{ao} = \dots \\ \overline{bo} = \dots \\ \overline{bc} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2} \end{cases}$$

Hallar X $\overset{\square}{abcd}$ *es un* paralelogramo.



10) $\begin{cases} \mu = 20^o + \mathbf{X} \\ \alpha = 5\mathbf{X} - 80^o \end{cases}$

11) $\begin{cases} \beta = 6\mathbf{X} - 150^o \\ \alpha = 4\mathbf{X} + 30^o \end{cases}$

12) $\begin{cases} \mu = 30^o + 2\mathbf{X} \\ \upsilon = 5\mathbf{X} + 3^o \end{cases}$

13) $\begin{cases} \upsilon = 6\mathbf{X} - 12^o \\ \lambda = 4\mathbf{X} + 2^o \end{cases}$

14) $\begin{cases} \beta = 130^o - 17\mathbf{X} \\ \upsilon = 5\mathbf{X} - 2^o \end{cases}$

15) $\begin{cases} \mu = 6\mathbf{X} + 32^o \\ \lambda = 15\mathbf{X} + 23^o \end{cases}$

16) $\begin{cases} \mu = 45^o + 2\mathbf{X} \\ \beta = 5\mathbf{X} + 36^o \end{cases}$

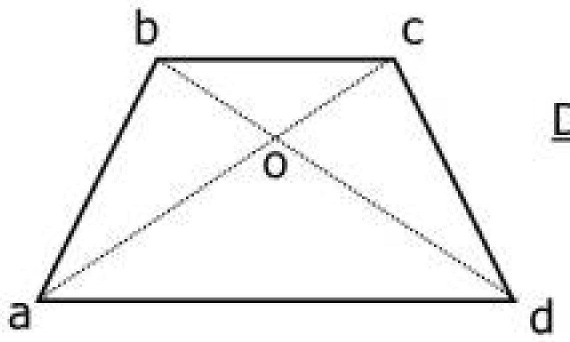
17) $\begin{cases} \upsilon = 7\mathbf{X} - 18^o \\ \omega = 23\mathbf{X} + 78^o \end{cases}$

18) $\begin{cases} \beta = 13^o + 7\mathbf{X} \\ \omega = 5\mathbf{X} + 107^o \end{cases}$

19) $\begin{cases} \beta = 6\mathbf{X} + 4^o \\ \alpha = 13\mathbf{X} + 62^o \end{cases}$

20) $abcd$ *es un trapecio isósceles.*

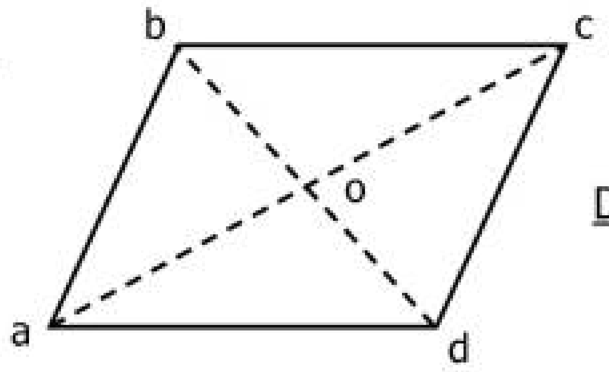
Hallar X



Datos: $\begin{cases} \overline{ao} = X + 3cm \\ \overline{co} = 5cm \\ \overline{bd} = 3X - 6cm \end{cases}$

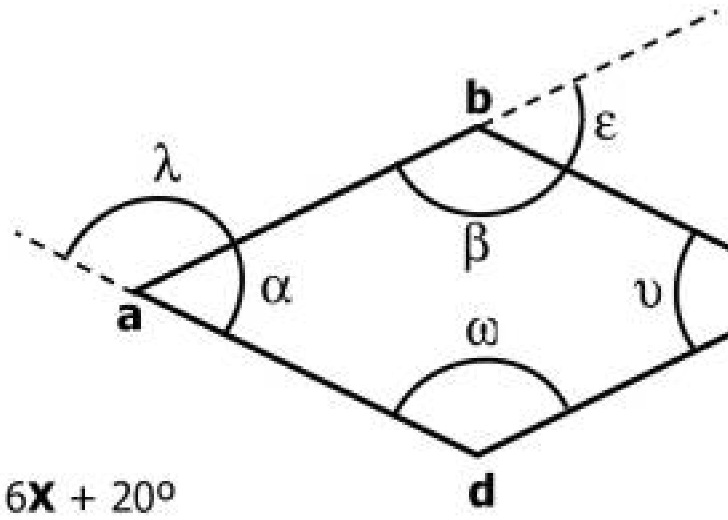
21) $abcd$ *es un* paralelogramo.

Hallar X



Datos: $\begin{cases} \overline{ao} = 5X - 4cm \\ \overline{oc} = 3X + 8\ cm \end{cases}$

abcd es un Rombo. **Hallar X**



22) $\begin{cases} \upsilon = 10^{o} + 3\,\mathbf{X} \\ \alpha = 5\mathbf{X} - 4^{o} \end{cases}$

23) $\begin{cases} \beta = 16\mathbf{X} - 15^{o} \\ \omega = 4\mathbf{X} + 81^{o} \end{cases}$

24) $\begin{cases} \beta = 19^{o} + 9\,\mathbf{X} \\ \varepsilon = 11\,\mathbf{X} - 19^{o} \end{cases}$

25) $\begin{cases} \alpha = 6\mathbf{X} + 20^{o} \\ \lambda = 11\mathbf{X} - 10^{o} \end{cases}$

26) $\begin{cases} \alpha = \dfrac{7}{11}X + 13^{o} \\ \theta = 3\,X - 13^{o} \end{cases}$

27) $\begin{cases} \alpha = \dfrac{13}{4}X + 41^{o} \\ \varepsilon = \dfrac{23}{3}\,X - 12^{o} \end{cases}$

➢ **Problemas:**

28) Hallar el área de un paralelogramo si su base es igual a las 3/5 partes de su altura y su altura es 20 cm.

29) Hallar el perímetro de un rectángulo si su base mide el triple de su altura y su altura es de 5 cm.

30) Hallar el área de un romboide si su diagonal menor es igual a las tres cuartas partes de su diagonal mayor y la diagonal mayor mide 16 cm.

31) Hallar la altura de un paralelogramo si su área es de 800 cm² y su base es la mitad de la altura.

32) Hallar el perímetro de un rombo si su diagonal mayor mide 8 cm y la diagonal menor mide 6 cm.

33) Calcular la diagonal de un trapecio isósceles sabiendo que su base mayor mide 5 cm, su base menor 3 cm y su altura 3 cm.

34) Calcular el lado lateral de un trapecio isósceles sabiendo que su base mayor mide 19 cm, su base menor 5 cm y su altura 24 cm.

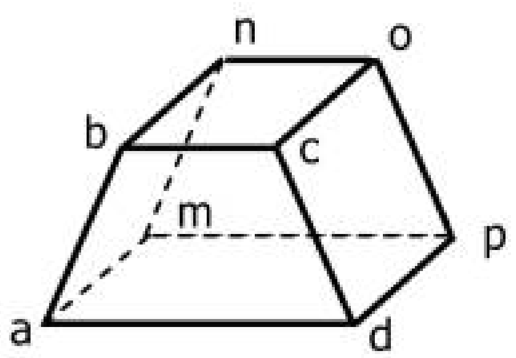
35) Calcular el lado de un rombo si sus diagonales miden 80 cm y 18 cm.

➢ **Responder Verdadero o Falso**:

36) Las diagonales del paralelogramo son iguales.
37) Las diagonales del rombo son iguales.
38) Las diagonales del romboide son iguales.
39) Las diagonales del trapecio son iguales.
40) Las diagonales del rectángulo se cortan en un punto que las divide en partes iguales.
41) Las diagonales del trapecio se cortan en un punto que las divide en partes iguales.
42) Las diagonales del rombo se cortan en un punto que las divide en partes iguales.
43) Las diagonales del romboide se cortan en un punto que divide a una de ellas en partes iguales.
44) La suma de los ángulos opuestos del rombo es 180º.
45) Los ángulos opuestos del paralelogramo son iguales.
46) Los cuatro ángulos interiores del rectángulo son iguales y miden 90º.
47) La diagonal de un cuadrado es igual al lado del mismo.
48) El área del rombo se calcula igual a la del romboide.
49) Un rombo es un cuadrado.
50) Un cuadrado es también un rombo.
51) Los ángulos opuestos del romboide son iguales.
52) Los ángulos opuestos del rombo son iguales.

● **Ejercicios Integradores**: Dados los siguientes Gráficos y los siguientes datos.
Resolver los ejercicios a continuación

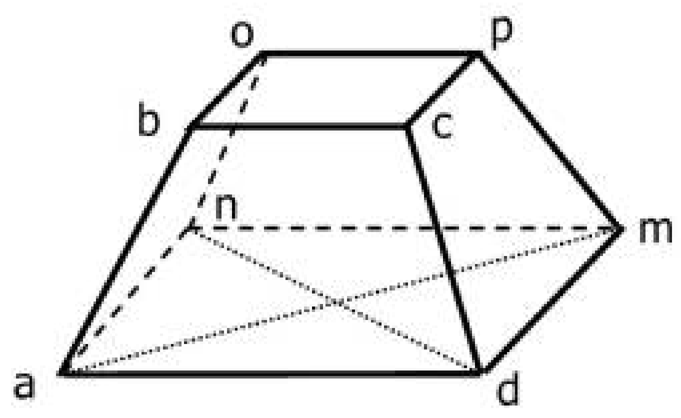
El cuerpo es un prisma de base trapezoidal.



Datos: $\begin{cases} \overline{ad} = \overline{mp} = 51\text{cm} \\ \overline{bc} = \overline{no} = 33\text{cm} \\ \overline{am} = \overline{bn} = \overline{co} = \overline{dp} = 30\text{cm} \\ \overline{ab} = \overline{cd} = \overline{mn} = \overline{op} = 41\text{cm} \end{cases}$

53) Hallar el perímetro del trapecio isósceles abcd.
54) ¿Vale lo mismo el perímetro del trapecio mnop?
55) Hallar la altura del trapecio abcd.
56) Hallar el área del trapecio abcd.
57) ¿Vale lo mismo el área del trapecio mnop?
58) Hallar la Diagonal del trapecio abcd.
59) Hallar la Superficie Total del cuerpo.
60) Hallar el volumen del cuerpo en dm^3.
61) ¿Alcanza 1 metro cuadrado de tela para forrar todo el cuerpo?
62) ¿El cuadrilátero bcno es un paralelogramo?
63) ¿El cuadrilátero bcno es un cuadrado?
64) ¿El cuadrilátero dcop es un rectángulo?

El cuerpo en una pirámide truncada de base rectangular. Por lo tanto las 4 caras laterales del cuerpo son trapecios isósceles.



65) ¿Qué cuadrilátero es bcop ?
66) ¿Qué cuadrilátero es admn ?
67) Hallar el área de admn
68) Hallar la altura del trapecio abcd
69) Hallar la altura del trapecio cdmp
70) Hallar la diagonal del trapecio abcd
71) Hallar la diagonal del trapecio cdmp
72) Hallar el área total del cuerpo.
73) Hallar el segmento am (Recordar Pitágoras)
74) Los segmentos am y nd ¿Son iguales?
75) Los segmentos bd y ac ¿Son iguales?
76) Los segmentos cm y bn ¿Son iguales?
77) Los segmentos ac y dp ¿Son iguales?

Datos:

$\overline{ad} = \overline{mn} = 52\,cm$

$\overline{an} = \overline{dm} = 39\,cm$

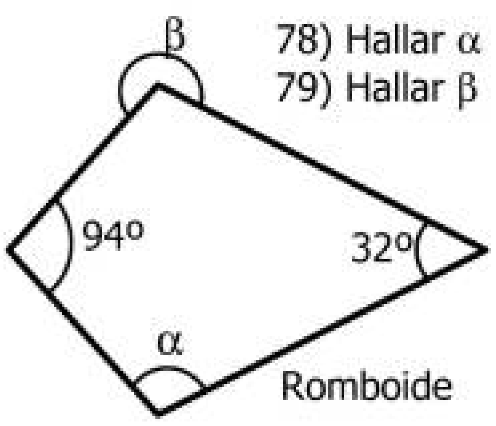
$\overline{bc} = \overline{op} = 38\,cm$

$\overline{ab} = \overline{cd} = \overline{no} = \overline{mp} = 25\,cm$

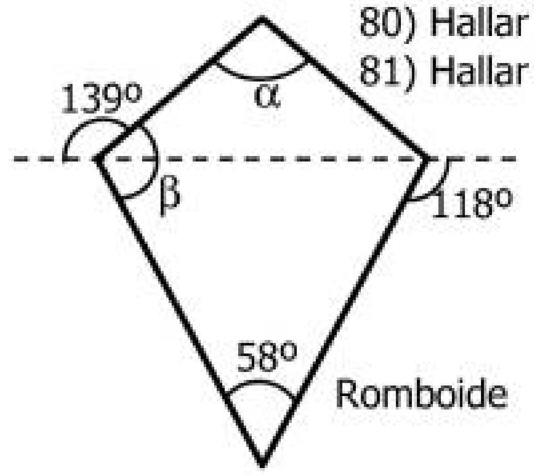
$\text{Area } \overset{\square}{bcop} = 950\ cm^2$

Dados los siguientes gráficos hallar los ángulos pedidos en cada caso.

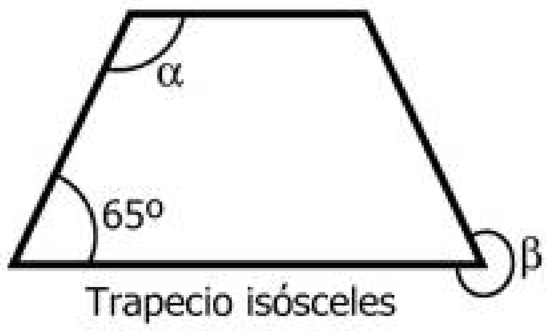
78) Hallar α
79) Hallar β



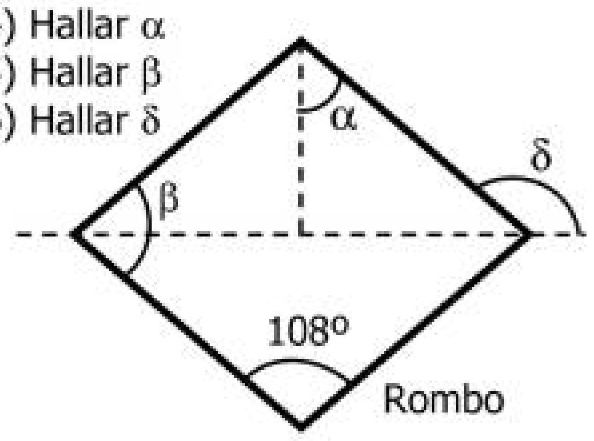
80) Hallar α
81) Hallar β



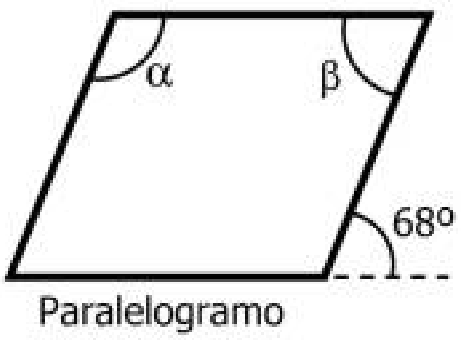
82) Hallar α
83) Hallar β



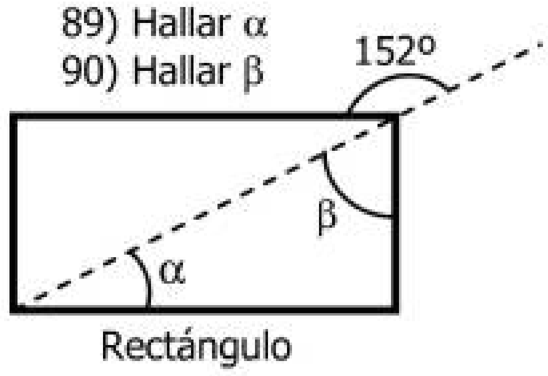
84) Hallar α
85) Hallar β
86) Hallar δ



87) Hallar α
88) Hallar β

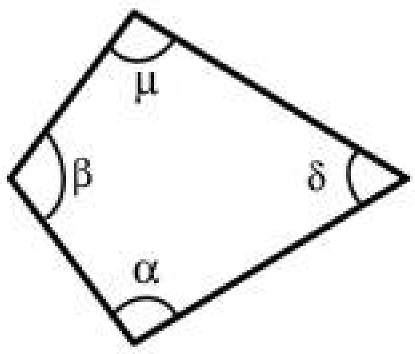


89) Hallar α
90) Hallar β



Dados los siguientes gráficos: **Hallar los ángulos pedidos en cada caso**

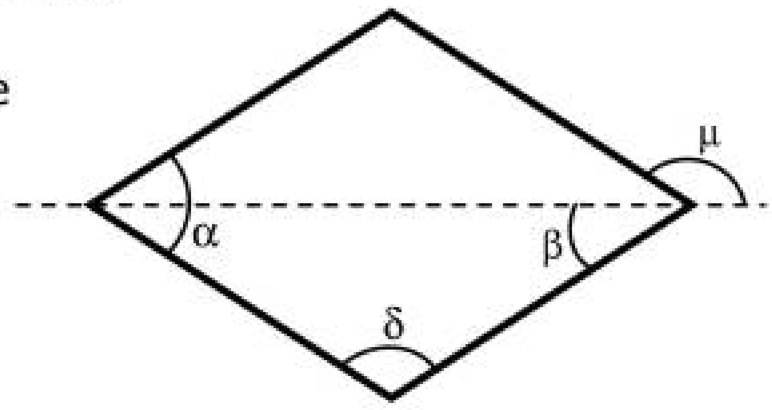
Para el siguiente **Romboide**:



91) Hallar x
92) Hallar y
93) Hallar α
94) Hallar β
95) Hallar δ

Datos: $\begin{cases} \alpha = 3x - 13^\circ \\ \beta = 3x + 5^\circ \\ \delta = 2x - 13^\circ \\ \mu = 5y + 3^\circ \end{cases}$

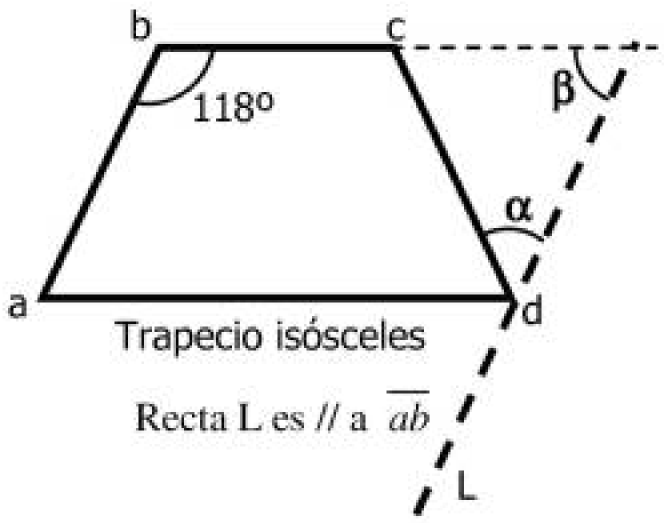
Para el siguiente **Rombo**:



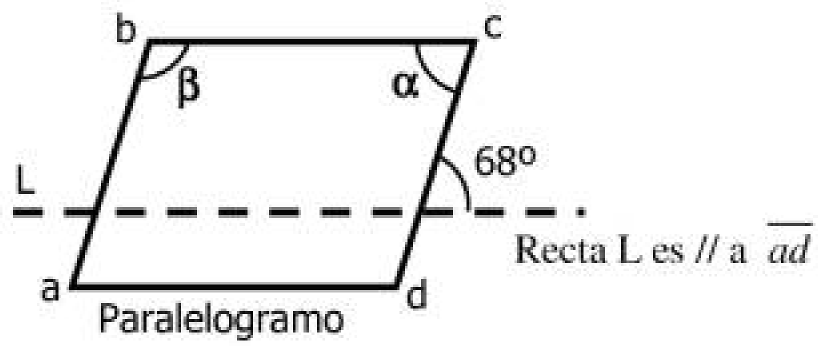
96) Hallar x
97) Hallar y
98) Hallar α
99) Hallar β
100) Hallar μ

Datos: $\begin{cases} \alpha = \frac{5}{9}x + 51^\circ \\ \beta = 2y - 3^\circ \end{cases} \quad \delta = 19 \cdot \left(\frac{1}{3}x - 3^\circ\right)$

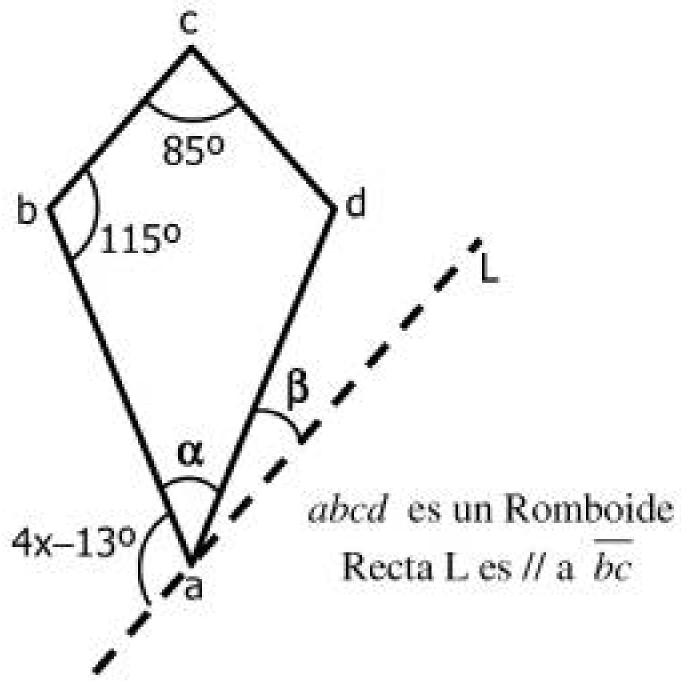
101) Hallar α 102) Hallar β



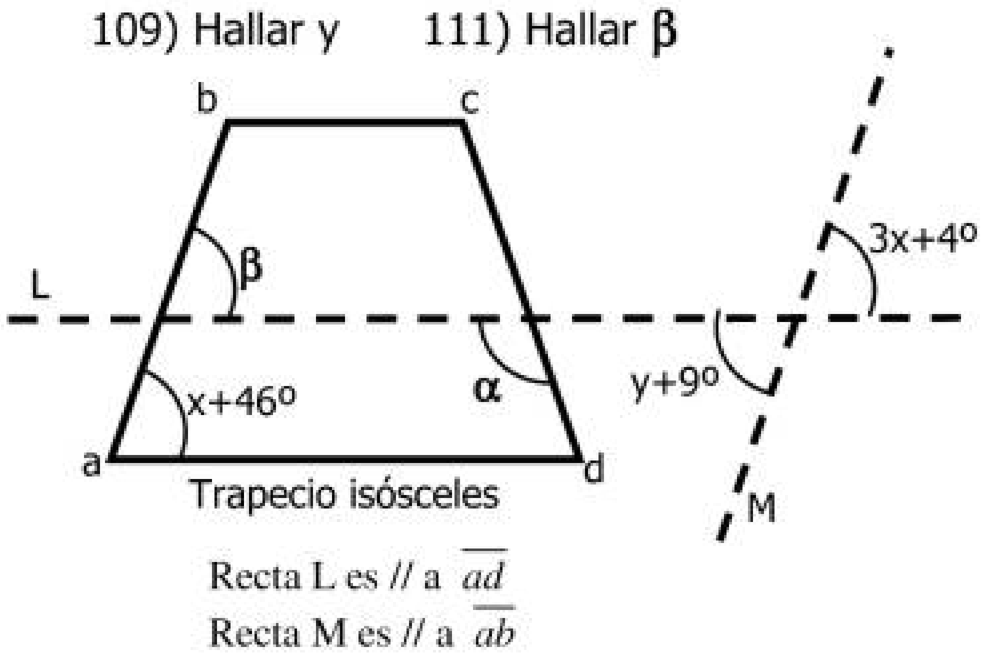
103) Hallar α 104) Hallar β



105) Hallar α
106) Hallar β
107) Hallar x



108) Hallar x 110) Hallar α
109) Hallar y 111) Hallar β



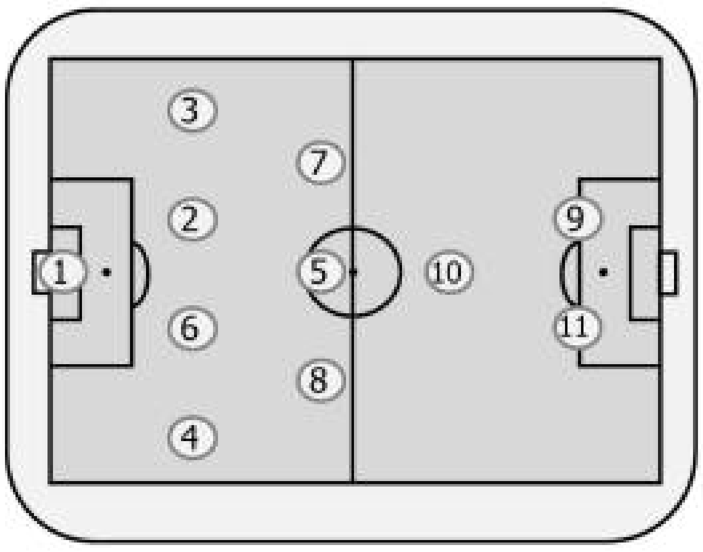
Ejercicios de aplicación:

Mariana construye un barrilete con forma de romboide. Para comenzar tiene un trozo de tela de 93 cm de largo por 32 cm de ancho. Para hacer el trabajo, primero coloca la madera mayor entre los puntos medios del ancho de la tela y luego, a 30 cm de un extremo de la madera más larga, clava la madera más corta de modo tal de poner el clavo en la mitad de esta madera más corta. Por último une los vértices de las maderas clavadas con unos listones de plástico liviano. Al finalizar esto, pega la tela a los listones de plástico y recorta la tela sobrante para tener el barrilete listo.

112) ¿Cuántos cm^2 de tela tiene el barrilete?
113) ¿Qué porcentaje de tela desperdició?
114) ¿Cuántos cm de madera necesitó para armar el barrilete?
115) ¿De qué medida son los listones de plástico más cortos que tuvo que usar?
116) ¿Cuántos cm de los listones de plástico necesitó para armar el barrilete?
117) Si los listones de plástico los venden por trozos de 66 cm ¿Cuántos tuvo que comprar?

¿A quién le gusta el fútbol?

Bueno, muchas veces a los que les gusta el fútbol habrán visto este tipo de esquemas. Estos esquemas son muy estudiados por los preparadores físicos a la hora de calcular la movilidad que van a tener los jugadores dentro del campo de juego. El esquema que les presento aquí es el famoso 4-3-1-2
Es el esquema que usa el "Coco" Basile en la selección.



Las líneas formadas por los jugadores Nº (1) (3-2-6-4) (7-5-8) (10) (9-11)
Son todas equidistantes entre sí.

Dadas las siguientes ternas de jugadores decir el Nº de jugador que falta para formar el cuadrilátero indicado:

118) 1-2-5-... (Rombo)
119) 1-3-5-... (Rombo)
120) 1-6-10-... (Romboide)
121) 1-3-4-... (Romboide)
122) 7-8-10-... (Romboide)
123) 3-7-8-... (Paralelogramo)
124) 2-5-7-... (Paralelogramo)
125) 7-5-9-... (Paralelogramo)
126) 2-3-11-... (Paralelogramo)
127) 2-9-11-... (Rectángulo)
128) 3-4-8-... (Trapecio)
129) 3-6-7-... (Trapecio)
130) 2-6-7-... (Trapecio)
131) 7-8-11-... (Trapecio)
132) 9-11-4-... (Trapecio)

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Polígonos Regulares

Número de Tema: **32**

Área: **Matemática**

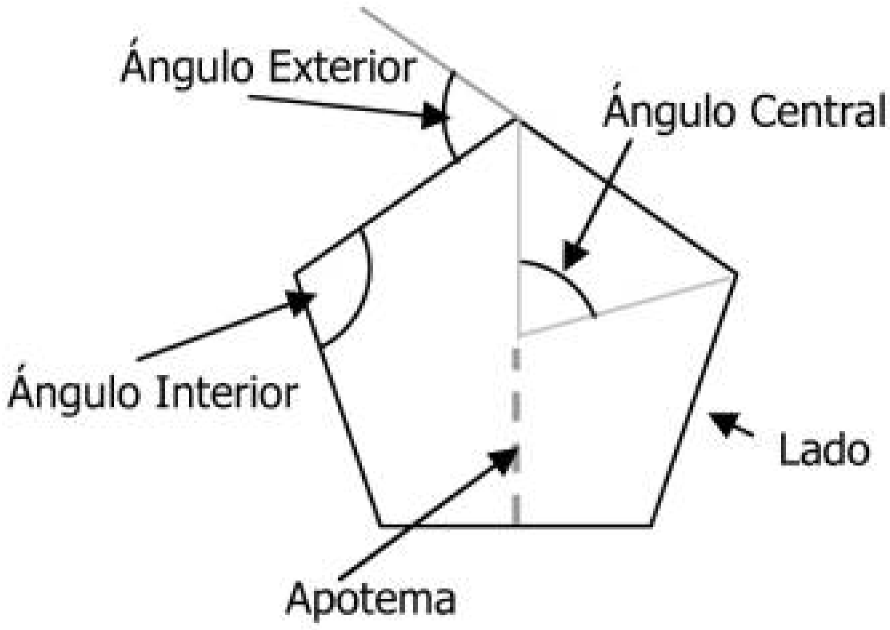
- <u>Polígonos Regulares</u>: Se llama polígono regular a una figura que tiene todos sus lados y ángulos interiores iguales.

<u>Ejemplos</u>:

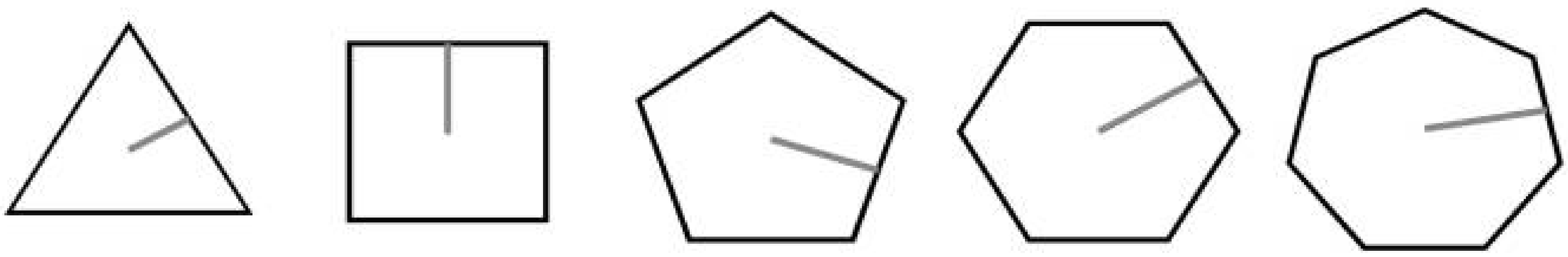
- **<u>Elementos de los polígonos regulares</u>:**

Todos los polígonos tienen estos **5 elementos:**

- Lado
- Apotema
- Ángulo Central
- Ángulo Interior
- Ángulo Exterior



- **<u>Apotema</u>:** "Es el segmento que va desde el centro del polígono hasta el punto medio del lado"



Para calcular el apotema de un polígono vamos a tener que multiplicar el lado por una constante que depende del número de lados del polígono. Por ahora vamos a ver una tablita que me dice cual es esa constante para cada polígono. (Cabe aclarar que los valores volcados en esta tabla son aproximaciones y no darán resultados exactos ya que las constantes son casi todas números irracionales. Más adelante aprenderán a calcular estos valores usando nuevas herramientas llamadas "funciones trigonométricas")

Nº Lados	Polígono	Constante
3	Triángulo	0,289
4	Cuadrado	0,5
5	Pentágono	0,688
6	Hexágono	0,866
7	Heptágono	1,038
8	Octógono	1,207
9	Eneágono	1,374
10	Decágono	1,539

Apotema
0,289 x Lado
0,5 x Lado
0,688 x Lado
0,866 x Lado
1,038 x Lado
1,207 x Lado
1,374 x Lado
1,539 x Lado

Por ejemplo: Si quiero calcular la apotema de un pentágono: multiplico el valor del lado por 0,688

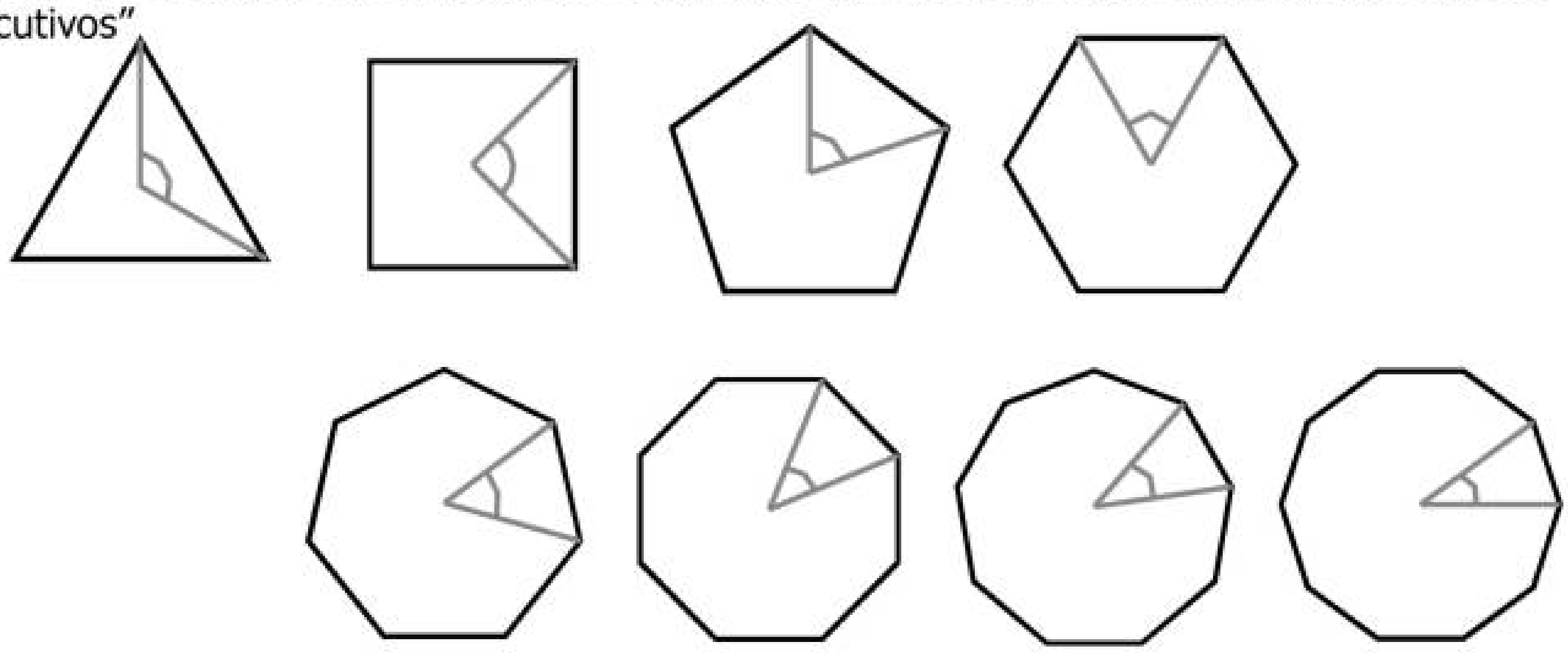
Ejemplo: Calcular la apotema de un pentágono de 5 cm de lado.

Apotema = 0,688 x Lado = 0,688 x 5 cm = 3,44 cm

- **Lado**: "Es cada uno de los segmentos que delimitan la figura".

Vale la pena recordar que: **"En todos los polígonos regulares TODOS LOS LADOS SON IGUALES".**

- **Ángulo Central**: "Es el ángulo que forman dos segmentos que unen el centro del polígono con dos vértices consecutivos"



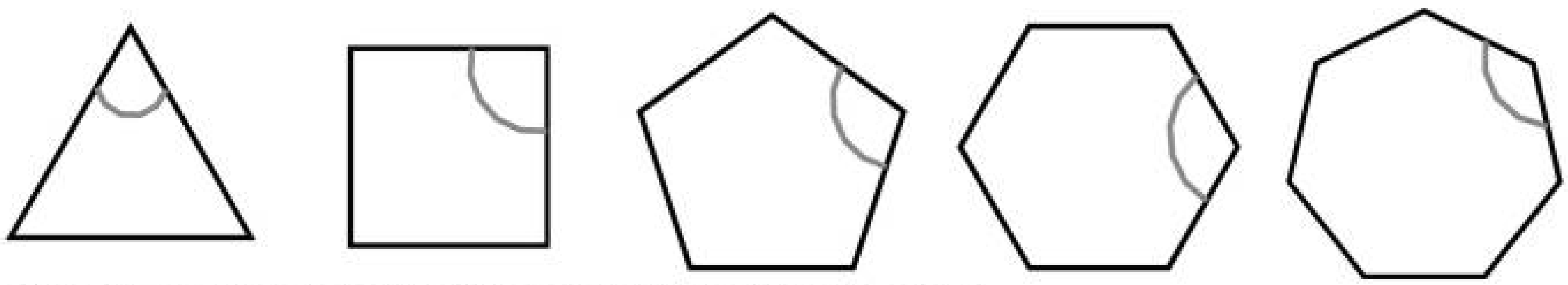
Hay una fórmula para calcular el ángulo central de un polígono regular:

$$\text{Ángulo Central} = \frac{360^{\circ}}{\text{N}^{\circ}\ \text{de Lados}}$$

Así por ejemplo el ángulo central de un triángulo (3 lados) va a ser = 360º/**3** = 120º
O sea que el ángulo central de un triángulo vale 120º.

O el de un Pentágono vale: 360º / **5** = 72º.
O el de un Hexágono vale: 360º / **6** = 72º.
...... y así sucesivamente.

- **Ángulo Interior**: "Es el ángulo que forman dos lados consecutivos" .



Hay una fórmula para calcular el ángulo interior de un polígono regular:

$$\text{Ángulo Interior} = 180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{\text{N}^{\circ}\ \text{de Lados}}$$

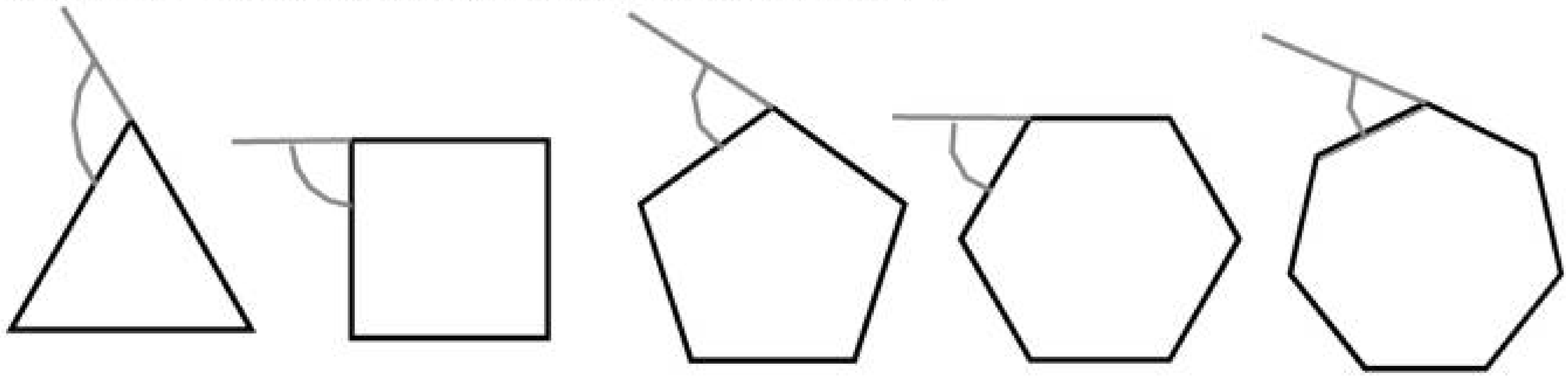
La suma de los ángulos interiores de cualquier polígono es igual a:

Suma Ángulos Interiores = **180º . (Número de lados – 2)**

Ejemplo:
Calculemos cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un Hexágono
En el caso del hexágono, el número de lados es 2. Por lo tanto aplicando la fórmula nos queda:

Suma Ángulos Interiores (Hexágono) = **180º . (6 – 2)**
Suma Ángulos Interiores (Hexágono) = **180º . 4**
Suma Ángulos Interiores (Hexágono) = **540º**

- **Ángulo Exterior**: "Es el ángulo adyacente al ángulo interior".

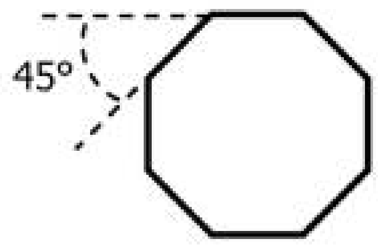


El ángulo Exterior de un polígono regular es igual al ángulo central:

$$\text{Ángulo Exterior} = \text{Ángulo Central} = \frac{360^{\circ}}{\text{Nº de Lados}}$$

Ejemplo: Calcular el ángulo exterior de un octógono.

El octógono tiene 8 lados
Por lo tanto su ángulo exterior será de 360° / 8
Ángulo exterior del octógono = 360° / 8 = 45°

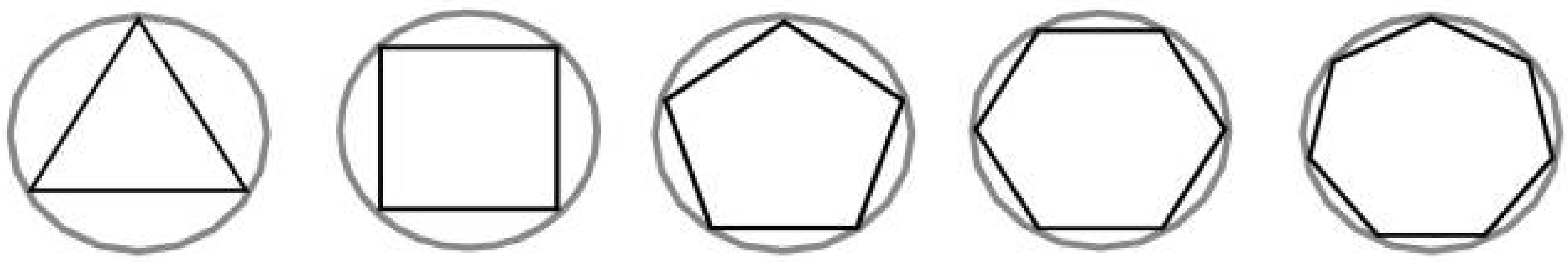


Propiedad de los Ángulos Exteriores:
La suma de los ángulos exteriores del polígono es igual a 360º.

- **Polígono Inscripto**:

"El polígono está "dentro" de la circunferencia".
La circunferencia "toca" al polígono en sus vértices.

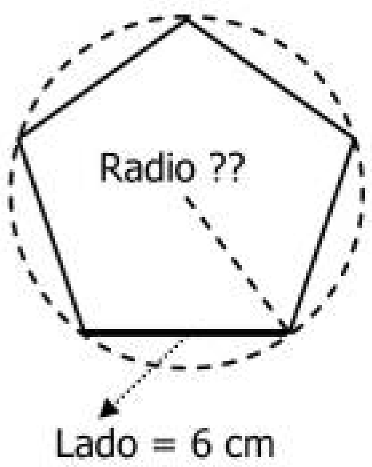
Ejemplos:



El **radio de las circunferencias** se puede calcular si conocemos el lado del **polígono inscripto** y **la cantidad de lados del polígono**, con la siguiente tabla:

Nº Lados	Polígono	Radio Cricunferencia =
3	Triángulo	0,577 x Lado
4	Cuadrado	0,707 x Lado
5	Pentágono	0,851 x Lado
6	Hexágono	Lado
7	Heptágono	1,152 x Lado
8	Octógono	1,307 x Lado
9	Eneágono	1,462 x Lado
10	Decágono	1,618 x Lado

Ejemplo: ¿Cuál es el radio de la circunferencia en la cual está inscripto un pentágono de 6 cm de lado?



Radio = 0,851 x Lado
Radio = 0,851 x 6 cm
Radio = 5,106 cm

Por el contrario si conocemos el **radio de la circunferencia** y queremos calcular el **lado del polígono inscripto**, tenemos que usar esta otra tabla:

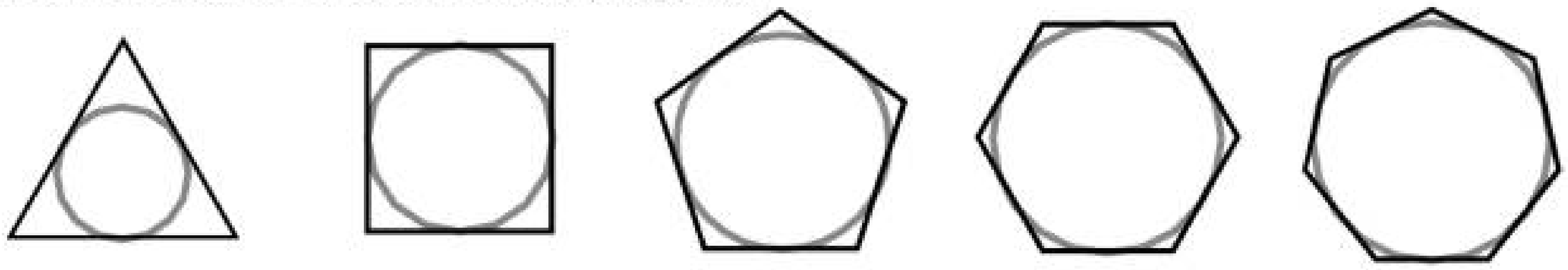
Nº Lados	Polígono	Lado =
3	Triángulo	1,732 x Radio
4	Cuadrado	1,414 x Radio
5	Pentágono	1,176 x Radio
6	Hexágono	Radio
7	Heptágono	0,868 x Radio
8	Octógono	0,765 x Radio
9	Eneágono	0,684 x Radio
10	Decágono	0,618 x Radio

- **Polígono Circunscripto:**

"El polígono está "afuera" de una circunferencia".
La circunferencia "toca" al polígono en la mitad de sus lados.

El radio de la circunferencia es la apotema del polígono.

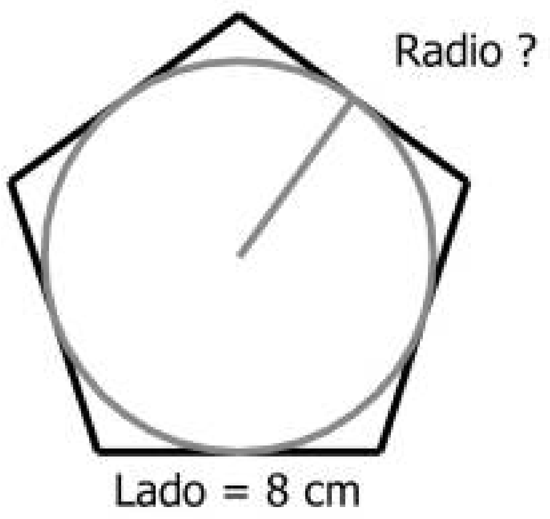
Ejemplos:



En este caso si quiero calcular el **radio de la circunferencia** en la cual está **circunscripto un polígono, sólo tengo que saber su apotema** (Si no sabemos la apotema, lo calculamos con la tabla que relaciona al lado de un polígono con su apotema)

Ejemplo:

Supongamos un pentágono circunscripto a una circunferencia.
El lado del pentágono es 8 cm.
Calcular el Radio del círculo en el cual está inscripto dicho pentágono



Nº Lados	Polígono	Constante	Apotema
3	Triángulo	0,289	0,289 x Lado
4	Cuadrado	0,5	0,5 x Lado
5	Pentágono	0,688	0,688 x Lado
6	Hexágono	0,866	0,866 x Lado
7	Heptágono	1,038	1,038 x Lado
8	Octógono	1,207	1,207 x Lado
9	Eneágono	1,374	1,374 x Lado
10	Decágono	1,539	1,539 x Lado

Apotema = 0,688 x Lado

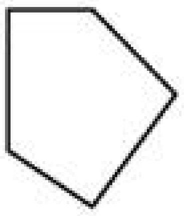
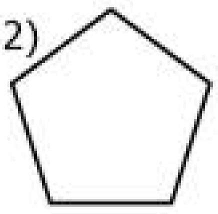
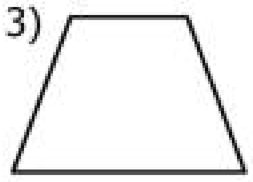
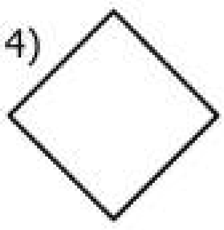
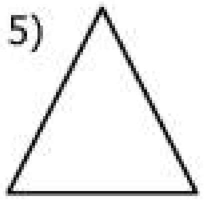
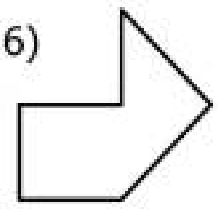
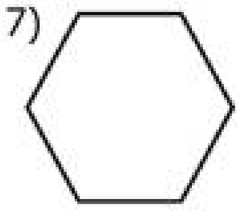
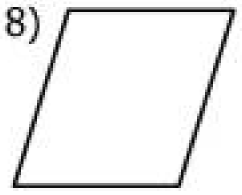
Esto por la tabla de los apotemas.

Apotema = 0,688 x 8 cm

Apotema = 5,5 cm

El radio de la circunferencia es igual al apotema del pentágono.
Como pasa con los apotemas de cualquier polígono inscripto.
Entonces el radio de la circunferencia vale 5,5 cm.

Decir en los siguientes casos cuáles son polígonos regulares y cuáles no lo son.
En el caso de ser polígonos regulares nombrarlos.

1)  2)  3)  4)  5)  6)  7)  8) 

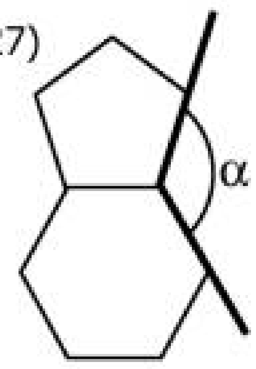
Hallar el valor del ángulo central de los siguientes polígonos regulares:

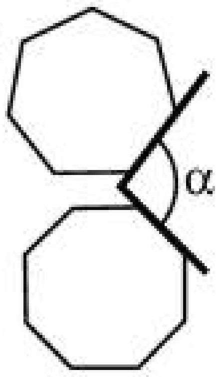
9) Cuadrado	12) Hexágono	15) Heptágono
10) Decágono	13) Dodecágono	16) Eneágono
11) Octógono	14) Triángulo Equilátero	17) Pentágono

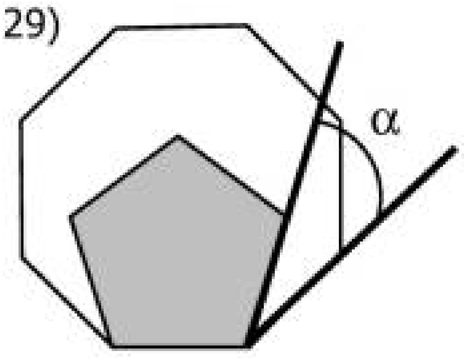
Hallar el valor de los ángulos interiores de los siguientes polígonos regulares:

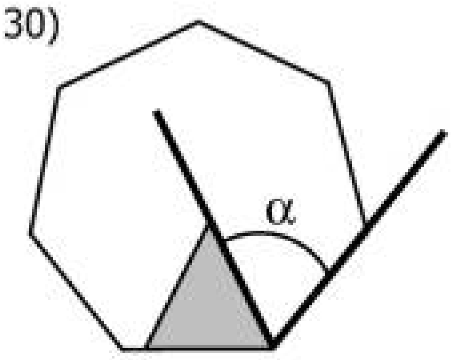
18) Cuadrado	21) Hexágono	24) Heptágono
19) Decágono	22) Dodecágono	25) Eneágono
20) Octógono	23) Triángulo Equilátero	26) Pentágono

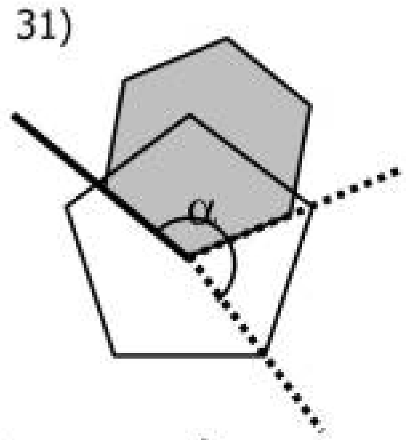
Hallar el ángulo "α" marcado en cada gráfico, entre ángulos interiores y/o exteriores de polígonos regulares:

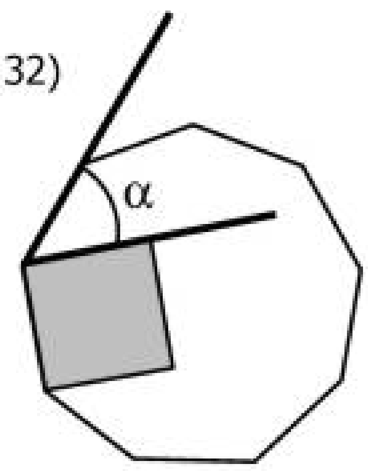
27)


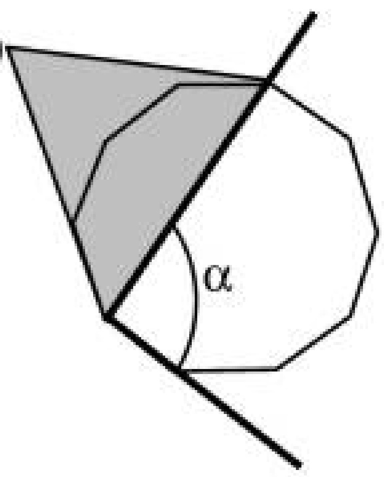
28)


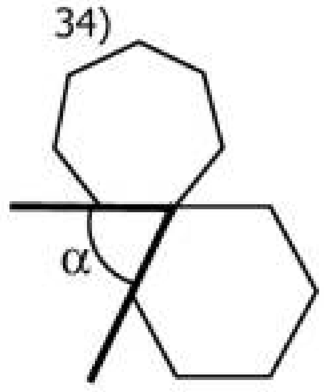
29)


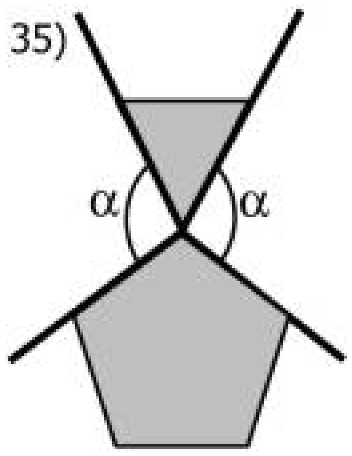
30)


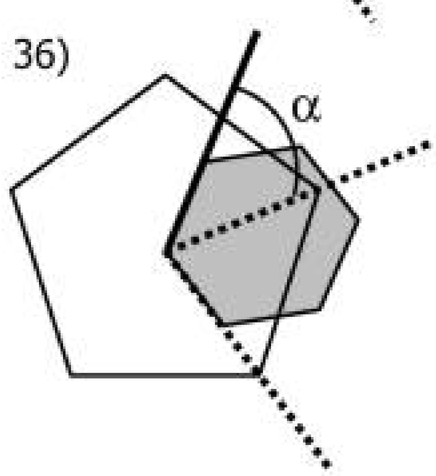
31)


32)


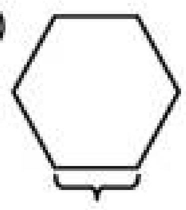
33)


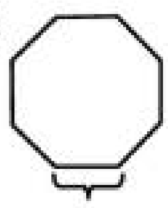
34)


35)


36)


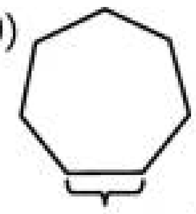
Hallar el apotema de los siguientes polígonos regulares, dar el valor en centímetros:

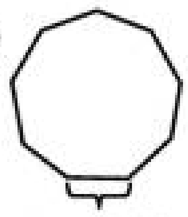
37)

L = 5 cm

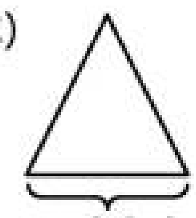
38)

L = 2 cm

39)

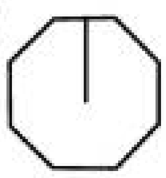
L = 62 mm

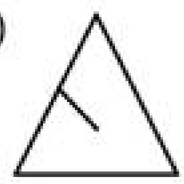
40)

L = 0,4 dm

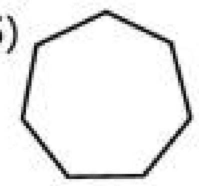
41)

L = 0,02 m

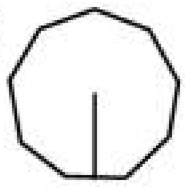
42)

L = 0,8 dm

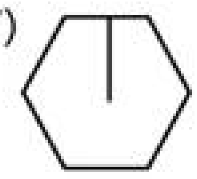
Hallar el **área** de los siguientes polígonos regulares: (Dar el valor en cm^2, con 2 posiciones decimales)

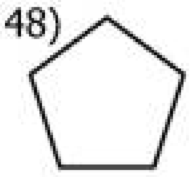
43)

Ap = 3 cm

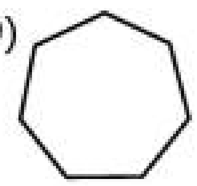
44)

Ap = 1 dm

45)

Per = 2,8 dm

46)

Ap = 0,01 m

47)

Ap = 0,03 m

48)

Per = 5 cm

49)

Per = 140 mm

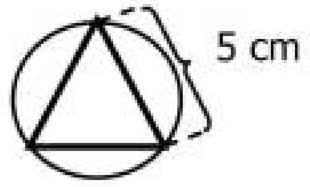
50) ¿Para qué polígono regular, sus ángulos interiores valen 140º?

- **Problemas con polígonos inscriptos** : (Repasar teorema de pitágoras)

51) El perímetro de un triángulo equilátero inscripto en una Circunferencia mide 72,66 m. Calcular:

a) El lado del triángulo equilátero
b) La superficie del triángulo
c) El radio de la Circunferencia
d) La longitud de la Circunferencia
e) El área del Círculo.

52) Determinar la superficie, el perímetro y la altura de un triángulo equilátero inscripto cuyos lados miden 5 m cada uno.
Hallar también radio y longitud de la Circunferencia.



53) La longitud de la Circunferencia de un triángulo equilátero inscripto en ella mide 50,24 m. Hallar el perímetro del triángulo y el área del Círculo.

54) El perímetro de un triángulo equilátero es 20,4 m. Calcular el lado, la altura y la superficie.

55) El lado de un triángulo equilátero inscripto mide 0,692 m. Hallar la longitud de la Circunferencia, el área del Círculo, la apotema y la altura de dicho triángulo.

56) El perímetro de un triángulo equilátero inscripto mide 1,8 m. Hallar el área del Círculo, la longitud de la Circunferencia y la altura del triángulo.

57) El radio de una Circunferencia mide 1,6 m. Calcular perímetro, altura, apotema y área del triángulo equilátero inscripto.

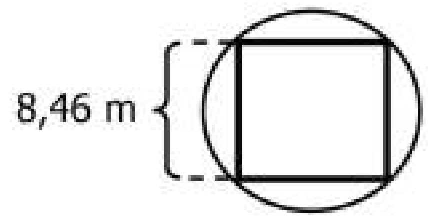
58) El diámetro de una Circunferencia mide 1,8 m. Calcular el perímetro, la altura, la apotema y área del triángulo inscripto.

59) La longitud de una Circunferencia mide 3,14 m. Calcular el perímetro, la altura y área del triángulo equilátero inscripto.

60) El lado de un cuadrado inscripto mide 2,82 m. Calcular el radio y el perímetro del cuadrado.

61) Hallar la longitud de la Circunferencia inscripta en un cuadrado de 20 m de perímetro.

62) El lado de un cuadrado inscripto mide 8,46 m. Calcular la medida del radio de la Circunferencia, la longitud de la Circunferencia, el área del Círculo, el perímetro y la superficie del cuadrado.



63) Hallar el perímetro y la superficie del cuadrado inscripto en una circunferencia R=1,4 m

64) La longitud de una Circunferencia es de 4,396 m. Calcular el perímetro y la superficie del cuadrado inscripto en dicha circunferencia.

65) El área de una Circunferencia es 1,1304 m^2. Calcular el perímetro y la superficie del cuadrado inscripto.

66) El lado de un cuadrado inscripto es 0,282 m. Calcular la longitud y el área del Círculo.

67) El perímetro de un cuadrado inscripto mide 1,692 m. Calcular la longitud de la Circunferencia y el área del Círculo.

68) La superficie de un cuadrado inscripto mide 0,09 m^2. Calcular la longitud de la Circunferencia y el área del Círculo.

69) Calcular el lado y el perímetro de un hexágono inscripto en una Circunferencia cuyo radio es 8 m.

70) Calcular el perímetro de un hexágono inscripto en una Circunferencia cuya longitud es de 12 m.

71) La apotema de un hexágono regular inscripto en una Circunferencia mide 3,46 m.
Calcular: a) la longitud del lado del hexágono inscripto y b) la superficie del hexágono.

72) Determinar cuánto mide la apotema de un hexágono regular inscripto en una Circunferencia, la superficie, el lado, la longitud de la Circunferencia y el área del Círculo. Sabiendo que su perímetro es igual a 48 m.

73) El radio de una Circunferencia es 1,2 m. Hallar el perímetro y la superficie del hexágono inscripto.

74) El perímetro de un hexágono inscripto es 14,4 m. Calcular la longitud y el área del Círculo.

75) La longitud de una Circunferencia mide 2,512 m. Calcular el perímetro, la apotema y la superficie del hexágono inscripto.

76) Calcular la superficie de un hexágono inscripto en una Circunferencia de 1,1304 m^2 de área.

77) La apotema de un hexágono inscripto mide 2,076 m. Hallar la longitud de la Circunferencia y el área del Círculo.

78) El diámetro de una Circunferencia mide 1,8 m. Hallar el perímetro, la Apotema y la superficie del hexágono inscripto.

79) Se tiene un patio circular de 5 m de diámetro, dentro del cual se construyó una piscina hexagonal inscripta. ¿Cuántos m^2 de pasto se necesitan para empastar alrededor de la piscina?.

80) La apotema de un hexágono regular inscripto en una Circunferencia mide 3,46 m. Calcular la longitud del lado del cuadrado inscripto.

➢ **Problemas con polígonos circunscriptos:**

81) Calcular el área del círculo en el cual está circunscripto un pentágono de 4 cm de lado.

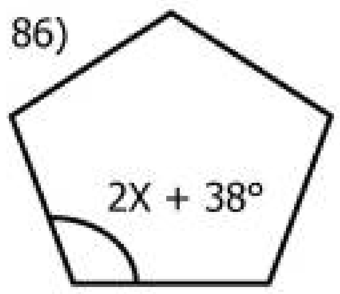
82) Calcular el perímetro de la circunferencia en la cual está circunscripto un octógono de 6 cm de lado.

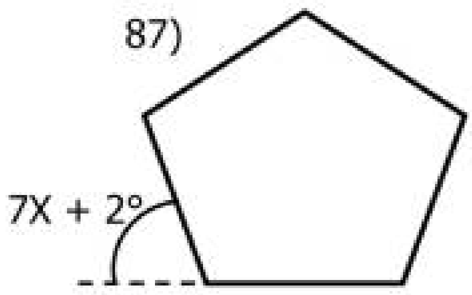
83) Calcular el área de un pentágono circunscripto en una circunferencia de 5 cm de radio.

84) Calcular el valor del lado de un hexágono circunscripto en una circunferencia cuya longitud es 314 cm.

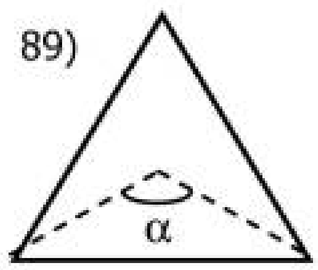
85) Calcular el perímetro de un heptágono circunscripto en una circunferencia de 10 cm de radio.

Y **Hallar X**

86)


87)


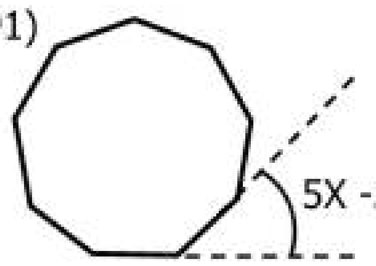
88) $\alpha = 17X - 8°$


89)


$\alpha = 8X + 16°$

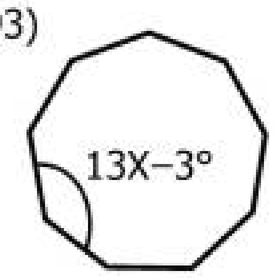
90)

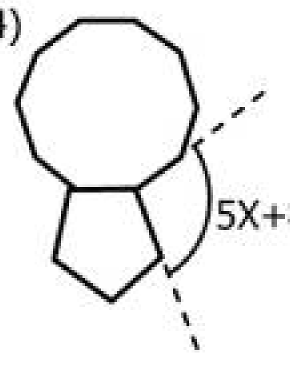

$\alpha = (43X - 27°) \div 7$

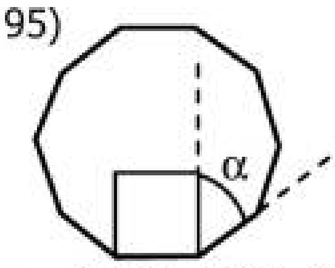
91)


92)


$\alpha = 11X - 10°$

93)


94)


95)


$\alpha = 7\,(3X - 11°) - 16°$

by DaL-0r para TARINGA!

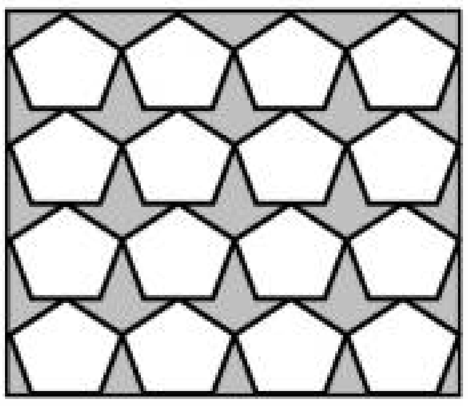
Y **Responder Verdadero o Falso**

96) La suma de los ángulos interiores de cualquier polígono da lo mismo.
97) La suma de los ángulos interiores de cualquier polígono da 360°
98) La suma de los ángulos interiores de cada polígono es diferente.
99) La suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono es 360°
100) La suma de los ángulos exteriores de cada polígono es diferente.
101) El ángulo interior de un hexágono es igual a su ángulo central.
102) El ángulo exterior de un pentágono es igual a su ángulo central.
103) La apotema de un polígono circunscripto es igual al radio de la circunferencia.
104) El lado de un hexágono inscripto es igual al radio de la circunferencia.
105) El área de un polígono inscripto es igual a la del círculo en el que está inscripto.
106) El área de un polígono circunscripto es siempre mayor a la del círculo.
107) El apotema de un polígono corta siempre perpendicularmente al lado del mismo.

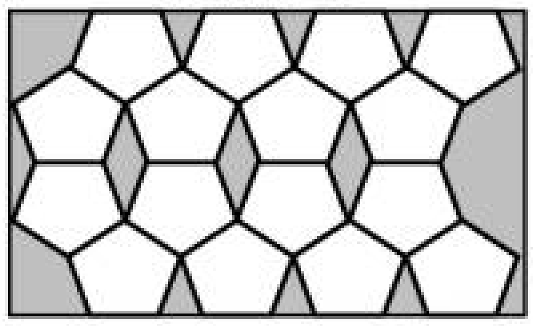
108) Una fábrica de ropa necesita cortes de tela con forma de pentágono de 60 cm de lado.

Para realizar los cortes cuenta con lienzos de tela de varios tamaños. Los diseñadores plantearon dos formas de obtener los pentágonos y a los dueños de la fábrica les interesa saber con cuál de los dos modelos utilizarían menos metros cuadrados de tela para sacar la misma cantidad de cortes pentagonales. Encargaron a unos matemáticos los cálculos de las medidas de ambos lienzos para los modelos "A" y "B"

Modelo "A"



Modelo "B"



El Modelo "B" tiene: 4,37 metros de ancho por 2,98 metros de alto
El modelo "A" tiene: 3,88 metros de ancho por ….. de alto

Pero la hoja en que están estas medidas se manchó y no se ve la medida del alto del lienzo del modelo "A".
Los dueños de la fábrica deben tomar una medida urgente y no tienen tiempo para encargar nuevamente los cálculos ¿Qué les recomendarías hacer? ¿Cuántos metros cuadrados se ahorran por cada lienzo, tomando la decisión correcta?

Y **Más problemas con los ángulos de los Polígonos:**

109) Si la suma de los ángulos interiores de un polígono regular es 1260° ¿Cuántos lados tiene el polígono?

110) Si el ángulo interior de un polígono es 108° más grande que su ángulo exterior ¿Cuántos lados tiene este polígono?

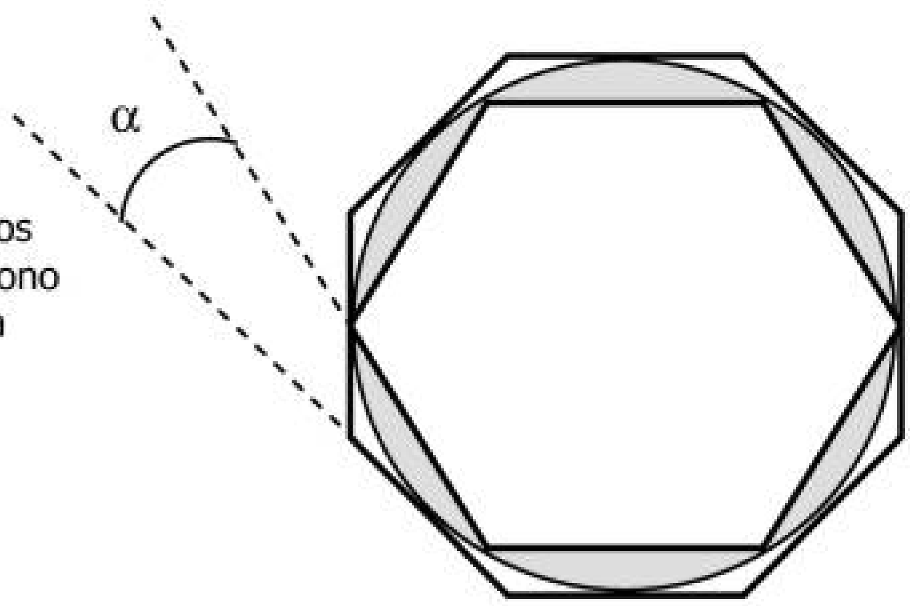
111) Calcular la diferencia entre el ángulo interior de un pentágono y el ángulo exterior de un octógono.

112) Calcular la diferencia entre el ángulo interior de un hexágono y el doble del ángulo central de un eneágono.

113) ¿Cuántos lados tiene un polígono cuyo ángulo central es igual a la tercera parte del ángulo interior de un hexágono?

114) Calcular α

α está formado por las proyecciones de los lados de un hexágono inscripto y un octógono circunscripto en la misma circunferencia



Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Expresiones Algebraicas Básicas

Número de Tema: **33**

Área: **Matemática**

- **Expresiones Algebraicas**: Llamamos así a toda expresión en la que se incluyen y combinan de cualquier forma: Operaciones matemáticas, Números y Variables o partes literales. (Estas variables son las que se expresan simplemente con una letra para cada variable)

Ejemplos: ○ $2x + 1$ ○ $5 (x+ 3) 2 + 3 a$

Operaciones Básicas: Así como podemos operar con los números, también se puede operar con las expresiones algebraicas.

Suma y Resta: Si tenemos una suma de expresiones algebraicas, debemos tener en cuenta que muchas veces se puede operar y otras veces no.

Se podrá operar de la siguiente manera, o teniendo en cuenta las siguientes reglas para la suma y resta:

- Se puede sumar o restar entre sí los términos numéricos "puros" de ambas expresiones.
- Se puede sumar o restar entre sí los términos que contienen variables, sólo cuando la parte literal de ambos términos es exactamente igual, sólo pueden variar sus coeficientes numéricos.

Ejemplos:
Si tengo las siguientes expresiones algebraicas y las quiero sumar:

$$\begin{array}{rl} & 2x + 3a + 1 + 7b \\ + & \\ & 5a + 3x^2 + 4 \end{array}$$

- Los términos numéricos: Ambas expresiones tienen "términos numéricos puros" y los puedo sumar entre sí, es decir sumar el "1" de la primera expresión con el "4" de la segunda expresión.
- Los términos literales que se refieren a la variable "x" no pueden sumarse entre sí porque en la primera expresión la "x" no está elevada a ningún exponente y en cambio en la segunda expresión está elevada al cuadrado, por lo tanto no pueden sumarse entre sí.
- Sin embargo los términos que se refieren ambos a la variable "a" sí pueden sumarse entre sí ya que en lo único que difieren es en el coeficiente que los afecta, por lo tanto puedo sumar "3 a" con "5 a".
- Al término de la primera expresión que se refiere a la variable "b" no puedo sumarlo con ninguno de la segunda expresión ya que en la segunda expresión no hay ningún término que se refiera a "b".

Entonces la suma de ambas expresiones quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rl} & 2x + 3a + 1 + 7b \\ + & 5a + 3x^2 + 4 \\ \hline & 2x + 8a + 5 + 7b + 3x^2 \end{array}$$

Nota: Antes de comenzar a operar en la suma de dos expresiones algebraicas debemos tener ambas expresiones lo convenientemente agrupadas o desagrupadas según los términos comunes que tengan para sumar o restar.

Producto de expresiones algebraicas: Estudiaremos a continuación sólo los productos más comunes que suelen presentarse con expresiones algebraicas. Ellos son lo productos de "binomios" que se refieren a una única variable y/o a un término numérico puro.

Ejemplos: Vamos a estudiar productos como los siguientes:

○ $(2x + 1) . 3$ ○ $(3x) . (x – 4)$ ○ $(5x + 8) . (2x – 3)$

En estos casos lo que tenemos que hacer para resolver estos productos es simplemente aplicar la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma o resta.

Ejemplos:

Distributiva del "3"

$$(2x + 1) . 3 \Rightarrow 2x . 3 + 1 . 3 \Rightarrow 6x + 3$$

Distributiva del "3 x"

$$(3x) . (x – 4) \Rightarrow 3x . x - 3x . 4 \Rightarrow 3x^2 – 12x$$

Ojo: Cuando multiplico "3 x" . "x" ⇒ x^2

$$(5x + 8) . (2x – 3) \Rightarrow 5x . 2x – 5x . 3 + 8 . 2x – 8 . 3 \Rightarrow 10x^2 – 15x + 16x – 24 \Rightarrow 10x^2 + x – 24$$

Productos Notables: Se los denomina así a algunos productos típicos que veremos a continuación:

- **<u>Diferencia de Cuadrados</u>**: Veamos que pasa cuando multiplicamos un "Binomio" por su CONJUGADO.

Conjugado: El conjugado de un "binomio" es el mismo binomio con el segundo término cambiado de signo.

Entonces multipliquemos: $\boxed{(a + b) \,.\, (a - b)}$ Como podemos ver, el "binomio" $(a-b)$ es el conjugado del "binomio" $(a + b)$

Si hacemos las distributivas: $(a + b) \,.\, (a - b) = a \,.\, a - a \,.\, b + b \,.\, a - b \,.\, b$

$$a \,.\, a - a \,.\, b + b \,.\, a - b \,.\, b \Rightarrow a^2 - ab + ba - b^2 \Rightarrow a^2 - ab + ab - b^2 \Rightarrow a^2 - ab + ab - b^2 \Rightarrow \boxed{a^2 - b^2}$$

"**ab**" es lo mismo que "**ba**" ya que el orden de un producto no altera el resultado.

Como vemos llegamos a la igualdad: $\boxed{(a + b) \,.\, (a-b) = a^2 - b^2}$ A la que llamamos "Diferencia de cuadrados" Es un producto notable muy importante.

Esta fórmula, nos sirve, para ahorrar tiempo cuando tenemos que hacer un producto de un binomio por su conjugado, ya que en lugar de hacer la distributiva, nos ahorramos unos pasos si aplicamos esta fórmula.

Ejemplo de aplicación: Supongamos que tenemos que hacer el siguiente producto: $(x + 3) \,.\, (x-3) =$
Aquí tenemos el producto de un binomio por su conjugado, por lo tanto podemos aplicar la fórmula y simplemente nos queda: $(x + 3) \,.\, (x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

- **<u>Cuadrado de un Binomio</u>**: Observemos que pasa cuando multiplicamos un "Binomio" por sí mismo. Multiplicar a un binomio por sí mismo es elevarlo al cuadrado. Veamos:

$$(a + b)^2 = (a + b) \,.\, (a + b) = a \,.\, a + a \,.\, b + b \,.\, a + b \,.\, b\, b = a^2 + ab + ba + b^2 \Rightarrow a^2 + ab + ab + b^2$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 \Rightarrow \boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Y esta es la fórmula general que usaremos cuando queramos elevar un binomio al cuadrado.

Ejemplo: Calculemos: $(2x + 5)^2 = (2x)^2 + \underbrace{2 \,.\, (2x) \,.\, (5)} + (5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$

Este es el cuadrado del primer término — Este es el doble del primer término por el segundo — Este es el cuadrado del Segundo término

- **<u>Cubo de un Binomio</u>**: ¿Qué pasa cuando multiplicamos un "Binomio" por sí mismo y lo volvemos a multiplicar por sí mismo otra vez? Multiplicar a un binomio por sí mismo dos veces es elevarlo al cubo:

$$\Rightarrow \boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b \;\; 3ab^2 + b^3}$$

Esta es la fórmula general que usaremos cuando queramos elevar un binomio al cubo.

Ejemplo: Calculemos: $(x - 2)^3 = (x)^3 + \underbrace{3 \,.\, (x)^2 \,.\, (-2)} + \underbrace{3 \,.\, (x) \,.\, (-2)^2} + (-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Este es el cubo del primer término — El triple del primer término al cuadrado por el segundo — El triple del primer término por el segundo al cuadrado — Este es el cubo del Segundo término

Resolver algebraicamente, sumando o restando los términos que puedan sumarse o restarse:

1) $5x+3-2x$
2) $7x-3+2x+1$
3) $5x-3x+2x+1$
4) $5x-1+(5x+1)$
5) $6x-3+(3x+2)$
6) $6x-3-(3x+2)$
7) $x+1-(2x-1)$
8) $3+x-(4-x)$
9) $5x+2+3x+(5-2x)+1$
10) $3a+1+b+(b-2a)+3a$
11) $5b-1+b+(3a-2a+b)+1$
12) $b-a+b+(a-2b+a)+b$

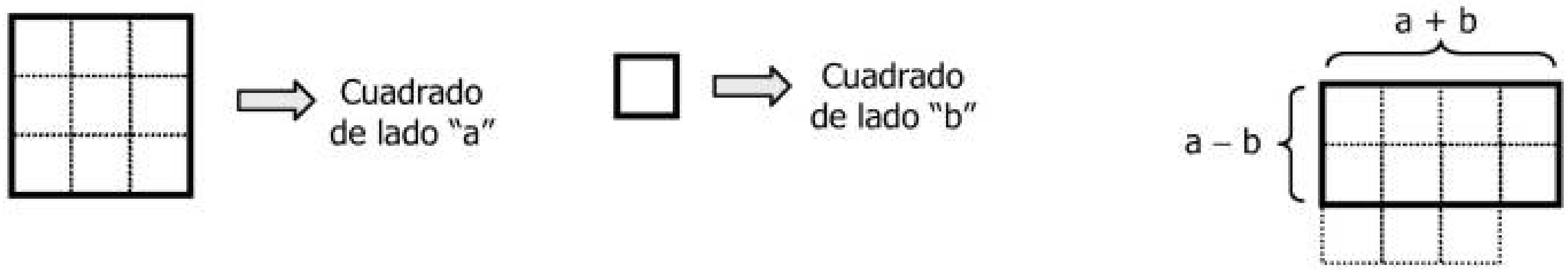
Aplicar la propiedad distributiva y seguir operando en caso de ser posible:

13) $3\cdot(x+2)$
14) $2\cdot(x-1)$
15) $-4\cdot(x+1)$
16) $-5\cdot(x-3)$
17) $-2\cdot(2x+1)$
18) $3\cdot(5x-1)$
19) $-1\cdot(3x-1)$
20) $-2\cdot(-4x+1)+2$
21) $-5\cdot(-2x-3)-3x$
22) $3x\cdot(x+1)-1$
23) $2x\cdot(x-2)-3$
24) $5x\cdot(-x+1)-3+x$
25) $2x\cdot(3x+1)-6x^2+x$
26) $2x\cdot(x-1)-2x^2+3$
27) $-x\cdot(x-1)-x^2+1$
28) $-x\cdot(-x+2)+x^2+2x$
29) $-2x\cdot(x-2)+2x^2+2x$
30) $(x+1)\cdot(x+2)$
31) $(x+1)\cdot(x+3)$
32) $(2x+1)\cdot(x+1)$
33) $(2x-1)\cdot(x+3)$
34) $(x-1)\cdot(-3+x)$
35) $(x-1)\cdot(x+2)+2x+1$
36) $(x+5)\cdot(x-4)+x+17$
37) $(x+3)\cdot(x-2)-5x+7$
38) $(x+3)\cdot(x-2)-x^2+6$
39) $(x+1)\cdot(x-2)-x^2-x$

Unir con flechas, las expresiones algebraicas, con sus equivalentes, cuando corresponda:

40) $(x+1)^2$	a) x^2+x
41) $(x-1)^2$	b) x^2+x-2
42) $(x+1)\cdot(x-1)$	c) x^2+2x+1
43) $(x+1)\cdot x$	d) x^2-x
44) $(x-1)\cdot x$	e) x^2-2x+1
45) $(x-1)\cdot(x+2)$	f) x^2-x-2
46) $(x+1)\cdot(x-2)$	g) x^2-1

47) Demostrar la fórmula del producto notable "Diferencia de cuadrados" empleando el siguiente rectángulo de lados "a+b" y "a–b" y los cuadrados de lados "a" y "b" y conceptos de áreas que conocen.



➢ **Resolver aplicando la fórmula de Cuadrado de un binomio:**

48) $(x+3)^2$
49) $(x-2)^2$
50) $(x+5)^2$
51) $(x-6)^2$
52) $(x-1)^2$
53) $(2x+1)^2$
54) $(5x-3)^2$
55) $(-2x+1)^2$
56) $(-3x-1)^2$
57) $(4x+3)^2$
58) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
59) $\left(\frac{1}{3}x+3\right)^2$
60) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)^2$
61) $\left(-\frac{1}{2}x-1\right)^2$
62) $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x\right)^2$
63) $\left(-x-\frac{1}{2}\right)^2$
64) $\left(x+\frac{3}{5}\right)^2$
65) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$
66) $\left(\frac{1}{3}-2x\right)^2$

✓ **Resolver aplicando la fórmula de Cubo de un binomio:**

67) $(x-3)^3$

68) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^3$

69) $\left(x+\frac{5}{3}\right)^3$

70) $(2x+1)^3$

71) $\left(2x+\frac{1}{3}\right)^3$

72) $\left(x-\frac{2}{3}\right)^3$

73) $\left(\frac{1}{3}x+1\right)^3$

74) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)^3$

75) $(2x-5)^3$

76) $(3x-2)^3$

77) $(4x+3)^3$

78) $(-x-1)^3$

79) $(-2x-3)^3$

✓ **Resolver aplicando la fórmula de Diferencia de cuadrados** (verificar haciendo la distributiva)**:**

80) $(x+2)\cdot(x-2)$

81) $(x+3)\cdot(x-3)$

82) $(x-5)\cdot(x+5)$

83) $(-x+1)\cdot(-x-1)$

84) $(2x+1)\cdot(2x-1)$

85) $(3x+4)\cdot(3x-4)$

86) $\left(x^2+2\right)\cdot\left(x^2-2\right)$

87) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$

88) $\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$

89) $(x+a)\cdot(x-a)$

90) $(x-3a)\cdot(x+3a)$

91) $(2+5x)\cdot(2-5x)$

92) $(-3-x)\cdot(x-3)$

93) $(-1+x)\cdot(x+1)$

✓ **Desarrollar las siguientes expresiones algebraicas:**

94) $2\cdot(x+2)^2$

95) $2X+(x-1)^2$

96) $x^2-(x+3)^2-9$

97) $(x+3)^2-(x+3)\cdot(x-3)$

98) $(x-1)^2+(x-1)\cdot(x+1)$

99) $3\cdot(x+2)^2-2\cdot(x-2)^2$

100) $4\cdot(x+2)-3\cdot(x+2)^2$

101) $(x+3)+(x+3)^2$

102) $(x+1)+3\cdot\left(x^2-1\right)$

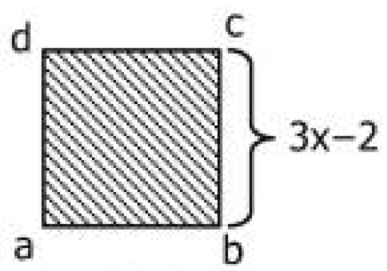
103) $(x+1)^3-(x+1)^2-(x+1)$

104) $(x+2)(2x-3)+2\left(3-x^2\right)$

105) $(3x-1)(x+2)-3x(x+5/3)$

✓ **Ejercicios Integradores Hallar "x"**

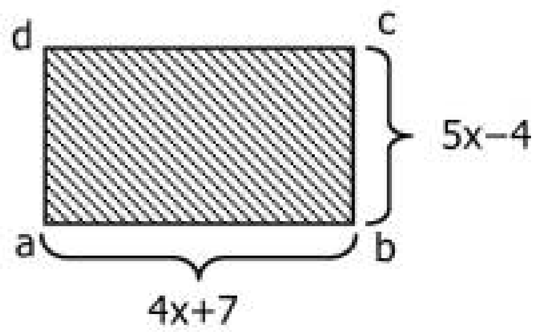
106)



abcd es un Cuadrado

$\text{Area } \square abcd = (3x+4)(3x-4)-4$

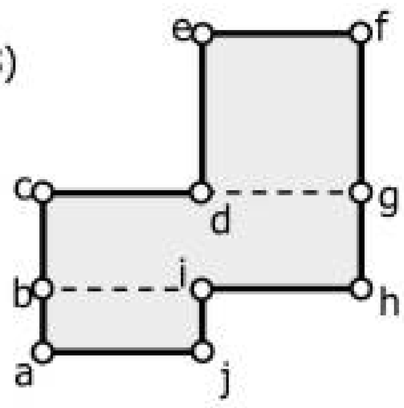
107)



abcd es un Rectángulo

$\text{Area } \square abcd = (2x+3)^3-4x\left(2x^2+9x\right)+20$

108)



$\overline{cd}=\overline{dg}$; $\overline{bi}=\overline{ih}$

$4\,\overline{bc}=3\,\overline{cd}$

$\square acdi$ y $\square defg$ Son Cuadrados

$\text{Area } \square dghi = (147x+17)\cdot\frac{1}{4}x-\frac{95}{2}$

$\overline{ef}=7x-2$

✓ **Verificar Cuales de las siguientes igualdades son Verdaderas y cuáles son falsas:**

109) $(5x-2)(5x+2)=(5x+2)^2-4(5x+2)$

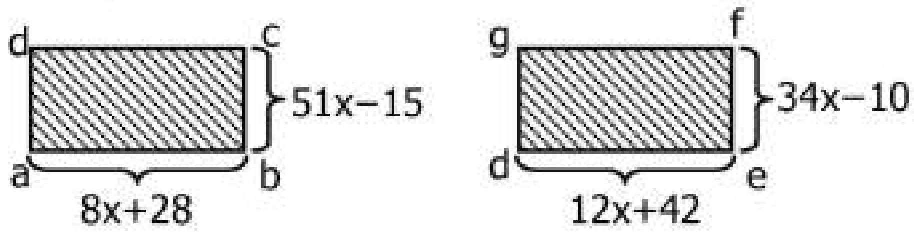
110) $(3x-7)(3x+7)=(3x+7)^2$

111) $(5x-3)^2=(5x+3)^2-60x$

112) $3(2x-1)(2x+1)=(3x-1)(4x+2)-2(x+1)$

113) $(2x+5)^3=\left(\frac{1}{2}x+2\right)(4x+6)^2+(2x+9)^2$

114) $\text{Area } \square abcd = \text{Area } \square defg$



Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Estadística
Nivel I

Número de Tema: **34**

Área: **Matemática**

Recolección de Datos Estadísticos: Cuando hacemos por ejemplo la misma pregunta a una determinada cantidad de personas, sus respuestas van a ser datos estadísticos. El Hecho de hacer esa misma pregunta a todas las personas es una "**Recolección de datos estadísticos**"

Esta "recolección de datos" es el primer paso de lo que llamamos un "Análisis estadístico". A su vez es el más simple de entender y el más complicado y arduo de realizar.

Pasos del Análisis Estadístico: Si bien podríamos tener distintos puntos de vista en la clasificación de estos pasos, básicamente los pasos a seguir en un análisis estadístico son los siguientes:

- Recolección de datos: En planillas, listas o simplemente en hojas en blanco, o bien por mail, teléfono, etc.
- Organización de los datos: Confección de tablas organizadas y completas.
- Cálculos de variables: Cálculo de promedios, totales y otras variables estadísticas que veremos luego.
- Realización de gráficos: Gráficos circulares y de barras, cartesianos, de puntos, de proporciones, etc.
- Análisis y Conclusiones: Conclusiones finales del estudio.

Organización de Datos estadísticos: Cuando hacemos una recolección de datos, muchas veces tenemos datos incompletos, o al haber escrito respuestas en planillas nos encontramos que algunos datos son ilegibles o confusos, otras veces encontramos que se repiten encuestados o que suceden cosas similares. En este punto es cuando tenemos que hacer un "filtro" de los datos que obtuvimos y armar una tabla prolija con datos perfectamente completos y correctos.

Supongamos que un día la profesora nos pide que recolectemos los datos del club de fútbol que es hincha cada alumno del curso y registramos las siguientes respuestas:

Martín	Boca
Beto	Racing
Alejandro	River
Maxi	Velez
Mariano	River
Damián	Independiente
Pablo	River y Platense
Fernando	"Ninguno"
Nico	Racing
Diego	River
Ariel	Boca
Sebastián	River
Nahuel	River
Matías	Boca

Alicia	River
Analía	"Ninguno"
Susana	"Ninguno"
Carina	Boca
Melisa	River
Adriana	River
Verónica	Boca
Florencia	"Ninguno"
Jorgelina	Boca
Margarita	Boca
Cecilia	"Ninguno"
Paula	River
Laura	"Ninguno"
Lorena	River

Antes que nada, Debemos decidir qué hacemos con un dato que tenemos de una respuesta doble de un mismo alumno, el caso del alumno "Pablo". Esto a la hora de decidir la validez de este dato, puede ser tema de ardua discusión, pero si tenemos en cuenta que la pregunta es "¿De qué cuadro sos hincha?" es lógico que se considere válida una sola respuesta, por lo tanto este dato debe ser anulado. Nota: Si tenemos la posibilidad de volver a preguntar al encuestado, como en este caso, puede volverse a preguntar por una respuesta única, pero tengan en cuenta que en muchas encuestas no se puede volver a preguntar por ejemplo en las encuestas en la calle cuando no sabemos ni quien es ni dónde encontrar nuevamente el encuestado, en esos casos no queda otra posibilidad que anular la respuesta en caso de presentar alguna dificultad como la que estamos viendo.

Entonces descartando ese dato, debemos contar la "CANTIDAD" de cada equipo de fútbol, ya que son esas cantidades las que nos interesan estudiar y no, los nombres de cada alumno. Entonces nos queda la siguiente tabla:

River	10
Boca	7
Racing	2
Independiente	1
Velez	1
Ninguno	6

Población y Muestra: Una vez confeccionada la tabla o el cuadro con los datos volcados, es importante calcular, por ejemplo el TOTAL. Este Total es la cantidad de alumnos encuestados. Esta cantidad encuestada la llamamos "**Muestra**"

Esta muestra puede no ser el total de alumnos del curso, ya que pudieron haber faltado alumnos el día que recolectamos los datos. Si la estadística se refiere al equipo de fútbol de los chicos solamente del curso, llamamos "**Población**" al total de alumnos del curso. Si se refiere a los alumnos presentes, entonces llamamos población a todos los encuestados, en ese caso la muestra sería igual a la población.

Cálculo de porcentajes en una tabla estadística: Una vez que tenemos confeccionada una tabla que vuelca los datos de una estadística, podemos calcular los porcentajes que le corresponden a cada dato, aplicando Regla de Tres Simple.

Ejemplo, partimos de la tabla que armamos anteriormente:

River	10
Boca	7
Racing	2
Independiente	1
Velez	1
Ninguno	6

Total: 27

Para calcular el porcentaje que le corresponde a cada dato, aplicamos una Regla de Tres Simple

Ejemplo, Con River:

$$27 \longrightarrow 100\ \%$$
$$10 \longrightarrow X\ \%$$

$$X = \frac{10 \cdot 100\%}{27} = 37{,}037\ \%$$

Y de esta manera completamos una columna en la tabla con los porcentajes representativos de cada valor:

River	10	**37,04%**
Boca	7	**25,93%**
Racing	2	**7,41%**
Independiente	1	**3,70%**
Velez	1	**3,70%**
Ninguno	6	**22,22%**

Interpretación de Gráficos Estadísticos:

Gráficos Circulares: En los gráficos circulares o "de Torta" se representa al total como "el área total del círculo" y cada porción en la que se divide al círculo representa un dato en particular, mientras más representativo sea el dato, mayor será el área que ocupa del círculo en forma proporcional. (Por ejemplo si el gráfico es acerca del club del cual es hincha cada persona, el dato más representativo será el del club con más hinchas)

A continuación está el gráfico circular del ejemplo de los cuadros de fútbol.

Como vemos, River es el que ocupa mayor área, luego Boca, y así sucesivamente, lo que se corresponde con los datos.

Las áreas son proporcionales a los valores que representa cada dato, esto es fundamental en estos gráficos, es decir que si un dato por ejemplo RIVER tiene 10 y RACING 2, el área que representa a River debe ser exactamente 5 veces más grande que el área de Racing en el círculo.

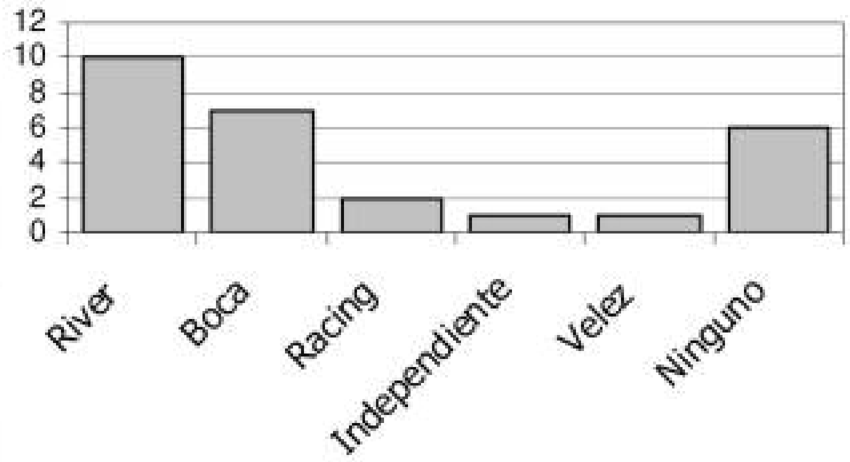
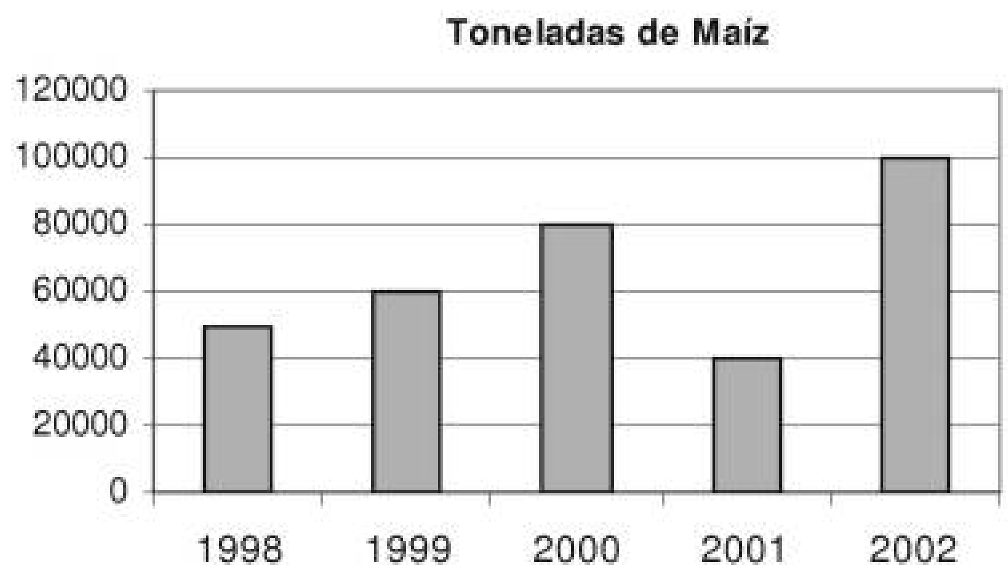


Gráfico de Barras: En los gráficos de barras, se grafica una barra vertical para cada dato (para cada equipo) y se hace un largo proporcional al valor que representa, es decir que en nuestro ejemplo, la barra más larga va a ser la de River, luego la de Boca y así sucesivamente.

Histogramas: Se llaman histogramas a los gráficos (en general gráficos de barras o similares) que representan la variación de una misma Variable a través de diferentes períodos de tiempo. Por ejemplo, Veamos la siguiente tabla que representa la variación de Producción de Toneladas de Maíz en una determinada provincia en diferentes años.

Año	Toneladas de Maíz
1998	50000
1999	60000
2000	80000
2001	40000
2002	100000

Histograma:



En un curso de 6º Año se realizó una encuesta en la que a cada alumno se le pidió que complete la siguiente planilla:

Peso

Menos de 40 Kg	
Entre 40 y 45	
Entre 45 y 50	
Entre 50 y 55	
Entre 55 y 60	
Más de 60 Kg	

Altura

Menos de 1,4 Mts	
Entre 1,4 y 1,45 Mts	
Entre 1,45 y 1,5 Mts	
Entre 1,5 y 1,55 Mts	
Entre 1,55 y 1,6 Mts	
Más de 1,6 Mts	

Cantidad de Hermanos

Ninguno	
1	
2	
3	
4	
Más de 4	

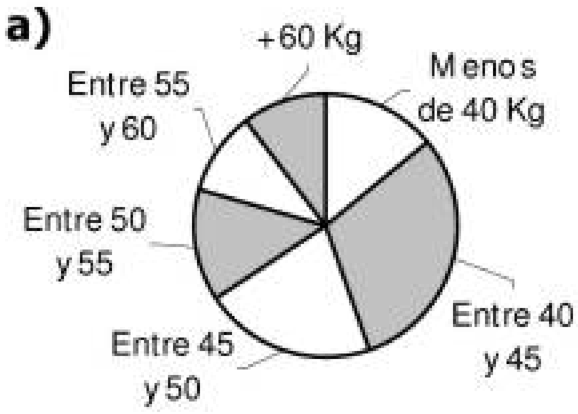
Las respuestas fueron las siguientes:

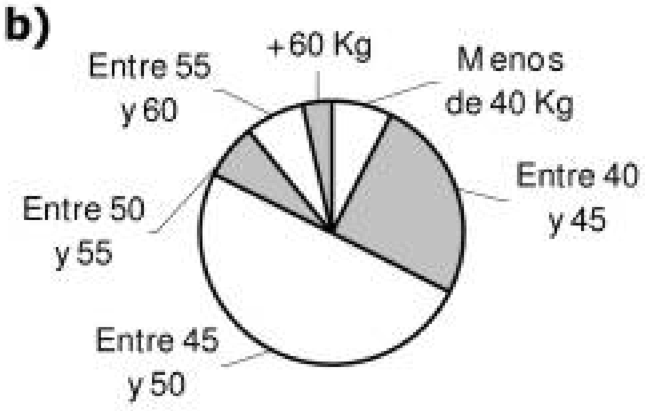
Martín	Menos de 40 Kg	Menos de 1,4 Mts	Ninguno
Beto	Entre 45 y 50	Entre 1,45 y 1,5 Mts	1
Alejandro	Entre 40 y 45	Entre 1,4 y 1,45 Mts	4
Maxi	Entre 45 y 50	Entre 1,45 y 1,5 Mts	2
Mariano	Entre 40 y 45	Entre 1,4 y 1,45 Mts	Ninguno
Damián	Entre 45 y 50	Entre 1,45 y 1,5 Mts	1
Pablo	Entre 45 y 50	Entre 1,5 y 1,55 Mts	1
Fernando	Entre 55 y 60	Entre 1,55 y 1,6 Mts	Ninguno
Nico	Entre 50 y 55	Entre 1,45 y 1,5 Mts	3
Diego	Entre 40 y 45	Entre 1,4 y 1,45 Mts	2
Ariel	Entre 45 y 50	Entre 1,4 y 1,45 Mts	2
Sebastián	Más de 60 Kg	Más de 1,6 Mts	Ninguno
Nahuel	Entre 55 y 60	Entre 1,55 y 1,6 Mts	2
Matías	Entre 45 y 50	Entre 1,45 y 1,5 Mts	1

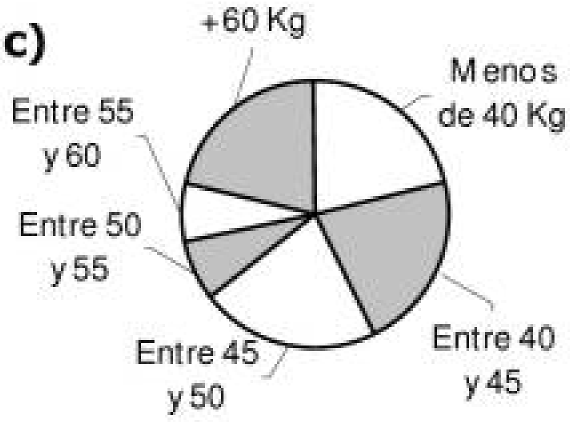
Alicia	Entre 50 y 55	Entre 1,5 y 1,55 Mts	1
Analía	Entre 40 y 45	Entre 1,4 y 1,45 Mts	2
Susana	Entre 40 y 45	Entre 1,4 y 1,45 Mts	Ninguno
Carina	Entre 45 y 50	Entre 1,4 y 1,45 Mts	1
Melisa	Entre 45 y 50	Entre 1,45 y 1,5 Mts	2
Adriana	Entre 45 y 50	Entre 1,5 y 1,55 Mts	1
Verónica	Entre 40 y 45	Entre 1,4 y 1,45 Mts	Ninguno
Florencia	Entre 45 y 50	Entre 1,5 y 1,55 Mts	1
Jorgelina	Entre 40 y 45	Entre 1,4 y 1,45 Mts	1
Margarita	Menos 40 Kg	Menos de 1,4 Mts	2
Cecilia	Entre 45 y 50	Entre 1,4 y 1,45 Mts	3
Paula	Entre 45 y 50	Entre 1,45 y 1,5 Mts	Más de 4
Laura	Entre 45 y 50	Entre 1,45 y 1,5 Mts	Ninguno
Lorena	Entre 45 y 50	Entre 1,45 y 1,5 Mts	1

1)Confeccionar un cuadro en el que se muestre la cantidad total de alumnos para cada rango de peso.
2)Confeccionar un cuadro en el que se muestre la cantidad total de alumnos para cada rango de Altura.
3)Confeccionar un cuadro donde se muestre la cantidad total de alumnos para cada cantidad de hermanos.

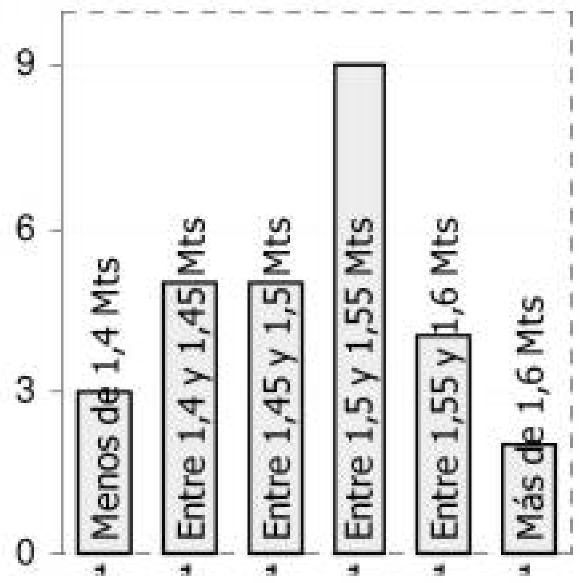
4) Decir cuál de los siguientes gráficos Circulares representa a los pesos de los alumnos encuestados:

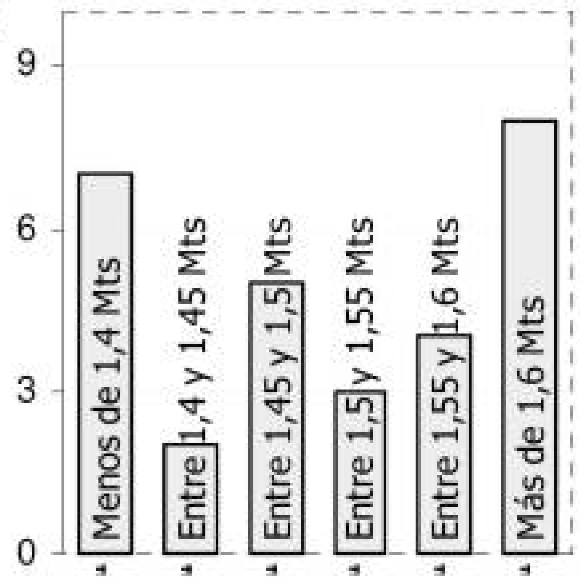
a)


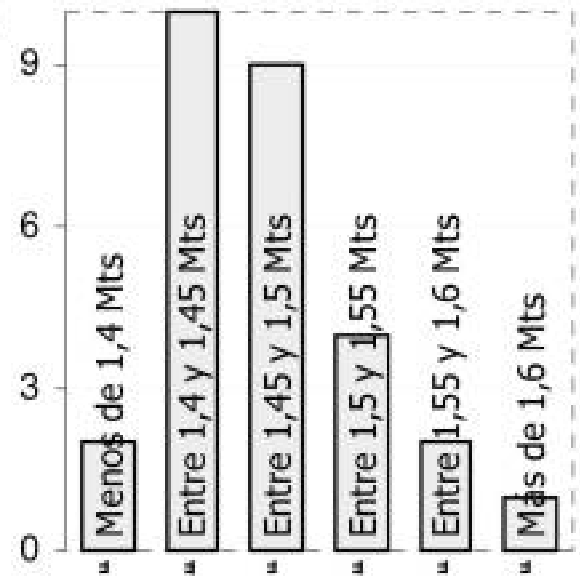
b)


c)


5) Decir cuál de los siguientes gráficos de Barras representa las alturas de los alumnos encuestados:

a)


b)


c)


Tenemos aquí un mapa argentino, publicado en el diario con las temperaturas mínimas y máximas de las ciudades más importantes del país.

6) Confeccionar un cuadro con estos datos volcados en el mapa, para las temperaturas mínimas en los que se agrupe las temperaturas de la siguiente manera:

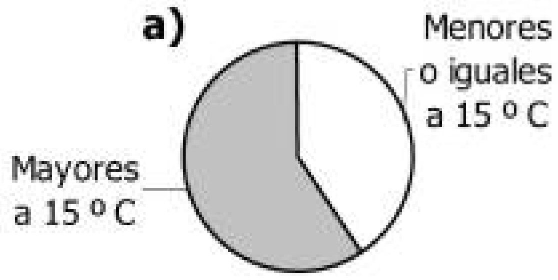
Menores a 10 º C
Mayores a 10 º C y menores o iguales a 15 º C
Mayores 15 º C y menores o iguales a 20 º C
Mayores a 20 º C

7) Confeccionar un cuadro con estos datos volcados en el mapa, para las **temperaturas máximas** en los que se agrupe las temperaturas de la siguiente manera:

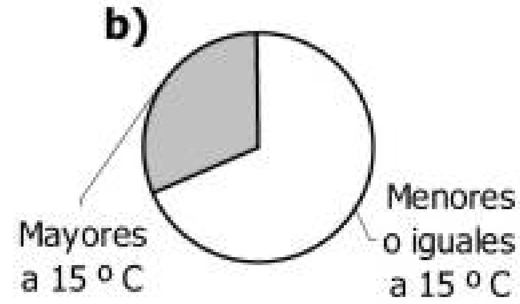
Menores a 20 º C
Mayores a 20 º C y menores o iguales a 25 º C
Mayores 25 º C y menores o iguales a 30 º C
Mayores a 30 º C

8) ¿Cuál de los siguientes gráficos representa realmente los datos volcados en el mapa para **temperaturas mínimas**?

a)

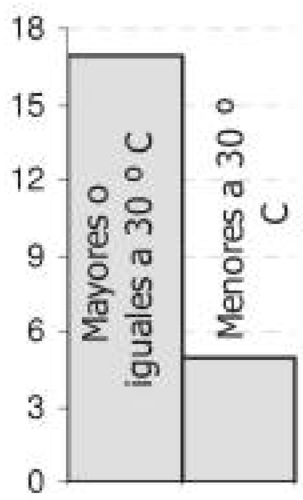


b)

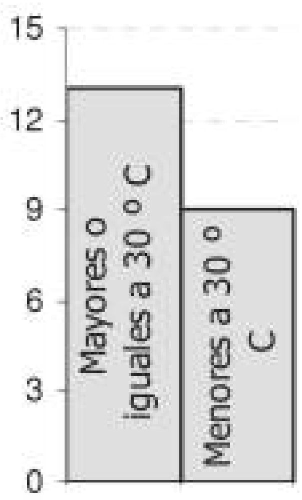


9) ¿Cuál de los siguientes gráficos representa realmente los datos volcados en el mapa para **temperaturas máximas**?

a)

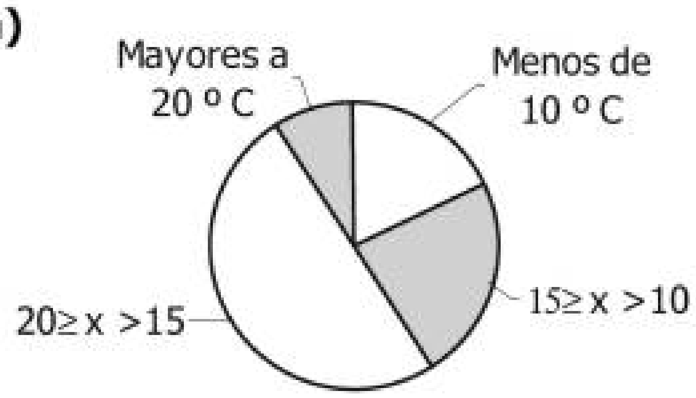


b)

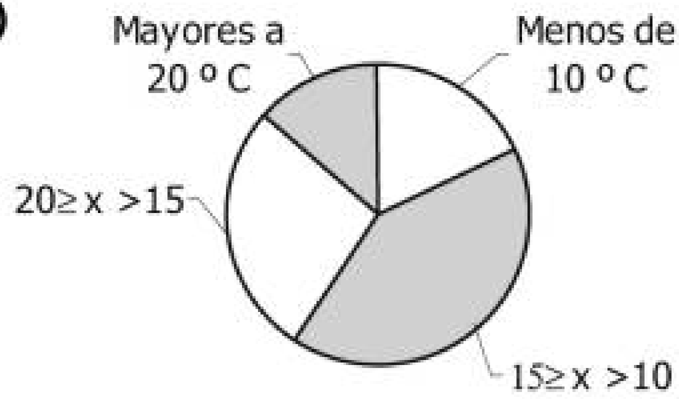


10) ¿Cuál de los siguientes gráficos representa realmente los datos volcados en el cuadro del ejercicio 6?

a)



b)



Seguimos estudiando temperaturas.

El siguiente cuadro es el recorte de un diario que publicó un determinado día las temperaturas mínimas y máximas en las ciudades más importantes del país.

11) Confeccionar un cuadro en el que se cuente la cantidad de ciudades donde la temperatura **mínima** se agrupe en los campos:

- Menos de 15 º C
- Desde 15 º C inclusive hasta 20 º C Inclusive
- Mas de 20 º C

12) Confeccionar un cuadro en el que se cuente la cantidad de ciudades donde la temperatura **máxima** se agrupe en los campos:

- 25 º C o menos
- Más de 25 º Cº

Temperaturas

Ayer en el país

Día	Máx.	Mín.	Día	Máx.	Mín
Azul	28°	19°	Neuquén	29°	13°
B. Blanca	25°	17°	Olavarría	28°	20°
Bariloche	23°	7°	Paraná	26°	22°
Catamarca	32°	29°	Posadas	35°	27°
C. Rivadavia	27°	12°	Resistencia	18°	25°
Concordia	29°	21°	R. Gallegos	20°	7°
Córdoba	26°	20°	Rosario	39°	23°
Corrientes	38°	27°	Salta	35°	18°
El Calafate	20°	8°	San Juan	28°	17°
Esquel	19°	6°	San Luis	27°	21°
Formosa	38°	27°	Santa Fe	27°	21°
Iguazú	33°	22°	Santa Rosa	28°	19°
Jujuy	39°	21°	S. del Estero	39°	28°
La Plata	31°	21°	Tandil	27°	17°
La Rioja	35°	23°	Tucumán	36°	24°
Mar del Plata	23°	19°	Ushuaia	10°	4°
Mendoza	28°	16°			

Los siguientes recortes fueron publicados por un diario. Se detallan algunos autos que están a la venta por particulares de las marcas Ford Y Chevrolet. Se detalla el modelo, año, kilometraje del auto, precio y tipo de combustible que usa.

Modelo CHEVROLET	Año	Km	Precio	Combust.
Astra 2.0 MPFI	99	65000	27800	Nafta
Astra GLS 16v 4p	99	80000	27000	Nafta
Astra GLS 2.0 16V	00	88000	30000	Nafta
Astra GLS 4P	99	153380	28000	Nafta
Astra GLS Coupe	99	76000	23500	Nafta
Astra GLS TD 1.7	97	226000	17500	Diesel
Astra GLS TD 4Ptas	99	79000	29900	Diesel
Blazer 2.2	98	115000	28900	GNC
Corsa Classic 4 ptas	99	90000	16800	Diesel
Corsa Combo 1.7	01	75000	21900	Diesel
Corsa GLS 1.6 16v	00	80000	18900	Nafta
Corsa GLS 16V Wagon	98	60000	19900	Nafta
Corsa GLS 4 ptas	97	55000	18000	GNC
Corsa GLS full	97	70862	18500	Nafta
Corsa gli 5 ptas	97	76000	15500	Nafta
Corsa pick up GL 1.7	98	98000	17500	Diesel
Corsa pick up GL	98	120000	30000	Diesel
Luv 2.5 cab/simple	98	120000	23900	Diesel
S10 Pick up	97	120000	22300	Diesel
Silverado D	88	140000	17900	Diesel
Vectra 2.0 gls	97	110000	19800	Nafta
Vectra 2.2CD	99	90000	27800	Nafta
Vectra CD 2.0	97	85000	19900	Nafta
Vectra CD 2.0 16V	97	106000	22500	GNC
Vectra CD Full	98	85000	25500	Nafta
Vectra CD full	97	145000	19700	GNC
Vectra GL 2.2	98	74000	22000	Nafta

Modelo FORD	Año	Km	Precio	Combust.
Bronco motor mazda	80	150000	25500	Diesel
Courier Furgon	99	100000	17800	Diesel
Escort 16v	99	70000	20000	Nafta
Escort CLX 1.8	98	93000	17500	Nafta
Escort CLX 1.8 rural	99	54000	25000	Nafta
Escort CLX 5 P. full	97	42800	17000	Nafta
Escort Coupe SI	99	74000	22900	Nafta
Escort LX	97	98000	16500	GNC
Escort LX	99	110000	18500	Diesel
Escort LX	97	120000	17500	Diesel
Escort LX TDi 1.8	01	91000	22400	Diesel
Escort LXD	99	146000	17700	Diesel
Escort RURAL TD	00	110000	26000	Diesel
Escort Rural CLX	98	103000	22000	GNC
Escort clx	98	40000	18300	Nafta
Escort-clx	98	115000	18400	Diesel
Escort coupe glx 1.8	96	80000	15900	Nafta
Escort lx	97	80000	17500	Nafta
Escort lx 1.8	97	85000	16000	Nafta
Escort rural LX 1.8	98	74000	18900	Nafta
Explorer XLT	95	150000	26000	Nafta
F 100 4X2 Standard	92	254000	23900	GNC
Falcon Sprint	81	51000	23000	Nafta
Fiesta CLX	98	56000	16800	Nafta
Fiesta CLX D	01	73000	20700	Diesel
Fiesta EDGE PLUS	03	29000	28500	Nafta
Fiesta ENERGY	03	30000	21000	Nafta
Fiesta LX 5p	00	130000	17500	Diesel

Con los datos del cuadro anterior (Venta de Autos Ford – Chevrolet) resolver los siguientes ejercicios:

13) Confeccionar un cuadro que agrupe los autos de ambas marcas según "**Tipo de combustible**"

14) Confeccionar un cuadro que agrupe los autos de ambas marcas según "**Año**" en los siguientes grupos:

- Anteriores al 97
- 97 y 98
- 99 y 2000
- Posteriores al 2000

15) Confeccionar un cuadro que agrupe los autos de ambas marcas según "**Kilometraje**" en los grupos:

- Menos de 90.000
- Entre 90.000 y 120.000 Inclusive
- Más de 120.000

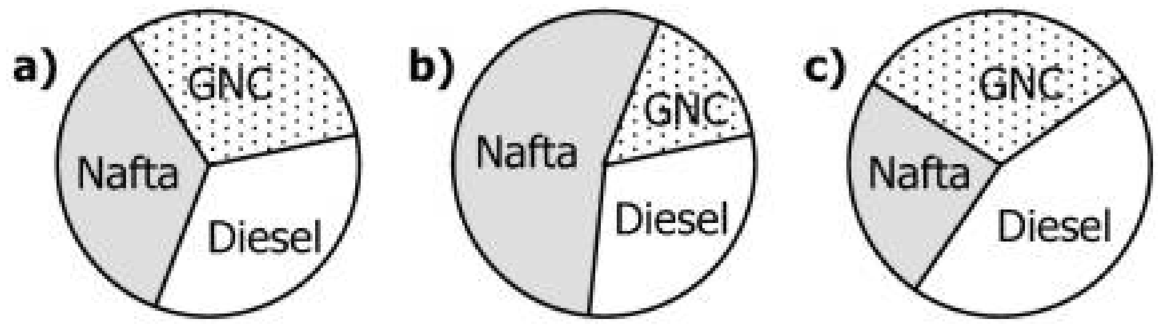
16) Confeccionar un cuadro que agrupe los autos de ambas marcas según "**Precio**" en los grupos:

- Menos de $20.000
- Entre $20.000 y $25.000 Inclusive
- Más de $25.000

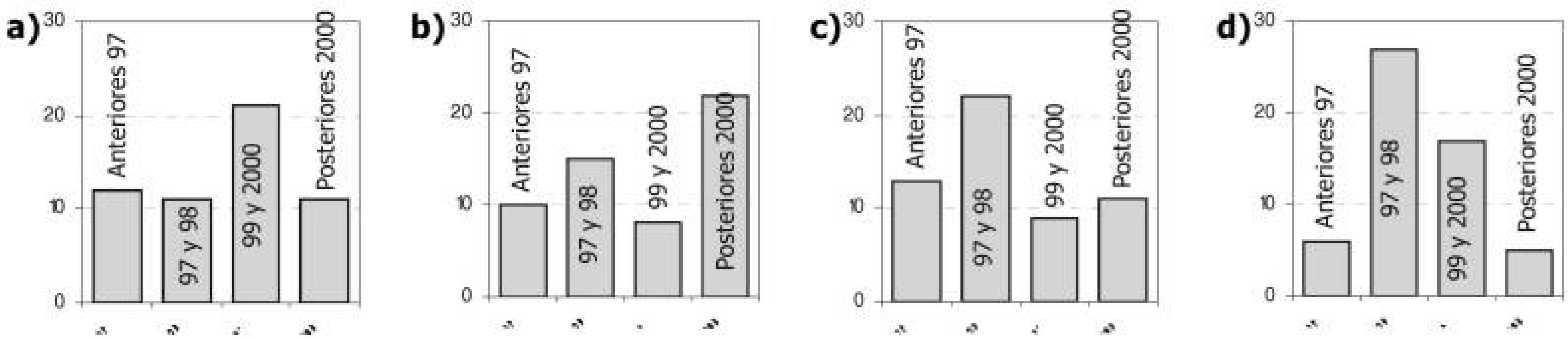
17) Confeccionar un cuadro con los autos de Ford según "**Tipo de combustible**"

18) Confeccionar un cuadro con los autos de Chevrolet según "**Tipo de combustible**"

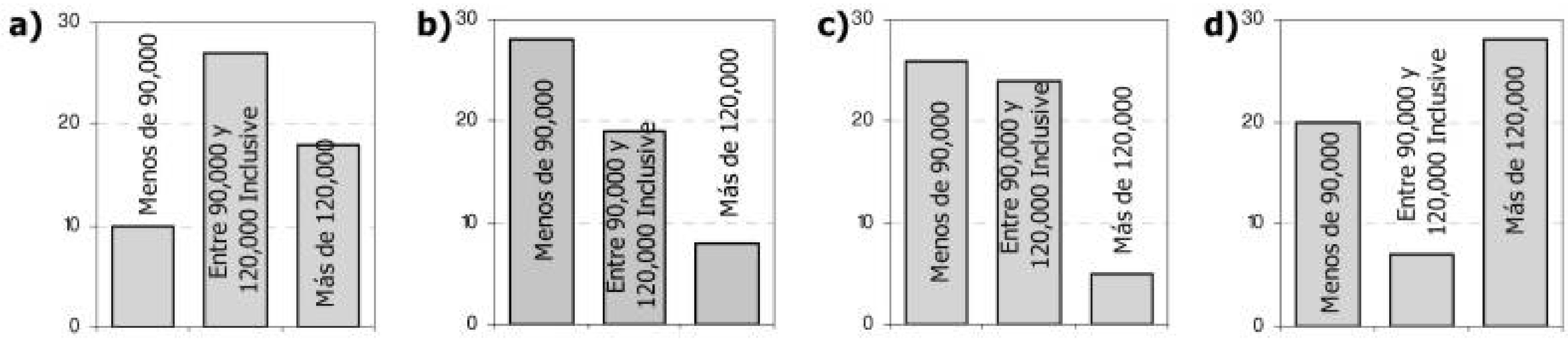
19) Decir cuál de los siguientes gráficos circulares se corresponde con el cuadro del ejercicio 13.



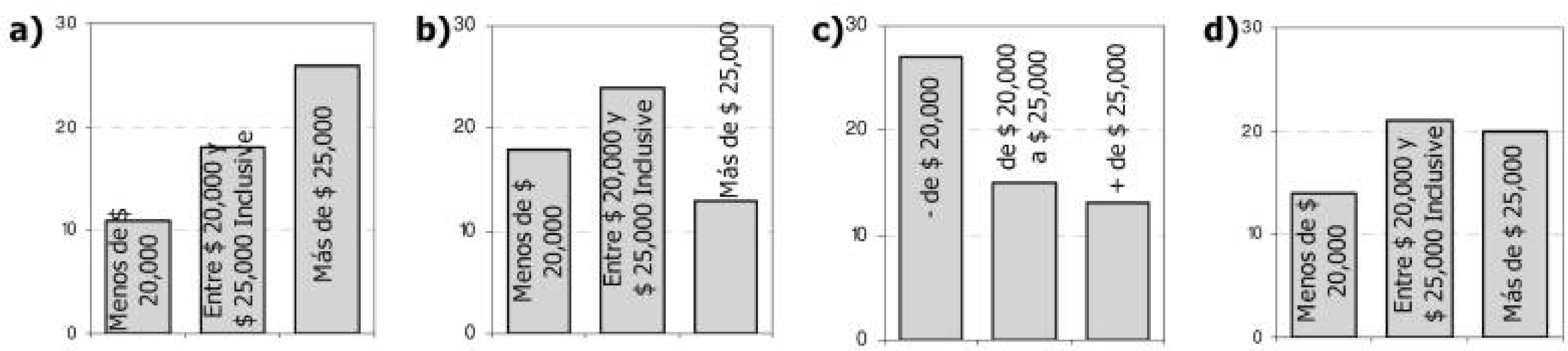
20) Decir cuál de los siguientes gráficos de barras corresponde al cuadro del ejercicio 14:



21) Decir cuál de los siguientes gráficos de barras corresponde al cuadro del ejercicio 15:



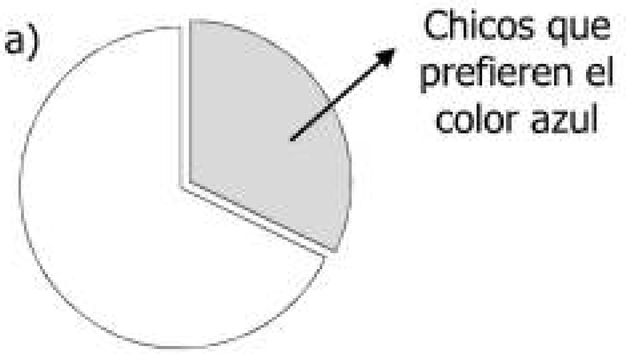
22) Decir cuál de los siguientes gráficos de barras corresponde al cuadro del ejercicio 16:

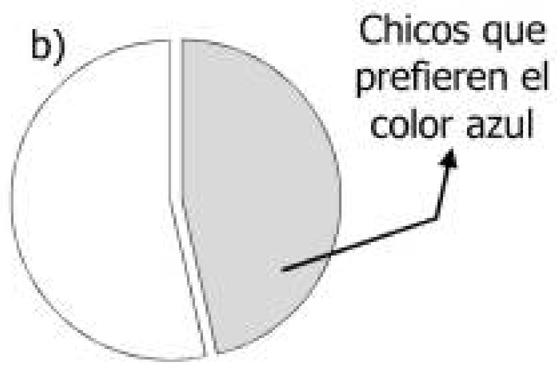


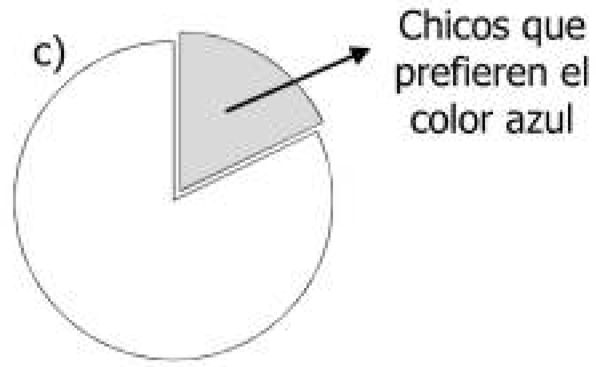
23) Es el turno de que comencemos a recolectar nuestros propios datos estadísticos: Realizar una encuesta en el curso preguntando a cada alumno, "el peso", "la altura" y la cantidad de hermanos de cada uno. Luego agruparlos como en el primer ejercicio de esta guía.

Problemas de par la interpretación de gráficos estadísticos:

24) Una encuesta revela que de cada curso promedio de 28 alumnos, para 9 de ellos su color preferido es el azul. Decir cuál de los siguientes gráficos de torta representan este dato:

a)


b)


c)


25) Para el ejercicio anterior ¿Qué porcentaje representa esta cantidad de chicos que elige el color azul como color preferido?

Si en una encuesta en la que se pregunta a los encuestados el día de semana de su cumpleaños de este año tenemos los siguientes resultados:

Lunes	18
Martes	15
Miércoles	21
Jueves	20
Viernes	12
Sábado	16
Domingo	20

26) ¿Qué porcentaje del total cumple los años en un fin de semana?

27) En un gráfico de torta, cuál va a ser el día de la semana que ocupe mayor porción del círculo?

Estadísticas con Celulares:

Según una encuesta mundial, se le preguntó a los usuarios si estaba conforme con la marca del celular que tenía y los siguientes datos representan las respuestas de los 10.000 encuestados en total. Por otro lado tenemos los datos de los porcentajes que corresponden a la marca que usa cada encuestado:

¿Está satisfecho con su Celular?
Apple iPhone - 72%
LG - 41%
Sanyo - 37%
Nokia - 36%
Samsung - 34%
Sony/Ericsson - 30%
Motorola - 27%
Otros – 16%

¿Qué marca usa Ud.?
Motorola - 25%
Sony/Ericsson - 19%
Nokia - 14%
LG - 11%
Samsung - 9%
Apple iPhone - 7%
Sanyo - 5%
Otros 10%

Preguntas:

28) ¿Cuántos usuarios tienen un cellular Nokia del total de los encuestados?

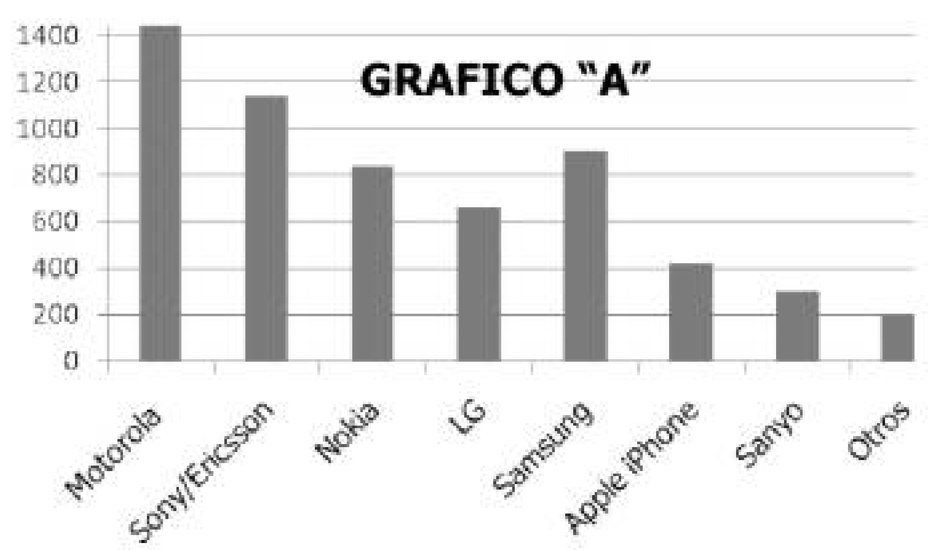
29) De los usuarios de la marca Nokia de la encuesta ¿Cuántos están disconformes con su marca?

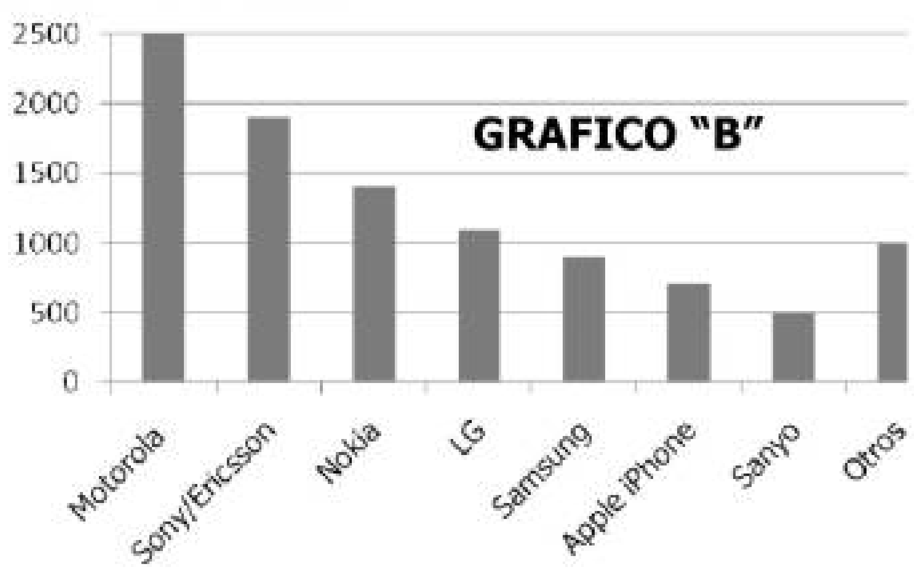
30) ¿Cuántos usuarios tienen un cellular Motorola del total de los encuestados?

31) De los usuarios de la marca Motorola de la encuesta ¿Cuántos están disconformes con su marca?

32) Si en el mundo hay en total 3.000 millones de celulares, y suponiendo que esta encuesta sea exacta ¿Cuántos celulares habría hoy en el mundo de marca "Nokia"?

33) De los siguientes gráficos de barras, ¿Cuál representa a la encuesta?





Seguimos con estadísticas de Celulares:

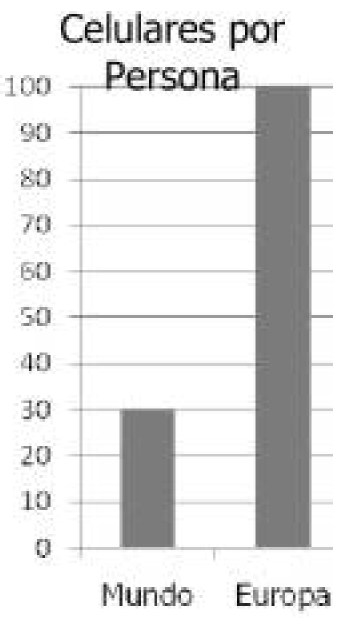
El siguiente texto fue extraído de un estudio a nivel global acerca del uso masivo de celulares en el mundo

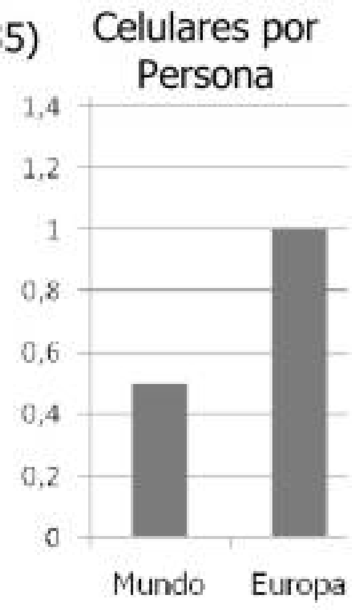
El número de teléfonos celulares alcanzó los 3.000 millones, el equivalente a la mitad de la población mundial, según reveló hoy una encuesta de The Mobile World, una empresa de análisis de telecomunicaciones del Reino Unido. Según datos del estudio, cada minuto hay más de 1.000 nuevas líneas en el mundo. En tanto, la penetración de la tecnología en Europa es del 100%.

"Tomó unos 20 años conectar a los primeros 1.000 millones de suscriptores, pero sólo 4 años más para llegar a los 3.000 millones en total," dijo John Tysoe, fundador de The Mobile World.

Los analistas prevén que un 65% de los celulares elaborados este año serán vendidos en Asia y América Latina, gracias a que los fabricantes están promocionando modelos más económicos. Según los pronósticos, esas regiones también serán las de mayor crecimiento de la tecnología de Tercera Generación.

En función de esta nota periodística
Responder cuáles de los siguientes gráficos representan datos de esta nota y cuáles no.

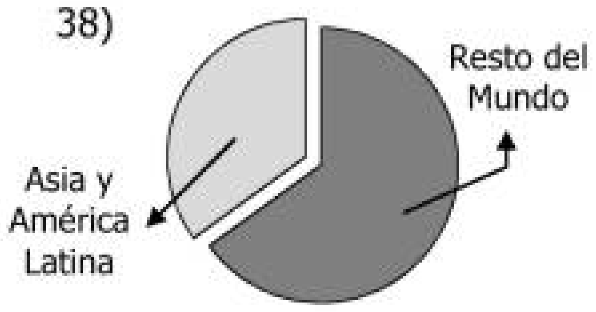
34)


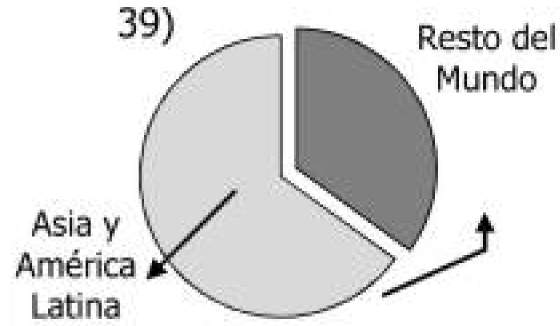
35)


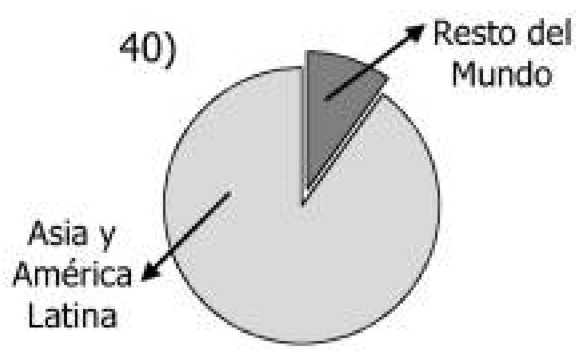
36)


37)


Gráficos de venta de celulares según mercados.

38)


39)


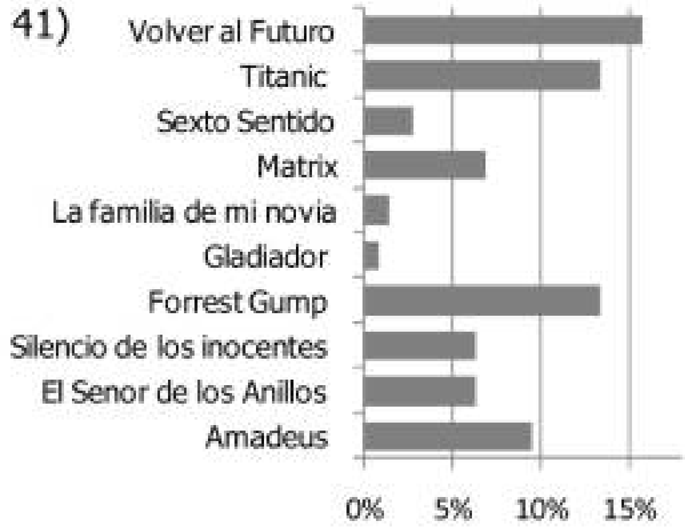
40)


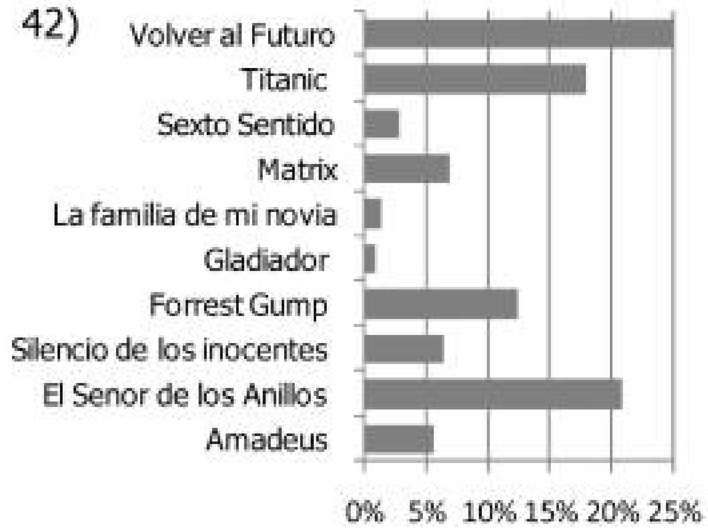
Ahora uno de Cine para cambiar un poco de tema:

Se hizo una encuesta a 12661 personas preguntando su película favorita
Responder cuál de los siguientes gráficos de barra representa los datos correctamente

El cuadro muestra los resultados de las 10 más elegidas

Amadeus	702
El Senor de los Anillos	2631
Silencio de los inocentes	805
Forrest Gump	1579
Gladiador	105
La familia de mi novia	180
Matrix	877
Sexto Sentido	351
Titanic	2281
Volver al Futuro	3150

41)


42)


Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Estadística Nivel II

Número de Tema: **35**

Área: **Matemática**

θ **¿Qué es la Estadística?** Vamos a definir a la estadística de la siguiente manera: "*La estadística es la rama de las matemáticas que mediante distintas herramientas, nos permiten analizar datos cuantitativos y cualitativos, que **describen** el comportamiento de variables y sucesos"*

Nota: No es casualidad que esté resaltada la palabra "describen" en la definición que vimos recién. El hecho es que a esta manera de definir la estadística se la conoce como **"estadística descriptiva"**

θ **Recolección de datos**

El primer punto a estudiar va a ser, como se recolectan los datos que vamos a utilizar en un estudio estadístico. Para ello primero vamos a ver qué tipos de datos podemos encontrar:

Tipos de datos:

- Cuantitativos: Son datos numéricos
  - Discretos: Son datos representados por números enteros, generalmente obtenidos por conteos o clasificaciones o categorías (Por ejemplo cantidad de hermanos ya que alguien no puede tener 3,25 hermanos solo puede tener 0, 1, 2, 3, etc.. Ojo que algunos datos continuos agrupados en rangos o categorías para recolectarlos para los fines estadísticos son discretos, por ejemplo si se encuesta preguntando el peso en Kg y se agrupan en "Hasta 50Kg" y "Mas de 50 Kg" el dato estadístico obtenido es discreto por mas que los pesos sean valores no enteros)
  - Continuos: Son los representados por números reales pudiendo ser enteros o no (por ejemplo, el peso, ya que podemos encontrar datos que representen pesos, que tengan muchas cantidades de decimales y por lo tanto, por ejemplo entre 5 y 6 kg tenemos infinitos números o datos intermedios)
- Cualitativos: Son datos no numéricos

Tablas de datos: La manera mas común de organizar los datos recolectados es usando tablas: Hay diferentes maneras de hacer esto, pero vamos a ver este tema en forma general.

Por ejemplo, le preguntamos las edades a los vecinos de la cuadra y recolectamos los siguientes datos:

34 - 36 - 4 - 9 - 13 - 45 - 41 - 15 - 16 - 29 - 27 - 3 - 65 - 61 - 70
11 - 29 - 12 - 15 - 33 - 32 - 6 - 4 - 5 - 31 - 29 - 12 - 10 - 64 - 15
34 - 29 - 6 - 4 - 27 - 30 - 10 - 9 - 60 - 15 - 16 - 17 - 16 - 31 - 72

Esta lista de datos las podemos organizar cómodamente en una tabla agrupando las edades por rangos que vayan de 0 a 10 años inclusive, de 11 a 20 años, de 21 a 30 años y así sucesivamente....

Veamos como quedaría armada la tabla según este criterio de separar en grupos cada 10 años: ⇨

Rango	Cantidad
Menor o igual a 10	11
Mayor a 10 y Menos o igual a 20	12
Mayor a 10 y Menos o igual a 30	7
Mayor a 10 y Menos o igual a 40	7
Mayor a 10 y Menos o igual a 50	2
Mayor a 10 y Menos o igual a 60	1
Mayor a 70	5

Bueno, esta es una manera cómoda de agrupar las edades y volcarlas en una tabla de datos, pero no es la única, en cada caso, vamos a tener que decidir como nos conviene agrupar los datos en una tabla, dependiendo de cómo sean los datos...

θ **Herramientas de Análisis Estadístico:**

Son muchas las herramientas de análisis estadístico que hay, por ahora sólo vamos a ver tres:

Y Gráficos Circulares: Se usan para mostrar cómo está dividida una determinada "población". O sea que se usan estos gráficos cuando queremos ver como está "partida" la población según un determinado criterio que puede ser por ejemplo, según la cantidad de hermanos que tenga cada encuestado.

Y Gráficos de barras: Su uso es para casos similares a los de los gráficos circulares.

Y Histogramas: Se usan cuando queremos estudiar cómo evoluciona una variable en función del tiempo.

θ **Gráficos Circulares** Vamos a estudiar cómo se confecciona un gráfico circular con el ejemplo que pusimos antes de las cantidades de hermanos que tiene cada encuestado:

Partimos del siguiente cuadro:
Sobre un total de 45 encuestados
Acerca de la cantidad de hermanos de cada encuestado.

Cantidad de Hermanos → | Cantidad Respuestas ←

0	11
1	12
2	9
3	9
4	3
5	1

Lo que vamos a hacer es partir un círculo de forma proporcional a las cantidades del cuadro, para ello, vamos a tener que dividir el ángulo total de apertura del círculo que es 360° en forma proporcional a cada dato, esto se hace mediante una regla de tres simple.. Veamos

Para saber qué proporción del círculo le corresponde al grupo que tiene 0 hermanos, tenemos que saber qué proporción es 11 (que es la cantidad de alumnos que no tienen hermanos) de 45 (que es el total de encuestados) para los 360°

La regla de tres sería la siguiente:

45 Alumnos ⟶ 360°

11 Alumnos ⟶ **X**

360° es el total porque representa al círculo entero, o sea a toda la población encuestada.

$$X = \frac{11 \text{ Alumnos} \ . \ 360°}{45 \text{ Alumnos}} \Rightarrow \boxed{X = 88°} \Rightarrow \text{0 Hermanos}$$

Y así para cada grupo….

Ahora veamos qué proporción le corresponde al grupo de alumnos que tiene 1 hermano:

45 Alumnos ⟶ 360°

12 Alumnos ⟶ **X**

$$\Rightarrow X = \frac{12 \text{ Alumnos} \ . \ 360°}{45 \text{ Alumnos}} \Rightarrow \boxed{X = 96°} \Rightarrow \text{1 Hermano}$$

Y así con los demás grupos, ahora veamos al de 2 hermanos

45 Alumnos ⟶ 360°

9 Alumnos ⟶ **X**

$$\Rightarrow X = \frac{9 \text{ Alumnos} \ . \ 360°}{45 \text{ Alumnos}} \Rightarrow \boxed{X = 72°} \Rightarrow \text{2 Hermanos}$$

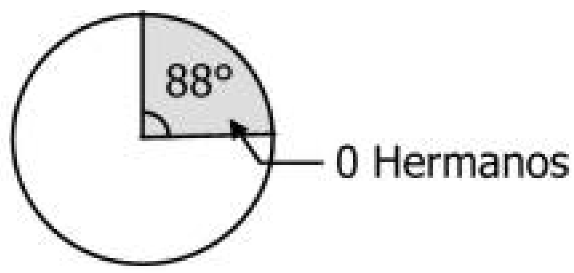
Bueno, de esta forma armamos una tabla en la que a cada grupo le ponemos la proporción de grados que le corresponde. En nuestro ejemplo la tabla quedaría así:

Con esta tabla vamos a empezar a armar el gráfico circular..

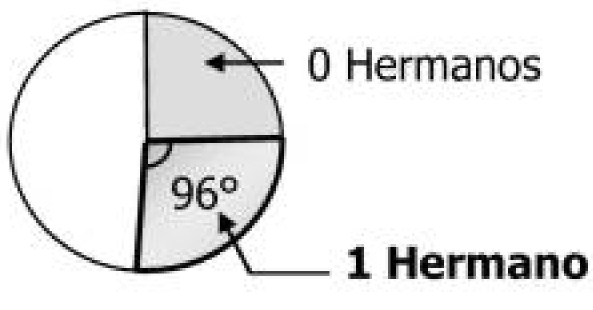
0	11	**88°**
1	12	**96°**
2	9	**72°**
3	9	**72°**
4	3	**24°**
5	1	**8°**
Total	45	**360°**

Esta es la proporción en grados, del círculo que le corresponde a cada grupo

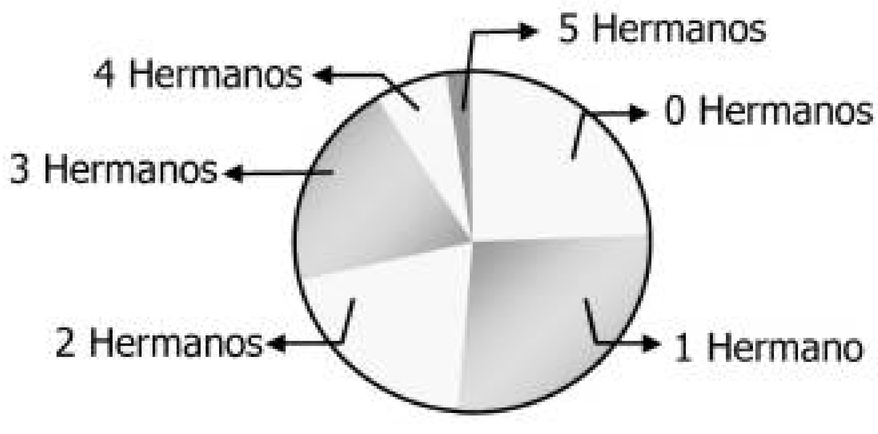
Dibujamos el círculo y pintamos en principio la zona que le corresponde al grupo que no tiene hermanos, que como dice en la tabla, su proporción del círculo es de 88°. Medimos los 88° con el transportador y pintamos esta zona:

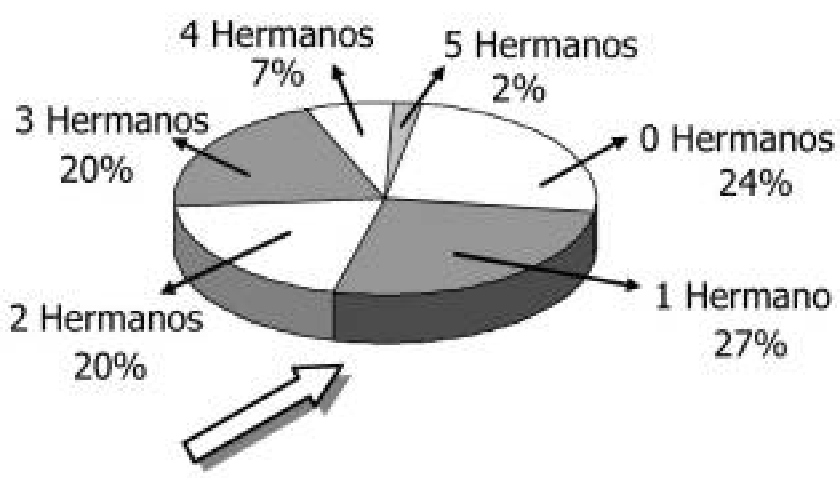


Hacemos luego lo mismo con el grupo que tiene 1 hermano, para este grupo, la proporción del círculo es de 96°, medimos entonces los 96 grados (Adyacente al sector anterior) y pintamos esa parte que le corresponde a los que tienen 1 hermano.



Y así seguimos marcando cada zona hasta que terminamos el gráfico.
El gráfico final nos quedaría de la siguiente manera:





También se suele resaltar el gráfico con un efecto 3D, y se ponen los porcentajes que corresponden a cada grupo (Estos porcentajes se calculan por regla de tres simple del mismo modo que se calculan las proporciones angulares del círculo.

θ **Histogramas:** Ya adelantamos al principio que estos gráficos se usan para representar la evolución de una variable a través del tiempo.

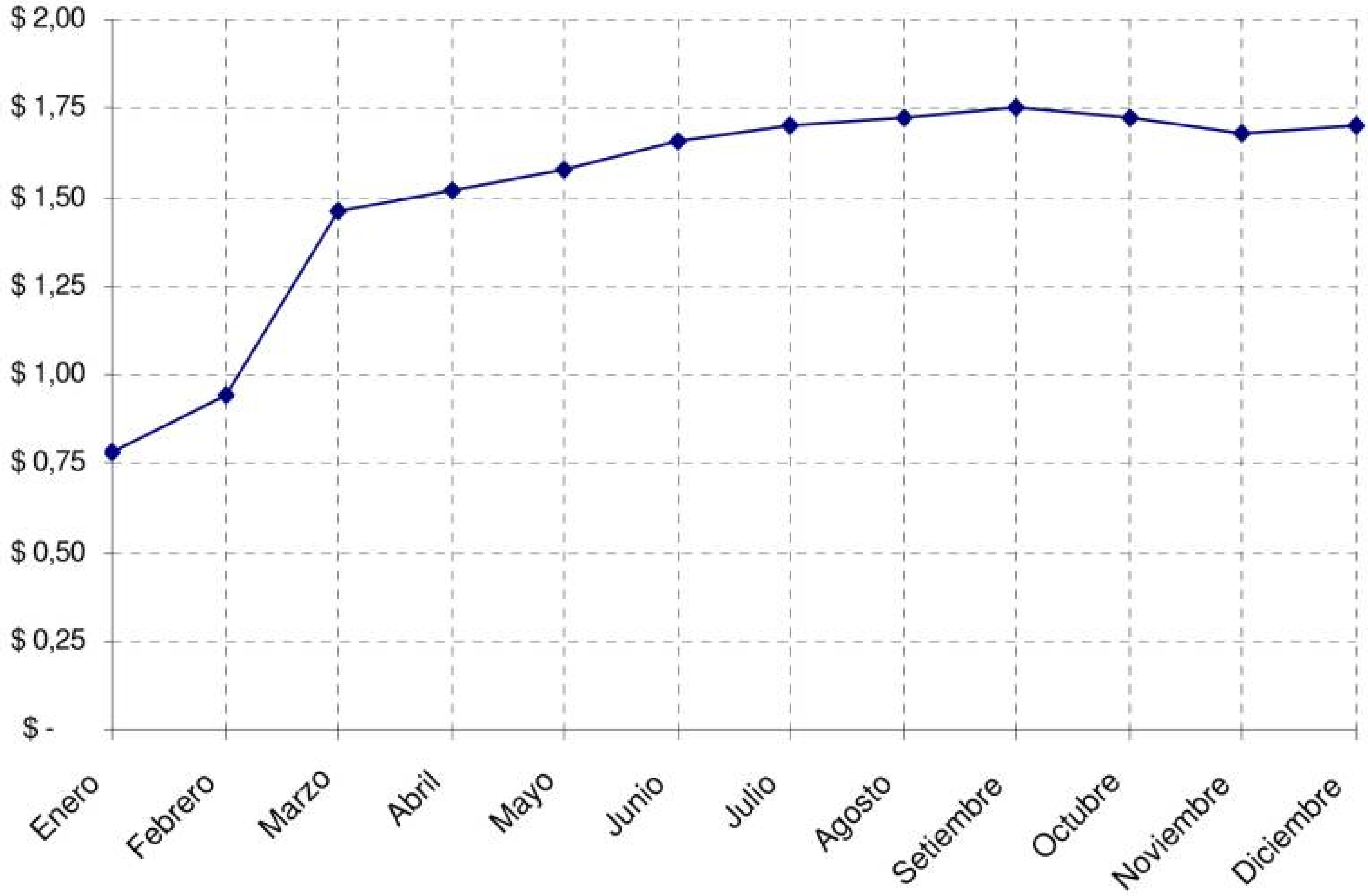
Por ejemplo, vamos a estudiar ahora un ejemplo en el que partimos de la siguiente recolección de datos:

➤ Fuimos anotando mes a mes el precio promedio del kilo de arroz de una determinada marca durante el año 2002 y obtuvimos los siguientes resultados:

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Setiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
$ 0,78	$ 0,94	$ 1,46	$ 1,52	$ 1,58	$ 1,66	$ 1,70	$ 1,72	$ 1,75	$ 1,72	$ 1,68	$ 1,70

Acá también tenemos que fijar un **factor de escala**
El factor de escala que se fijó para hacer este gráfico es de: **$0,25 = 1 cm**

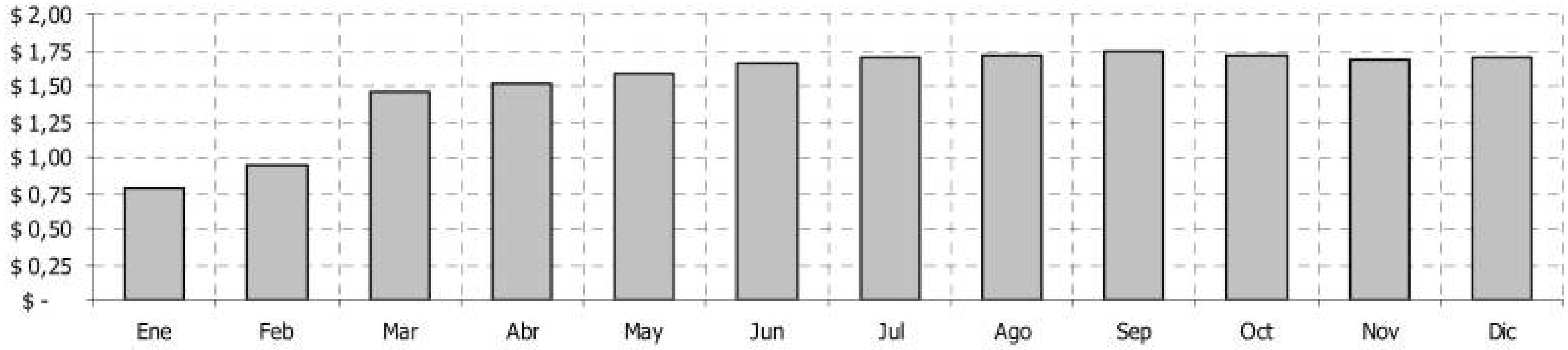
Entonces, con este factor de escala, el gráfico queda de la siguiente manera:



Nota: EL factor de escala lo elige uno según los valores a representar. Por ejemplo, si el gráfico represntaba la variación del precio de un televisor, hubiera tenido que graficar valores superiores a $200 o $300, entonces, en ese caso, el factor de escala debiera ser mucho mayor, de por lo menos $100 = 1cm

---

➤ Otra manera de graficar los **histogramas** es usando barras, como si fuera un gráfico de barras en el que se sigue la evolución de una variable, en nuestro ejemplo, el precio del arroz, a través del paso del tiempo.



1) Martín dibujó el siguiente gráfico de barras, que muestra cuánto pesan los integrantes de su familia:

Papá	Mamá	Hermano 1	Hermano 2	Hermana 1	Hermana 2
81,5 Kg.	68,25 Kg.	60,25 Kg.	43,75 Kg.	18,75 Kg.	6,25 Kg.

Martín dice que usó **42 Kg. por centímetro** (de escala) para confeccionar el gráfico... ¿Es verdadera o falsa la afirmación de Martín?

2) Armar el Gráfico de Barras para la siguiente muestra:

Cantidad de votos para el siguiente ranking de bandas:

Bandana.. 2634 votos.-
Britney Spears.............................. 10025 votos.-
Limp Biskit...................................... 14276 votos.-
Five... 8754 votos.-
Back Street Boys.......................... 4512 votos.-
Metallica... 20421 votos.-

3)Mariano hizo una encuesta en su división preguntando la cantidad de hermanos que tenía cada uno de sus compañeros, y obtuvo las siguientes respuestas: 0, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 0, 0, 4, 5, 1, 2, 1, 3, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 6

Armar un Gráfico Circular con la cantidad de hermanos de sus compañeros.

4)Efectuar gráfico circular mostrando cuantos compañeros de tu división son hinchas de cada club de fútbol

5)Se tomó nota de las edades de los chicos que asisten al club de fútbol del barrio y se obtuvieron los siguientes resultados:

10 - 9 - 9 - 8 - 9 - 10 - 11 - 9 - 11 - 11 - 9 - 11 - 9 - 11 - 10

10 - 11 - 12 - 9 - 12 - 10 - 13 - 10 - 8 - 10 - 10 - 10 - 12 - 11 - 12

9 - 11 - 10 - 8 - 11 - 9 - 8 - 10 - 9 - 10 - 11 - 13 - 9 - 10 - 12

a) Armar una tabla de datos en las que figuren la cantidad de chicos de cada edad.
b) Armar un gráfico circular con los datos de la tabla del punto anterior
c) Armar un gráfico de barras.

6) Se encuestaron a 200 personas preguntándoles la cantidad de veces por semana que se levantan antes de las 7 AM y con los resultados se armó el siguiente cuadro:

Ninguna Vez	30
1 Vez poor semana	40
2 Veces por semana	15
3 Veces por semana	22
4 Veces por semana	25
5 Veces por semana	50
6 Veces por semana	10
7 Veces por semana	8

a)Armar un gráfico circular en el que se representen los grupos de la población

b)Armar un gráfico de barras que representen todos los grupos de la población

7) en el siguiente cuadro te mostramos la cantidad aproximada de televidentes de 4 mundiales de fútbol. Armar un gráfico de barras en el que se representen estas cantidades (ojo con la escala)

México 86'	13.500.000.000
Italia 90'	26.700.000.000
USA 94'	32.100.000.000
Francia 98'	33.400.000.000

8) A continuación te mostramos los datos que se recolectaron en una encuesta que se hizo preguntando a los 60 encuestados la cantidad promedio de horas diarias que duermen:

10 - 9 - 9 - 8 - 9 - 10 - 8 - 7 - 11 - 11 - 6 - 7 - 9 - 7 - 10

7 - 11 - 7 - 9 - 6 - 8 - 10 - 10 - 8 - 8 - 10 - 12 - 8 - 11 - 11

9 - 7 - 12 - 8 - 7 - 6 - 8 - 8 - 9 - 6 - 8 - 6 - 9 - 8 - 6

9 - 6 - 10 - 8 - 8 - 9 - 8 - 10 - 7 - 10 - 7 - 6 - 9 - 10 - 7

Armar una tabla organizando los datos y un gráfico circular que represente los valores de esa tabla.

9) El siguiente cuadro muestra la población según edades y sexo de Argentina del censo del año 1991

Grupo	Población		
de edad	Total	Varones	Mujeres
0-4	3.350.073	1.695.891	1.654.182
5-9	3.277.937	1.657.514	1.620.423
10-14	3.342.577	1.686.997	1.655.580
15-19	2.850.105	1.417.619	1.432.486
20-24	2.454.123	1.213.835	1.140.288
25-29	2.304.242	1.137.361	1.166.881
30-34	2.214.181	1.094.131	1.120.050
35-39	2.119.168	1.043.202	1.075.966
40-44	1.963.648	969.612	994.036
45-49	1.690.055	832.386	857.669
50-54	1.489.724	722.631	767.093
55-59	1.361.547	652.436	709.111
60-64	1.305.161	601.706	703.455
65-69	1.064.115	481.562	582.553
70-74	760.853	324.719	436.134
75-79	556.333	222.793	333.540
80-84	319.769	119.063	200.706
85-89	138.422	48.207	90.215
90-94	42.787	13.069	29.718
95 y más	10.708	3.246	7.462
Total	**32.615.528**	**15.937.980**	**16.577.548**

Fuente: Indec - Censo Nacional de Población y Vivienda año 1991 – Serie B

a) Armar un gráfico de barras para la población de mujeres según el grupo de edad al que pertenecen

b) Armar un gráfico como el anterior pero para la población de hombres

c) Armar un gráfico de barras con la población total según los grupos de edades.

d) Armar un gráfico circular en el que se representen la población total de hombres y de mujeres

10) En el año 2002 se hizo un seguimiento del precio de una heladera de una marca conocida en un determinado supermercado, mes a mes y se obtuvieron los siguientes resultados:

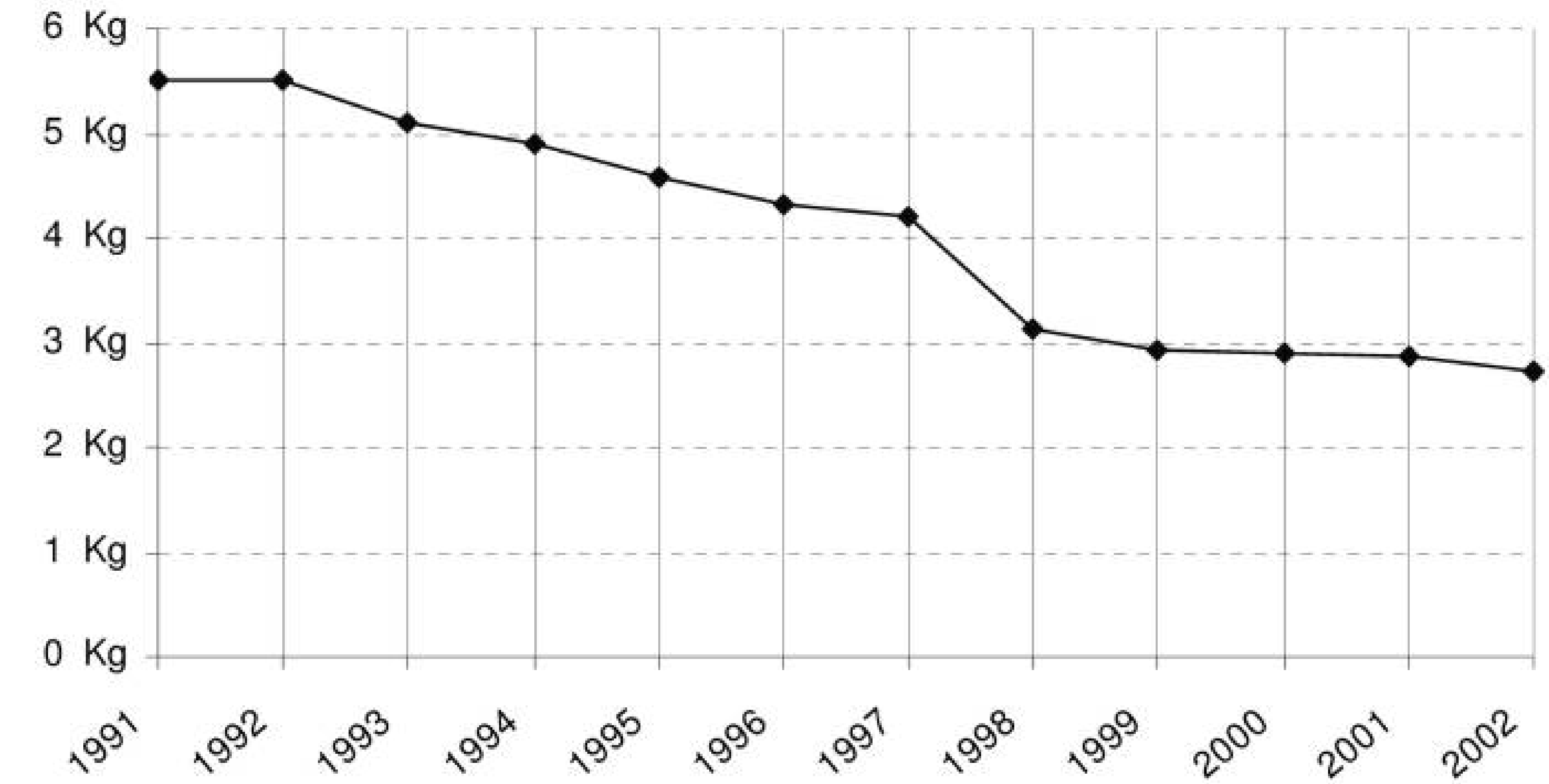
Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
$ 450	$ 460	$ 610	$ 615	$ 700	$ 720	$ 730	$ 750	$ 720	$ 760	$ 770	$ 750

a) Armar un histograma con la evolución del precio de esta heladera a lo largo del año.
b) Observando el gráfico ¿qué se puede decir a simple vista con respecto al comportamiento de ese precio?

11) La siguiente tabla, muestra las notas promedio de 7mo año en matemáticas entre los años 1991 y 2002 en un colegio. Construir con estos datos un histograma.

1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
7,12	6,68	7,16	7,81	5,45	6,61	5,82	7,08	6,52	5,64	6,12	5,88

12) EL siguiente histograma muestra la evolución del peso promedio de las impresoras a chorro de tinta de una determinada marca, entre los años 1991 y 2002



a) ¿En qué año el peso promedio de las impresoras fue menor?

b) ¿En qué año el peso promedio de las impresoras tuvo su mayor variación?

c) ¿Qué se puede decir a rasgos generales de cómo evolucionó esta variable? ¿Cuál fue la tendencia?

d) Se puede predecir el peso promedio de las impresoras de esta marca para el año 2003 con estos datos? ¿Es exacta y segura esa predicción? ¿Por qué?

A Partir del siguiente recorte de diario correspondiente a 2004 en todo el territorio Nacional.

Inversiones del Sector Agropecuario.

	Superficie en millones de ha	Inversión por ha en US$	Inversión en millones de US$
TRIGO	6.240.000	155,90	972.816.000
MAIZ	3.300.000	213,70	705.210.000
SORGO	560.000	118,10	66.136.000
SOJA	14.150.000	152,30	2.155.045.000
GIRASOL	1.900.000	139,10	264.290.000
		TOTAL:	4.163.497.000

13) Realizar un gráfico circular que muestre la participación relativa de cada cultivo según la superficie usada por cada uno

14) Realizar un gráfico circular en el que se observe la participación relativa de cada cultivo según la inversión total en cada uno.

15) ¿Son similares ambos gráficos?
¿A qué pensás que se puede atribuir la gran diferencia entre ambos?

Para los que le gustan las camionetas:
La siguiente tabla muestra la evolución en las ventas de los dos tipos de camionetas más vendidas durante 2004.

	Ford Ranger	Chevrolet S10	Total Ranger	Total S10
Enero	1130	**1589**	1130	1589
Febrero	**788**	703	1918	2292
Marzo	863	**873**	2781	3165
Abril	**1045**	1007	3826	4172
Mayo	917	**967**	4743	5139
Junio	**1126**	792	5869	5931
Julio	**1109**	959	6978	6890
Agosto	**1119**	1048	8097	7938
Septiembre	**1417**	783	9514	8721
Octubre	**1190**	763	10704	9484
Noviembre	**767**	743	11471	10227


Confeccionar según estos datos:

16) Un gráfico circular que muestre comparativamente la participación de cada marca en el total del año (suponiendo que son las dos únicas marcas).

17) Un histograma que represente la evolución de las ventas de cada mes en particular para la marca FORD

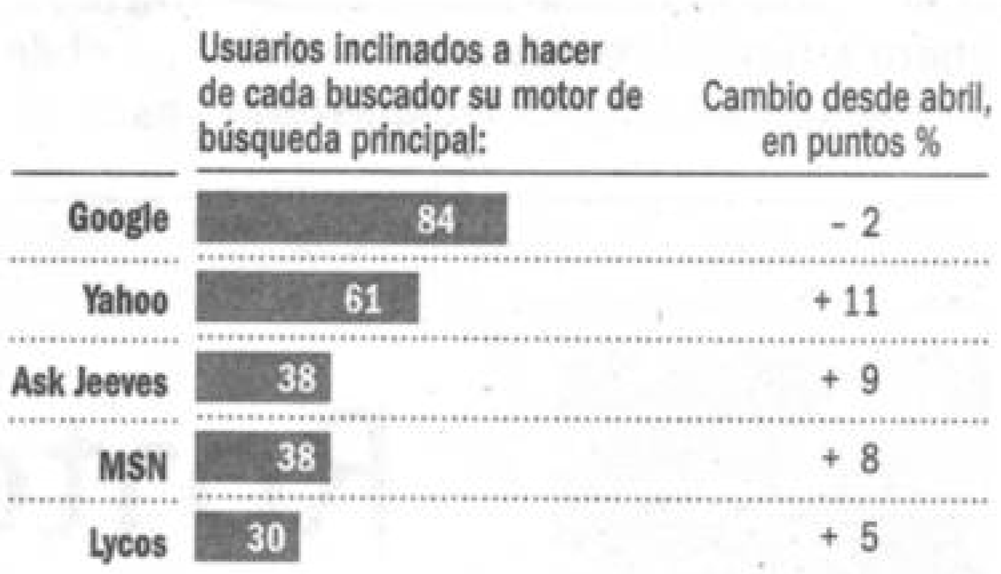
18) Un histograma que represente la evolución de las ventas de cada mes para la marca CHEVROLET

Estadísticas con INTERNET:

Yahoo, MSN de Microsoft y otros motores de búsqueda avanzaron en el sondeo de satisfacción de los usuarios, pero Google mantiene una fuerte ventaja.

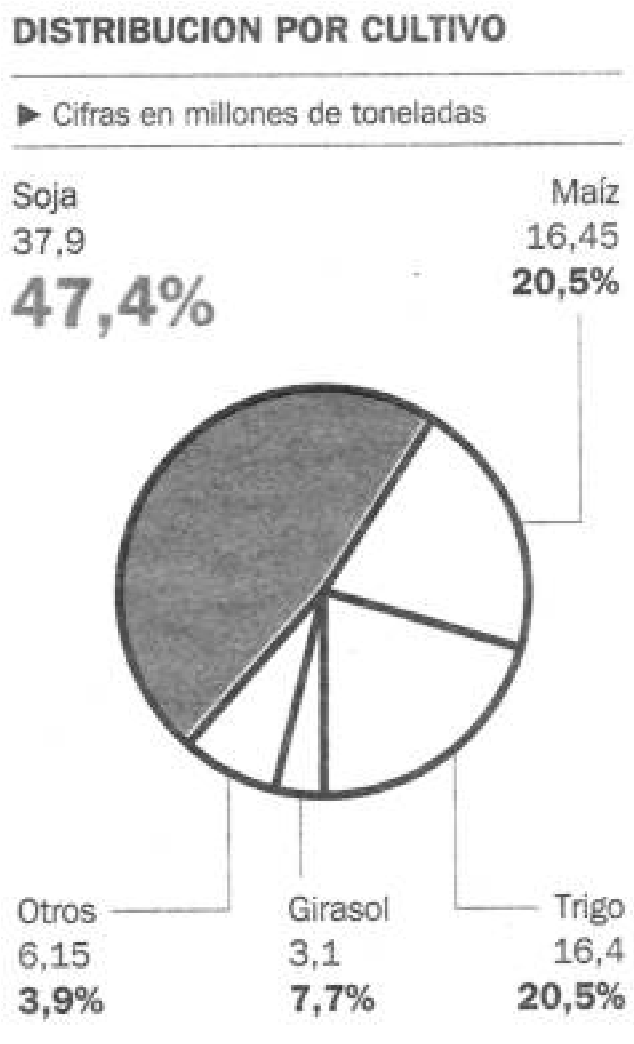
19) Según las cifras volcadas en este informe:

Confeccionar un gráfico circular en el que se muestre la participación relativa de cada buscador.



Cantidades: Miles de encuestados.

Última estadística: Con el Sector Agropecuario.



El siguiente recorte, muestra un gráfico circular con las cantidades cosechadas en millones de toneladas de cada cultivo en el año 2004 en todo el país.

20) A partir de los datos volcados en este gráfico circular, construir un gráfico de barras que represente estas cantidades.

Ahora comparemos este gráfico circular con el que había que realizar en el ejercicio 13.

Como podrán ver, los porcentajes referidos a toneladas cosechadas, difieren bastante de los porcentajes referidos a hectáreas utilizadas.

21) ¿Significa esto que alguna de las dos estadísticas publicadas en los diarios es falsa o está mal hecha?

22) ¿A que factores podemos atribuir estas diferencias entonces?

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Estadística
Nivel III

Número de Tema: **36**

Área: **Matemática**

☆ **Media, Mediana y Moda** ¿Qué son la Media, la Mediana y la Moda?

- Media: Es el cociente entre la suma de los números y la cantidad de números.
- Moda: Es el valor mas frecuente de la muestra.
- Mediana: Es el valor que ocupa el lugar central de los datos si se ordenan de menor a mayor. Si la cantidad de datos es par, al ocuparse el centro por dos valores la mediana es el promedio entre ambos.

Veamos un ejemplo. La siguiente tabla muestra la cantidad de personas que fueron a ver a algunos músicos.

Músico o Banda	Estadio o Lugar	Asistencia (personas)
Eric Clapton	River	30.000
Los Redondos	River	60.000
Soda Stereo	River	70.000
Iron Maiden	Vélez	30.000
Led Zeppelin	Knebworth	150.000
Moris, Los Gatos, Vox Dei, Miguel Abuelo, etc.	Velódromo Municipal	30.000
Almendra	Estadio Obras	30.000*
Serú Girán	La Rural	60.000
Peter Gabriel, Bruce Springsteen, Sting, Charly García, León Gieco, etc.- (Amnesty Internacional)	River	75.000
Fito Páez	Vélez Sarsfield	75.000

* Cantidad de gente que fue en 3 funciones.

Población y Muestra:

- Población se define como al total de datos que son parte de un suceso. En nuestro ejemplo la población serían todos los datos existentes de cantidad de espectadores de eventos musicales.
- Muestra se define como el conjunto pequeño de datos de la población que yo tomo para hacer un estudio estadístico, en nuestro ejemplo son los datos de la tabla.

Tomo datos *de muestra* (de entre todos los datos existentes) para **analizar y comparar**...

Moda: La Moda es el número que más se repite en la muestra.

En este ejemplo de los recitales, la muestra es:

30.000, 60.000, 70.000, **30.000**, 150.000, **30.000**, **30.000**, 60.000, 75.000, 75.000

Y Ya remarcamos el número que más se repite en la muestra.. esta es la Moda, que en este caso es 30.000.

Media: Cociente entre la suma de los valores y la cantidad de valores sumados.

En este caso: Hago el promedio...

$$\text{Media} = \frac{30.000+60.000+70.000+30.000+150.000+30.000+30.000+60.000+75.000+75.000}{10} = \frac{610.000}{10} \Rightarrow \boxed{\text{Media} = 61.000}$$

Mediana: La Mediana es el "valor central" de la distribución ordenada de menor a mayor.

Para calcular la **Mediana**, primero tenemos que ordenar los valores de la Muestra de menor a mayor:

30.000, 60.000, 70.000, 30.000, 150.000, 30.000, 30.000, 60.000, 75.000, 75.000

Ordenamos los valores de la Muestra de menor a mayor...

30.000, 30.000, 30.000, 30.000, 60.000, 60.000, 70.000, 75.000, 75.000, 150.000.-

Ahora sólo resta identificar el valor "**del medio**":

$\boxed{\text{Mediana} = 60.000}$

El promedio de los dos valores centrales es 60.000.

Nota: Si la muestra hubiese tenido un número impar de valores, la Mediana sería directamente **el valor del medio**.

☆ **Repaso: Construcción de Gráficos Circulares:** Repasemos como se confecciona un gráfico circular con el siguiente ejemplo: Se hace una encuesta en dos cursos preguntando la cantidad de hermanos que tiene cada alumno y se obtienen las siguientes respuestas:

Sobre un total de 45 encuestados
Acerca de la cantidad de hermanos de cada encuestado.

Cantidad de Hermanos → | ← Cantidad Respuestas

0	11
1	12
2	9
3	9
4	3
5	1

Lo que vamos a hacer es partir un círculo de forma proporcional a las cantidades del cuadro, para ello, vamos a tener que dividir el ángulo total de apertura del círculo que es 360° en forma proporcional a cada dato, esto se hace mediante una regla de tres simple.. Veamos

Para saber que proporción del círculo le corresponde a un grupo, tenemos que saber que proporción es el valor de ese grupo sobre el total de 45 (que es el total de encuestados) y esto lo hacemos mediante regla de 3 simple.
Si 45 (que es el total) es 360º (Que es todo el círculo) la cantidad de un grupo serán "x" grados.

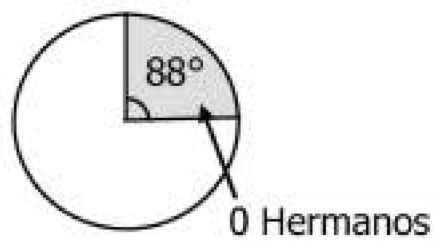
Bueno, de esta forma armamos una tabla en la que a cada grupo le ponemos la proporción de grados que le corresponde. En nuestro ejemplo la tabla quedaría así:

Con esta tabla vamos a empezar a armar el gráfico circular.

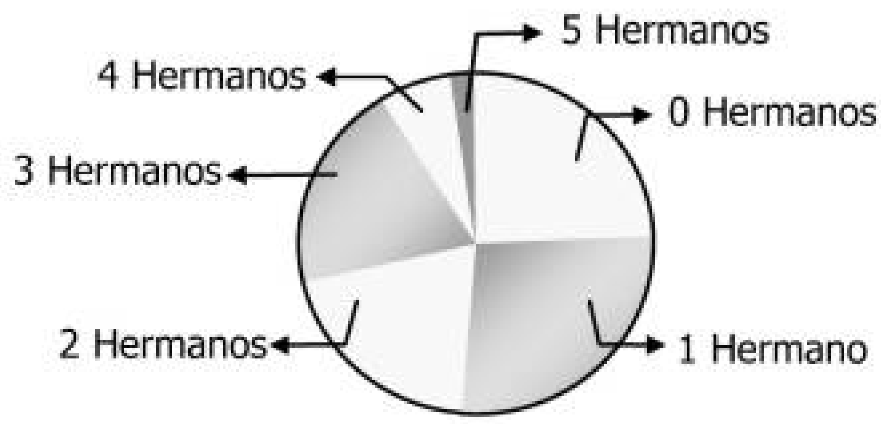
0	11	**88°**
1	12	**96°**
2	9	**72°**
3	9	**72°**
4	3	**24°**
5	1	**8°**
Total	45	**360°**

Esta es la proporción en grados, del círculo que le corresponde a cada grupo

Ejemplo: Al grupo de "0 Hermanos" le corresponden 88º



Y así marcamos cada zona con el ángulo que le corresponda hasta que terminamos el gráfico.
El gráfico final nos quedaría de la siguiente manera:



<u>Cuadros de Frecuencias</u>:

- <u>Frecuencia Absoluta</u>: Es la cantidad de veces que se repite un valor en una muestra de datos estadísticos.
- <u>Frecuencia Relativa</u>: Es el cociente entre la frecuencia absoluta y el total de datos (Expresado en %).

Volvemos al ejemplo de la cantidad de hermanos que vimos antes.
Si copiamos el cuadro, notamos que las frecuencias absolutas son justamente los valores que tiene cada dato, es decir la frecuencia absoluta por ejemplo del grupo de "0 hermanos" es "11" porque ese dato se repite 11 veces. Entonces el cuadro de frecuencias absolutas es el que venimos viendo:

Grupo	Frecuencia Absoluta
Ningún Hermano	11
1 Hermanos	12
2 Hermanos	9
3 Hermanos	9
4 Hermanos	3
5 Hermanos	1

Como el total son 45 encuestados. Las frecuencias relativas son los porcentajes de las frecuencias absolutas respecto de ese total. Lo calculamos mediante regla de tres simple:

45 Alumnos ⟶ 100 %
11 Alumnos ⟶ **X**

$$X = \frac{11 \text{ Alumnos } . \ 100\,\%}{45 \text{ Alumnos}} \Rightarrow X = 24{,}4\ \%$$

De esta manera calculamos la frecuencia relativa del grupo de "0 Hermanos".

De la misma manera calculamos el resto para completar el cuadro de Frecuencias Relativas.

Grupo	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Ningún Hermano	11	24,44%
1 Hermano	12	26,67%
2 Hermanos	9	20%
3 Hermanos	9	20%
4 Hermanos	3	6,67%
5 Hermanos	1	2,22%

1) Si los valores de una muestra son 50, 50, 50, 50 y 50 ¿Es correcto decir que la media no existe?

2) Si los valores de una muestra son 6, 7, 7 y 8: ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es válida?

a) Hay 2 medianas distintas. b) Hay 2 medianas iguales. c) Hay una sola mediana.

3) Diego dice que en una muestra dedujo que la media, la mediana y la moda son iguales. ¿Puede ser que sea verdadera la afirmación de Diego?

4) Dada la siguiente muestra con las notas de Matemática de la prueba que tomaron en 8º"A":
Notas: 7, 5, 6, 6, 9, 10, 4, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 4, 5, 5, 10, 3, 4, 7

Decidir si:
a) Esta muestra tiene 2 medianas.
b) La mediana es 4 ó 5.-
c) La moda es 6.-
d) El promedio es 10, pues es el valor más alto.

5) ¿Está bien decir que para la Muestra 5, 5, 6 y 7 (que representan las veces que llegaron tarde las cuatro maestras de 7º), la Media es 6? ¿La Media es igual a la Mediana?

6) Mariano hizo una encuesta en su división preguntando la cantidad de hermanos que tenía cada uno de sus compañeros, y obtuvo las respuestas: 0, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 0, 0, 4, 5, 1, 2, 1, 3, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 6
a) Calcular la Media de la Muestra.
b) Mariano no tiene hermanos, si la Muestra incluye a Mariano ¿Cambia la Media?

7) Efectuar un cuadro de Frecuencias mostrando cuantos compañeros de tu división son hinchas de cada club de fútbol. Calcular la Moda, la Mediana y la Media.

8) Dada la siguiente distribución de edades de una muestra, calcular, media, mediana y moda.

10 - 12 - 8 - 8 - 13 - 15 - 11 - 12 - 10 - 8 - 9 - 12 - 8 - 13 - 14

9 - 8 - 11 - 12 - 10 - 9 - 8 - 13 - 9 - 9 - 11 - 12 - 12 - 14 - 15

12 - 11 - 10 - 12 - 15 - 13 - 9 - 14 - 12 - 15 - 11 - 10 - 9 - 11 - 10

9) Dados los siguientes datos que corresponden a una encuesta hecha en un curso, en la que se preguntó acerca de la cantidad de programas de TV que se miran habitualmente la casa de cada alumno, armar un cuadro de frecuencias organizando los datos y calcular: Media, moda y mediana de la muestra.

0 - 4 - 3 - 2 - 3 - 4 - 7 - 2 - 6 - 1 - 3 - 2 - 1 - 4 - 3

6 - 0 - 3 - 5 - 1 - 4 - 4 - 5 - 5 - 4 - 4 - 2 - 0 - 1 - 4

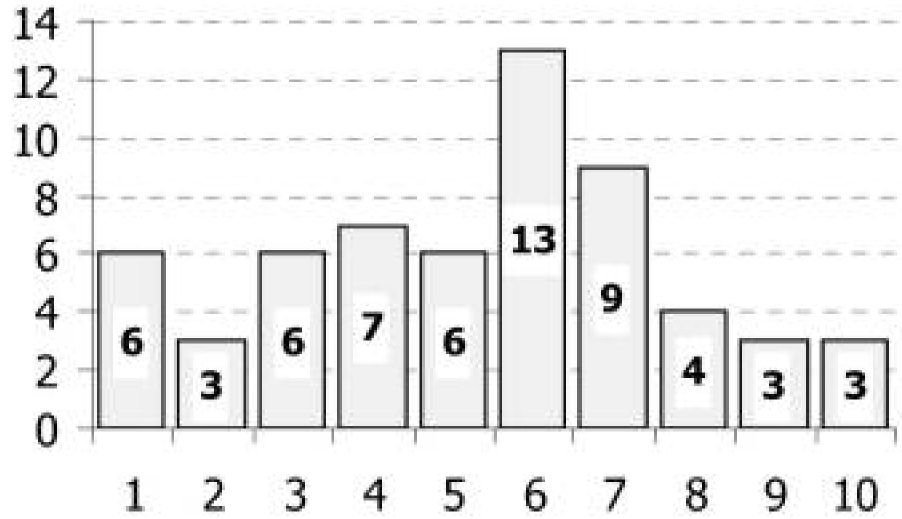
5 - 3 - 5 - 2 - 1 - 4 - 3 - 2 - 3 - 0 - 4 - 6 - 2 - 3 - 6

En un curso se registraron las notas de todas las pruebas de matemáticas del año, con ellas se armó el siguiente cuadro de frecuencias y gráfico de barras:

Notas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	6	3	6	7	6	13	9	4	3	3

10) ¿Se puede decir cuál es la media sólo mirando el gráfico sin hacer ningún cálculo?
11) ¿Se puede decir cuál es la moda sólo mirando el gráfico sin hacer ningún cálculo?
12) Calcular la media.
13) Calcular la moda.
14) Calcular la mediana.
15) Realizar un cuadro de frecuencias relativas.

➤ Gráfico de barras



by Dal-0r para TARINGA!

En una colonia de vacaciones se les preguntó a cada chico su número preferido del 1 al 41 (con el fin de hacer una estadística para confeccionar una boleta de loto) y se recolectaron los siguientes datos:

3 -	27 -	5 -	23 -	32 -	38 -	33 -	7 -	21 -	13 -	35 -	11 -	36 -	5 -	29 -	2 -	35
36 -	36 -	11 -	26 -	17 -	32 -	22 -	14 -	2 -	11 -	25 -	27 -	36 -	7 -	3 -	29 -	14
34 -	20 -	12 -	6 -	2 -	15 -	5 -	8 -	2 -	23 -	28 -	34 -	16 -	35 -	33 -	26 -	20
12 -	34 -	21 -	5 -	15 -	16 -	22 -	28 -	33 -	10 -	15 -	6 -	20 -	38 -	26 -	3 -	11
18 -	5 -	13 -	1 -	11 -	2 -	1 -	31 -	29 -	15 -	33 -	5 -	37 -	9 -	5 -	17 -	20
30 -	6 -	19 -	28 -	16 -	20 -	39 -	9 -	26 -	39 -	8 -	22 -	11 -	32 -	26 -	28 -	9
25 -	7 -	35 -	39 -	35 -	38 -	20 -	14 -	3 -	10 -	34 -	3 -	12 -	17 -	4 -	31 -	13
39 -	4 -	18 -	33 -	11 -	39 -	6 -	38 -	7 -	35 -	26 -	15 -	13 -	18 -	21 -	17 -	2

16) Calcular media de la distribución.

17) Calcular la moda de la distribución

18) Calcular la mediana de la distribución.

19) Confeccionar un cuadro de frecuencias absolutas y relativa.

20) Si quiero hacer una boleta de LOTO (6 números) con los números más representativos de la distribución. ¿Está bien poner en primer lugar la moda?

21) Si quiero hacer una boleta de LOTO (6 números) con los números más representativos de la distribución. ¿Está bien poner en primer lugar la media o la mediana?

A continuación tenemos un recorte de diario con las temperaturas máximas y mínimas registradas un día del mes de enero de 2005 en las principales ciudades del país.

Temperaturas

Ayer en el país

Día	Máx.	Mín.	Día	Máx.	Mín
Azul	28°	19°	Neuquén	29°	13°
B. Blanca	25°	17°	Olavarría	28°	20°
Bariloche	23°	7°	Paraná	26°	22°
Catamarca	32°	29°	Posadas	35°	27°
C. Rivadavia	27°	12°	Resistencia	18°	25°
Concordia	29°	21°	R. Gallegos	20°	7°
Córdoba	26°	20°	Rosario	39°	23°
Corrientes	38°	27°	Salta	35°	18°
El Calafate	20°	8°	San Juan	28°	17°
Esquel	19°	6°	San Luis	27°	21°
Formosa	38°	27°	Santa Fe	27°	21°
Iguazú	33°	22°	Santa Rosa	28°	19°
Jujuy	39°	21°	S. del Estero	39°	28°
La Plata	31°	21°	Tandil	27°	17°
La Rioja	35°	23°	Tucumán	36°	24°
Mar del Plata	23°	19°	Ushuaia	10°	4°
Mendoza	28°	16°			

22) Calcular la media de todas las temperaturas **máximas**.

23) Calcular la mediana de todas las temperaturas **máximas**.

24) Calcular la moda de todas las temperaturas **máximas**.

25) Calcular la media de todas las temperaturas **mínimas**.

26) Calcular la mediana de todas las temperaturas **mínimas**.

27) Calcular la moda de todas las temperaturas **mínimas**.

28) Armar un cuadro de frecuencias absolutas y relativas para las temperaturas **mínimas**, agrupadas en los siguientes rangos:

- Menos de 15 ° C
- Desde 15 ° C inclusive hasta 20 ° C Inclusive
- Mas de 20 ° C

29) Confeccionar un gráfico circular con los datos del cuadro de frecuencias anterior.

<u>**Responder Verdadero o Falso**</u>:

30) Una distribución puede tener más de una moda.

31) La media de una distribución siempre coincide con algún valor de la misma.

32) La frecuencia relativa de un dato es la cantidad de veces que se repite.

33) La moda de una distribución es el dato que más se repite.

34) Los gráficos circulares representan a las frecuencias relativas.

35) Los gráficos de barras representan las frecuencias absolutas.

36) Una distribución puede tener más de una media.

37) La mediana de una distribución es como su "centro de gravedad" ya que divide a la distribución en dos partes de igual cantidad de datos.

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

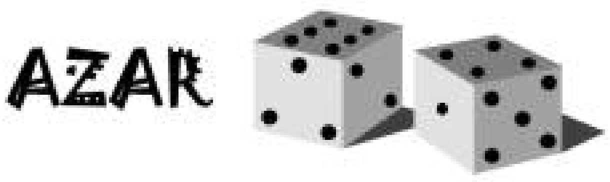
Título del Tema:

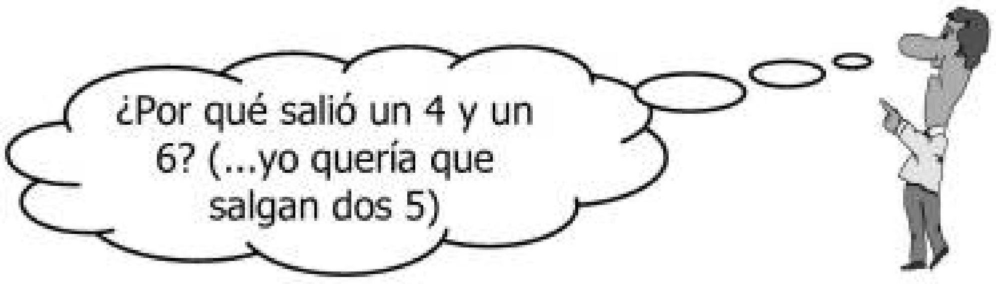
Probabilidad
Nivel I

Número de Tema: **37**

Área: **Matemática**

¿Qué es más probable, que salga campeón Argentina, o Brasil?
Esto se lo habrán preguntado bastantes... Pero ¿Hay manera de calcularlo matemáticamente?
La respuesta es **NO, lo que podemos hacer Matemáticamente es calcular probabilidades que dependan sólo del <u>azar</u>.**





Los números que salen cuando tiramos dos dados son números al AZAR.
Por lo tanto no dependen de nada. Sale uno u otro número porque sí.

✰ ¿Qué es el azar?

Cuando decimos que algo sucede al azar **queremos decir que** pasa porque sí. **(es decir que pasa algo, pero de la misma forma pudo haber pasado algo totalmente diferente y** no hay manera de predecir que es lo que pasará**)**
Cuando algo sucede por azar decimos que es **aleatorio** (como la función "shuffle" de los reproductores musicales que elige "caprichosamente" o **al azar** cualquier tema para reproducir)

Nosotros vamos a calcular probabilidades de cosas que pasan al AZAR. Pero NUNCA voy a poder usar la Matemática para calcular Probabilidades, como por ejemplo la "Probabilidad de que Argentina gane la Copa del Mundo" o "la Probabilidad de que Boca salga Campeón" ni cosas por el estilo...

- Ejemplos de cosas que pasan al azar:
  - Cuando arrojo un dado. O juego a la ruleta. El número que sale es al AZAR.
  - El número de boleto que me tocó en el colectivo es al AZAR.
  - Otro ejemplo: si saco (sin mirar) un caramelo de una bolsa donde hay caramelos de distinto gusto. El gusto del caramelo que saque también va a ser al azar.

Vamos a pensar un poco en todo esto: Supongamos el siguiente experimento

- Si anotamos en un papel las últimas cifras de los documentos de las personas que pasan por la calle un día cualquiera en una esquina cualquiera: Vamos a ver que los números no siguen una "tendencia", es como que <u>no hay preferencias por ningún número</u> en la lista.

¿Y si nos preguntamos por qué en la lista están esos números y no otros?
La respuesta sería: Porque SI. No hay manera de darle una explicación predecible. La lista de números depende únicamente "del AZAR".

Si yo de alguna manera pudiera influir para que en la lista queden los números que a mi me gustan. Entonces ya no dependería del AZAR.

✰ ¿Cómo se calcula una probabilidad?

Bueno empecemos viendo la FÓRMULA que usaremos en todos los problemas

"P" es la probabilidad de que "pase algo"

$$\boxed{P = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}}}$$

<u>Ejemplo</u>: Supongamos que vamos a sacar un caramelo, sin mirar, de una bolsa que tiene 7 caramelos de frutilla y 3 de limón. *¿Cuál es la probabilidad de que el caramelo que saque sea de frutilla?*

$$P = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}}$$

Los casos favorables son 7
(Que es la cantidad de caramelos de frutilla)

Los casos TOTALES son 10
(Que es la cantidad TOTAL de caramelos)

"P" es la probabilidad de que el caramelo que salga sea de frutilla

$$P = \frac{7}{10} \Rightarrow \boxed{P = 0{,}7}$$

Y ya está: La probabilidad de que el caramelo que sacamos de la bolsa sea de frutilla es de **0,7**...

Otro ejemplo: **Supongamos que en la bolsa tenemos 7 caramelos de frutilla, 5 caramelos de limón y 4 caramelos de naranja.** ¿Cuál es la probabilidad de que el caramelo que saque **NO** sea de limón?

En este caso los "casos favorables" son todos los caramelos que no son de limón (Tengo que calcular la probabilidad de que el caramelo no sea de limón) Entonces los "casos favorables" son los caramelos de frutilla mas los de naranja.

$$P = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}}$$

Los casos favorables son **11** (7 de frutilla + 4 de naranja)

Los casos TOTALES son **16** (Cantidad TOTAL de caramelos)

"P" es la probabilidad de que el caramelo que salga NO sea de limón ⇨ $P = \frac{11}{16}$ ⇨ $\boxed{P = 0{,}6875}$

Otro Ejemplo: Calcular la probabilidad de que al arrojar un dado salga un número par.

$$P = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}}$$

Los casos favorables son **3** (Los números pares de un dado son el 2, el 4 y el 6) Tres números favorables

Los casos TOTALES son **6** (Que es la cantidad de números que tiene un dado)

Probabilidad de que el número sea par ⇨ $P = \frac{3}{6}$ ⇨ $\boxed{P = 0{,}5}$

Ya te habrás dado cuenta que siempre que calculamos una probabilidad nos da un número entre 0 y 1

¿Por qué? Porque la mayor probabilidad de que pase "algo" es 1, lo que significa que tenemos el 100% de certeza de que algo pase, por el contrario la menor probabilidad es 0 que significa que no hay posibilidad de que el suceso pase.

Ahora la pregunta es ¿**Y cuándo una probabilidad da 1**?
Respuesta: **"Cuando no queda otra"**

Ejemplo: Calcular la probabilidad de que al arrojar un dado salga un número menor a 10.

Cualquier número que salga va a ser menor que 10. "No queda otra"

Entonces la probabilidad de que el número sea menor que 10 es 1

Si quisiera usar la fórmula pasaría esto:

$$P = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}}$$

Los casos favorables son **6** (Los números menores a 10 de un dado son los 6)

Los casos TOTALES son **6** (Que es la cantidad de números que tiene un dado)

Probabilidad de que el número sea menor que 10 ⇨ $P = \frac{6}{6}$ ⇨ $\boxed{P = 1}$

☆ La probabilidad como un Porcentaje

Muchas veces habrán escuchado estimar una probabilidad como un porcentaje. Por ejemplo " Hay un 20% de probabilidades de que mañana llueva "

¿Y como puede ser que sea mayor a 1?
En verdad una probabilidad del **20% no es mayor a 1**

Una probabilidad de 1 equivale a la de 100%

Las probabilidades expresadas como Porcentaje nunca son mayores a 100%.

¿Cómo hago para expresar una probabilidad como porcentaje?
Muy simple: "**La multiplico por 100%**"

Ejemplo: supongamos que una probabilidad me dio 0,45
¿Cómo sería si la expreso como porcentaje?

$P = 0{,}45 \Longrightarrow$ Multiplico por 100% $\Longrightarrow P = 0{,}45 \ . \ 100\% \Longrightarrow \boxed{P = 45\ \%}$

Vamos a ver otro ejemplo: Calcular la probabilidad de que al elegir un número del 1 al 10 inclusive, al azar, el número elegido sea múltiplo de 3.

Veamos ¿Cuántos números entre el 1 y el 10 son múltiplos de 3?

1 2 **3** 4 5 **6** 7 8 **9** 10

Los casos favorables son **3**

$$P = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}}$$

$$P = \frac{3}{10} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{P = 0{,}3}}$$

Los casos TOTALES son **10**
(Que es la cantidad de números para elegir)

Como porcentaje sería**:**

$P = 0{,}3 \Longrightarrow$ Multiplico por 100% $\Longrightarrow P = 0{,}3 \ . \ 100\% \Longrightarrow \boxed{P = 30\ \%}$

Una probabilidad de 0,3 y una del 30% son equivalentes. Entonces decimos que: *"Hay un 30% de probabilidades de que al elegir un número entre el 1 y el 10 inclusive, dicho número sea múltiplo de 3".*

✰ Sucesos

¿A qué llamamos un suceso? A uno o más resultados de un experimento aleatorio.

Por ejemplo:

- ✓ Arrojar un dado y obtener un número del 1 al 6 por ejemplo, es un suceso.
- ✓ Elegir un número del 1 al 10 es un suceso.
- ✓ Sacar un caramelo de limón de una bolsa es un suceso.

Hasta ahora venimos calculando siempre, probabilidades que dependen de un único suceso. De ahora en más, vamos a estudiar casos en los que intervengan más de un suceso. Por ejemplo, calcular la probabilidad de que al arrojar un dado salga un número par es un suceso único ya que arrojo un dado una sola vez, pero si quisiéramos calcular la probabilidad de que al arrojar dos veces un dado salgan las dos veces un número par, allí tendríamos dos sucesos diferentes que son los dos valores que obtenemos arrojando el dado.

¿Y cómo calculamos una probabilidad que dependa de más de un suceso?
"Multiplicando las probabilidades de cada suceso por separado"

Ejemplo: Calcular la probabilidad de que de una bolsa en la que hay 15 caramelos de naranja y 14 caramelos de frutilla saque dos caramelos de frutilla seguidos.

Acá hay dos sucesos:

- *Primero saco un caramelo (1º suceso)*
- *Después saco otro caramelo (2º suceso)*

Primero voy a calcular la probabilidad de que saque el primer caramelo de frutilla

Voy a llamar a esta probabilidad P1

$$P_1 = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}}$$

Los casos favorables son **14** (los de frutilla)

Los casos TOTALES son **29** (Que es la cantidad total de caramelos)

$$\Longrightarrow P_1 = \frac{14}{29}$$

Ahora me falta calcular la probabilidad de que saque el segundo caramelo de frutilla

Voy a llamar a esta probabilidad P2

$$P_2 = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}}$$

Los casos favorables son **13** (Antes tenía 14 pero se supone que 1 ya lo saqué en el 1º suceso) $\Rightarrow P_2 = \frac{13}{28}$

Los casos TOTALES son **28** (Tenía 29 antes menos el que ya había sacado en el 1º suceso: 28)

Y como ya dijimos... "la probabilidad de que pasen dos sucesos es la multiplicación de la probabilidad de cada suceso":

$$P_{\text{sacar 2 caramelos de frutilla seguidos}} = \underbrace{\frac{14}{29}}_{P_1} \cdot \underbrace{\frac{13}{28}}_{P_2}$$

P_1 : Probabilidad del 1º suceso

P_2 : Probabilidad del 2º suceso

$$P_{\text{sacar 2 caramelos de frutilla seguidos}} = \frac{\overset{1}{\cancel{14}}}{29} \cdot \frac{13}{\underset{2}{\cancel{28}}} = \frac{13}{58} = \boxed{0{,}2241}$$

Como porcentaje sería

$P = 0{,}2241 \Rightarrow$ Multiplico por 100% $\Rightarrow P = 0{,}2241 \,.\, 100\% \Rightarrow \boxed{P = 22{,}41\ \%}$

<u>Suma de probabilidades</u>:

Algunas veces debo recurrir a la suma de dos probabilidades para calcular la probabilidad de que suceda un suceso "o" el otro suceso.

Veamos un ejemplo: Tenemos una bolsa de caramelos con 10 caramelos de frutilla, 8 caramelos de limón y 7 caramelos de naranja (25 en total). Calcular la probabilidad que al sacar 2 caramelos al azar saque o dos de frutilla o Dos de Limón.

Acá tenemos dos opciones que "generan" la probabilidad que tengo que calcular. Como ambas opciones son válidas, porque tengo que calcular la probabilidad de que suceda una cosa u otra, lo que debo hacer es calcular esas probabilidades y luego sumarlas. Veamos

Primero calculo la probabilidad de que ambos sean de frutilla:

$$P_{1^oF} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \qquad P_{2^oF} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} \Rightarrow P_{2 \text{ de Frutilla}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \boxed{\frac{3}{20}}$$

Probabilidad de que el primero sea de frutilla — Probabilidad de que el segundo también sea de frutilla — Probabilidad de que los dos sean de frutilla

Luego calculo la probabilidad de que ambos sean de limón:

$$P_{1^oL} = \frac{8}{25} \qquad P_{2^oL} = \frac{7}{24} \Rightarrow P_{2 \text{ de Limón}} = \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} = \boxed{\frac{7}{75}}$$

Probabilidad de que el primero sea de Limón — Probabilidad de que el segundo también sea de Limón — Probabilidad de que los dos sean de Limón

Por último sumo ambas probabilidades: $P_{2 \text{ de Frutilla } \mathbf{o} \text{ Limón}} = \frac{3}{20} + \frac{7}{75} = \boxed{\frac{73}{300}}$

Resolver los siguientes cálculos de probabilidades:

1) Calcular la probabilidad de tirar un dado y sacar un número múltiplo de dos.

2) Calcular la probabilidad de elegir un número del 1 al 10 (inclusive) y que sea múltiplo de 5.

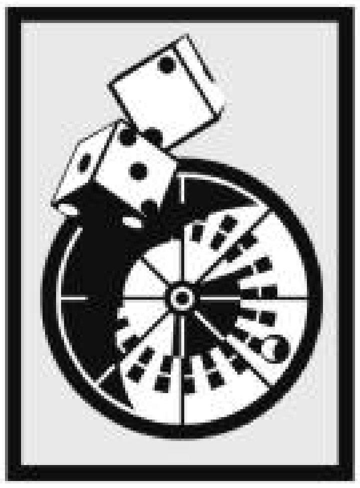
3) Calcular la probabilidad de elegir un número del 22 al 45 (inclusive) y que sea múltiplo de 6.

4) Calcular la probabilidad de sacar una carta de un mazo (de 40 cartas españolas: Las del Truco) y que salga un oro.

5) Calcular la probabilidad de sacar una carta de un mazo (el mismo mazo de antes) y que salga un oro o una copa.

6) Calcular la probabilidad de sacar una carta de un mazo (el mismo de antes) y salga un 5 o un 3.

7) Calcular la probabilidad de que en el oral de geografía le toque a martín. Sabiendo que en el grado son 28 alumnos.



8) Calcular la probabilidad de que en la ruleta salga un número de la primera columna. (Hay 3 columnas y el cero no pertenece a ninguna de ellas, de los otros 36 números pertenecen 12 a cada columna).

9) Calcular la probabilidad de que en la ruleta salga el "rojo".

10) Calcular la probabilidad de que en la ruleta salga un número mayor a 20.

11) Calcular la probabilidad de que en la ruleta salga un número menor a 30.

12) Calcular la probabilidad de que en un sorteo salga un número múltiplo de 7 (con números de 2 cifras).

13) Calcular la probabilidad de que el boleto de colectivo termine en 5 o en 6.

14) Calcular la probabilidad de que el primer auto que pase por la esquina tenga una patente que empiece con una letra que esté después de la m en el abecedario. (hay 26 letras disponibles para su uso en patentes de autos)

15) Calcular la probabilidad de que en un partido de fútbol que terminó empatado 1 a 1, el equipo que hizo el gol del empate lo haya hecho en los últimos 5 minutos del 2º tiempo.

16) Calcular la probabilidad de que al arrojar dos dados la suma de sus cifras sea mayor a 6.

17) Calcular la probabilidad de que al arrojar dos dados la suma de las cifras de menor que 8.

18) *Ariel está leyendo un libro de Stephen King que tiene 1460 páginas. Calcular la probabilidad de que le falten leer menos de 100 páginas (no tenemos ni idea de la cantidad de páginas que puede llevar leídas).*

19) *River y Boca juegan un partido amistoso y gana River 4 a 2*

A – Calcular la probabilidad de que River haya hecho el primer gol.

B – Calcular la probabilidad de que el primer gol lo haya hecho Boca

C – Por qué si sumo las probabilidades me da 1?

20) En 9º A hay 10 chicos de Boca, 8 chicos de River y 8 chicos de otros clubes.

   A - Calcular la probabilidad de que el mejor alumno sea de Boca.
   B - Calcular la probabilidad de que el mejor alumno no sea ni de boca ni de River.

21) En 9º A hay 14 chicos de 14 años y 12 chicos de 15 años. Calcular la probabilidad de que el primero que llegue mañana a clases tenga 15 años.

22) Calcular la probabilidad de acertar un número entre el 15 y el 32 inclusive.

Probabilidades que dependen de más de un suceso:

23) Calcular la probabilidad de arrojar una moneda 4 veces seguidas y que en las 4 salga "cara"

24) Calcular la probabilidad de que pasen por la esquina dos autos seguidos cuya patente empiece con la misma letra.

25) Calcular la probabilidad de arrojar dos dados y que ambos números sean pares

26) Calcular la probabilidad de arrojar dos dados y que la suma de los números sea impar.

27) Calcular la probabilidad de que en un partido de fútbol que terminó 2 a 1 el equipo que ganó haya hecho los dos primeros goles.

28) Calcular la probabilidad de que al elegir al azar un número del 1 al 10 inclusive dos veces seguidas, las dos veces elija un número mayor a 4.

29) Calcular la probabilidad de que en la ruleta salga dos veces seguidas el cero.

30) Calcular la probabilidad de que en la ruleta salga 4 veces seguidas el "negro"

31) Calcular la probabilidad de que en la ruleta salga 3 veces seguidas un número par

32) Calcular la probabilidad de que en la ruleta salga dos veces seguidas un número de la 1º columna.

33) Se sacan al azar 2 caramelos de una bolsa donde hay 10 caramelos de frutilla, 8 de limón y 6 de naranja

- A – Calcular la probabilidad de que ambos caramelos sean de limón
- B – Calcular la probabilidad de que ninguno de los dos sea de frutilla
- C – Calcular la probabilidad de que sea el primero de limón y el segundo de naranja
- D – Calcular la probabilidad de que sea uno de limón y uno de naranja.

34) Se sacan al azar 3 caramelos de una bolsa donde hay 12 caramelos de frutilla, 6 de limón y 5 de naranja

A – Calcular la probabilidad de que ninguno de los tres sea de naranja.
B – Calcular la probabilidad de que sean los tres del mismo gusto.
C – Calcular la probabilidad de que sean los tres de naranja o de limón.

35) Supongamos que tenemos tres números para una rifa. En el sorteo hay tres premios y 100 números en total. Calcular:

A - La probabilidad que tenemos de ganar el 1º premio.
B – La probabilidad de ganar el 2º premio
C – La probabilidad de ganar alguno de los tres.

36) Fernando vio el partido de Racing – Independiente que terminó 1 a 1. Fernando se distrajo 15 minutos porque lo llamaron por teléfono:

A - Calcular la probabilidad de que Fernando se haya perdido de ver uno de los goles.
B – Calcular la probabilidad de que Fernando se haya perdido los dos goles.

37) Sacamos DOS cartas de un mazo español de 40 cartas:

A – Calcular la probabilidad de que las dos cartas sean de oro.
B – Calcular la probabilidad de que las dos sean menores que 5
C – Calcular la probabilidad de que la primera sea menor que cinco y la segunda mayor que 6

38) Sacamos TRES cartas de un mazo español de 40 cartas:

A – Calcular la probabilidad de que las tres cartas sean de oro.
B – Calcular la probabilidad de que las dos primeras sean de oro y la tercera de espada.
C – Calcular la probabilidad de que la primera sea menor que cinco y las otras dos mayores que 7.
D –Calcular la probabilidad de que la primera sea un 4, la segunda sea un tres y la tercera una copa.

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Probabilidad
Nivel II

Número de Tema: **38**

Área: **Matemática**

Antes de comenzar con este tema, repasemos el concepto del "Factorial"
☆ **Factorial** "Es un operador matemático que multiplica sucesivamente números enteros positivos"
¿Como se simboliza el factorial de un número? **5 !** Esto se lee: "factorial de 5"

Y.....¿Como se calcula el factorial de un número? **Se calcula multiplicando al número por su antecesor y después multiplicándolo por el antecesor de su antecesor y después por el antecesor del antecesor del antecesor.... y así sucesivamente hasta llegar al 1.**

En la calculadora aparece con la tecla $\boxed{n!}$

Ejemplo: Calculamos el factorial de 5
El factorial de 5 sería 5!

$5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120 \Longrightarrow \boxed{5! = 120}$

Dos factoriales importantes. Esto es así por definición: $\boxed{0! = 1}$ $\boxed{1! = 1}$

☆ **Propiedad importante: Simplificación de factoriales:** $\boxed{\dfrac{n!}{(n-1)!} = n}$

Ejemplo: $\Longrightarrow \dfrac{12!}{11!} = 12$

Deducción: $$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)\cdot(n-6)\cdot(n-7)\cdot(n-8)}\cdot .....}{\cancel{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)\cdot(n-6)\cdot(n-7)\cdot(n-8)}\cdot ......} = n$$

Por definición escribimos los factoriales como productos y nos queda:

$$\frac{12!}{11!} = \frac{12 . \cancel{11} . \cancel{10} . \cancel{9} . \cancel{8} . \cancel{7} . \cancel{6} . \cancel{5} . \cancel{4} . \cancel{3} . \cancel{2} . 1}{\cancel{11} . \cancel{10} . \cancel{9} . \cancel{8} . \cancel{7} . \cancel{6} . \cancel{5} . \cancel{4} . \cancel{3} . \cancel{2} . 1} = 12$$

Otro ejemplo: $\dfrac{12!}{9!}$ Se simplifica casi todo

Y así, simplificando, me ahorro de tener que trabajar con números muy grandes.

$$\frac{12!}{9!} = \frac{12 . 11 . 10 . \cancel{9} . \cancel{8} . \cancel{7} . \cancel{6} . \cancel{5} . \cancel{4} . \cancel{3} . \cancel{2} . 1}{\cancel{9} . \cancel{8} . \cancel{7} . \cancel{6} . \cancel{5} . \cancel{4} . \cancel{3} . \cancel{2} . 1} = 12 . 11 . 10 = 1320$$

☆ **Variaciones Sin Repetición:**

¿Qué es una Variación ? algo así como *Todas las maneras posibles de acomodar una cantidad de elementos "n", tomados de a "r" Cuando* ***Importa el orden*** *en que se acomoden los elementos*

Por ejemplo: Sea un conjunto de letras: a, b, c y d (n=4, o sea 4 elementos en total) Escribir todas las Variaciones empleando las 2 letras cada vez (r=2, las tomo de a 2 elementos).**Sin repetir ninguna letra**

O sea: ¿Cuántas combinaciones de 2 letras puedo hacer con las letras "a", "b", "c" y "d"?

✓**ab**	✓**ac**	✓**ad**	✓**bc**	✓**bd**	✓**cd**
✓**ba**	✓**ca**	✓**da**	✓**cb**	✓**db**	✓**dc**

Importante! Fíjense que en las variaciones IMPORTA EL ORDEN de los elementos, ya que no es lo mismo formar con las letras a y b la palabra "ab" o la palabra "ba" porque son palabras diferentes

Encontré 12 combinaciones diferentes: "son 12 Variaciones"

Y si tengo 16 letras y quiero formar con ellas palabras de 4 letras?
....Ah, como podrán imaginarse el trabajo de escribir todas esas combinaciones sería muy engorroso, cansador y afortunadamente INNECESARIO, ya que hay una manera de calcularlo usando una ***fórmula***.

Entonces, ya que tenemos en claro el concepto de lo que es una variación sin repetición, veamos la fórmula que se usa para calcular estas cantidades sin necesidad de escribir todas las combinaciones:

$$\boxed{V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

n = número total de elementos
r = número de elementos que se toman al mismo tiempo
(Debe ser r =< n) Ya que **no puedo repetir elementos.**

Vamos a calcular otra vez las Variaciones posibles con 4 letras tomándolas de a 2
Pero esta vez lo hacemos con la fórmula.

$$\begin{matrix} n = 4 \\ r = 2 \end{matrix} \Longrightarrow \text{Variaciones} = \frac{n\,!}{(n-r)!} = \frac{4\,!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$$

Obviamente me da la misma cantidad que antes cuando escribimos todas las combinaciones, pero es mucho más cómodo escribir la fórmula que "andar escribiendo todas las combinaciones"... qué te parece?

<u>Otro ejemplo</u>: De cuantas maneras distintas se pueden sentar 3 personas en 5 sillas.

$$\begin{matrix} n = 5 \\ r = 3 \end{matrix} \Longrightarrow \text{Variaciones} = \frac{n\,!}{(n-r)!} = \frac{5\,!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

O sea que esas 3 personas se pueden sentar de 60 formas diferentes ocupando distintas sillas.

✰ <u>Variaciones con Repeticiones:</u>

Se trata de Variaciones de "n" objetos tomados de a "r" donde r puede ser mayor a n. O sea, puedo tomar varias veces el mismo elemento o varias veces distintos elementos:

La fórmula sería: $\boxed{V'_{n,r} = n^r}$ Se lee Variaciones con repetición de "n" elementos tomados de a "r"

Esta es la fórmula que se usa para calcular la cantidad de combinaciones que pueden hacerse en una boleta de **PRODE**:

Veamos... En la boleta del PRODE tenemos 13 partidos de fútbol y para cada partido tenemos tres resultados posibles: LOCAL – EMPATE – VISITANTE.

Abreviándolos sería: L – E – V
... y una combinación posible sería:

Las combinaciones serían como formar palabras de 13 letras usando las letras **"L"** **"E"** y **"V"**.

Ahora tengo que calcular cuántas combinaciones puedo hacer: Teníamos 3 elementos (L – E – V).
Y los tomamos de a 13.

1- L
2- V
3- V
4- E
5- E
6- V
7- L
8- V
9- E
10- L
11- L
12- E
13- L

Si con esto formaría una palabra me quedaría **LVVEEVLVELLEL**

Es una combinación con repeticiones, ya que **tengo sólo 3 elementos y los tengo que tomar de a 13. Tengo que repetirlos si o sí.**

$$\begin{matrix} n = 3 \\ r = 13 \end{matrix} \Longrightarrow \text{Variaciones} = n^r = 3^{13} = 1.594.323$$

Bastantes? Más de un millón y medio de posibilidades. Con razón es tan difícil ganar al PRODE!

<u>Caso especial de las Variaciones: Cuando n = r –> Se llaman "Permutaciones"</u>

✰ **Permutaciones Sin repetición:** Se usan por ejemplo: Cuando quiero ver las cantidad de formas distintas de agrupar por ejemplo 5 elementos tomados de a 5 por vez.

Ejemplo: ¿Cuántas palabras de 4 letras puedo escribir con 4 letras sin repetir ninguna letra?

$$\begin{matrix} n = 4 \\ r = 4 \end{matrix} \Longrightarrow \boxed{\text{Permutaciones} = n\,!} \Rightarrow 4! = 24$$

Fórmula general de las
Permutaciones Sin repetición.

Según lo calculado en el último ejemplo, si yo agarro 4 letras y empiezo a acomodarlas de distinta forma, puedo formar 24 palabras distintas... (claro que no tienen por qué tener significado)

Estas distintas maneras de combinar letras se llaman "ANAGRAMAS".
Por lo tanto acabamos de calcular la cantidad de anagramas de una palabra de 4 letras.

Bueno... Vamos a verificarlo suponiendo que las 4 letras son "A" "B" "C" y "D"

1)ABCD	5) ADBC	9) BCAD	13) CABD	17) CDAB	21) DBAC
2) ABDC	6) ADCB	10) BCDA	14) CADB	18) CDBA	22) DBCA
3) ACBD	7) BACD	11) BDAC	15) CBAD	19) DABC	23) DCAB
4) ACDB	8) BADC	12) BDCA	16) CBDA	20) DACB	24) DCBA

Y efectivamente son 24 las combinaciones posibles sin repetir las letras.

☆**Permutaciones Con repetición:** *Lo vemos directamente de un ejemplo* ¿De cuántas maneras distintas pueden colocarse en línea nueve bolas de las que 4 son blancas, 3 amarillas y 2 azules?

El orden importa por ser de distinto color, tengo una variación, como n = r, (tengo 9 bolas y las tengo que acomodar de a 9) **es una permutación** (caso especial de las variaciones) y **tengo que repetir** bolas del mismo color porque ya de por si tengo 4 blancas que son iguales entre si, 3 amarillas y 2 azules que también son iguales entre si. Por lo tanto es una permutación con repetición y la fórmulas:

$$\boxed{\text{Permutaciones} = \frac{n!}{a!\,.b!\,.c!\,.}} \Rightarrow \quad \frac{9!}{4!\,.3!\,.2!} = \frac{362880}{24\,.\,6\,.\,2} = \frac{362880}{288} = 1260$$

Fórmula general de las **Permutaciones Con repetición**.

☆ **Combinaciones Sin Repetición:** Es un conjunto de elementos que se puede formar tomando de a "**r**" elementos a partir de un conjunto de "**n**" elementos. **Sin importar el orden. Sin Repetir**

O sea que en el caso de "combinar" 5 letras ("A" "B" "C" "D" y "E") en grupos de a 3 Serían:

1) ABC	3) ABE	5) ACE	7) BCD	9) BDE
2) ABD	4) ACD	6) ADE	8) BCE	10) CDE

¿Cómo, solamente 10? Claro! Fijate que acá **No importa el orden –> O sea que es lo mismo ABC que ACB** (también es lo mismo ACD que ADC ... y así sucesivamente)

Entonces las combinaciones se reducen un montón!

También hay una fórmula para no escribir todas las combinaciones.

$$\boxed{C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!\;\; r!}}$$

Entonces verifiquemos con la fórmula las 10 combinaciones que armamos con las 5 letras tomadas de a 3.

n = 5
r = 3

$$\Longrightarrow C = \frac{n!}{(n-r)!\,.\,r!} = \frac{5!}{(5-3)!\,.\,3!} = \frac{120}{2!\,.\,3!} = \frac{120}{2\,.\,6} = \frac{120}{12} = \boxed{10}$$

Otro Ejemplo: Un entrenador de basketball tiene 11 jugadores de los cuales uno es titular indiscutido, con los otros 10 jugadores debe terminar de armar el equipo (en total debe tener 5 jugadores)

a- ¿Cuántos equipos diferentes puede armar con el titular indiscutido?
b- ¿Cuántos equipos diferentes puede armar sin el titular indiscutido?

a - Con el titular indiscutido:
n =10
r =4

$$C = \frac{10!}{(10-4)!4!} = \frac{10\,.9\,.8\,.7\,.\cancel{6!}}{\cancel{6!}\,.4!} = \frac{5040}{24} = 210$$

b - Sin el titular indiscutido:
n = 11
r = 5

$$C = \frac{11!}{(11-5)!\,.5!} = \frac{10\,.9\,.8\,.7\,.\cancel{6!}}{\cancel{6!}\,.5!} = \frac{55440}{120} = 462$$

Obvio, sin el "titular indiscutido" las posibilidades son más porque hay 1 lugar más para cubrir.

Vamos a calcular la cantidad de boletas de LOTO diferentes que se pueden jugar....
Como ya sabemos, hay que adivinar 6 números... de un total de 41 números...
teniendo en cuenta que <u>no se pueden repetir los números</u>, y <u>no importa el orden</u>.

Hay que hallar las **combinaciones** con: **n = 41 y r = 6**
Usamos la **fórmula**....

$$C = \frac{n!}{(n-r)!\,.\,r!} = \frac{41!}{(41-6)!\,.\,6!} = \frac{41.40.39.38.37.36.\cancel{35}!}{\cancel{35}!\,.\,6!} = \frac{3.237.399.360}{720} = 4.496.388$$

4 millones y medio de posibilidades,
este sí que es difícil de acertar!

☆ **<u>Combinaciones Con Repetición</u>:**
Es un conjunto de elementos que se puede formar tomando de a "**r**" elementos a partir de un conjunto de "**n**" elementos. **Sin importar el orden. Pudiendo repetir los elementos**

La fórmula que se usa en estos casos es la siguiente:

$$\boxed{C^{'} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,.\,(n-1)!}}$$

Veamos un ejemplo: En una confitería hay cinco tipos diferentes de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro pasteles pudiéndose elegir varios del mismo tipo?

No importa el orden (son pasteles). Puede haber dos o más pasteles en un grupo, **entonces con repetición. Por lo tanto, como no importa el orden, es una combinación y como me dicen que se pueden repetir los elementos, es una combinación con repetición.**

Aplico la fórmula: $C^{'} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,.\,(n-1)!} = \frac{(5+4-1)!}{4!\,.\,(5-1)!} = \frac{8!}{4!\,.\,4!} = \frac{40320}{24\,.\,24} = 70$

70 maneras diferentes de elegir 4 pasteles
de cinco grupos de pasteles distintos.

☆ Cuadro lógico de Análisis Combinatorio – Resumen

	Orden	Repetición	
Variaciones	**Importa**	**No**	$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$
		Sí	$V'_{n,r} = n^r$
Permutaciones n = r	**Importa**	**No**	$P_{n,r} = n!$
		Sí	$P'_{n,\,r(a,b,c)} = \frac{n!}{a!\,.b!\,.c!}$
Combinaciones	**NO Importa**	**No**	$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$
		Sí	$C'_{n,r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,.\,(n-1)!}$

by DaL-0r para TARINGA!

PERMUTACIONES – COMBINACIONES

1) Calcular la cantidad de maneras distintas en las que pueden sentarse 5 personas en 6 sillas.

2)Calcular la cantidad de maneras diferentes en las que pueden sentarse 7 personas en 6 sillas

3) Calcular la cantidad de palabras diferentes de TRES letras (no importa que no tengan significado) que puedo armar con las letras "O" "M" "L" "A" (sin repetir ninguna letra)

4) Calcular la cantidad de palabras diferentes de CUATRO letras (no importa que no tengan significado) que puedo armar con las letras "O" "M" "L" "A" (sin repetir ninguna letra)

5) Calcular la cantidad de palabras diferentes de CINCO letras (no importa que no tengan significado) que puedo armar con las letras "O" "M" "L" "A" (se pueden repetir las letras)

6) Calcular la cantidad de equipos de fútbol distintos, que puedo armar con 16 jugadores y 2 arqueros.

7) Calcular la cantidad de equipos de fútbol distintos, que puedo armar con 16 jugadores y 2 arqueros. Si sabemos que tenemos tres jugadores que son titulares indiscutidos.

8) En un club de barrio van a votar a la comisión directiva, que va a estar formada por un presidente y un vicepresidente. (el que obtenga mayor cantidad de votos será el presidente y el segundo el vicepresidente) En total hay 12 postulantes, calcular las distintas posibilidades que pueden resultar de las elecciones.

9) Calcular las distintas posibilidades que pueden surgir de las elecciones del club del ejercicio anterior si ahora la comisión tiene que estar formada por el presidente, el vice y un secretario.

10) Cuántos números de dos cifras puedo formar con las cifras "1" "2" "3" "4" y "5"

11) ¿Cuántos números de cuatro cifras puedo formar con las cifras pares (sin el cero) ?

12) ¿Cuántos números pares de 4 cifras puedo formar con las cifras "1" "2" y "3" ?

13) ¿Cuántos números impares de 6 cifras puedo formar con las cifras "1" "2" y "3" ?

14) Calcular la cantidad de combinaciones de cartas diferentes que me pueden tocar jugando al truco en una mano. (Se reciben 3 cartas de un mazo de 40)

15) Calcular la cantidad de combinaciones diferentes de cartas que me pueden tocar en una mano de CHIN – CHON (Se reciben 7 cartas de un mazo de 50)

16) Calcular la cantidad de posibilidades que hay para jugar en un juego en el que hay que acertar 5 números de 25. No importa el orden en que salgan y no se pueden repetir los números.

17) Calcular la cantidad de jugadas diferentes que se pueden hacer en un juego en el que hay que acertar 3 números de un total de 15 números, teniendo en cuenta el orden en que salen los números y se pueden repetir los números.

18) Calcular la cantidad de maneras diferentes en las que puedo guardar 18 libros en tres cajas, sabiendo que entran 6 libros en cada caja. (no importa el orden en que guarde los libros dentro de cada caja)

19) Calcular la cantidad de maneras diferentes en las que puedo guardar 18 libros en tres cajas si entran 8 libros en una de las cajas y 5 libros en cada una de las otras dos cajas.

20) Calcular la cantidad de maneras diferentes en las que puedo guardar 18 libros en tres cajas si entran 10 libros en una de las cajas y 4 libros en cada una de las otras dos cajas.

21) Calcular la cantidad de maneras en las que puedo guardar 18 libros en tres cajas en de 10 libros la primera , 6 libros la otra y 2 la que queda.

22) Calcular la cantidad de patentes diferentes que se pueden formar con el sistema de patentes actual (3 letras, de un total de 26 y 3 números)

23) Calcular la cantidad de patentes que se podrían formar con 6 letras, en vez de 3 letras y 3 números.

24) Calcular la cantidad de números de teléfono de 7 cifras que puedo formar con todas las cifras excepto el 5 y el 0.

Probabilidades y combinatoria

25) Calcular la probabilidad de que en una mano de truco me toquen los ases de espada y basto.

26) Calcular la probabilidad de que en una mano de truco me toquen "33 para el envido"

27) Calcular la probabilidad de que en una mano de truco me toque flor. (las tres cartas del mismo basto)

28) Calcular la probabilidad de adivinar la patente de un auto si ya sabemos los tres números.

29) Calcular la probabilidad de que de los tres chicos de 9º C que lleguen mañana primero al colegio, 2 sean de Boca y el otro de otro club, sabiendo que en 9º C hay 18 chicos y 8 son de Boca.

30) Calcular la probabilidad de que al tomar cuatro cartas de un mazo de 40. Me toquen 2 cincos.

31) Calcular la probabilidad de que al tomar tres cartas de un mazo de cuarenta, saque tres ases.

32) Calcular la probabilidad de sacar una "generala servida" en el juego de dados. (la generala consiste en sacar los cinco dados iguales)

33) Calcular la probabilidad de sacar un pocker servido en el juego de dados (el pocker sería sacar cuatro dados iguales de los cinco que tiro)

34) Calcular la probabilidad de que al arrojar seis dados, me toquen dos dados con el número 3 y los otros con otros números distintos de tres.

35) Calcular la probabilidad de que al tomar cuatro cartas de un mazo de 50, me toque un comodín.

36) Calcular la probabilidad de que al tomar cuatro cartas de un mazo de 50, me toquen los dos comodines.

37) Calcular la probabilidad de que si se sortean 4 premios iguales entre 7 personas (entre ellas nosotros) nos quedemos sin premio. Ninguna de las personas puede tener más de un premio.

38) Calcular la probabilidad de que al escribir una palabra de 4 letras con las letras "A" "B" y "C", pudiendo repetir las letras, la palabra que escriba termine can la letra "A"

39) Calcular la probabilidad de que al escribir una palabra de seis letras con las primeras 10 letras del abecedario, la palabra empiece con la letra "E"

40) Calcular la probabilidad de que al armar un número de 4 cifras con los dígitos "1" "2" "3" "4" y "5" ,sin repetir ningún número, el número que me quede formado sea múltiplo de 5.

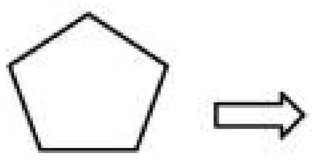
41) Calcular la probabilidad de ganar en una jugada del loto si compramos 10.000 boletas.

42) Calcular la probabilidad de acertar 5 números de los seis del loto.

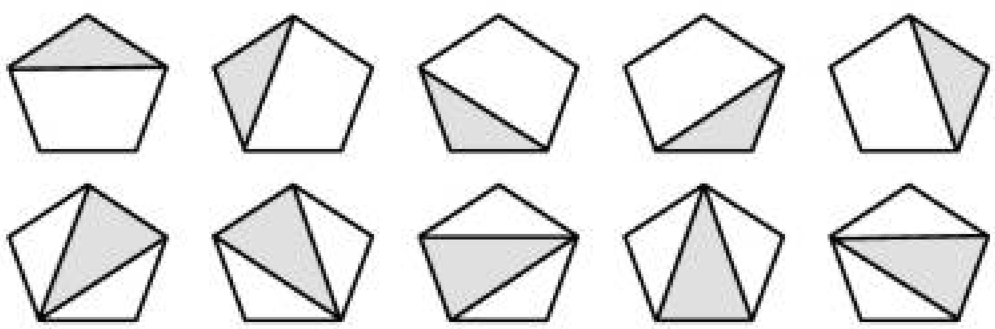
43) Calcular la probabilidad de perder un envido en un "mano a mano" si tenemos 30 y somos mano.

44) En el truco ¿Qué es más probable de tener para el envido 33 o 32? (Suponiendo que se juega sin flor)

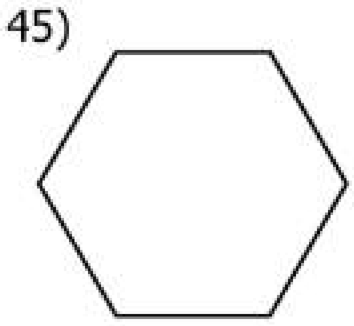
Ejercicios de Ingenio y aplicación: Aplicando los conocimientos adquiridos en este capítulo, contar en cada caso la cantidad de triángulos que pueden formarse cuyos 3 vértices coincidan con los vértices de un hexágono y un octógono.



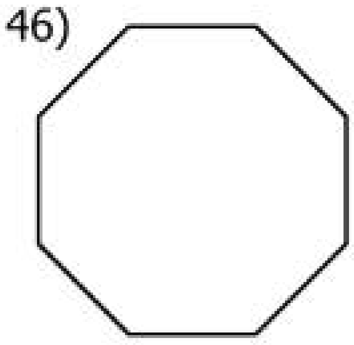
A modo de ejemplo, te mostramos que en un pentágono se pueden formar 10 triángulos diferentes, cuyos vértices coincidan.



45)



46)



Nota: El gráfico mostrado es sólo ilustrativo, hallar las cantidades analíticamente.

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Notación Científica

Número de Tema: **39**

Área: **Matemática**

¿Qué es la NOTACIÓN CIENTÍFICA? Es otra forma de anotar números. Un número escrito en notación científica se compone de:

- ✰ Un número decimal, cuyo valor absoluto debe ser **mayor o igual a 1 y menor a 10**
- ✰ **Una Potencia de 10. Que puede ser una potencia positiva o Negativa.**

Ejemplo:

Un número decimal. Cuya parte entera (Antes de la coma) debe ser **mayor o igual a 1 y menor a 10.** ← **6,15 . 10^3** → Una potencia de 10.

¿Y Para que sirve? ¿Por qué no los anotamos como siempre?
Lo que pasa es que la Notación Científica se usa para anotar números muy pero muy grandes, o muy pero muy pequeños, más fácilmente.

Por ejemplo, la distancia a la que Plutón se encuentra del Sol, en el punto más alejado de su órbita es de **7.600.000.000.000 Metros**. Eso es un poco incómodo de escribir, en cambio, usando la Notación Científica el número se escribiría **$7,6 \cdot 10^{12}$ m.**

Otro ejemplo: El volumen del Sol es **14.100.000.000.000.000.000.000.000.000 m^3** Es muy molesto escribir este número cada 5 minutos si por ejemplo estamos escribiendo una monografía acerca del sol. En cambio en Notación Científica se escribiría: **$1,41 \cdot 10^{28}$ m^3.**

Para números muy chicos, esta notación también es muy cómoda. Ejemplo: el peso de un átomo de Hidrógeno es **0,00000000000000000000000166 gramos**. En Notación Científica se escribiría: **$1,66 \cdot 10^{-24}$ grs.**

Exponentes positivos y Negativos en la Notación Científica:

> Los **exponentes positivos** en la Notación Científica se usan para escribir **números muy grandes**. Mientras que los **exponentes negativos** se usan para escribir **números muy chicos**.

Ejemplos: Los ejemplos que vimos antes representan perfectamente este enunciado ya que el número $1,66 \cdot 10^{-24}$ (que expresa el peso en gramos de un átomo de hidrógeno) tiene potencia negativa y es un número muy pequeño. En cambio el número $1,41 \cdot 10^{28}$ m^3 (Que es el número que representa al volumen del sol tiene potencia positiva y es un número muy grande.

¿Cómo pasar un número de Notación Decimal (la que ya conocemos) a Notación Científica?

1. Hay que escribir el primer número distinto de cero que aparezca en la notación común, luego hay que escribir la coma y todos los demás números que estaban después del que pusimos antes de la coma.
2. Hay que escribir un 10 elevado a la potencia que representa la cantidad de lugares que se corrió la coma entre el número original y el que escribimos en el paso anterior.
3. El Signo del exponente: Si el número era mayor que 1 el exponente queda positivo, y si era menor que 1 (o sea cero coma "algo") el exponente queda negativo.

Ejemplo: Pasar a Notación Científica: 18.200

1,8200 ⇐ 1. Escribo el primer número distinto de cero que aparece que es un **"1"**, luego escribo la coma, y todos los demás números que estaban después del 1.

$1,8200 \cdot 10^4$ ⇐ 2. Escribo un 10 elevado a la 4 porque si comparo 18.200 con 1,8200 , me doy cuenta que corrí la coma 4 lugares.

$1,8200 \cdot 10^4$ ⇐ 3. Como el número era mayor que 1, el exponente queda positivo.

Otro ejemplo: Pasar a Notación Científica: 0,0000564

5,64 ⟸ 1. Escribo el primer número distinto de cero que aparece que es un **"5"**, luego escribo la coma, y todos los demás números que estaban después del 5.

5,64 . 10^5 ⟸ 2. Escribo un 10 elevado a la 5 porque si comparo 0,0000564 con 5,64 , me doy cuenta que corrí la coma **5 lugares**. ⟹ 5,64 / 0,0 0 0 0 5,6 4 / **5 lugares**.

5,64 . 10^{-5} ⟸ 3. Como el número era menor que 1, el exponente queda **negativo.**

¿Cómo se pasa un número de Notación Científica a Notación Decimal?

La respuesta es muy sencilla: **CORRIENDO LA COMA DE LUGAR.** Hay que tener cuidado con lo siguiente:

1. Si el exponente es negativo, corro la coma para la izquierda la misma cantidad de lugares que dice el exponente (por ejemplo si el exponente fuera 10^{-4} , entonces corro la coma 4 lugares a la izquierda).
2. Si el exponente es positivo, corro la coma para la derecha la misma cantidad de lugares que dice el exponente (por ejemplo si el exponente fuera 10^7 , entonces corro la coma 7 lugares para la derecha). Una vez que corrí la coma el 10 con su exponente desaparecen.

Lo vemos en unos ejemplos: Pasar a Notación Decimal: 1,21445 . 10^4

12.144,5 ⟸ Tengo que correr la coma 4 lugares para la derecha!

Pasar a Notación Decimal: 7,95 . 10^2

795 ⟸ Tengo que correr la coma 2 lugares para la derecha!

Pasar a Notación Decimal: 1,21 . 10^5

121.000 ⟸ Tengo que correr la coma 5 lugares a la derecha! Pero como sólo hay 2 cifras, hago de cuenta que después de la última cifra hay muchos ceros (1,21 es igual a 1,2100000000)

Pasar a Notación Decimal: 4,47 . 10^{-5}

0,0000447 ⟸ Corro la coma 5 lugares a la izquierda. Pero como sólo hay 1 cifra a la izquierda de la coma, hago de cuenta que antes hay muchos ceros (4,47 es igual a 00000004,47)

<u>**Nota**</u>: Si el número no tiene coma, "LA INVENTO" , o sea que la escribo después de la última cifra que tiene el número, y después de la coma le pongo algunos ceros. Ejemplo: Pasar a Notación Decimal: 3 . 10^5

300.000 Tengo que correr la coma 5 lugares para la derecha! Como no hay coma, en vez de 3 escribimos 3,000000000... así que invento yo la coma para correrla de lugar.

El número era 3 , 0 0 0 0 0 0 0 y corrí la coma 5 lugares Me quedó: 3 0 0 . 0 0 0 , 0 0

<u>Producto y división en notación científica</u>:

Cuando tenemos que multiplicar dos números en notación científica, multiplicamos por un lado las partes decimales y por el otro lado las potencias de 10 (teniendo en cuenta que cuando multiplicamos dos potencias de igual base se suman los exponentes). Con la división, los exponentes se restan.

Ejemplo $(3{,}1 \cdot 10^{-3}) \cdot (2{,}15 \cdot 10^7) = 6{,}665 \cdot 10^4$ ⟶ Y por otro lado multiplico las potencias de 10 (Producto de potencias de igual base, se suman los exponentes)

Primero multiplico los números: 3,1 . 2,15 = 6,665

$10^{-3} \cdot 10^7 = 10^4$

Otro Ejemplo con División: $(4{,}2 \cdot 10^{-3}) / (2 \cdot 10^7) = 2{,}1 \cdot 10^{-10}$

Escribir los siguientes números en Notación Científica:

1) 19.000
2) 0,000021
3) 20.000.000
4) 0,00005
5) 0,02
6) 1.543,5
7) Doscientos millones
8) 0,00021
9) Cien mil millones
10) 4.205
11) 12.400
12) 14.250.000.000
13) 0,00000000000000315
14) 0,000000000021554
15) 43.000.000
16) Ciento cuarenta y seis mil millones
17) 0,000006544332
18) 0,000223567785
19) 0,41
20) 120
21) 13
22) 0,000642
23) 332.000 millones
24) 1.000.000.000.000.000.000.000
25) 0,000000000004
26) 113.000.000.000
27) 0,0000000021
28) 12.000.000.000.000
29) 0,0000000123
30) 19.000.000

Escribir los siguientes números en Notación Decimal:

31) $5{,}64 \cdot 10^{4}$
32) $3{,}100 \cdot 10^{-3}$
33) $6{,}16 \cdot 10^{3}$
34) $9{,}10200 \cdot 10^{5}$
35) $7{,}163 \cdot 10^{6}$
36) $2{,}25 \cdot 10^{-1}$
37) $8{,}83 \cdot 10^{9}$
38) $1{,}36 \cdot 10^{-11}$
39) $9 \cdot 10^{2}$
40) $7{,}5 \cdot 10^{-6}$
41) $4 \cdot 10^{7}$
42) $7{,}21 \cdot 10^{-4}$
43) $6{,}465541 \cdot 10^{5}$
44) $1{,}62 \cdot 10^{-3}$
45) $5{,}512 \cdot 10^{3}$
46) $9{,}35 \cdot 10^{-2}$
47) $4{,}6 \cdot 10^{-7}$
48) $6{,}11 \cdot 10^{2}$
49) $5{,}5512 \cdot 10^{5}$
50) $1{,}12 \cdot 10^{-4}$
51) $4{,}3 \cdot 10^{-5}$
52) $7{,}11 \cdot 10^{11}$
53) $6{,}1204 \cdot 10^{5}$
54) $3{,}103 \cdot 10^{-9}$
55) $7{,}00102 \cdot 10^{3}$
56) $8{,}02 \cdot 10^{-10}$
57) $7 \cdot 10^{4}$
58) $3{,}001 \cdot 10^{-3}$
59) $2{,}1 \cdot 10^{6}$
60) $1{,}64 \cdot 10^{-7}$

61) Ordenar los siguientes números de menor a mayor

$1{,}2 \cdot 10^{4}$ $1{,}02 \cdot 10^{4}$ $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ $1{,}02 \cdot 10^{-4}$ $1{,}2 \cdot 10^{3}$

$1{,}2 \cdot 10^{-3}$ $1{,}02 \cdot 10^{-3}$ $1{,}02 \cdot 10^{3}$ 120000

- ***Realizar las siguientes multiplicaciones y divisiones <u>en notación científica</u>,*** (<u>sin usar la calculadora</u>) *pasando los decimales a fracción y multiplicando las potencias de 10 por separado, expresar el resultado como Número Natural.*
- ***<u>Verificar</u>*** *<u>el resultado con la calculadora</u>.*

62) $(1{,}2 \cdot 10^{5}) \div (1{,}8 \cdot 10^{7}) \cdot (3 \cdot 10^{3})$
63) $(3{,}21 \cdot 10^{3}) \div (1{,}2 \cdot 10^{11}) \cdot (8 \cdot 10^{13})$
64) $(1{,}12 \cdot 10^{4}) \div (3{,}5 \cdot 10^{5}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{4})$
65) $(9{,}1 \cdot 10^{8}) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-3}) \div (2{,}8 \cdot 10^{3})$
66) $(4{,}32 \cdot 10^{5}) \cdot (5 \cdot 10^{-7}) \cdot (1{,}1 \cdot 10^{4})$
67) $(7{,}2 \cdot 10^{16}) \cdot (1{,}125 \cdot 10^{-7}) \div (8{,}1 \cdot 10^{8})$
68) $(5{,}67 \cdot 10^{-11}) \cdot (5 \cdot 10^{7}) \div (6{,}3 \cdot 10^{-6})$
69) $(4{,}2 \cdot 10^{3}) \div (2{,}31 \cdot 10^{-7}) \cdot (5{,}5 \cdot 10^{-11})$
70) $(3{,}21 \cdot 10^{-27}) \div (5{,}35 \cdot 10^{-35}) \div (2{,}4 \cdot 10^{5})$
71) $(1{,}25 \cdot 10^{4}) \cdot (3{,}6 \cdot 10^{-9}) \cdot (7{,}2 \cdot 10^{6})$
72) $(1{,}02 \cdot 10^{-4}) \cdot (5 \cdot 10^{-7}) \cdot (1 \cdot 10^{14})$
73) $(1{,}92 \cdot 10^{5}) \div (9{,}6 \cdot 10^{-7}) \cdot (1{,}55 \cdot 10^{-2})$

- **<u>Resolver con la calculadora</u>:**

74) $\dfrac{1{,}237 \cdot 10^{-16} + 5{,}463 \cdot 10^{-16}}{(2{,}4 \cdot 10^{-7}) \cdot (2{,}791\hat{6} \cdot 10^{-11})}$

75) $\dfrac{4{,}527 \cdot 10^{5} + 5{,}373 \cdot 10^{5}}{(1{,}8 \cdot 10^{-13}) \cdot (5{,}5 \cdot 10^{15})}$

76) $\dfrac{1{,}53 \cdot 10^{12} \div 5{,}1 \cdot 10^{12}}{(2{,}7 \cdot 10^{-15}) \cdot (2{,}\hat{2} \cdot 10^{13})}$

Realizar las siguientes operaciones y expresar el resultado aproximado en notación científica:

77) $1.000.000 \bullet 12.000.000.000 =$

78) $80.000.000 \div 0,0002 =$

79) $75.000.000.000 \div 0,00025 =$

80) $40.000.000 \bullet 0,000000025 =$

81) $\sqrt{80.000.000.000 \bullet 0,0000000002} =$

82) $\sqrt{(8.000.000)^2 \bullet (0,0002)^4} =$

83) $(700.000)^3 \div \left(3,5\cdot 10^7\right)^2 =$

84) $2\cdot\left[-0.000012+3\cdot(0.000025-4,2\cdot 10^{-4})\right]=$

85) $\dfrac{-\left(6\cdot 10^{14}+150.000.000 \div 0,00000030\right)}{1,1\cdot 10^7.(-2.000.000)} =$

86) $\dfrac{1.000.000.000}{3.10^9}+\dfrac{\frac{2}{3}\cdot 10^9}{1.000.000.000}-1 =$

87) $\dfrac{1.400.000.000}{0,0000000056}-2(\frac{1}{6}\cdot 10^{17}-\frac{2}{3}\cdot 10^{17})=$

88) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}\cdot 10^{-3}-\frac{1}{4}\cdot 10^{-3}} \div \dfrac{0,010.000.000}{0,000000009} - =$

89) $(-30)\cdot\dfrac{40.000.000.000}{-80.000.000.000}+\dfrac{\left(\frac{3}{8}\cdot 10^5\right)^2}{\left(-\frac{6}{16}\cdot 10^2\right)^5}+2=$

Colocar el signo de menor (<), mayor (>) o igual (=) según corresponda:

90) $5,64 \,.\, 10^4$ ...... $0,64 \,.\, 10^5$
91) $5,64 \,.\, 10^{-4}$ ...... $5,64 \,.\, 10^{-5}$
92) $-5,64 \,.\, 10^{-4}$ ...... $-5,64 \,.\, 10^{-5}$
93) $1,7 \,.\, 10^7$ ...... $1,70 \,.\, 10^7$
94) $-1,708 \,.\, 10^2$ ...... $1,708 \,.\, 10^2$
95) $-1,708 \,.\, 10^2$ ...... $1,708 \,.\, 10^{-2}$
96) $-1,708 \,.\, 10^2$ ...... $-1,708 \,.\, 10^{-2}$
97) $3,011 \,.\, 10^{-5}$ ...... $3,011 \,.\, 10^{-6}$
98) $-3,011 \,.\, 10^{-5}$ ...... $0,3011 \,.\, 10^{-6}$
99) $5,52 \,.\, 10^2$ ...... $-5,52 \,.\, 10^{32}$
100) $-5,52 \,.\, 10^{-2}$ ...... $-5,52 \,.\, 10^{32}$
101) $5,52 \,.\, 10^2$ 552
102) $5,52 \,.\, 10^{-2}$ ...... $-0,052$
103) $1,2 \,.\, 10^6$ ...... $1,28 \,.\, 10^6$
104) $9,60 \,.\, 10^{-7}$ ...... $9,6 \,.\, 10^{-7}$
105) $-9,89 \,.\, 10^3$ 9890
106) $9,89 \,.\, 10^{-3}$ 9890
107) $-9,89 \,.\, 10^{-3}$ ...... $-0,00989$
108) $5,13 \,.\, 10^3$ ...... $5,13 \,.\, 10^{-3}$
109) $3,28 \,.\, 10^{-2}$ 328
110) $-8,49 \,.\, 10^{-9}$ ...... $-8,49 \,.\, 10^9$
111) $2,73 \,.\, 10^8$ ...... $2,73 \,.\, 10^{-8}$
112) $4,21 \,.\, 10^6$ ...... $-4,21 \,.\, 10^{-6}$
113) $6,11 \,.\, 10^2$ 611
114) $1,19 \,.\, 10^{-3}$ ...... $0,0019$
115) $1,19 \,.\, 10^{-3}$ ...... $0,0012$
116) $-1,19 \,.\, 10^{-3}$ ...... -5
117) $-7,57 \,.\, 10^{-5}$ ...... -757000
118) $5,93 \,.\, 10^7$ ...... $59.300.000$
119) $2,81 \,.\, 10^{-3}$ ...... $0,0281$
120) $8,45 \,.\, 10^{-8}$ ...... $-8,45 \,.\, 10^8$
121) $9,3 \,.\, 10^3$ 9300

- Ejercicios Integradores de Aplicación:

122) Sabiendo que el peso aproximado de un átomo de Oro es de $3,27 \,.\, 10^{-22}$ gramos. ¿Cuántos miligramos pesan 1.000.000.000.000.000 átomos?

123) Si el precio del gramo de oro puro es \$25 ¿Me alcanzan 10 centavos para comprar la cantidad de átomos del problema anterior?

124) La cantidad normal de glóbulos rojos en una persona adulta es entre $2 \,.\, 10^{13}$ y $2,6 \,.\, 10^{13}$. Florencia se hizo un análisis de sangre y detectaron que tiene 4 millones y medio de glóbulos rojos por cada milímetro cúbico de sangre. Suponiendo que Florencia tenga 5 litros de sangre ¿Están sus glóbulos rojos dentro del rango normal? (Nota: $1mm^3 = 1 * 10^{-6}$ Litros)

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Introducción a Función Lineal

Número de Tema: **40**

Área: **Matemática**

Relaciones entre dos variables: Por ejemplo, podemos relacionar las variables: "Tiempo que tardo en pintar una pared" y "superficie de la pared", si relacionamos estas dos variables mediante una fórmula, estamos creando una función. Por ejemplo, podemos decir que el tiempo en minutos que tardo en pintar una pared, es la superficie en metros cuadrados multiplicada por dos, ya que supuestamente tardaría 2 minutos para pintar cada metro cuadrado. Entonces la fórmula quedaría de la siguiente manera:

"Minutos que tardo en pintar una pared" = "Metros cuadrados de la pared" x 2

Ahora para simplificar su escritura, puedo ponerles nombres a las variables.
Como el tiempo que tardo en pintar la pared depende de la superficie, pongámosle como nombre **"x" a la superficie, y f(x) al tiempo que tardo**. De esta manera estamos simbolizando matemáticamente que el tiempo es una función de la superficie.
Con esta nomenclatura nos quedaría la fórmula anterior escrita de la siguiente manera: $\boxed{F(x) = 2 \, . \, X}$

Las funciones Afines son todas las funciones que relacionan "F(x)" con "X" de la siguiente manera: $\boxed{F(x) = a \, . \, X + b}$

Esto es lo mismo que decir que para que una función, sea efectivamente una función Afín, la "x" debe estar multiplicada por un número cualquiera al que llamamos "a" y puede estar sumada o restada a otro número que llamamos "b" (Que puede ser cero). Entonces toda fórmula que encuentren que tenga esa forma, representa a una función Afín.

Nota: De ahora en más llamaremos indistintamente a las funciones afines o lineales, más allá de las diferencias ya que nuestra materia de estudio se concentrará en otros focos.

Ejemplos:

$F(x) = -3x + 2 \Rightarrow$ ✓ Es Función Afín

$F(x) = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow$ No es Función Lineal

$F(x) = \frac{1}{3}x - 5 \Rightarrow$ ✓ Es Función Afín

$F(x) = \frac{x^3 + 1}{x} \Rightarrow$ No es Función Lineal

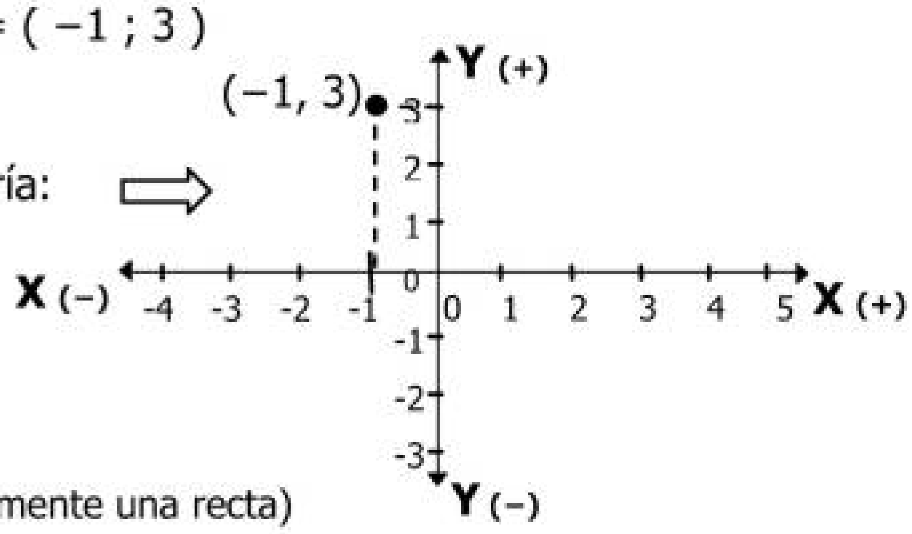
☆ Ubicando puntos en el plano: Como en funciones lineales vamos a trabajar con el plano cartesiano veamos antes de empezar, como ubicar puntos en el plano cartesiano (llamado tambien plano X-Y).

Los puntos en un plano cartesiano, tienen 2 coordenadas, que son justamente la coordenada de "x" y la coordenada de "Y".

Un punto en el plano se simboliza de la siguiente manera: P = (−1 ; 3)
La primera coordenada es la de "X" y la segunda la de "Y"

Por lo tanto si ubicamos el punto P = (−1 ; 3) en el plano sería: ⇒

Coordenada "x"   Coordenada "Y"



☆ Graficando rectas: (A toda función afín le corresponde graficamente una recta)

La forma de la ecuación de una recta es **Y = "a" . X + "b"** ("Forma Explícita")
Donde "a" y "b" son dos números reales cualesquiera (Pero "a" debe ser distinto de 0)

Para comenzar a graficar Rectas, vamos a ir a un caso sencillo: $y = 2.x + 1$
Donde "a" vale 2 y "b" vale 1. Preparemos una **Tabla de Valores**: La **Tabla de Valores** tiene 2 columnas:

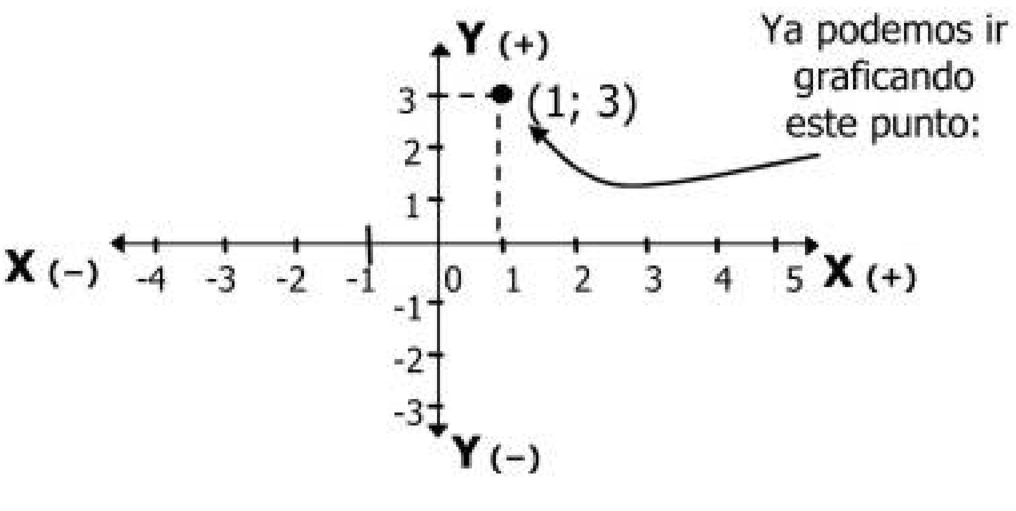
- En la primera columna, **inventamos** los valores que le damos a la **x**. La variable **x** es **independiente**.
- En la segunda columna, **calculamos** los valores que va tomando **y** según cada valor de **x**. La variable **Y** se llama variable **dependiente**

Comencemos asignándole a x el valor 1...

Partimos de la fórmula
De la ecuación de la recta

$y = 2.x + 1$ si $x = 1$ $y = 2.1 + 1 = 3$

Si **x** vale:	Entonces **y** vale:
1	**3** Reemplazamos la "X" por 1 y calculamos lo que vale "Y"

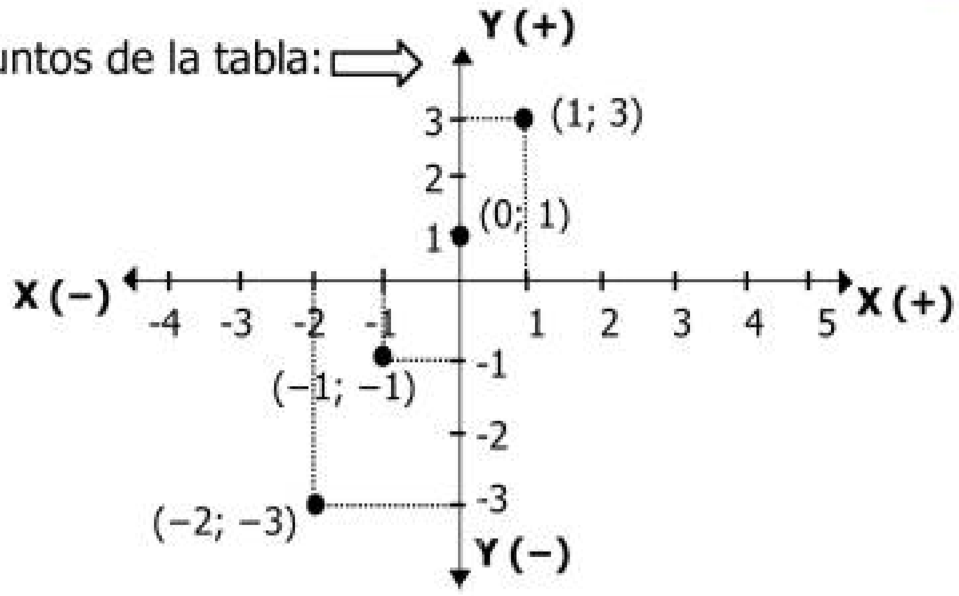


Y probando con otros puntos:

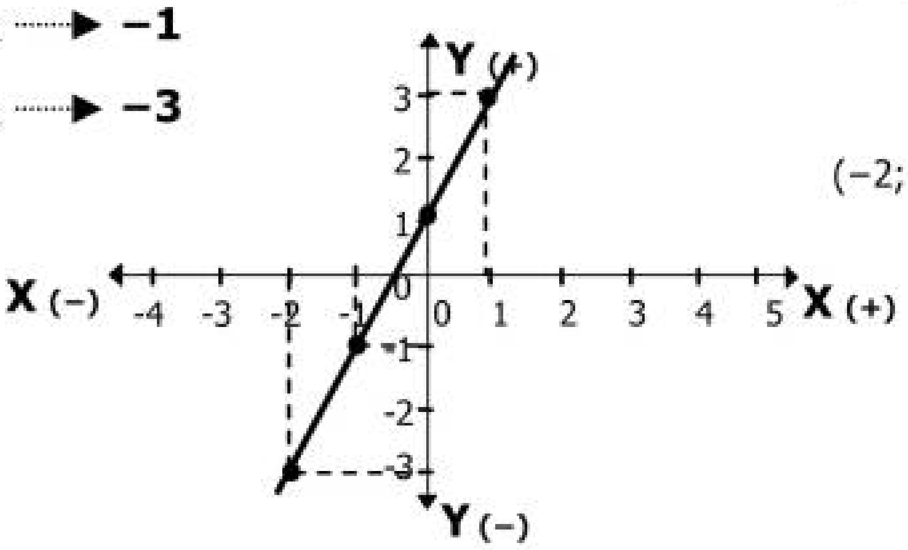
Si **x** vale	Entonces **y** vale:
1 ►	2.1+1 ► **3**
0 ►	2.0+1 ► **1**
−1 ►	2.(−1)+1 ► **−1**
−2 ►	2.(−2)+1 ► **−3**

Para calcular la variable "**y**" siempre remplazamos "X" por el número que elegimos en cada fila.

Graficamos los puntos de la tabla: ⇨



Por último, unimos estos puntos y tenemos ya graficada la recta..



Bueno, hasta acá, vimos como graficar una recta haciendo la tablita de valores, esto siempre es válido, incluso para graficar cualquier función, pero en el caso de las rectas vamos a ver ahora una manera mas directa y rápida de graficarlas, para eso veamos primero en detalle la "**ecuación explícita de la recta"**

Algo de esto ya dijimos, la **ECUACIÓN EXPLÍCITA** de una recta tiene la forma: $y = a \cdot x + b$

"a" es un número real al que llamamos **Pendiente** de la recta

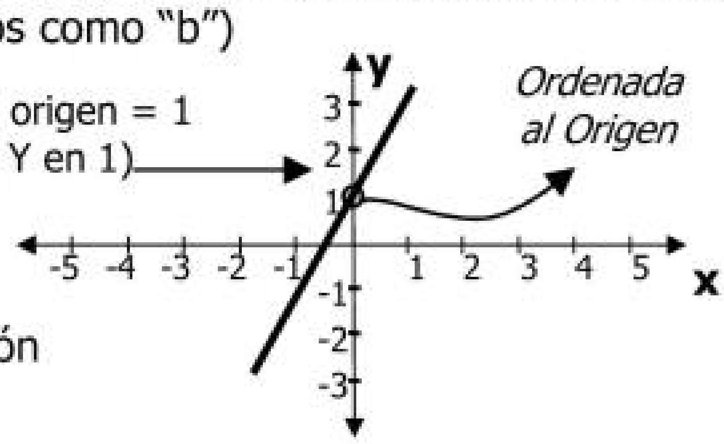
"b" es otro número al que llamamos **ordenada al origen**

☆ **Pendiente y Ordenada al Origen**: Vamos a ver ahora cómo graficar estas rectas en función del significado de la letras "a" y "b", o sea de la pendiente y la ordenada al origen de las rectas.

⇨ **La Ordenada al Origen:** Es el valor que toma "y" cuando "x=0" y este valor nos indica donde la recta corta al eje Y. (En la fórmula general la expresamos como "b")

La recta que graficamos antes era $Y = 2X + 1$

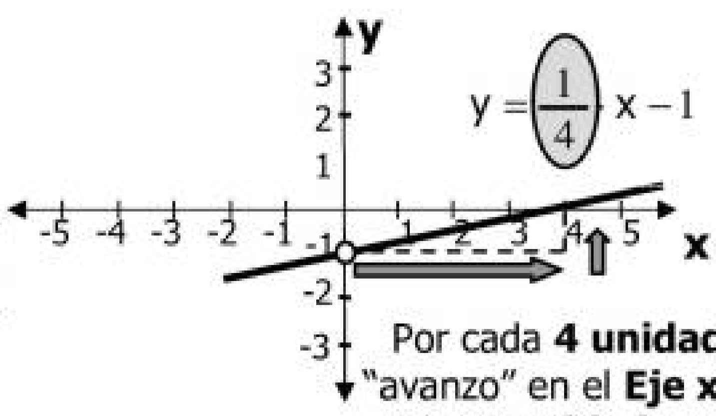
Ordenada al origen = 1
(corta al eje Y en 1)



⇨ **La Pendiente**: Este valor lo que nos indica es la inclinación de la recta (En la fórmula general la expresamos como "a")...
Veamos como graficar una recta a partir de su pendiente.

Ejemplo: Grafiquemos la recta: $y = \frac{1}{4} \cdot x - 1$

Lo primero que hacemos es ubicar la ordenada al origen, porque sabemos que la recta va a cortar al eje Y en ese punto, por lo tanto ya tenemos un punto de partida para graficar la recta. Marcamos entonces el −1 sobre el eje Y (y a partir de ese punto ubico otro punto según la pendiente)

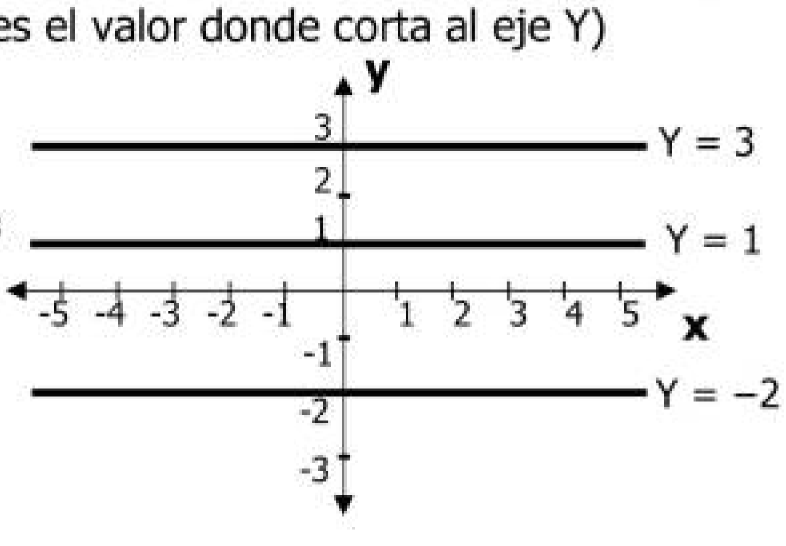


Por cada **4 unidades** que "avanzo" en el **Eje x**, la recta sube **1 unidad** en el **Eje y**

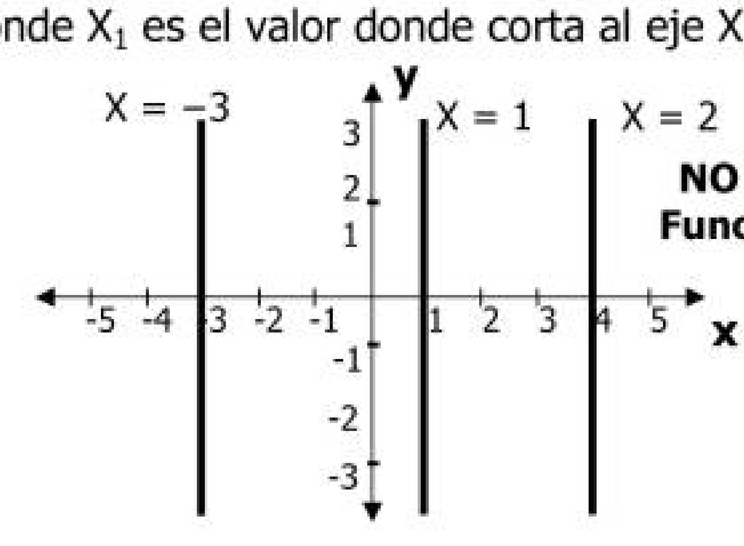
☆ **Rectas Verticales y Horizontales**:

☆ Rectas Horizontales: La ecuación es: $Y = Y_1$
(Donde Y_1 es el valor donde corta al eje Y)

Funciones Constantes



☆ Rectas Verticales: La ecuación es: $X = X_1$
(Donde X_1 es el valor donde corta al eje X)



NO SON Funciones

Ubicar en el plano los siguientes puntos:

A = (2 ; 3) F = (−5 ; −9) K = (−2/3 ; 0) P = (3/2 ; 5/2)
B = (1 ; 5) G = (−3 ; −1) L = (−1/4 ; −1/2) Q = (−1/2 ; −1/2)
C = (0 ; 4) H = (1,2 ; −2) M = (1/5 ; −6)
D = (3 ; −1) I = (3/5 ; 2) N = (0 ; 0)
E = (−2 ; 0) J = (2/3 ; −1) O = (−2/3 ; −3)

➢ Decir cuáles de las siguientes funciones son funciones Afines:

2) $f_{(x)} = x+1$ 6) $f_{(x)} = \frac{3}{2}x + 2$ 10) $f_{(x)} = 2+x^2$ 14) $f_{(x)} = \frac{2}{x}$

3) $f_{(x)} = -x+1$ 7) $f_{(x)} = \frac{-3}{2}x - 2$ 11) $f_{(x)} = x + \sqrt{2}$ 15) $f_{(x)} = 2x$

4) $f_{(x)} = x^2+1$ 8) $f_{(x)} = 2 + \frac{3}{2}x$ 12) $f_{(x)} = \sqrt{x+2}$ 16) $f_{(x)} = -2$

5) $f_{(x)} = x^2+x+1$ 9) $f_{(x)} = 2^2 + x$ 13) $f_{(x)} = \frac{x}{2}$ 17) $f_{(x)} = 0$

➢ Interpretar las siguientes situaciones y escribir la función f(x) que represente a cada caso:

Martín escribe con el teclado de la computadora 50 palabras por minuto.
18) Escribir una función f(x) que represente la cantidad de palabras en función de los minutos.
19) Escribir una función f(x) que represente la cantidad de palabras en función de las horas.
20) Escribir una función f(x) que represente la cantidad de minutos en función de la cantidad de palabras.

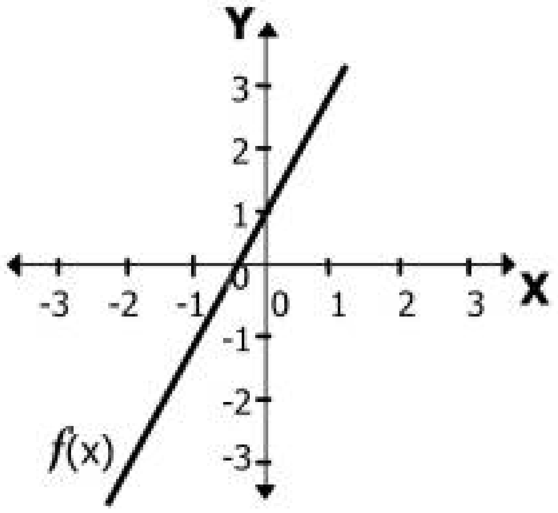
21) El valor actual de cierta clase de antigüedad es igual a $100 más 50 pesos por cada año de antigüedad. Escribir la función f(x) que represente al valor actual de la antigüedad en función de los años de antigüedad.

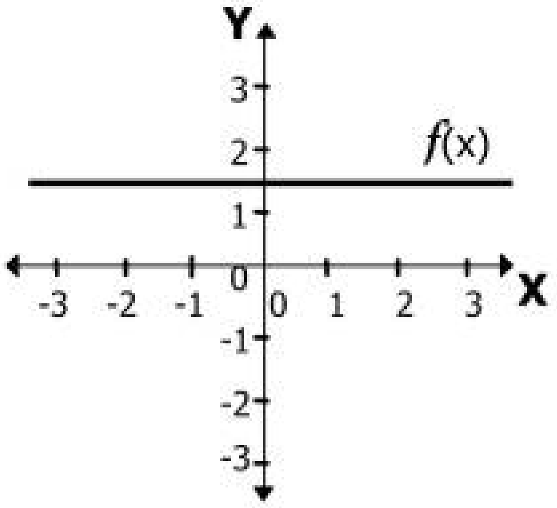
22) La población de una ciudad en 1995 era de 1.000.000 de habitantes, suponiendo que en esa ciudad la población va aumentando constantemente en 10.000 habitantes por año, plantear la función f(x) que represente la población de la ciudad en función del año.

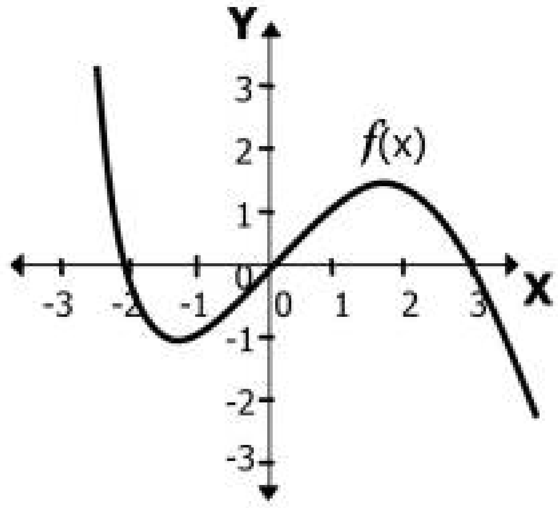
23) El valor de un Auto 0 km es de $14.000. Suponiendo que este valor va disminuyendo en forma constante $1.000 por cada año que pasa, Escribir la función f(x) que represente el valor del auto en función de la cantidad de años que hace que se fabricó.

24) Una persona va viajando en auto por la autopista a una velocidad constante de 80 km/hora. Escribir la función f(x) que represente el espacio recorrido en función del tiempo.

➢ Indicar cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones lineales:

25)


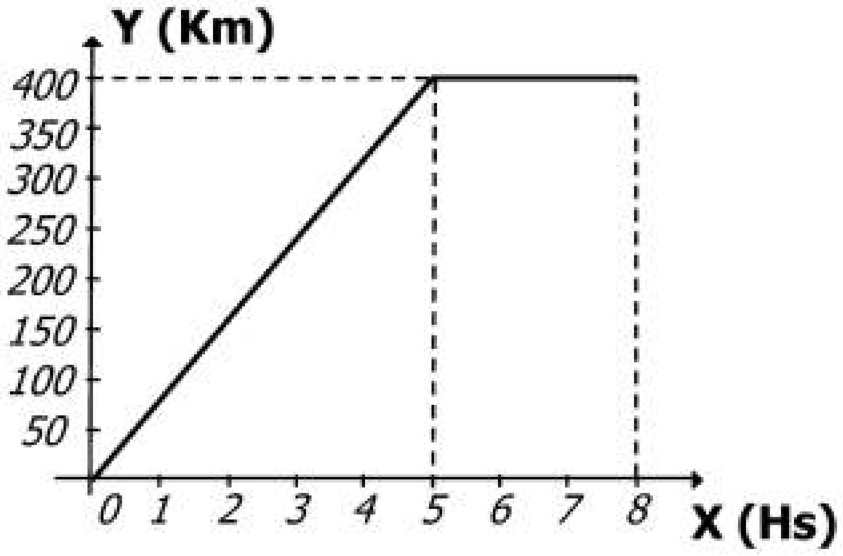
26)


27)


28) Graficar una función lineal cualquiera, no importa la fórmula, pero que pase por el punto (2 ; −5) en el plano X−Y.

29) Dibujar en el plano X−Y, una función lineal que pase por los puntos (−1 ; 2) y (2 ; − 1) y marcar bien los puntos sobre el plano.

30) El siguiente gráfico muestra la distancia recorrida por un auto en función del tiempo transcurrido:



a) ¿Qué tipo de función representa a la distancia recorrida en función del tiempo para las primeras 5 horas?

b) ¿Qué tipo de función representa a la distancia recorrida en función del tiempo para las últimas 3 horas?

c) ¿Qué espacio recorre en las últimas 3 horas?

d) ¿Cuál es la velocidad en las primeras 5 horas?

e) Qué espacio recorre en las primeras 2 horas?

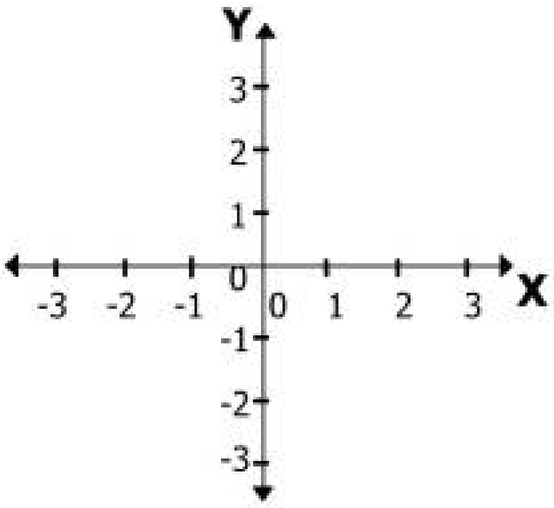
f) ¿Qué relación hay entre la velocidad en las primeras 5 horas y la pendiente de la ecuación de la recta en ese mismo tramo?

➢ Dada la función f(x) Completar las tablas y con los puntos de dichas tablas, graficar la función

Comparar luego los gráficos y analizar las similitudes

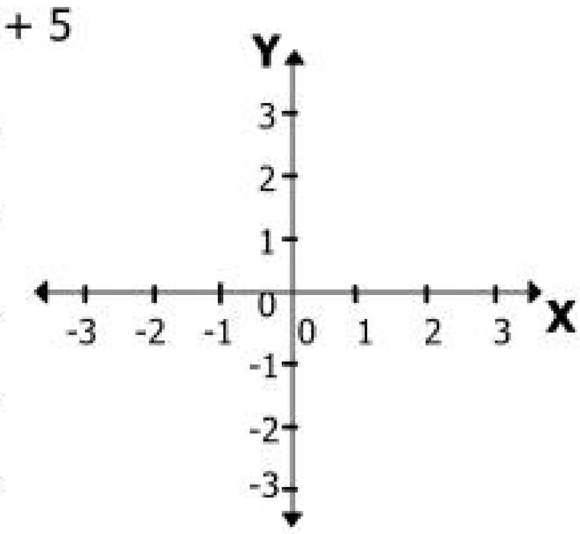
31) f(x) = x

X	Y
−2	
−1	
0	
1	
2	



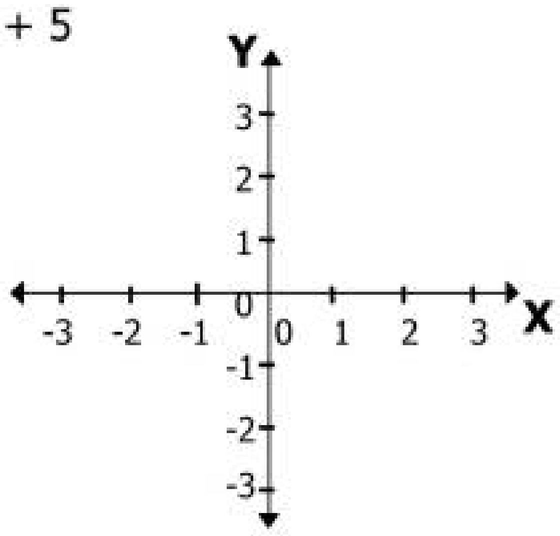
32) f(x) = x + 5

X	Y
−2	
−1	
0	
1	
2	



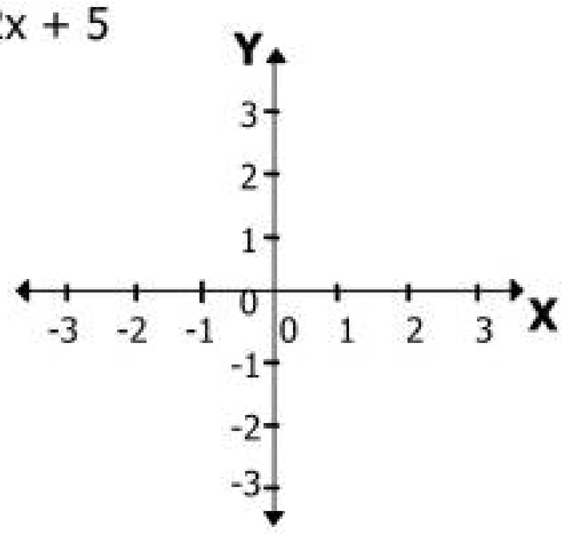
33) f(x) = 2x + 5

X	Y
−2	
−1	
0	
1	
2	



34) f(x) = −2x + 5

X	Y
−2	
−1	
0	
1	
2	



➢ Graficar en el plano X−Y las siguientes **funciones lineales** (Puede usarse la "tablita de valores"):

35) $f_{(x)} = x + 1$

36) $f_{(x)} = 2x + 1$

37) $f_{(x)} = \frac{1}{2}x + 1$

38) $f_{(x)} = 2x + 3$

39) $f_{(x)} = 2x - 3$

40) $f_{(x)} = 2x - 1$

41) $f_{(x)} = 2x$

42) $f_{(x)} = -x + 1$

43) $f_{(x)} = -x + \frac{1}{3}$

44) $f_{(x)} = -\ 2x + 2$

45) $f_{(x)} = -2x - 2$

46) $f_{(x)} = -\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

47) Sea f(x) = 5x + 6

a) Determinar f(4)

b) Determinar f(−2)

c) Hallar el valor donde la recta corta al eje Y

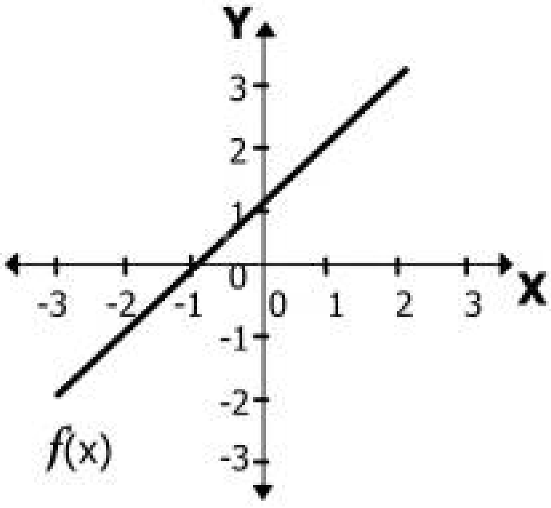
d) Hallar el valor donde la recta corta al eje X

e) Determinar el valor de "x" para el cual f(x) = −14

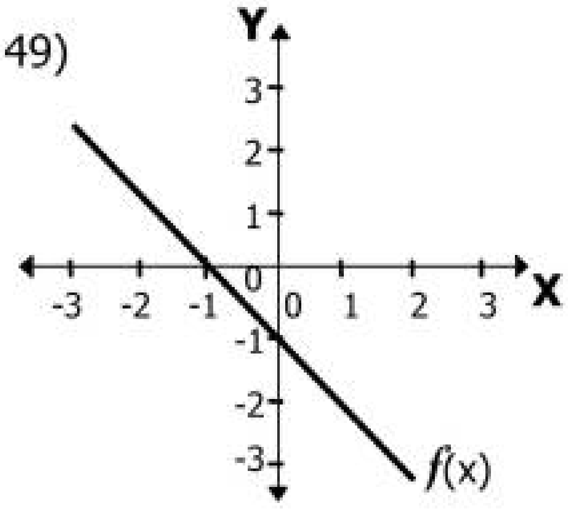
f) Determinar el valor de "x" para el cual f(x) = 16

➢ <u>Dados los siguientes gráficos de funciones lineales, determinar la **ordenada al origen** en cada caso</u>:

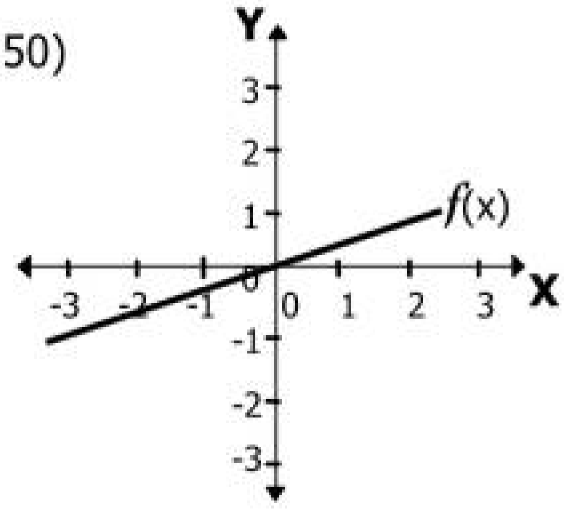
48)



49)

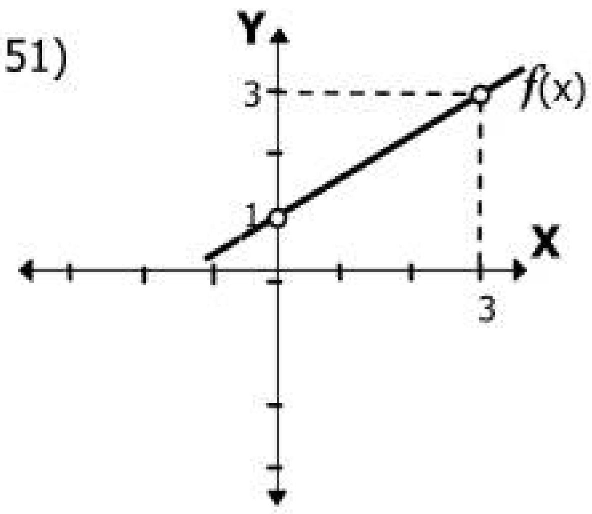


50)

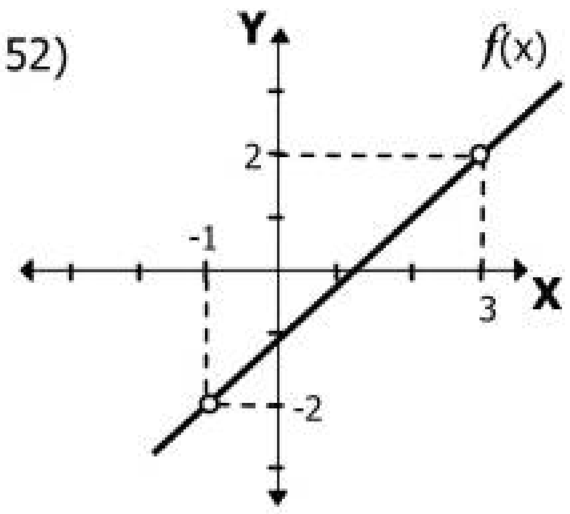


➢ <u>Dados los siguientes gráficos de funciones lineales, determinar la **pendiente** en cada caso</u>:

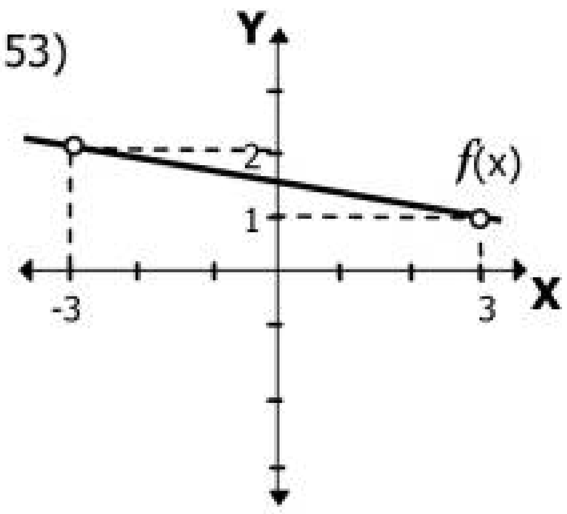
51)



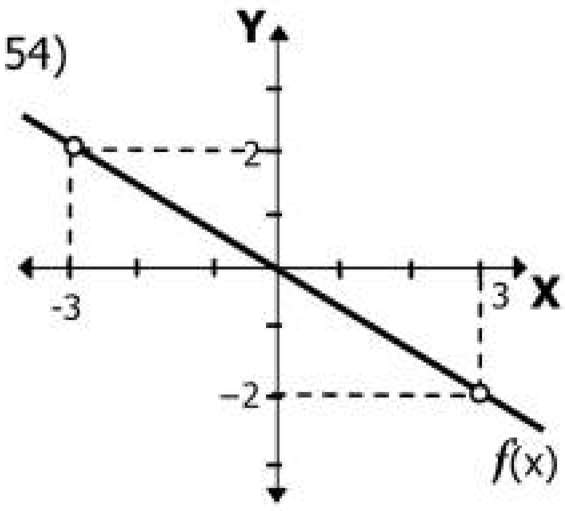
52)



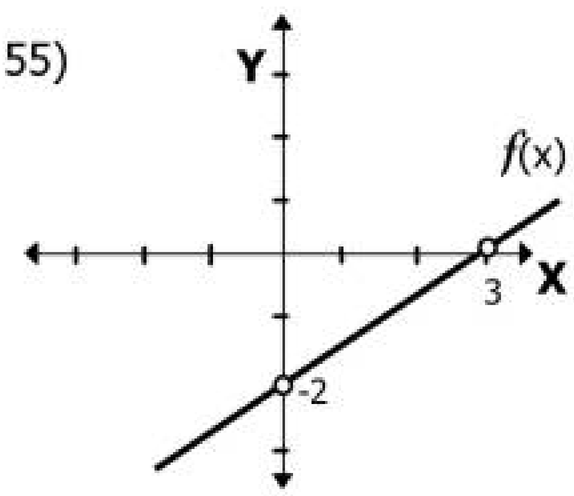
53)



54)



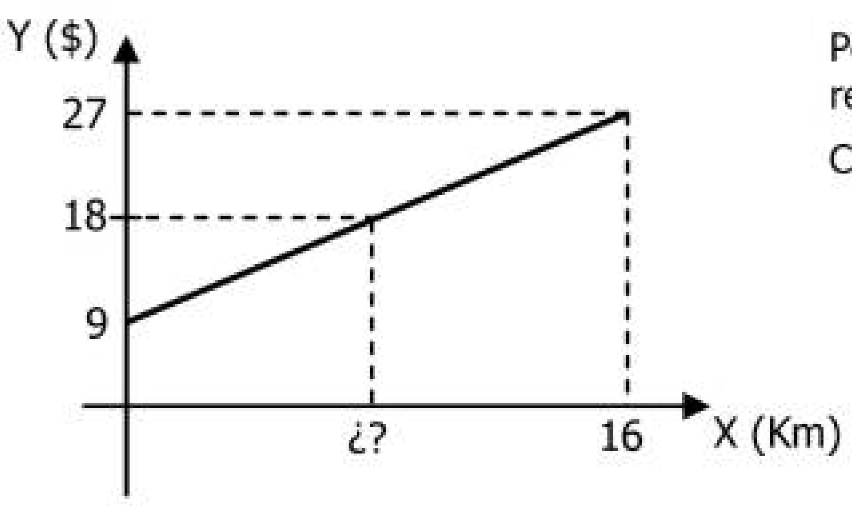
55)



56) Graficar en el mismo plano dos rectas cualesquiera con la condición de que ambas tengan la misma pendiente. Ejemplo: Recta(1): $f(x) = \mathbf{3}x + 2$ Recta (2): $f(x) = \mathbf{3}x + 5$
¿Cómo resultan en el gráfico ambas rectas? Sacar conclusiones.

57) ¿Cuántas rectas se pueden graficar, como máximo, en un mismo plano tales que todas pasen por el punto $Q = (2 ; 3)$? ¿Por qué?

58) ¿Cuántas rectas se pueden graficar, como máximo, en un mismo plano tales que todas tengan la misma ordenada al origen ? ¿Por qué?



El gráfico muestra el precio de un taxi en la ciudad de caracas en función de los kilómetros recorridos.

Por el solo hecho de parar el taxi, más allá de los kilómetros que se recorran se cobra un fijo de $9.

Como se puede ver, para 16 Km, el precio total del viaje es de $27.

59) ¿Cuál es la ordenada al origen de está función?

60) ¿Cuánto se cobra el kilómetro? (Sin tener en cuenta el fijo)

61) ¿Cuál es la pendiente?

62) Si nos cobran $18 ¿Cuántos kilómetros recorrimos?

63) Si recorro 36 Km ¿Cuánto me cuesta el viaje?

➢ Unir con flechas las funciones a los gráficos que le corresponden:

64) 2 = X

65) f(x) = 2X

66) f(x) = 1/3 X + 1

67) f(x) = –X

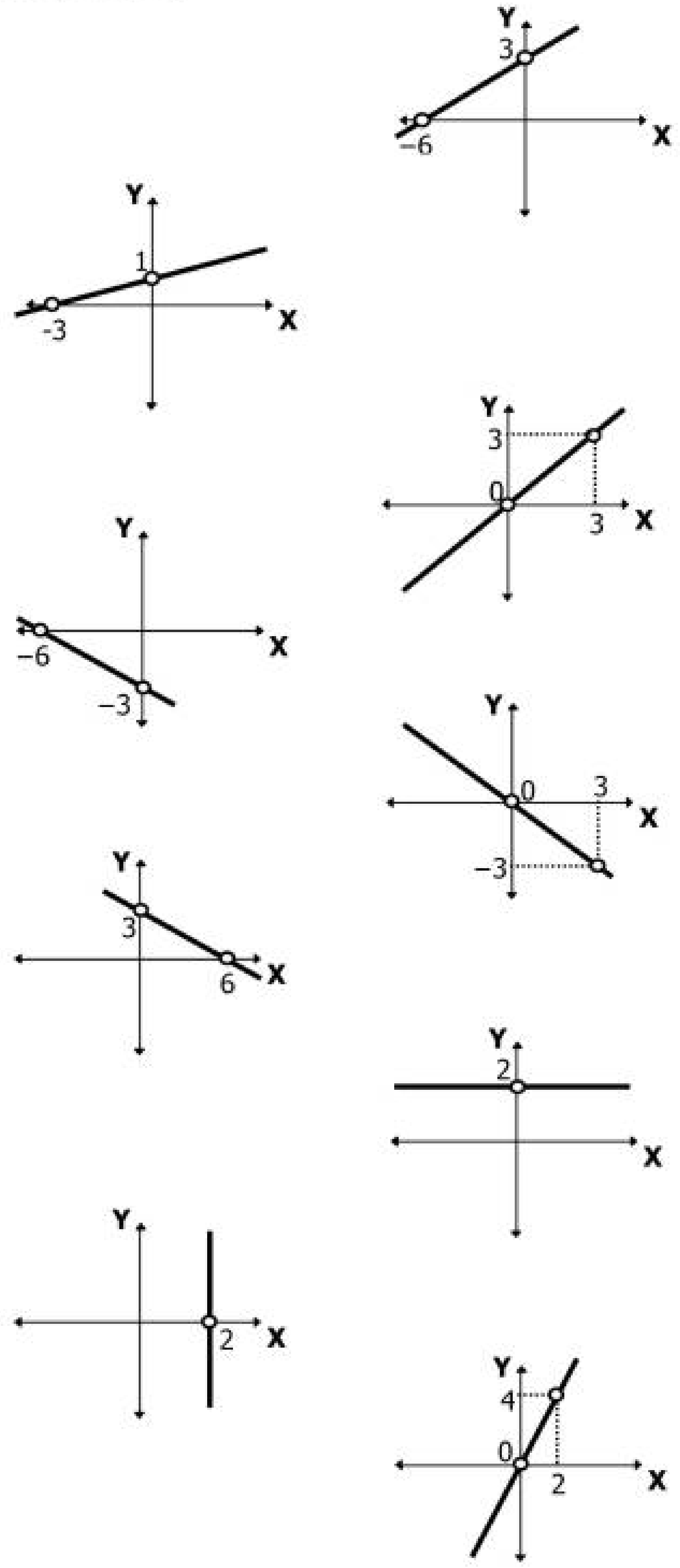
68) f(x) = X

69) f(x) = 2

70) f(x) = –1/2 X + 3

71) f(x) = –1/2 X – 3

72) f(x) = 1/2 X + 3



Graficar en forma aproximada las siguientes funciones lineales, esta vez sin usar tabla de valores, sino, partiendo de la ordenada al origen y utilizando el valor de la pendiente:

73) $f_{(x)} = 2x + 2$ 76) $f_{(x)} = \frac{2}{3}x + 5$ 79) $f_{(x)} = -\frac{3}{2}x$ 82) $f_{(x)} = -\frac{2}{5}x + 4$

74) $f_{(x)} = 2x - 5$ 77) $f_{(x)} = \frac{3}{2}x - 2$ 80) $f_{(x)} = -x + 2$ 83) $f_{(x)} = -\frac{5}{2}x + 4$

75) $f_{(x)} = \frac{1}{2}x + 3$ 78) $f_{(x)} = \frac{-2}{3}x$ 81) $f_{(x)} = -\frac{1}{5}x + 1$ 84) $f_{(x)} = \frac{5}{2}x + 4$

➢ Decir cuáles de los puntos enumerados a continuación pertenecen a la recta f(x) = 2x + 1 y cuáles no pertenecen. Verificar en forma aproximada en un gráfico.

85) P = (1 ; 3) 89) P = (−1/2 ; 0) 93) P = (5 ; 11) 97) P = (−2 ; −3)
86) P = (−1 ; −1) 90) P = (−5 ; 11) 94) P = (0 ; 0) 98) P = (−2 ; 3)
87) P = (0 ; −1) 91) P = (5 ; − 11) 95) P = (0 ; 1)
88) P = (−1 ; 0) 92) P = (−6 ; −11) 96) P = (−2 ; 5)

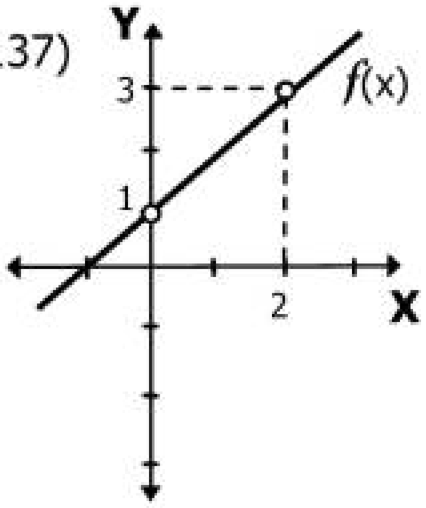
Dada la función lineal: $y = 2/3\,x + 1$
Completar las coordenadas de los siguientes puntos si sabemos que todos ellos están incluidos en la recta.

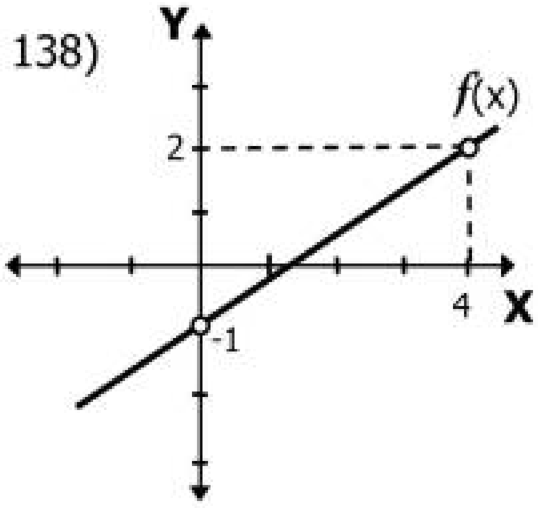
99) P = (3 ; .....)
100) P = (−1 ; ...)
101) P = (.... ; 5)
102) P = (.... ; 1)
103) P = (0 ; ....)
104) P = (−3/2 ; ....)
105) P = (.... ;−1)
106) P = (.... ;−3)
107) P = (3a ; ....)
108) P = (.... ; 4a + 1)

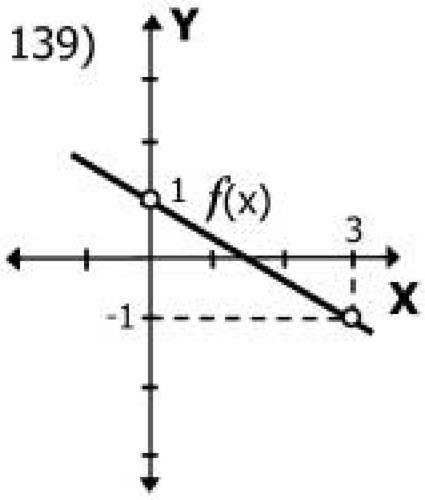
Dada la función lineal: **F(x)**, con **pendiente −1/2 y ordenada al origen 1**
Y sea **G(x)** otra función lineal con la **misma pendiente** que f(x) pero con **ordenada al origen 2.** Hallar:

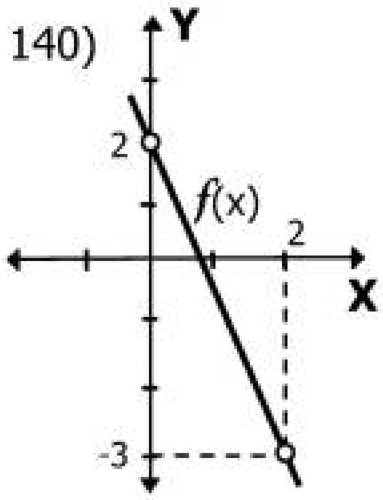
109) $f(0) =$
110) $f(2) =$
111) $f(-2) =$
112) $-f(-2) =$
113) $x \,/\, f(x) = 1$
114) $x \,/\, f(x) = 2$
115) $x \,/\, f(-x) = 2$
116) $x \,/\, f(-x) = -1$
117) $x \,/\, -f(-x) = 1$
118) $x \,/\, -f(-x) = -1$
119) $-g(0) =$
120) $-g(4) =$
121) $x \,/\, g(x) = 0$
122) $x \,/\, g(-x) = -1$
123) $x \,/ -g(-x) = -2$
124) $f(0) - g(0) =$
125) $f(-2) + g(-2) =$
126) $3\,f(-4) - 2\,g(0) =$
127) $4\,f(1) - 5\,g(-6) =$
128) $x \,/\, f(x) + g(x) = 2$
129) $x \,/\, f(x) + g(x) = 4$
130) $x \,/\, 2\,f(x) + 3\,g(x) = -4$
131) $x \,/\, 2\,f(x) + 3\,g(x) = 0$
132) $x \,/\, 2\,f(x) + 3\,g(x) = -\,7/2$
133) $x \,/\, 3\,f(-x) + g(-2x) = 0$
134) $x \,/\, 3\,f(-x) + g(-2x) = 5$
135) $x \,/\, f(x+4) + g(x-6) = 1$
136) $x \,/\, f(x+4) + g(x-6) = 4$

Graficar las rectas que pasan por los puntos dados y dar la ecuación de la recta graficada en cada caso:

137)


138)


139)


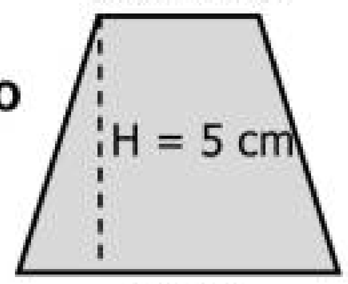
140)


Ejercicios Integradores y de Aplicación:

En una fábrica de cerámicas, diseñaron un innovador modelo de cerámica con forma de trapecio isósceles. Tienen definidas todas las medidas del nuevo diseño, excepto la medida de la "Base Menor" Para terminar de definir esta medida, los diseñadores necesitan saber algunas cosas que esperamos puedas ayudarlos a contestar:

Base Menor

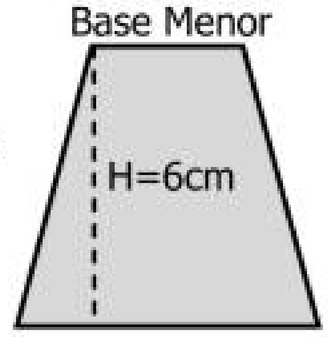
MODELO "A"



8 cm

Base Menor

MODELO "B"



6 cm

141) ¿Cuál sería la función que represente el área de la cerámica "A" en cm^2?

142) ¿Cuál sería la función que represente el área de la cerámica "B" en cm^2?

143) ¿Cuál sería el valor en cm de la Base menor de la cerámica "A" si necesitan que el área fuera de 27 cm^2?

144) Si se necesita que para cubrir un área de $1m^2$ se usen exactamente 400 cerámicas "A" ¿Cuál debe ser el valor de su base menor?

145) Realizar un gráfico a escala con las dos funciones (Ejercicios 141 y 142)

146) Según lo observado en el gráfico del ejercicio anterior:
¿Para qué valor de las bases, los modelos tienen la misma área?

Recordatorio: Fórmula de Área del Trapecio Isósceles: $\text{Área} = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2}$

Según los datos de un censo la población de cierta ciudad hace 4 años era de 2.000 personas, en el censo actual dicha población registra el valor de 12.227 personas

Las autoridades suponen que dicho crecimiento se debe a la reactivación que produce en la zona una nueva autopista nacional que se inauguró en la fecha del primer censo) A su vez las autoridades estiman que dicho crecimiento se fue dando en **forma lineal** en los últimos 4 años y estiman además que también puede mantenerse el mismo ritmo de crecimiento en los próximos 12 años.

Las autoridades tienen muchas preguntas a responderse y requieren realizar un modelo matemático para poder estimar las respuestas necesarias (Si bien saben que pueden haber muchos factores que interfieran en el modelo, les interesa tener una estimación para responder las preguntas)

Suponer entonces que la población de la ciudad es una función lineal que varía (En este caso aumenta) según pasan los días (Usar los días como unidad de "x") Luego responder el siguiente cuestionario:

147) ¿Cuál es la función lineal que representa la población de la ciudad en función del día exacto en que quiera saberlo? (Tomar como día 0, el día del primer censo)

148) ¿Cuál será la población de dicha ciudad dentro de exactamente 12 años?

149) ¿Cuál será la población de la ciudad exactamente dentro de 8 años , 3 meses y 2 días? (Suponiendo que estamos hoy entre mayo y agosto)

150) La terminal de micros de la ciudad está diseñada para un máximo de sólo 20.000 habitantes ¿Cuánto tiempo tienen las autoridades para ampliarla antes de que colapse su funcionamiento?

151) ¿Llegará la población de esta ciudad en los próximos 12 años a la cantidad de 40.000 habitantes?

152) Graficar el "Modelo" de crecimiento hecho a una escala conveniente.

153) Si con un modelo como este al hacer un cálculo de población obtuviéramos un número Racional, o decimal ¿Qué significado práctico tendría?

Haciendo economía con los mensajes de texto:

Supongamos que por una promoción especial las compañías de celulares hacen las siguientes ofertas para envío de mensajes de texto:

- CTI: Cobra un Abono fijo de \$4 + un costo de \$0,08 por SMS enviado
- Movistar: Cobra un Abono fijo de \$6 + un costo de \$0,05 por SMS enviado
- Personal: Cobra un Abono Fijo de \$12 y ningún costo por SMS

(O sea que se pueden mandar ilimitada cantidad y siempre se pagarían los \$10 mensuales)

154) Escribir una función lineal que represente el costo mensual de tener CTI en función de la cantidad de SMS enviados por mes. Llamar a la función: C(x)

155) Idem al ejercicio anterior pero teniendo Movistar. Llamar a la función M(x)

156) Idem al ejercicio anterior pero teniendo Personal. Llamar a la función P(x)

157) En el mismo gráfico cartesiano graficar las tres funciones de los ejercicios anteriores. (Recomendaciones para usar las escalas adecuadas: Se recomienda usar para el eje "Y" 1 cuadradito de hoja cuadriculada por cada 50 centavos. Y para el eje "x", 1 cuadradito por cada 10 mensajes)

158) ¿Para qué rango de cantidad de SMS enviados por mes me conviene CTI según el gráfico?

159) ¿Para qué rango de cantidad de SMS enviados por mes me conviene Movistar según el gráfico?

160) ¿Para qué rango de cantidad de SMS enviados por mes me conviene Personal según el gráfico?

161) ¿Cuánto me puedo ahorrar por mes si elijo la mejor opción si en promedio mando 150 SMS por mes y actualmente tengo el plan de CTI?

Para: "i" y "k" diferentes cantidades de SMS que usan Martín y Mariana respectivamente por mes:

162) ¿Qué significado tiene: $C(i) > M(i)$? Interpretar su significado práctico.

163) ¿Qué significado tiene: $P(k) < M(k)$? Interpretar su significado práctico.

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Función Lineal

Nivel I

Número de Tema: **41**

Área: **Matemática**

Funciones Afines y Funciones Lineales:

Antes de comenzar, vamos a aclarar la diferencia entre ambas funciones:

- Las funciones lineales, son aquéllas funciones de proporcionalidad directa de la forma: $F(x) = a\,x$
  Estas funciones se llaman también de Proporcionalidad directa.

- En Cambio, las funciones afines son una forma más general: $F(x) = a \cdot x + b$, en las que tenemos un valor "b" además de una constante que multiplica a la "x".

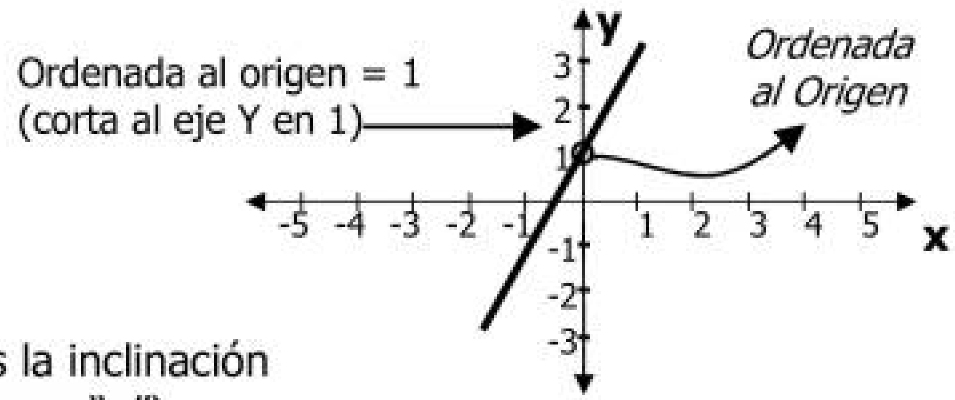
Esta diferencia hace simplemente a como llamemos a las funciones (Ya que todas las propiedades y cálculos que hagamos, no van a influir en nada en cuanto a esta diferencia en el nombre), aunque como se usa mucho el término de "función lineal", es común nombrarlas de esa manera, pero quería aclarar esta sutil diferencia para que lo tengan en cuenta.

Aclarado este punto vamos a comenzar a estudiar las funciones Afines o su forma particular de funciones lineales a continuación.

☆ **Pendiente y Ordenada al Origen**: Vamos a ver ahora por separado las dos cuestiones mas significativas para las funciones afines y su relación con las gráficas.

⇨ **La Ordenada al Origen:** Es el valor que toma "y" cuando "x=0" y este valor nos indica donde la recta corta al eje Y. (En la fórmula general **y=ax+b** la expresamos como "**b**")

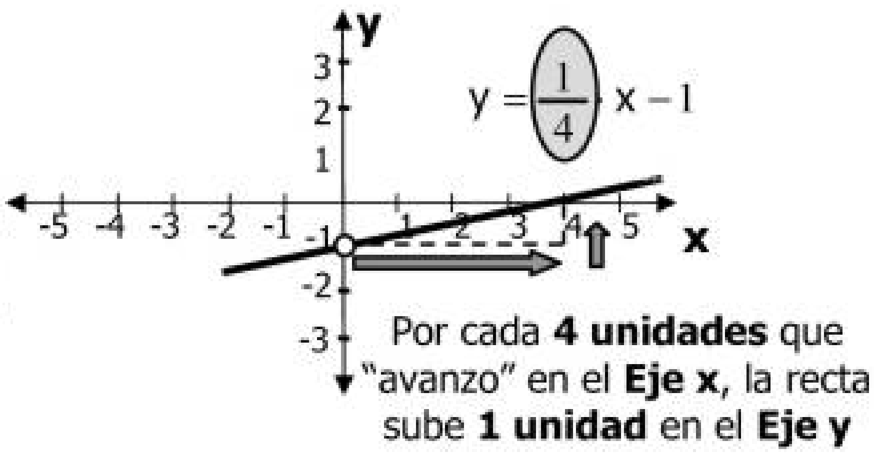
La recta que graficamos antes era $Y = 2X + 1$



⇨ **La Pendiente**: Este valor lo que nos indica es la inclinación de la recta (En la fórmula general la expresamos como "a")...
Veamos como graficar una recta a partir de su pendiente.

Ejemplo: Grafiquemos la recta: $y = \frac{1}{4} \cdot x - 1$

Lo primero que hacemos es ubicar la ordenada al origen, porque sabemos que la recta va a cortar al eje Y en ese punto, por lo tanto ya tenemos un punto de partida para graficar la recta. Marcamos entonces el –1 sobre el eje Y (y a partir de ese punto ubico otro punto según la pendiente)

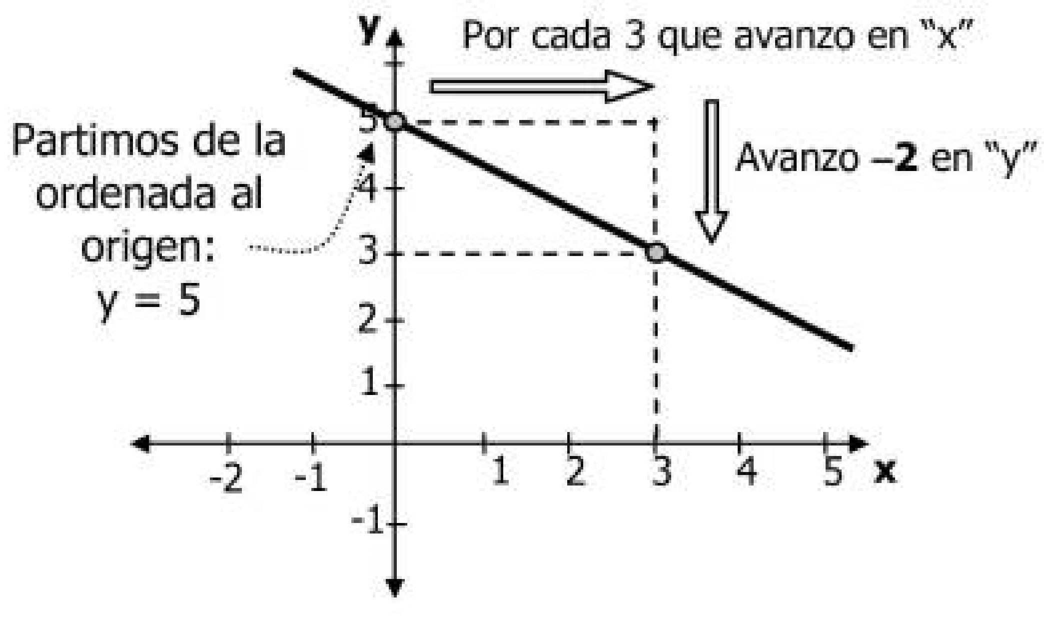


Veamos otro ejemplo: Grafiquemos $y = \frac{-2}{3} \cdot x + 5$

En este caso, la pendiente es: –2/3
Por lo tanto por cada 3 unidades que avanzo en "x"
Retrocedo 2 unidades en "y"

Y la Ordenada al Origen es: +5
O sea que cortará al eje "y" en 5

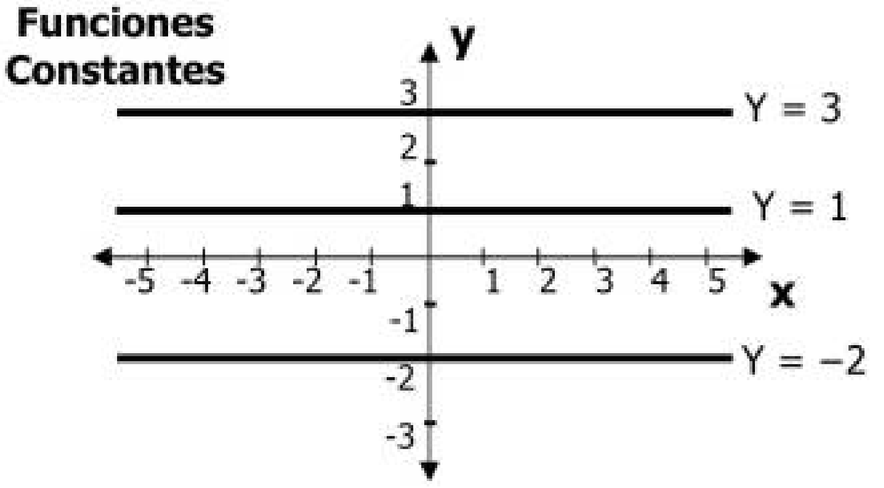
Y graficamos la recta, comenzando por la ordenada al origen, en este caso 5, que es donde la recta corta al eje "y", y luego, guiándonos por la pendiente ubicamos otro punto para poder unirlos y graficar la recta.



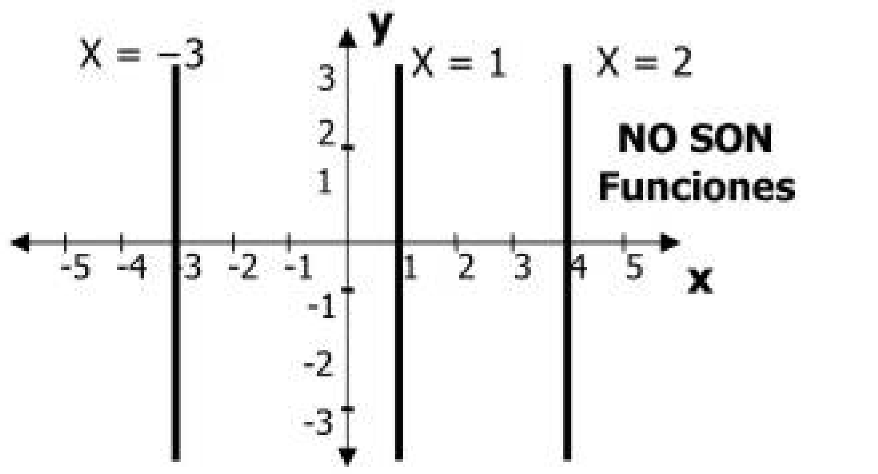
✰ **Rectas Verticales y Horizontales:** Vamos a ver a continuación dos casos muy particulares de rectas, las rectas verticales y las horizontales, ya que estos dos tipos especiales se escriben simbólicamente de una manera muy particular.

Lo interesante es saber cómo graficar en los ejes cartesianos estos tipos de rectas a primera vista solo mirando la expresión simbólica.

✰ Rectas Horizontales: La ecuación es: $Y = Y_1$
(Donde Y_1 es el valor donde corta al eje Y)



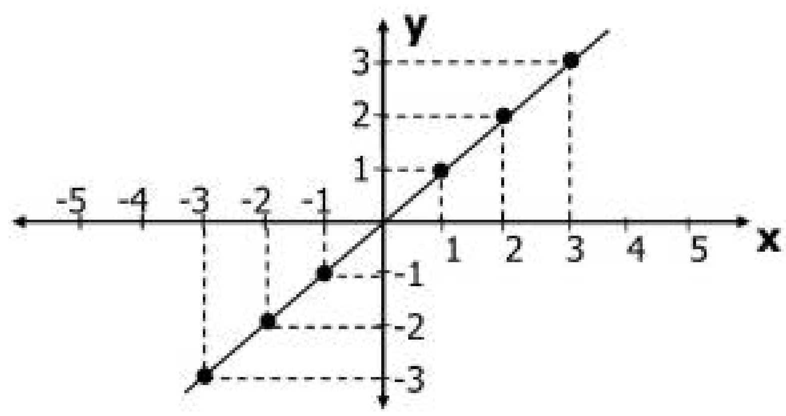
✰ Rectas Verticales: La ecuación es: $X = X_1$
(Donde X_1 es el valor donde corta al eje X)



Es importante saber que cuando tenemos una recta de la forma: Y = 5 es una recta horizontal que corta al eje "y" en 5, o bien que cuando tenemos una recta de la forma X = –6, va a ser una recta vertical que corte al eje "x" en –6

Otros Casos Especiales de Funciones Afines:

✰ **Función Identidad**: Es la recta particular Y = X
O sea cuando la pendiente vale 1 y la ordenada al origen cero.
En esta recta siempre el valor de "y" va a ser igual al de "x"



✰ **Función de Proporcionalidad Directa**: Es la recta Y = "a" . X + 0
(También llamada **Función Lineal** como vimos al principio)

Para cualquier valor de "a" (pendiente) cuando **la ordenada al origen vale cero**. Estas rectas siempre pasan por el origen de coordenadas. La particularidad de estas rectas es que los valores de X e Y son magnitudes directamente proporcionales. Ejemplo: Supongamos la recta Y = 3 X → En este caso siempre Y va a valer el triple de lo que vale X, por eso es que son magnitudes directamente proporcionales.

✰ **Condiciones de Perpendicularidad y Paralelismo**: Bueno, como ya vimos, la inclinación de la recta depende del valor que tome la pendiente "**a**", veamos ahora que ocurre con "**a**" en los casos de rectas perpendiculares y paralelas...

Primero veamos que son rectas paralelas y perpendiculares:

- Rectas Paralelas: Son rectas que no se cortan nunca (O se dice que se cortan en el infinito)
- Rectas Perpendiculares: Son rectas que se cortan formando 4 ángulos de 90º

Visto esto, podemos comenzar a imaginarnos que va a suceder con las rectas paralelas, en las que si no se cortan nunca, entonces, es porque tendrán la misma inclinación.

Por otro lado sabemos que la inclinación de las rectas respecto del eje "x" está definida por la pendiente o sea el valor de "a" en la forma general: F(x) = a x + b

Por lo tanto podemos concluir que dos rectas paralelas tendrán la misma inclinación, o lo que equivale a decir que tendrán la misma pendiente.

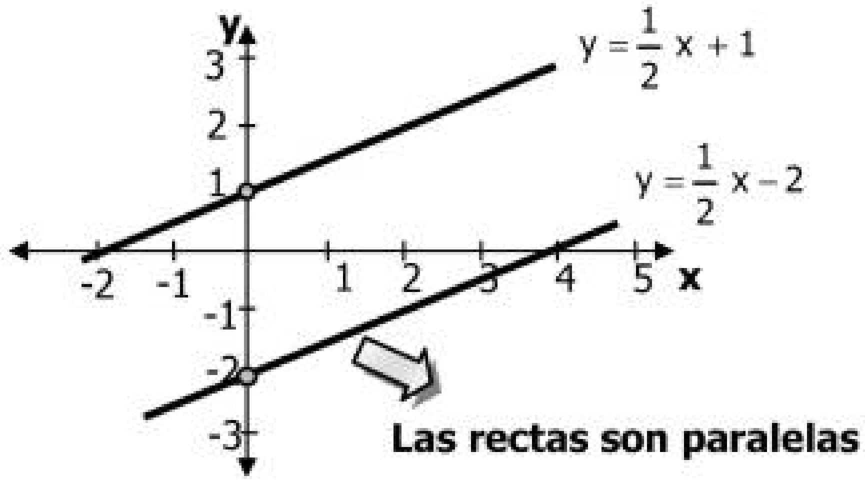
A continuación veremos los conceptos de paralelismo y perpendicularidad, expresados simbólicamente en función de las pendientes y con ejemplos ilustrativos.

⇨ **Rectas Paralelas**:
Como ya habíamos adelantado, para que dos rectas sean paralelas, **las pendientes deben ser iguales**.

Dadas las rectas $\begin{cases} Y_1 = a_1 \, . \, X + b_1 \\ Y_2 = a_2 \, . \, X + b_2 \end{cases} \Rightarrow$ Las rectas Y_1 e Y_2 son paralelas: $\Leftrightarrow \boxed{a_1 = a_2}$ "O sea que para que sean paralelas las pendientes tienen que ser iguales"

Veamos un ejemplo graficado:

$$\left. \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} x - 2 \\ y = \dfrac{1}{2} x + 1 \end{array} \right\} \text{Tienen ambas pendiente} = \frac{1}{2}$$



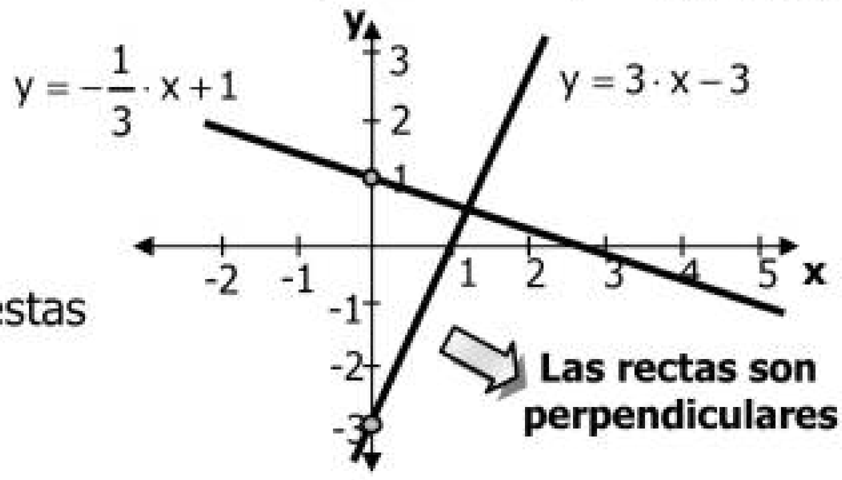
⇨ **Rectas Perpendiculares**:
El caso de las rectas perpendiculares es un poco mas difícil de ver, pero quiero que quede claro que no hay duda de que está condición dependerá de las pendientes de las rectas, ya que las mismas son las que definen la inclinación relativa de las rectas respecto del eje "X"

Veamos entonces cuál debe ser la relación entre las pendientes para que dos rectas sean perpendiculares:

Dadas las rectas $\begin{cases} Y_1 = a_1 \, . \, X + b_1 \\ Y_2 = a_2 \, . \, X + b_2 \end{cases} \Rightarrow$ Las rectas Y_1 e Y_2 son perpendiculares: $\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -\dfrac{1}{a_2}}$ "O sea que para que sean perpendiculares las pendientes tienen que ser inversas y opuestas"

Veamos un ejemplo graficado:

$$\left. \begin{array}{l} y = 3 \cdot x - 3 \\ y = -\dfrac{1}{3} \cdot x + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \text{ y } -\dfrac{1}{3} \\ \text{Son inversas y opuestas} \end{array}$$



✰ **Intersección de Rectas**: Dos rectas distintas "no paralelas" se intersecan en un único punto.

La manera de hallar las coordenadas "x" e "y" de ese punto es igualando las ecuaciones de ambas rectas. Si tenemos ambas rectas en forma explícita, igualando "y" podemos despejar la coordenada "x" y luego reemplazando con el valor ya conocido de "x" una vez hallado, podemos calcular "y".

Ejemplo: calculemos donde se cortan: $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow$ Igualamos: $\Rightarrow x - 2 = -2x + 4$

$$\underset{\text{Despejamos}}{\Rightarrow} x + 2x = 4 + 2 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Una vez que tenemos la cordenada "x" donde se cruzan las rectas, remplazamos ese valor en cualquiera de las ecuaciones de las restas y hallamos la coordenada "y" de donde se cruzan.

$$\underset{\text{Hallamos "y"}}{\Rightarrow} y = x - 2 \Rightarrow y = 2 - 2 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

Construcción de la ecuación de una recta:

Hay dos maneras de definir una recta única:

- Dando dos puntos por donde pasa la recta
- Dando un punto por donde pasa y la pendiente de la recta

En función de los datos que tengamos en cada caso, vamos a aplicar dos métodos diferentes para saber la ecuación de la recta que nos definen por cualquiera de esas dos maneras.

☆ Construcción de la ecuación una Recta conociendo un punto y la pendiente

Veamos un ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto **(1,0)** y tiene pendiente **-2**

La manera de hallar la ecuación de esta recta es la siguiente:
La ecuación general de la recta es Y = "a" . X + "b"

El valor de "a" es la pendiente que la tenemos como dato $\boxed{\mathbf{a = -2}}$

Lo que nos falta ahora es definir el valor de "b" o la ordenada al origen.
Para ello podemos seguir el siguiente método:

Partimos de la ecuación general de cualquier recta: Y = "a" . X + "b"

Reemplazamos "a" por (–2) con lo que nos queda la recta Y = –2X + "b"
Esto porque sabemos que –2 es el valor de la pendiente.

Reemplazamos la "X" y la "Y" por las coordenadas del punto que nos dieron y despejamos "b"
(a la "X" por la coordenada X y a la "Y" por la coordenada "Y")

$$Y = -2 \cdot X + b \implies 0 = -2 \cdot 1 + b \implies 0 = -2 \cdot 1 + b \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

Por lo tanto la recta que nos pidieron es: $\boxed{Y = -2 \cdot X + 2}$

☆ Construcción de la ecuación de una Recta conociendo dos puntos de ella:

Vamos a ver un ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos **(1,-2)** y **(2,3)**

Partimos de la Ecuación General de la Recta:

La manera de resolver esto es con sistemas de ecuaciones, así que repasen un poco antes de seguir con este tema.. bueno, decimos que vamos a usar un sistema de ecuaciones porque vamos a remplazar a la "X" y a la "Y" de la ecuación general de la recta por las coordenadas de los dos puntos, con lo cual nos van a quedar dos ecuaciones con dos incógnitas, las incógnitas de esas ecuaciones serán "a" y "b"

Reemplazamos por las coordenadas del punto (1;-2) $\implies (1;\ -2)\quad y = a \cdot x + b \Rightarrow -2 = a \cdot 1 + b$

Reemplazamos por las coordenadas del punto (2;3) $\implies (2;\ 3)\quad y = a \cdot x + b \Rightarrow 3 = a \cdot 2 + b$

Y ahora armo un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

Armamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2 = \mathbf{a} \cdot 1 + \mathbf{b} \\ 3 = \mathbf{a} \cdot 2 + \mathbf{b} \end{cases} \implies \begin{cases} -2 = \mathbf{a} + \mathbf{b} \\ 3 = 2 \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \end{cases}$$

Ahora recurrimos a cualquiera de los 5 métodos para resolver Sistemas de Ecuaciones...
Nosotros usamos el Método de Sumas y Restas de ecuaciones..

Preparamos las ecuaciones para sumarlas o restarlas. En este caso vamos a restarlas.

$$
-\;\begin{array}{rcl} -2 &=& \mathbf{a} + \mathbf{b} \\ 3 &=& 2\,\mathbf{a} + \mathbf{b} \\ \hline -5 &=& -1\,\mathbf{a} \end{array} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{a} = 5}
$$

Y como vemos, de una manera muy sencilla, ya tenemos el valor de "a" o la pendiente de la recta que buscábamos.

Ahora calculamos **b**. Reemplazamos **"a"** en la primera ecuación:

$$-2 = a + \mathbf{b} \Longrightarrow -2 - 5 + \mathbf{b} \Longrightarrow -2 - 5 = \mathbf{b} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{b} = -7}$$

Y armamos la Ecuación de la Recta $\boxed{Y = 5 \cdot x - 7}$

☆ Ecuación Segmentaria de la Recta:

Hasta ahora vimos siempre las rectas escritas de la forma F(x) = a . x + b
Pero existen muchas otras formas de escribir la ecuación de una recta.
Nosotros vamos a ver ahora una forma muy interesante que tendrá luego aplicaciones importantes.
La Forma de escribir las rectas que veremos será la "Forma Segmentaria"

La forma general de la ecuación segmentaria de una recta es: $\boxed{\dfrac{X}{A} + \dfrac{Y}{B} = 1}$

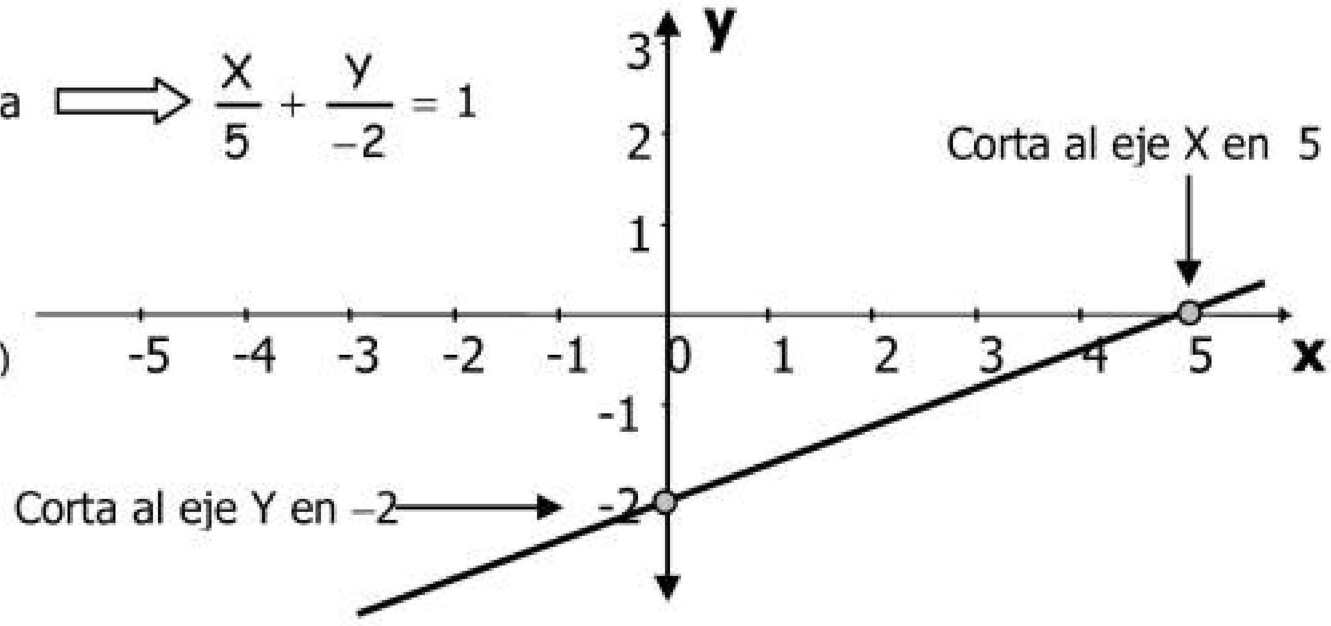
Donde "A" y "B" son los valores en que la recta corta al eje X y al eje Y respectivamente

Ejemplo: Grafiquemos la recta $\Longrightarrow \dfrac{X}{5} + \dfrac{Y}{-2} = 1$

En este Caso:

A = 5 (Corte en el eje "x")

B = −2 (Corte en el eje "y")



Nota: La ecuación Segmentaria de la recta es muy útil para graficarla rápidamente ya que lo único que hay que hacer es ubicar las intersecciones con los ejes y unir ambos puntos.

☆ Pasaje de La Ecuación Segmentaria a La Ecuación Explícita:

Muchas veces vamos a tener que usar la forma explícita y vamos a tener la forma segmentaria, por ello veremos ahora como hacer para expresar en forma explícita una recta expresada en forma segmentaria.

Para pasar algebraicamente de la ecuación segmentaria a la explícita debemos despejar "Y"

Ejemplo, vamos a pasar a forma explícita la recta $\dfrac{X}{5} + \dfrac{Y}{-2} = 1$

$$\frac{X}{5} + \frac{Y}{-2} = 1 \xrightarrow{\text{Pasamos restando el término de la "X" que estaba sumando}} \frac{Y}{-2} = -\frac{X}{5} + 1 \xrightarrow{\text{Pasamos multiplicando el } -2} Y = -2 \cdot \left(-\frac{X}{5} + 1\right) \xrightarrow{\text{distributiva del -2}} \boxed{Y = \frac{2}{5}X - 2}$$

☆ Pasaje de La Ecuación Explícita a la Segmentaria:

Básicamente hay dos maneras de pasar de forma explícita a forma segmentaria una recta:

☆La primera, que es la que vamos a estudiar, es hacerlo operando algebraicamente.

☆La otra es hallar las intersecciones con los ejes "x" e "y" igualando a cero "y" y "x" respectivamente, y luego reemplazar los valores "A" y "B" de la forma general de la ecuación segmentaria.

Nota: Yo les muestro esta manera porque me parece más interesante por el hecho de lo necesario que será más adelante el trabajo algebraico y la importancia que tiene, pero no es que sea la mejor manera.

Antes de avanzar quiero que repasemos el siguiente concepto:

- Multiplicar por "2/3" es lo mismo que dividir por "3/2"
- Dividir por "4/5" es lo mismo que multiplicar por "5/4"

Esto es porque la multiplicación y la división son operaciones "Inversas"
Ahora sí, veamos un método algebraico para pasar la forma explícita a segmentaria:

Ejemplo, vamos a pasar a forma segmentaria la recta $Y = \frac{8}{3}X - 4$

Escribimos -4 . 1 en vez de -4, total es lo mismo.

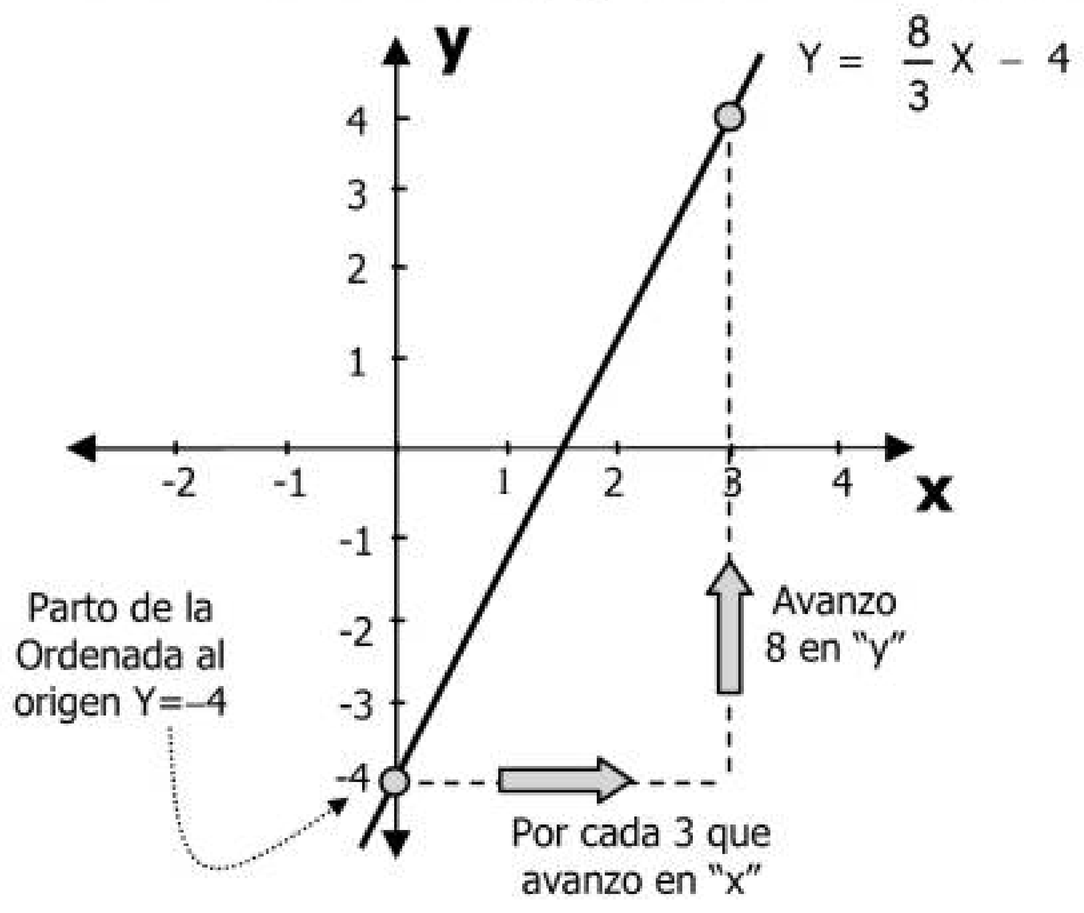
$Y = \frac{8}{3}X - 4 \Rightarrow$ Pasamos el término de la "X" junto con la Y $\Rightarrow Y - \frac{8}{3}X = -4 \Rightarrow Y - \frac{8}{3}X = -4 . 1$

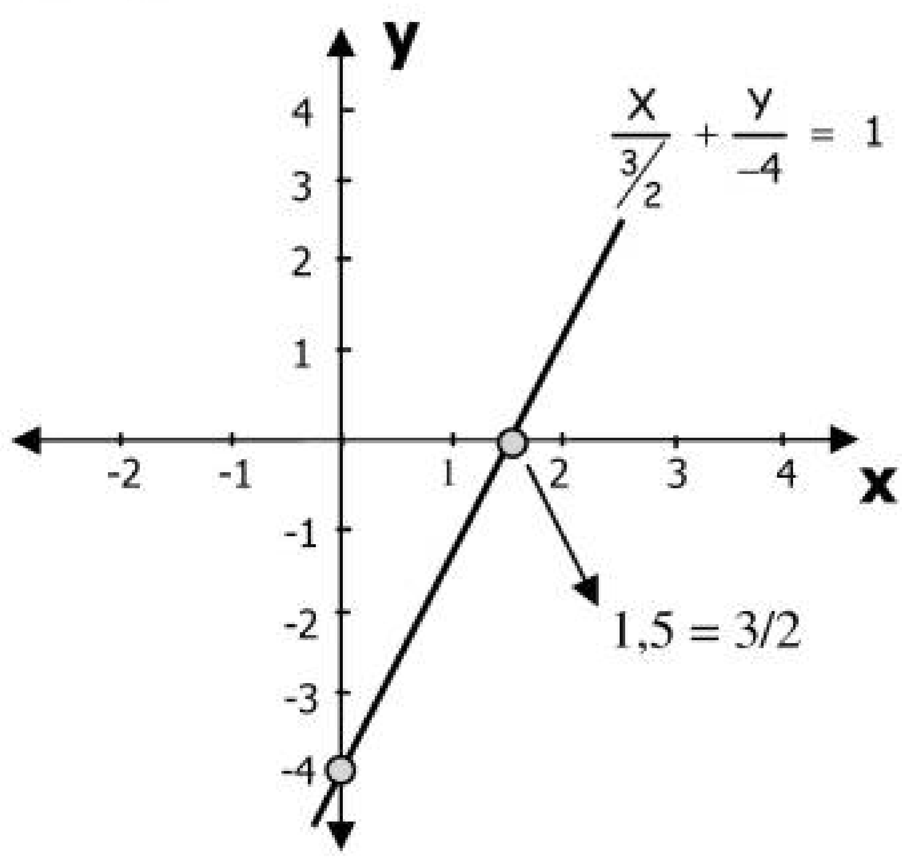
Pasamos el (-4) dividiendo $\Rightarrow \left(Y - \frac{8}{3}X\right) \div -4 = 1 \Rightarrow$ Lo escribimos como producto $\Rightarrow \left(Y - \frac{8}{3}X\right) . -\frac{1}{4} = 1$

Distributiva del -1/4 $\Rightarrow -\frac{1}{4}Y + \frac{2}{3}X = 1 \Rightarrow$ Escribo dividiendo los números que multiplican a la "X" e "Y" $\Rightarrow -\frac{Y}{4} + \frac{X}{3/2} = 1$

Por último, escribo delante el término de la X y le pongo los signos menos a los números, en vez de ponérselos a la fracción $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{X}{3/2} + \frac{Y}{-4} = 1}$

Por último, para verificar, grafiquemos las rectas por separado, primero a partir de la forma explícita (con la pendiente y la ordenada al origen) y luego con forma segmentaria (ubicando las intersecciones con los ejes), obviamente nos da la misma recta.





by DaL-0r para TARINGA!

Verdadero o Falso?.-

1) **$x = 3$** es una recta horizontal.-
2) La recta **$y = x$** corta al **Eje y** en **$y = 1$**.-
3) **$y = \frac{1}{2}x + 6$** pasa por el punto **(4, 8)**.-
4) Una recta puede tener más de una ordenada al origen.-
5) Las rectas **$y = x$** e **$y = -x$** son perpendiculares.-
6) Existen infinitas rectas que cortan al **Eje y** y a su vez no cortan al **Eje x**.-
7) Las rectas $y = 52/3\,x + 5$ e $Y = 52/3\,x - 30$ son paralelas.-
8) Las rectas $300/79\,x - 8$ y $-300/79\,x + 8$ son perpendiculares.-
9) Las rectas $Y = 5x + 8/3$ e $Y = -1/5x - 8/3$ cortan al **Eje y** en el mismo punto.-
10) Las rectas $Y = 5x + 8/3$ e $Y = 8/3$ cortan al **Eje y** en el mismo punto.-

Hallar la ecuación de la recta que pase por los puntos P_0 y P_1:

11) P_0= (-2; 4) y P_1= (-4; 5)
12) P_0= (1; 3) y P_1= (2; 5)
13) P_0= (-1; 2) y P_1= (-4; -1)
14) P_0= (2; 4) y P_1= (-2; 2)
15) P_0= (3; 2) y P_1= (2; 3)
16) P_0= (-2; 1) y P_1= (-4; 5)

Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto P_0 y sea paralela o perpendicular a la recta dada:

Ejercicio:	Punto P_0:	Recta:
17)	(2; -1)	$y = x - 3$ (Paralela)
18)	(-1; 1)	$y = x + 4$ (Paralela)
19)	(-4; 0)	$y = 1/2\,x - 5$ (Paralela)
20)	(0; 4)	$y = 3/4\,x + 1$ (Paralela)
21)	(1; 3)	$y = x - 5$ (Paralela)
22)	(-2; -3)	$y = -x - 3$ (Paralela)
23)	(0; 2)	$y = -2\,x + 1/4$ (Paralela)
24)	(1; 3)	$y = -x - 1/2$ (Paralela)
25)	(3; 1)	$y = -x$ (Perpendicular)
26)	(3; 2)	$y = -x + 1/2$ (Perpendicular)
27)	(6; 4)	$y = -2\,x$ (Perpendicular)
28)	(5; 6)	$y = -x + 13$ (Perpendicular)

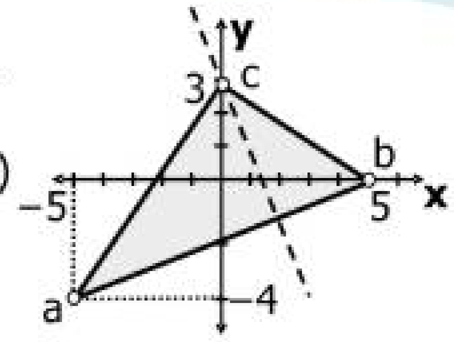
Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto P_0 y cuya ordenada al origen sea:

Ejercicio:	Punto P_0:	Ordenada al origen:
29)	(-4; -3)	$-1/3$
30)	(1; -2)	-7
31)	(6; 1)	-5
32)	(1; 4)	1
33)	(1; 0)	-1
34)	(-3; 5)	-1

Hallar las ecuaciones de las rectas que cortan a los ejes en los siguientes puntos:

Ejercicio:	Punto donde corta al Eje x	Punto donde corta al Eje y
35)	-2	1
36)	-1	3
37)	-3	-6
38)	2	-1
39)	2	-4
40)	6	-2

41) Hallar la ecuación de la recta que corte al eje X en x=3 y que tenga pendiente 2.



42) Dado el triángulo formado por los puntos: a(-5;-4) b(5;0) c(0;3)
Hallar la recta perpendicular al lado ab que pase por "c"

43) Dado el cuadrilátero formado por los puntos a(-3;3) b(4;2) c(-5;-2) y d(2;-3) Hallar las ecuaciones de las rectas que incluyen a las diagonales del cuadrilátero.

44) Para pensar un rato: dados cinco puntos no alineados en el plano ¿Cuántas rectas distintas puedo formar que cumplan la condición de que cada una de las rectas pase por dos de esos 5 puntos?

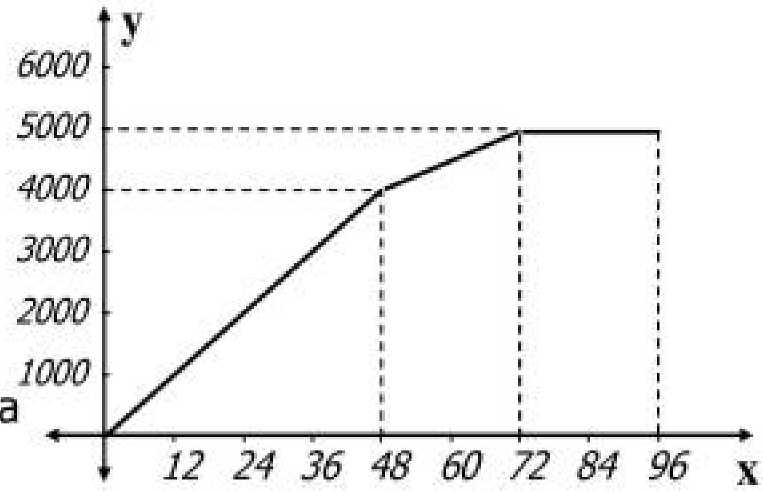
45) Otro para pensar: Si tenemos cinco puntos en el plano, de modo tal que tres de ellos están alineados y los otros dos no. ¿Cuántas rectas distintas puedo formar que cumplan la condición de que cada una de las rectas pase por dos de esos 5 puntos?

46) El Siguiente Gráfico representa la cantidad de gente que fue comprando las entradas para el recital de "Bandana", a medida que pasaban las horas desde que se pusieron en venta.

a) ¿Qué tipo de función es?

b) ¿Entre que horas se vendieron entradas más rápidamente?

c) Si después de las 48 horas las ventas hubieran seguido como hasta entonces: ¿Cuántas entradas se hubieran vendido a las 72 horas?



47) Supongamos que durante el segundo y el tercer día en que estuvo a la venta el último disco de METALLICA se vendieron en EEUU 400.000 copias cada día (en forma directamente proporcional al tiempo transcurrido). Si el primer día se habían vendido 600.000 copias (en forma irregular), y suponiendo que en los primeros 10 días las ventas se van a mantener al ritmo que lo hicieron en el segundo y tercer día.

a) ¿Cuántos discos llevarán vendidos cuando termine el 5° día de ventas?
b) ¿Cuántos días transcurrirán para alcanzar las 3.000.000 de copias vendidas?

48) Realizar un gráfico en el que se representen la cantidad de discos vendidos en función de los días transcurridos y dar la ecuación de la recta de dicha función (comenzar a partir del 2° día inclusive)

49) **Hallar el valor de "a" para que los pares de rectas dados sean paralelas**:

a) $\begin{cases} Y = 2X + 1 \\ Y = aX - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} Y = X - 1 \\ Y = 2a\ X + 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} Y = (a - \frac{1}{2})X - 1 \\ Y = \frac{1}{2}a\ X + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2Y + aX - 2 = 0 \\ Y + 2X + 4 = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} Y + 2a(X - 3) - 1 = 0 \\ 3Y - (a + 7)\ X + 1 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} Y = (a - \frac{3}{5})X + \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{3}Y + \frac{2}{3}a\ (X - 3) + 1 = 0 \end{cases}$

Escribir las siguientes rectas en forma segmentaria:

50) $y = x + 2$ 53) $y = -x + \frac{1}{3}$ 56) $y = 2x + 2$ 59) $y = -x - 2$

51) $y = 2x - 1$ 54) $y = -2x - \frac{2}{3}$ 57) $y = -3x - \frac{1}{2}$ 60) Una recta paralela a $y = 3x + 5$, cuya ordenada al origen sea 3

52) $y = \frac{1}{2}x - 3$ 55) $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$ 58) $y = \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$ 61) Recta perpendicular a $y = -2x - 1$, cuya ordenada al origen sea 4

Escribir las siguientes rectas en forma explícita:

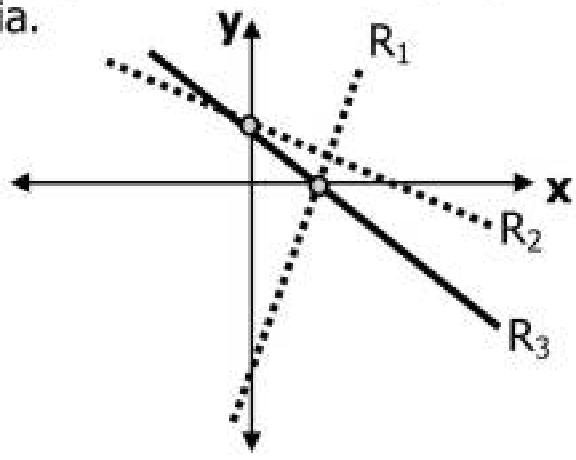
62) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{2} = 1$ 65) $\frac{x}{1/3} + \frac{y}{1/3} = 1$ 68) $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1$ 71) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-2} = 1$

63) $\frac{x}{1/2} + \frac{y}{-1} = 1$ 66) $\frac{x}{-1/3} + \frac{y}{-2/3} = 1$ 69) $\frac{x}{-1/6} + \frac{y}{-1/2} = 1$ 72) $\frac{x}{-1} + \frac{y}{3} = 1$

64) $\frac{x}{6} + \frac{y}{-3} = 1$ 67) $\frac{x}{-3/8} + \frac{y}{1/4} = 1$ 70) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-4/5} = 1$ 73) $\frac{x}{-8} + \frac{y}{4} = 1$

74) Dada la recta R_1 que pasa por los puntos $P_1 = (1 ; 2)$ y $P_2 = (-4 ; -3)$, hallar una recta perpendicular a R_1 que pase por el punto $P = (2 ; -1)$. Escribirla en forma segmentaria.

75) Dadas las rectas $R_1 = 2x - 3$ y $R_2 = -1/2\,x + 1$. Hallar la ecuación de la recta R_3 que pase por la abscisa al origen de R_1 y por la ordenada al origen de R_2



Problemas con intersecciones de rectas:

Hallar las intersecciones de las siguientes rectas:

76) $\begin{cases} R_1 \to Y = 5x + 4 \\ R_2 \to Y = -x - 2 \end{cases}$

77) $\begin{cases} R_1 \to 7x = Y - 5 \\ R_2 \to Y + 1 = x \end{cases}$

78) $\begin{cases} R_1 \to Y = 9x + 11 \\ R_2 \to 1 = x + y \end{cases}$

79) $\begin{cases} R_1 \to Y = 5x + 3 \\ R_2 \to Y = -x - 3 \end{cases}$

80) $\begin{cases} R_1 \to Y - 2 = 3x \\ R_2 \to 4x = Y + 2 \end{cases}$

81) $\begin{cases} R_1 \to Y = 2x + 6 \\ R_2 \to -Y + 3 = x \end{cases}$

82) $\begin{cases} R_1 \to Y = 3x + 4 \\ R_2 \to Y = x + 2 \end{cases}$

83) $\begin{cases} R_1 \to Y - 7 = 2x \\ R_2 \to Y = 3x + 1 \end{cases}$

84) $\begin{cases} R_1 \to Y + 1 = -2x + 6 \\ R_2 \to 3 - Y = x \end{cases}$

85) $\begin{cases} R_1 \to Y = 3x + 6 \\ R_2 \to Y = 2x + 5 \end{cases}$

86) $\begin{cases} R_1 \to Y \div 4 - 2 = x \\ R_2 \to 3x = Y - 7 \end{cases}$

87) $\begin{cases} R_1 \to Y = 5x + 4 \\ R_2 \to Y = 4x + 9 \end{cases}$

88) $\begin{cases} R_1 \to Y = 3x + 4 \\ R_2 \to 1 = \dfrac{X}{-2} + \dfrac{Y}{4} \end{cases}$

89) $\begin{cases} R_1 \to Y = 4x - 2 \\ R_2 \to 1 = -\dfrac{2x}{5} + \dfrac{Y}{5} \end{cases}$

90) $\begin{cases} R_1 \to Y + 3x - 1 = 0 \\ R_2 \to Y = 4x + 7 \end{cases}$

91) $\begin{cases} R_1 \to Y = 8x + 11 \\ R_2 \to Y - 5x = 6 \end{cases}$

92) $\begin{cases} R_1 \to Y - 5 = 2x + 1 \\ R_2 \to Y - 7x - 1 = 0 \end{cases}$

93) $\begin{cases} R_1 \to Y = 3x + 5 \\ R_2 \to 1 = \dfrac{5X}{-11} + \dfrac{Y}{11} \end{cases}$

94) $\begin{cases} R_1 \to Y = 7x + 2 \\ R_2 \to 1 = \dfrac{11x}{6} - \dfrac{Y}{6} \end{cases}$

95) $\begin{cases} R_1 \to Y - 7 = 5x + 1 \\ R_2 \to Y - 4 = 9x \end{cases}$

96) $\begin{cases} R_1 \to Y - 3 = 4x \\ R_2 \to Y = 7x + 6 \end{cases}$

97) $\begin{cases} R_1 \to Y = 2x + 9 \\ R_2 \to Y - 7 = 8x \end{cases}$

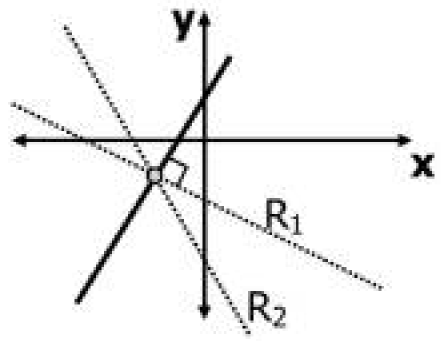
98) Hallar intersección de las rectas: $R_1 = x - 5$ y $R_2 = -1/2\,x + 1$

99) Hallar intersección de las rectas: $R_1 = x - 1$ y una recta paralela a $R_2 = -x + 2$ con ordenada al origen 3.

100) Hallar intersección de las rectas: $R_1 = x$ y una recta perpendicular a $R_2 = 2x+5$ con ordenada al origen -6

101) Dadas las rectas: $R_1 = -1/2\,x - 3$ y $R_2 = -3\,x - 8$

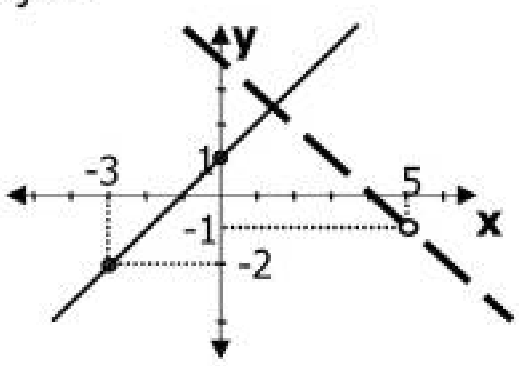
Hallar la ecuación de una recta que sea perpendicular a R_1 y pase por el punto de intersección entre R_1 y R_2.

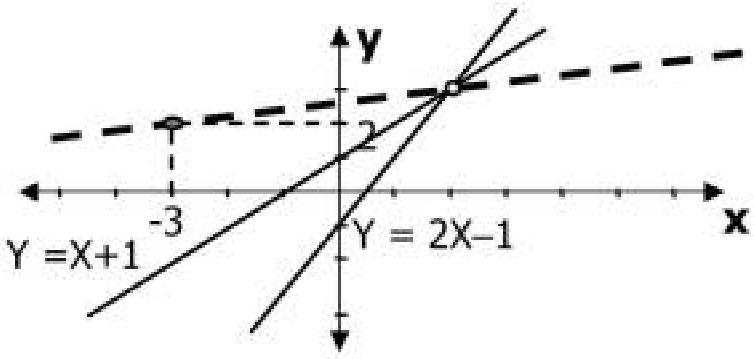


102) Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto (-2;3) y sea paralela al eje X

103) Hallar la ecuación de la recta que pase por (-1;-2) y sea paralela al eje Y

104) Hallar la ecuación de una recta perpendicular a la recta formada por los puntos (0;1) y (-3;-2) que además pase por el punto (5;-1)





105) Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto (-3; 2) y por el punto en donde se cortan las rectas $Y = X+1$ e $Y = 2X-1$

106) Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto (-1;-1) y por el punto de intersección de las rectas: $2Y+4X-6=0$ y la recta: $5Y - 7X + 2 = 0$

<u>Problemas de Aplicación</u>:

107) Dadas las funciones f(x) y g(x) que representan la posición (en km) de dos móviles en función del tiempo. (la variable "x" representa al tiempo en horas). Hallar el momento en que se encuentran los móviles. Si: $f(x) = 30x$ y $g(x) = 20x + 10$

Nota: el momento en que se encuentran es el valor de "x" para el cual están en el mismo lugar, o sea que $f(x)=g(x)$.

108) Un móvil comienza su recorrido en una ruta en el km. 30, lo hace a una velocidad constante de 60 km/h. Expresar la función lineal f(x) que represente su posición en la ruta en km, en función del tiempo transcurrido en hs. (Suponiendo que su velocidad es constante y no varía en ningún momento)

Problemas Con Videojuegos:

109) En un lugar de videojuegos "A" nos dicen que para jugar en los juegos debemos comprar una tarjeta magnética que vale \$2 y que cada juego vale \$ 0,50. Para poder jugar hay que cargar la tarjeta con un valor equivalente a la cantidad de juegos que queramos jugar, es decir que para jugar a dos juegos debemos cargar la tarjeta con \$1 (no se cuentan en la carga los \$2 del valor de la tarjeta). Determinar la función lineal f(x) que represente el valor que debo gastar en función de la cantidad de veces que use un juego.

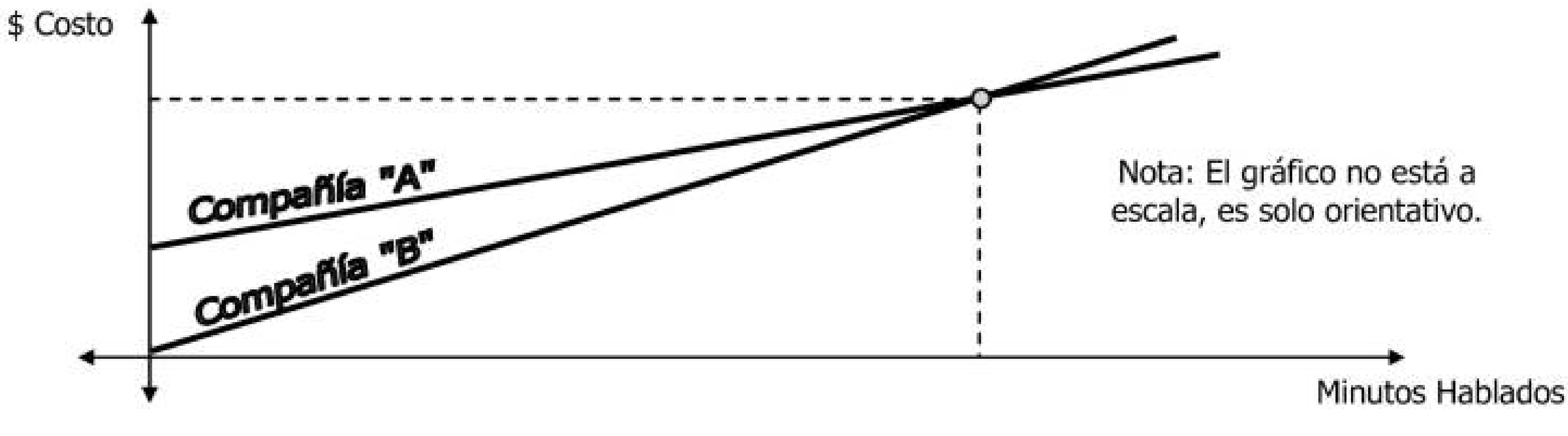
110) Siguiendo la lógica del ejercicio anterior, otro lugar de videojuegos "B" tiene un sistema parecido, pero en este otro lugar cobran \$10 la tarjeta magnética y \$0,40 cada juego. Hallar el valor de la cantidad de juegos para los que cuesta lo mismo un lugar que el otro.

111) Según los 2 ejercicios anteriores, Graficar aproximadamente las funciones que representan el costo en función de la cantidad de veces que juego y responder en función de este gráfico: ¿En que lugar de los dos "A" o "B" me sale más barato si quiero jugar 85 veces a los distintos juegos?

112) En una sala de Videojuegos "C" con un sistema de costos similar a los anteriores, un amigo nuestro nos dice que cuando llevaba jugados 30 juegos había gastado \$18,5 y cuando ya había jugado 60 juegos había gastado en total \$32. Calcular cuánto vale para esta casa de Videojuegos "C" el valor de la tarjeta magnética y el valor de cada juego.

113) ¿Son las funciones que representan el costo de jugar en las casas "A" "B" y "C" funciones de proporcionalidad directa? ¿Si no es así, cuál es el factor que hace que no sean así?

Los siguientes gráficos representan las promociones de ventas de dos compañías de telefonía celular. En la compañía "A" tenemos un costo fijo mensual o "abono" y un costo de cada minuto que hablamos de \$0,45, por otro lado la compañía "B" no tiene abono fijo, pero en esta compañía el costo por minuto es de \$0,60.



114) ¿Cuánto vale el costo fijo de la compañía "A" si sabemos que una persona de esta compañía habló durante un mes 40 minutos y tuvo que pagar \$27?

115) ¿Es válido decir que alguna de las dos compañías es más económica que la otra? ¿Por qué?

116) ¿Qué compañía es más económica para una persona que habla 100 minutos por mes?

117) ¿Para cuánta cantidad de minutos me conviene contratar la compañía "A"?

118) Supongamos que quiere introducirse una nueva compañía "C" en el mercado que quiere cobrar un costo fijo de \$12 mensuales, pero quiere ser la más económica de todas para consumos mayores a 60 minutos mensuales. ¿Cuánto tiene que costar como máximo el minuto por esta compañía? Ubicar en el gráfico a la Compañía "C"

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Función Lineal

Nivel II

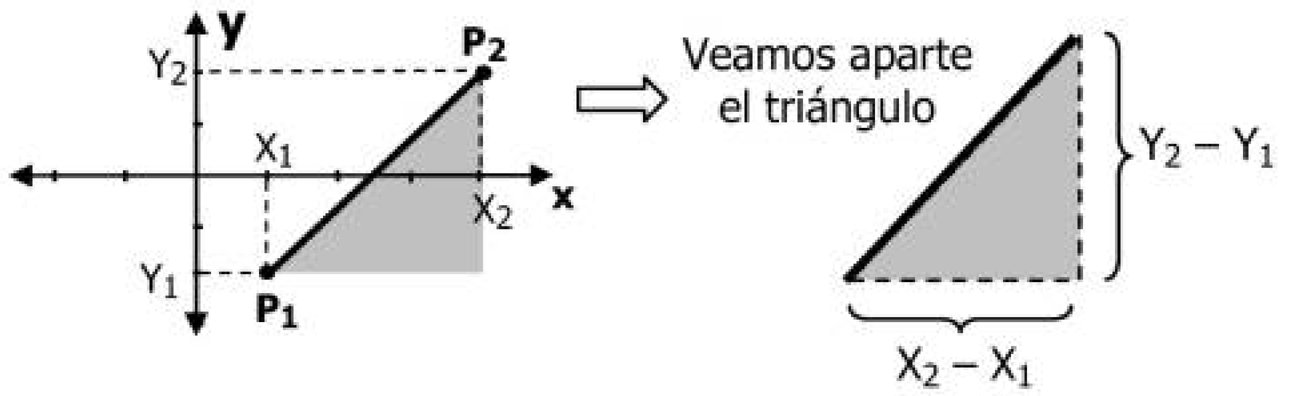
Número de Tema: **42**

Área: **Matemática**

☆ **Distancia Entre Puntos:** Veamos la fórmula para averiguar la distancia entre dos puntos cualesquiera $\mathbf{P_1 = (x_1 ; y_1)}$ y $\mathbf{P_2 = (x_2 ; y_2)}$ en el Plano:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Veamos en un gráfico de donde sale la fórmula: Calculemos la distancia entre los puntos P_1 y P_2



La distancia entre los puntos es la hipotenusa del triángulo. Y Vamos a calcular esa hipotenusa con el teorema de Pitágoras que dice que la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Entonces, aplicando la fórmula de Pitágoras nos queda: $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Pasamos el cuadrado de la distancia como raíz y nos queda la fórmula de distancia entre los puntos P_1 y P_2 $\quad \boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$

Ejemplo: Calcular la distancia entre los puntos **(-1, -3) y (1, 1)**

$(x_1, y_1) = (-1, -3) \qquad (x_2, y_2) = (1, 1)$

$$d = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-(-3))^2} \Rightarrow d = \sqrt{(2)^2 + (4)^2} \Rightarrow d = \sqrt{4+16} \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{20}}$$

Probemos ahora tomando los mismos puntos en distinto orden: $(x_1, y_1) = (1, 1)$ y $(x_2, y_2) = (-1, -3)$

$$d = \sqrt{((-1)-1)^2 + ((-3)-1)^2} \Rightarrow d = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} \Rightarrow d = \sqrt{4+16} \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{20}}$$

Da lo mismo. Con esto nos damos cuenta que no importa el orden en que tomemos los puntos.

☆ **Distancia Entre Punto y Recta:** Para calcular la distancia entre un punto y una recta el proceso se divide en tres pasos fundamentales:

1° Paso: Buscar la ecuación de la recta perpendicular a la recta dada.

2° Paso: Hallar el punto de intersección entre la recta dada y la recta del paso anterior.

3° Paso: Hallar la distancia entre el punto dado y el punto de intersección de las rectas del paso anterior.

Veamos ahora un ejemplo:

Calcular la distancia del punto (4, 2) a la recta: $Y = 2x - 1$

★ **1° Paso**: Calculamos la Ecuación de la Recta perpendicular a $Y = 2x-1$ que pasa por (4, 2). Como la recta debe ser perpendicular a Y = 2X + 1, la pendiente de esta recta debe ser inversa y opuesta a 2.

➔ O sea tenemos la pendiente de la recta que buscamos $\boxed{a = -\frac{1}{2}}$

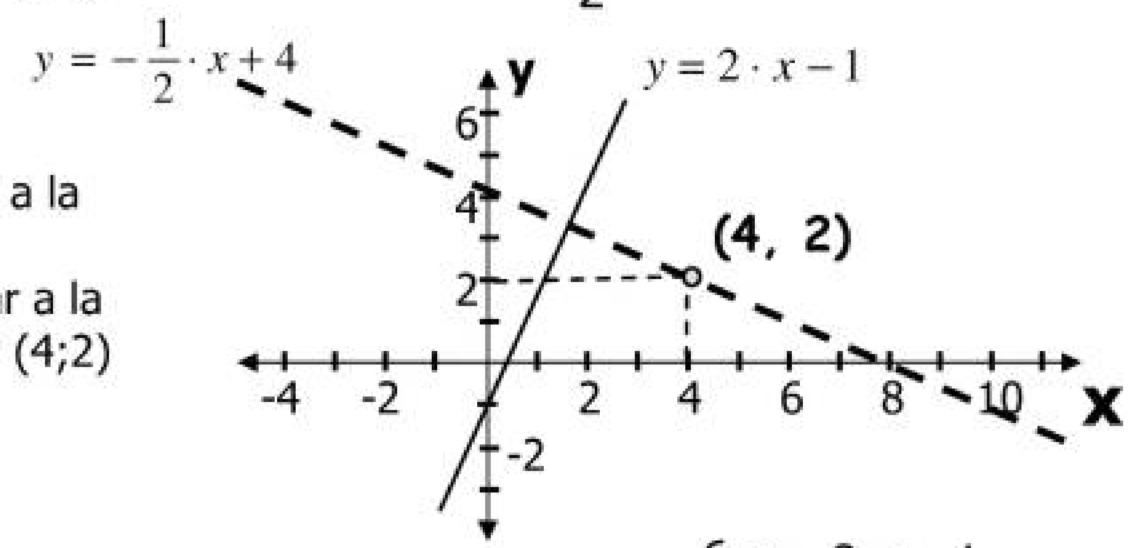
Planteamos la ecuación general de la recta y reemplazamos "a" por –1/2

$y = a \cdot x + b \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot x + b \Rightarrow$ Reemplazamos "**X**" e "**Y**" por las coordenadas del punto **(4 ; 2)** $\Rightarrow 2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b$

$\Rightarrow 2 = -2 + b \Rightarrow 2 + 2 = b \Rightarrow \boxed{b = 4}$

Primer paso listo, ya tenemos la recta perpendicular a la recta dada que pasa por el punto (4;2) $\Longrightarrow$ $y = -\frac{1}{2} \cdot x + 4$

En el gráfico vemos dibujada a la recta que hallamos que efectivamente es perpendicular a la recta dada y pasa por el punto (4;2)



★ **2° Paso**:
Buscamos el punto de intersección entre las rectas: $\begin{cases} y = 2 \cdot x - 1 \\ y = -\frac{1}{2} \cdot x + 4 \end{cases}$

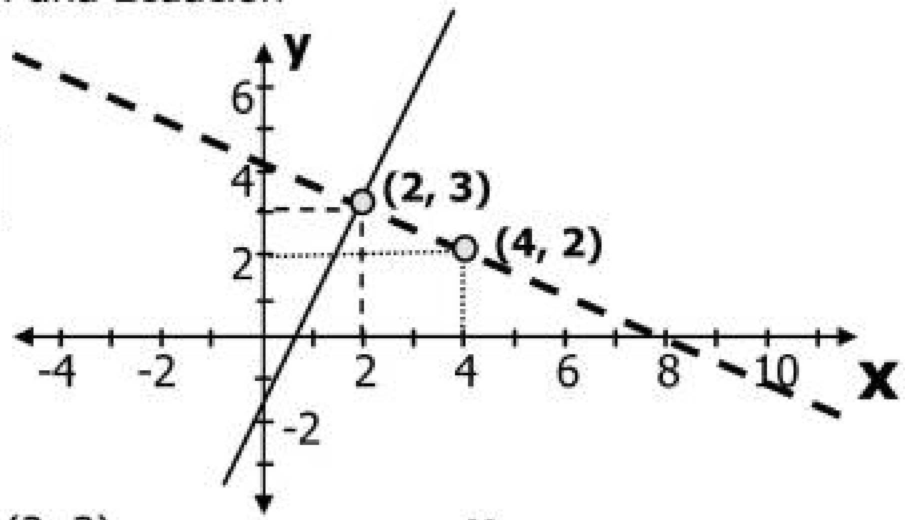
Ya que en ambas ecuaciones la **y** "ya está despejada" vamos a emplear el Método de Igualación para resolver este Sistema de dos Ecuaciones con dos Incógnitas...

$$2 \cdot x - 1 = -\frac{1}{2} \cdot x + 4 \Longrightarrow 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x = +4 + 1 \Longrightarrow \frac{5}{2} \cdot x = 5 \Rightarrow 5 \cdot x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{5} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Sólo resta averiguar cuánto vale **y**... reemplazamos **x** en una Ecuación

$$y = 2 \cdot x - 1 \Longrightarrow y = 2 \cdot 2 - 1 \Rightarrow \boxed{y = 3}$$

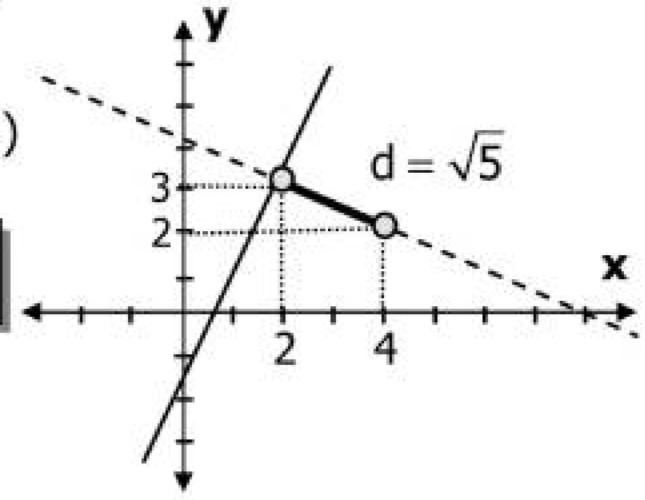
O sea que el punto donde se cortan las rectas es: $\boxed{\mathbf{(2\,;3)}}$



★ **3° Paso:** Calculamos la distancia entre los puntos (4, 2) y (2, 3)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Longrightarrow (x_2, y_2) = (4,\ 2) \text{ y } (x_1, y_1) = (2,\ 3)$$

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (2-3)^2} \Longrightarrow d = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{5}}$$



☆ **Punto Medio de un segmento:**

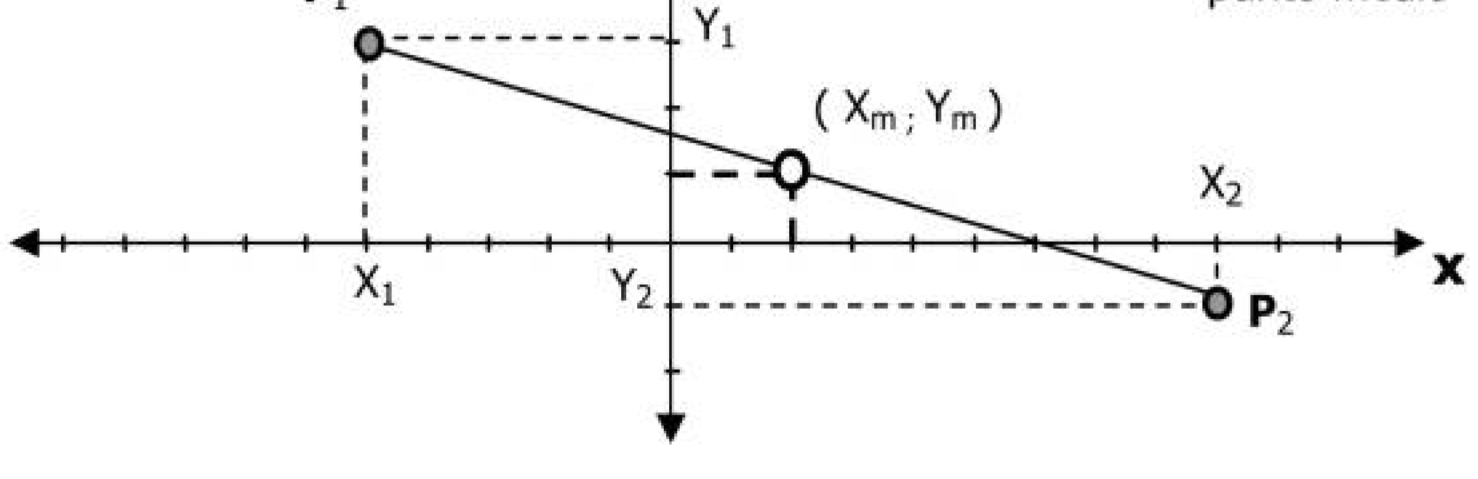
Primero que nada, vale la pena aclarar que un segmento no es la distancia entre dos puntos, sino que un segmento son los infinitos puntos que están alineados entre dos puntos cualquiera en el plano, a su vez estos infinitos puntos forman un ***Segmento de Recta***

Dado un segmento definido por los puntos $P_1\ (X_1;Y_1)$ y $P_2\ (X_2;Y_2)$
Se calculan las coordenadas del punto medio del segmento con las fórmulas:

$$\boxed{X_m = \frac{X_1 + X_2}{2}}$$

$$\boxed{Y_m = \frac{Y_1 + Y_2}{2}}$$

$(X_m\ ;\ Y_m) \Longrightarrow$ Coordenadas del punto medio



Hallar la distancia entre los puntos P_0 y P_1:

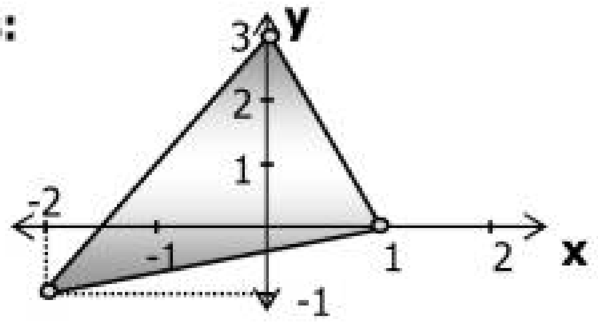
1) $P_0 = (0, 0)$ y $P_1 = (1, 1)$
2) $P_0 = (-1, 0)$ y $P_1 = (2, 3)$
3) $P_0 = (-3, 2)$ y $P_1 = (2, -3)$
4) $P_0 = (0, 0)$ y $P_1 = (4, 3)$
5) $P_0 = (6, 5)$ y $P_1 = (2, 2)$
6) $P_0 = (6, 6)$ y $P_1 = (6, -6)$
7) $P_0 = (-7, 7)$ y $P_1 = (1, 1)$
8) $P_0 = (5, 5)$ y $P_1 = (-4, 5)$
9) $P_0 = (4, 8)$ y $P_1 = (10, 16)$
10) $P_0 = (9, 7)$ y $P_1 = (-9, 7)$
11) $P_0 = (0, 8)$ y $P_1 = (6, 0)$
12) $P_0 = (5, 7)$ y $P_1 = (1, 4)$
13) $P_0 = (6, 3)$ y $P_1 = (2, 4)$
14) $P_0 = (6, 3)$ y $P_1 = (4, 2)$
15) $P_0 = (4, -4)$ y $P_1 = (-4, 4)$
16) $P_0 = (0, 0)$ y $P_1 = (0, 1)$

<u>Hallar la distancia entre el punto P_0 y la recta</u>:

17) $P_0=(-6 ; 11)$ $y = 3x - 1$
18) $P_0=(1 ; 11)$ $y = 3/4\ x + 4$
19) $P_0=(3 ; 5)$ $y = -3$
20) $P_0=(0 ; 0)$ $y = 5x$
21) $P_0=(-5 ; 4)$ $y = -4x + 1$
22) $P_0=(7 ; 9)$ $y = 3x - 2$
23) $P_0=(10 ; -5)$ $y = 1/2\ x - 20$
24) $P_0=(9 ; 4)$ $y = 1/5\ x - 3$
25) $P_0=(10 ; 4)$ $y = -10\ x + 5$
26) $P_0=(5 ; 1)$ $y = -x - 6$
27) $P_0=(2 ; 1)$ $y = -1/7\ x + 7$
28) $P_0=(0 ; 0)$ $y = -x - 1$
29) $P_0=(4 ; 5)$ $y = 1/2\ x + 1/2$
30) $P_0=(5 ; 0)$ $y = 3x - 5$
31) $P_0=(2 ; 2)$ $y = -1/2x + 1/2$

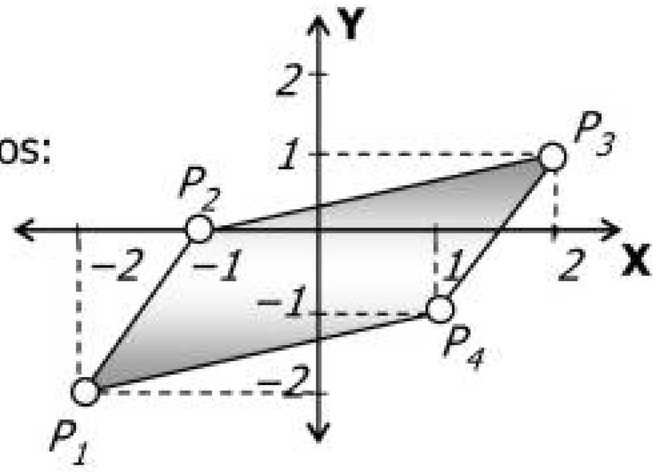
32) Hallar el área del triángulo formado por los puntos:
(Nota: Tomar como cada unidad del gráfico: 1 cm)

$P_0 = (-2 ; -1)$ $P_1 = (1 ; 0)$ $P_2 = (0 ; 3)$



33) Hallar el área y el perímetro del paralelogramo formado por los puntos:

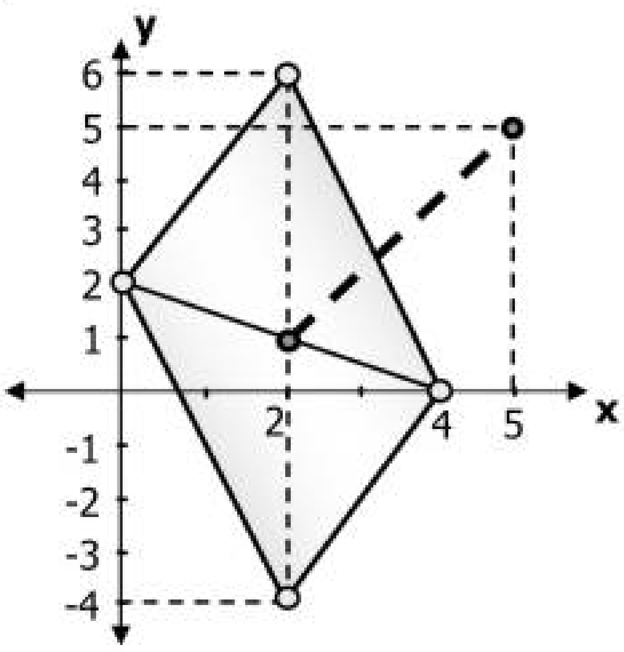
$P_1 = (-2 ; -2)$ $P_2 = (-1 ; 0)$ $P_3 = (2 ; 1)$ $P_4 = (1 ; -1)$



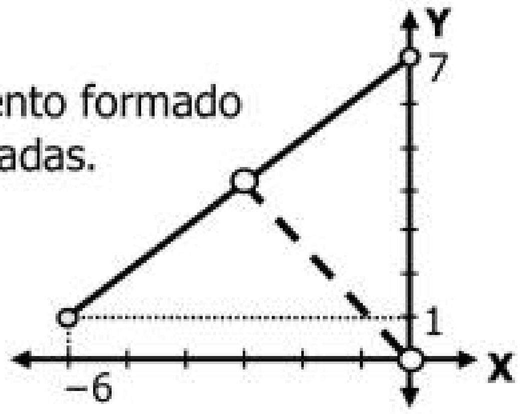
34) Hallar la distancia desde el punto (5;5) al "centro de gravedad" del siguiente paralelogramo.

(el centro de gravedad es el punto donde se cruzan las diagonales) (no vale buscar el centro de gravedad gráficamente, para encontrar el centro de gravedad hay que encontrar la intersección entre las ecuaciones de las diagonales, o buscar alguna propiedad y utilizar el punto medio de un segmento)

Los puntos que forman el paralelogramo son:
(2;6) (2;-4) (4;0) y (0;2)



35) Hallar la distancia del punto medio del segmento formado por los puntos (-6;1) y (0;7) al origen de coordenadas.



36) Hallar la distancia entre la intersección de las rectas $Y= X+1$ $Y= -1/2X + 4$ y el punto medio del segmento formado por los puntos (-5;-11) y (-1;-7)

37) Hallar las diagonales del cuadrilátero formado por los puntos (-1;-1) (0;2) (4;2) y (1;-2) ¿es cierto que una diagonal es el doble de la otra?

Dados los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4

- Graficar, y decir qué tipo de cuadrilátero es.
- Calcular los 4 lados y el Perímetro del cuadrilátero.
- Calcular el Área del cuadrilátero.
- Calcular los valores de la diagonal o las diagonales.
- En función de los valores calculados demostrar analíticamente que tipo de cuadrilátero es y corroborarlo con el gráfico. Para demostrar que tipo de cuadrilátero es usar la siguiente tabla lógica:

	Cuadrado	Rectángulo	Paralelogramo	Trapecio	Rombo	Romboide
Lados	Los 4 iguales	Pares opuestos iguales	Pares opuestos iguales	1 par opuesto igual	Los 4 iguales	Pares consecutivos iguales
Diagonales	Iguales	Iguales	Distintas	Iguales	Distintas	Distintas

38) $P_1 = (2;3)$, $P_2 = (-4;1)$, $P_3 = (-3;-2)$, $P_4 = (3;0)$

39) $P_1 = (3;1)$, $P_2 = (2;4)$, $P_3 = (-1;3)$, $P_4 = (-2;-4)$

40) $P_1 = (3;2)$, $P_2 = (-3;4)$, $P_3 = (-5;0)$, $P_4 = (1;-2)$

41) $P_1 = (5;1)$, $P_2 = (2;4)$, $P_3 = (-1;1)$, $P_4 = (2;-2)$

42) $P_1 = (2;0)$, $P_2 = (0;1)$, $P_3 = (-6;-1)$, $P_4 = (4;-6)$

43) $P_1 = (5;5)$, $P_2 = (-2;4)$, $P_3 = (-3;-3)$, $P_4 = (4;-2)$

44) $P_1 = (6;3)$, $P_2 = (-4;-2)$, $P_3 = (2;-4)$, $P_4 = (4;-3)$

45) $P_1 = (5;1)$, $P_2 = (-5;5)$, $P_3 = (-7;0)$, $P_4 = (3;-4)$

46) $P_1 = (4;7)$, $P_2 = (-3;3)$, $P_3 = (-2;-2)$, $P_4 = (3;-1)$

47) $P_1 = (5;2)$, $P_2 = (2;6)$, $P_3 = (-3;4)$, $P_4 = (0;0)$

48) $P_1 = (1;0)$, $P_2 = (-1;-2)$, $P_3 = (1;-4)$, $P_4 = (3;-2)$

49) $P_1 = (3;3)$, $P_2 = (-2;5)$, $P_3 = (-4;0)$, $P_4 = (1;-2)$

50) $P_1 = (7;0)$, $P_2 = (-6;11)$, $P_3 = (-7;-6)$, $P_4 = (6;-17)$

51) $P_1 = (5;3)$, $P_2 = (-2;5)$, $P_3 = (-4;1)$, $P_4 = (3;-1)$

52) $P_1 = (6;-2)$, $P_2 = (0;0)$, $P_3 = (-4;-7)$, $P_4 = (4;-8)$

53) Demostrar que el triángulo formado por los puntos (0;4) , (-2;-4) y (5;1) es un triángulo rectángulo (Sugerencia: usar el teorema de Pitágoras para demostrar).

54) Calcular la mayor distancia entre los vértices de los triángulos abc y def formados por los puntos: $\triangle abc \begin{cases} a(1;1) \\ b(5;3) \\ c(4;6) \end{cases}$ $\triangle def \begin{cases} d(-4;-4) \\ e(3;3) \\ f(0;-3) \end{cases}$

55) Calcular la distancia entre los puntos medios de los segmentos MN y PQ, siendo los puntos: M(1;4) N(-1;-4) P(10;-1) Q(-2;-5).

56) Demostrar que los triángulos $\triangle abc$ y $\triangle def$ son semejantes. (aplicando cálculo de distancias entre puntos) (para que dos triángulos sean semejantes, la razón entre sus lados debe ser constante) $\triangle abc \begin{cases} a(4;2) \\ b(-2;-1) \\ c(2;-6) \end{cases}$ $\triangle def \begin{cases} d(8;4) \\ e(-4;-2) \\ f(4;-12) \end{cases}$

57) ¿Cuánto tiene que valer "k" para que la distancia entre los puntos a y b sea exactamente 25? $\begin{cases} a\ (-3;-7) \\ b\ (4;13+\sqrt{k}) \end{cases}$

58) ¿Cuánto tiene que valer "k" para que la distancia entre a y b sea 17/2? $\begin{cases} a\ (-1;13) \\ b\ \left(\sqrt{k/4}+15/2;9\right) \end{cases}$

59) Calcular el valor positivo de "k" para que los triángulos abc y def sean semejantes: $\triangle abc \begin{cases} a(1;1) \\ b(-3;-1) \\ c(2;-5) \end{cases}$ $\triangle def \begin{cases} d(3;3) \\ e(-9;-3) \\ f(6;1-4k^2) \end{cases}$

60) Hallar "k" para que los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 formen un cuadrado o un rombo. (partir de la base que tienen que medir los cuatro lados lo mismo) $\begin{cases} P_1\ (4;2) \\ P_2\ (k-1;5) \\ P_3\ (-3;2k-1) \\ P_4\ (3k^2-2;-2) \end{cases}$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Función Módulo

Número de Tema: **43**

Área: **Matemática**

☆ **Módulo:** Es la función que "extrae" el valor absoluto del número o expresión a la que afecte:

Valor absoluto de un número: Es el valor positivo del número. Ejemplos:

El valor absoluto del número (3) es 3: $|3| = 3$

El valor absoluto del número (–3) también es 3: $|-3| = 3$

El módulo se expresa con dos barras verticales

☆ **Propiedades Fundamentales del Módulo**

1ra. Propiedad: $\forall x \in \Re : \; |x| \geq 0$

Esto significa: "*para todo **x** perteneciente a los Reales...*" el módulo de "x" siempre es positivo o cero.

2da. Propiedad. $\forall x \in \Re : \; |x| = |-x|$

"Los módulos de dos números o expresiones opuestas son iguales"

Ejemplos: $|5| = |-5| = 5$ $\qquad \left|\frac{1}{10}\right| = \left|-\frac{1}{10}\right| = \frac{1}{10}$

3ra. Propiedad. $\forall x \in \Re : \; |x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$

"El módulo de un producto es el producto de los módulos"

Propiedad Distributiva del Módulo
Respecto de la Multiplicación.

Ejemplos: $|3 \cdot (-6)| = |3| \cdot |-6| = 18$ $\qquad \left|-\frac{2}{9} \cdot 5\right| = \left|-\frac{2}{9}\right| \cdot |5| = \frac{10}{9}$

4ta. Propiedad. $\forall x \in \Re : \; \left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|}$

"El módulo de un cociente es el cociente de los módulos"

Propiedad Distributiva del Módulo
Respecto de la División.

Ejemplo: $\left|\frac{-8}{5}\right| = \frac{|-8|}{|5|} = \frac{8}{5}$

5ta. Propiedad. Esta propiedad es muy importante. $\forall x \in \Re : \; \sqrt{x^2} = |x|$

O sea que se puede simplificar la raíz con el cuadrado pero hay que aplicarle el Módulo a la X

Veamos un ejemplo, planteando la resolución de una ecuación:

$$x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad |x| = \sqrt{16} \quad \Rightarrow \quad |x| = 4$$

Lo que significa que siempre que "pase del otro lado del igual" una potencia par, debo colocar las barras de Módulo como en el ejemplo.

De esta manera: $|x| = 4$ $\begin{cases} \text{"}\mathbf{x}\text{" puede valer } \mathbf{4}\text{...} \\ \text{... o es también posible que "}\mathbf{x}\text{" valga } \mathbf{-4}\text{.} \end{cases}$

Esta conclusión se demuestra fácilmente: $x^2 = 16 \begin{cases} 4^2 = 16 \\ (-4)^2 = 16 \end{cases}$ Tanto el "4" como el "–4" verifican la ecuación.

☆ **Ecuaciones con Módulo**: Veamos como se resuelve una ecuación con un módulo.

Al principio despejamos X como siempre.

Ejemplo: $3|2X+1|-7=2 \Rightarrow 3|2X+1|=2+7 \Rightarrow |2X+1|=9\div 3$

Me queda esta expresión. Ahora vamos partir el ejercicio en 2 caminos. $\Rightarrow |2X+1|=3 \begin{cases} 2X+1=3 \\ 2X+1=-3 \end{cases}$ Ya que es tan válido para que se cumpla la igualdad: Que la expresión dentro del módulo sea positiva, como que sea negativa

$$|2X+1|=3 \begin{cases} 2X+1=3 \rightarrow 2X=3-1 \rightarrow X=2\div 2 \rightarrow \boxed{X=1} \\ 2X+1=-3 \rightarrow 2X=-3-1 \rightarrow X=-4\div 2 \rightarrow \boxed{X=-2} \end{cases}$$

Y estas son las soluciones de la ecuación.

Las Funciones con Módulo: Como vimos, el "módulo" o "valor absoluto" es un "operador matemático" por lo tanto se puede aplicar este "operador" a cualquier tipo de función, ya sea, lineales, cuadráticas, polinómicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc. Nosotros en este capítulo solo vamos a ver el módulo aplicado en funciones lineales.

Gráfica de la función módulo con funciones lineales:

Veamos un ejemplo de estas funciones: Grafiquemos y estudiemos: $f(x) = 3\cdot\left|\frac{1}{2}X+1\right|-2$

Para graficar este tipo de funciones vamos a graficar una función partida, es decir que vamos a "partir la función en dos partes y graficaremos en el mismo plano ambas partes. Veamos:

Por la 1º y 2º propiedad del módulo sabemos que:
(Si la expresión dentro del módulo es positiva, entonces el módulo de "una expresión" es igual a "dicha expresión", pero si en cambio esta expresión es negativa, el módulo será igual a dicha expresión cambiada de signo)

$$\begin{cases} \text{Si } \frac{1}{2}X+1 > 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{2}X+1\right| = \frac{1}{2}X+1 \\ \text{Si } \frac{1}{2}X+1 < 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{2}X+1\right| = -\left(\frac{1}{2}X+1\right) \end{cases}$$

Veamos entonces cuando "1/2x + 1"es positivo o negativo, Planteamos

$$\begin{cases} \frac{1}{2}X+1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}X > -1 \Rightarrow X > -1\cdot 2 \Rightarrow X > -2 \\ \frac{1}{2}X+1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{2}X < -1 \Rightarrow X < -1\cdot 2 \Rightarrow X < -2 \end{cases}$$

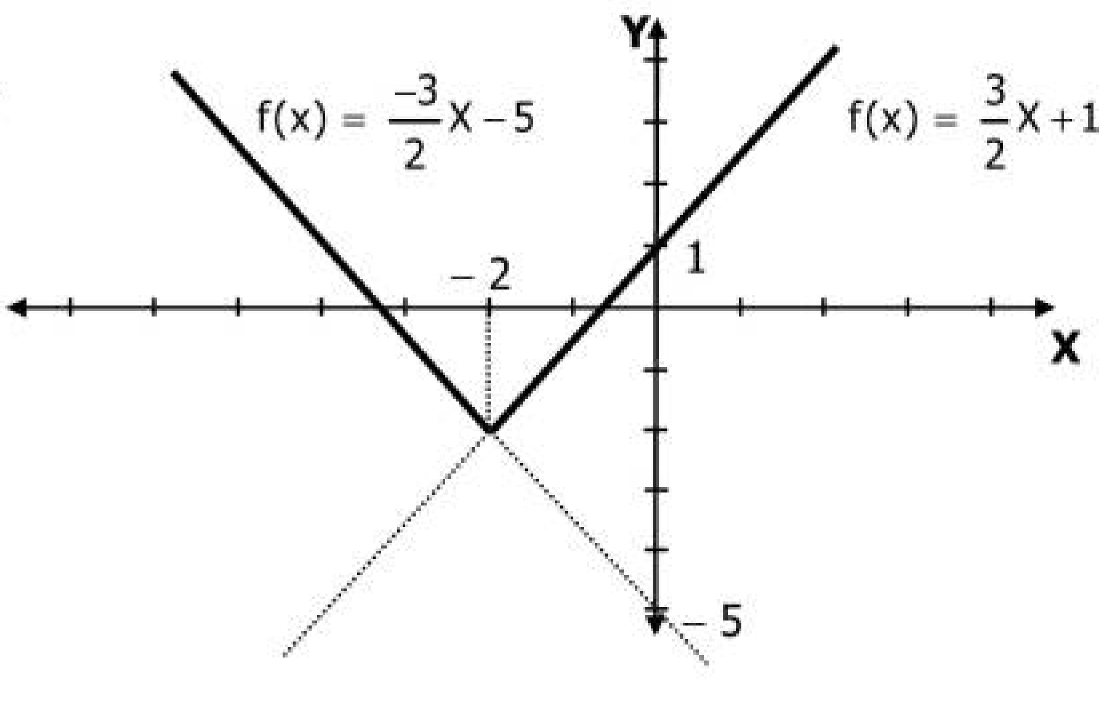
Ya sabemos cuando vale una cosa u otra este módulo:

$$\begin{cases} \text{Si } \frac{1}{2}X+1 > 0 \Rightarrow x>-2 \Rightarrow \left|\frac{1}{2}X+1\right| = \frac{1}{2}X+1 \\ \text{Si } \frac{1}{2}X+1 < 0 \Rightarrow x<-2 \Rightarrow \left|\frac{1}{2}X+1\right| = -\left(\frac{1}{2}X+1\right) \end{cases}$$

Y reemplazando al "módulo" en la función por lo que corresponda según sea x<–2 ó x>–2

$x<-2 \Rightarrow f(x) = 3\cdot -\left(\frac{1}{2}X+1\right)-2 \Rightarrow f(x) = \frac{-3}{2}X-5$ $\quad x>-2 \Rightarrow f(x) = 3\left(\frac{1}{2}X+1\right)-2 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}X+1$

Y graficamos cada recta, una para x<–2 y la otra para x>–2



Dados: $x = -3$ e $y = 2$ hallar:

1) $|x| - |y|$

2) $|x - y|$

3) $\dfrac{x - |y|}{|x| - y}$

4) $-\left|\dfrac{|x \cdot y|}{x}\right|$

5) $-|y| \cdot \dfrac{1}{x - |x|}$

6) $\left|x + \dfrac{|y|}{|x \cdot y|}\right|^{|x|-3}$

7) $\left|\dfrac{2 \cdot |x| - |-1| \cdot |x \cdot y|}{-1 + |x| + |y|}\right|$

Unir con flechas... puede ocurrir que dos ejercicios en la columna de la izquierda tengan la misma solución a la derecha.

8) $|x| < 6$

9) $|6| < 3$

10) $\left|\dfrac{2 \cdot x - 5}{1 - |3|}\right| < 0$

11) $|6 \cdot x - 6| \geq 0$

12) $|4 \cdot x - 2| < 6$

$-1 < x < 2$

$-6 < x < 6$

Absurdo!

$x \in \Re$

Responder Verdadero o falso:

13) El Módulo de a + b es igual al Módulo de a + el Módulo de b
14) El Módulo le cambia el signo a lo que está adentro de las barras
15) El Módulo siempre da positivo, no importa "lo que está adentro".
16) Si el Módulo de **X** es mayor a 5 entonces **X** puede ser negativa
17) Si el Módulo de **X** es menor a 5 entonces **X** puede ser negativa
18) Si el Módulo de **X** es mayor a 5 entonces **X** es negativa
19) Si el Módulo de **X** es menor a 5 entonces **X** es negativa
20) El Módulo de una resta es igual a la resta de los Módulos
21) El Módulo de una división es igual a la división de los Módulos
22) **X** dividido el Módulo de **X** puede dar 1 o –1
23) Si **X** dividido el Módulo de **X** da –1 entonces X es negativa
24) **X** menos el Módulo de **X** da siempre 0
25) **X** menos el Módulo de **X** da 0 cuando X es negativa
26) $\mathbf{X + |X| = 0}$ se cumple cuando X es negativa
27) $\mathbf{X + 5 - |X + 5| = 0}$ se cumple cuando X es positiva

<u>Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones con módulo</u>:

28) $|x| = 2$

29) $|x-2| = 3$

30) $|5x| = 15$

31) $|x/2| = 4$

32) $|x| = -1$

33) $|3x - 2| = 7$

34) $|12 - 5x| = 8$

35) $|(4x-7)/3| = 3$

36) $|(9-2x)/5| = 1$

37) $|(x+2)/(x-1)| = 2$

38) $|(x+3)/(x+1)| = 1/2$

39) $|3x - 4| = x$

40) $-|x + 1| = 5 - 2x$

41) $|2x + 3| = |x - 1|$

42) $|x + 2| = |1 - 2x|$

43) $|x + 4| = |2 - x|$

44) $|x + 3| = |5 - x|$

Resolver las cuentas reemplazando " k " por –1

45) $-|k-1| - 2$

46) $5 - |k-3|$

47) $9 - |3k+5|$

48) $4 + 2\,|2k+1|$

49) $16 : 2\,|3k-1|$

50) $|-3 + |k-1||$

51) $|k + |k-3||$

52) $|2k + |k| - 1|$

53) $|k + |2k| - 1|$

54) $-\left|\dfrac{-2|k| - 1}{3}\right|$

55) $\left|\dfrac{2|k+1| - 1 + k}{k+2}\right|$

56) $\dfrac{|k+2| \cdot |k-2|}{(k+2) \cdot (k-2)}$

57) $\dfrac{|k^2 - 1|}{k^2 + k + 1}$

58) $\left|\dfrac{-1|k| - k}{-k}\right| - \left|\dfrac{|k| + k}{-1 + k}\right|$

59) $\left|\dfrac{-1 + |k| - k}{-|k|}\right| \cdot \left|\dfrac{|k| - k}{-|-k| - 1}\right|$

60) $\left|\dfrac{-|k| + k}{-2|k|} - |-1k| + k\right|$

61) $\left|\,|(k+3)^2| - |(k-3)^2|\,\right|$

62) $|(k+3)^2 - (k-3)^2|$

63) $|(|k| + 3)^2 - 3(k+3)^2|$

by Dal-0r para TARINGA!

Algunos más para hallar el valor numérico de la expresión con "k=−1"

64) $\left|\left(\dfrac{|k|+k}{|-1+k|}\right)^2-\left(\left|\dfrac{1}{-k}\right|+\left|\dfrac{-1}{-|k|}\right|\right)-k\right|$

67) $\dfrac{|k|+k}{-|-k|+k}+\dfrac{|-k|+k^2}{1-k+|k|}-\dfrac{-|-k|}{2-k}$

65) $\left(\dfrac{-|k|-k}{|-1-k|+1}\right)^2-\left|\dfrac{-1}{-k}\right|+\left|\dfrac{-k}{-|-k|}\right|-k$

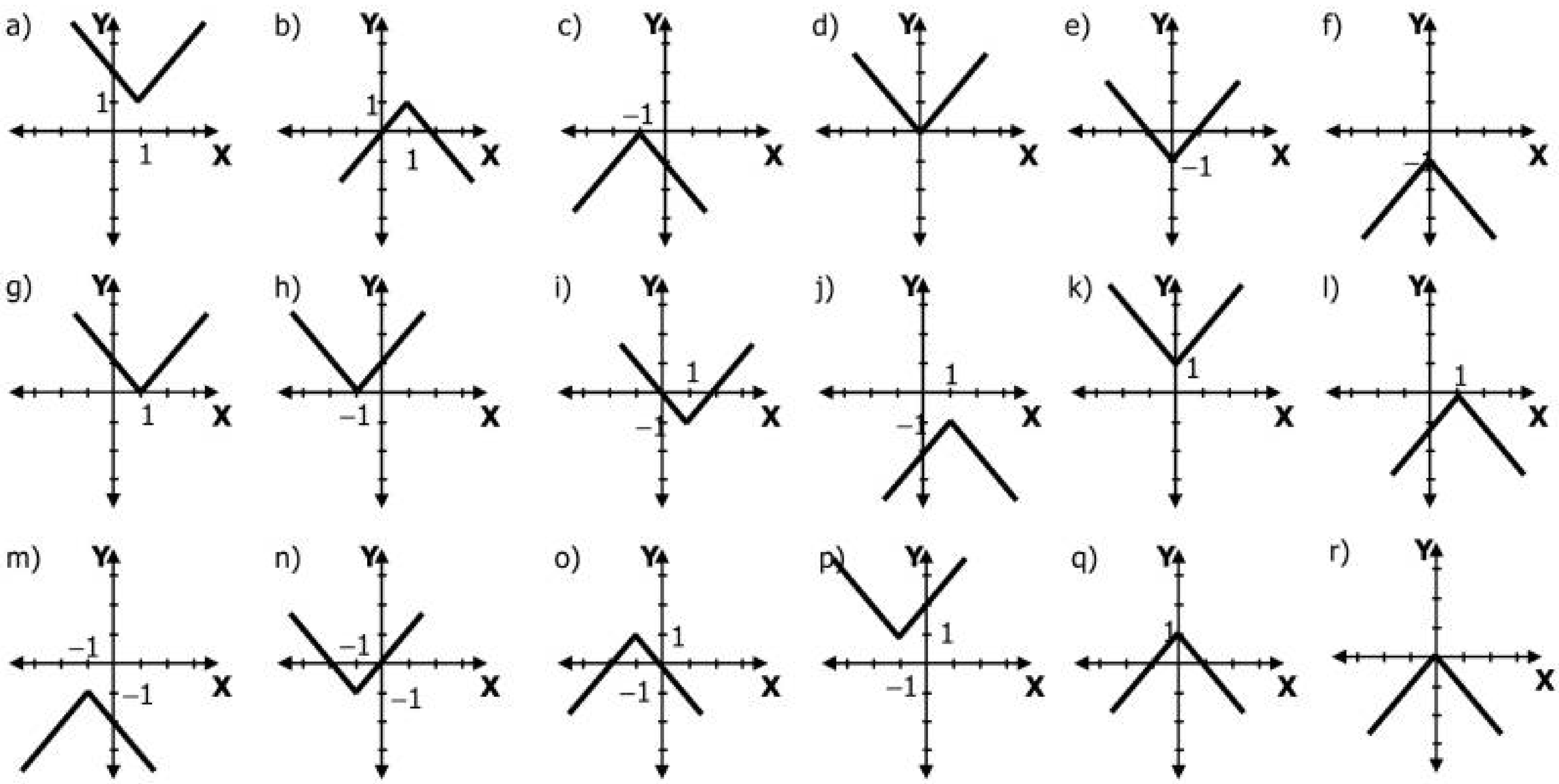
68) $\sqrt{\dfrac{|k|-k}{|-k|-k}}+\sqrt{\dfrac{|-k|+2\sqrt{|k|}-k}{1-k-|k|}}$

66) $\left(\dfrac{|k|-k}{-|-1+k|}\right)\cdot\left|\dfrac{|-k|-2k^2}{|-1+k|+k}\right|$

69) $1-\left|\sqrt{\left(\dfrac{k}{|-k|-1-k}\right)^2}-\sqrt{\dfrac{|k-1-|-k||+1}{-k}}\right|$

Identificar cada una de las siguientes funciones con módulo con sus gráficas correspondientes:

70) $f(x)=|x|$
71) $f(x)=|x+1|$
72) $f(x)=|x-1|$
73) $f(x)=|x|+1$
74) $f(x)=|x|-1$
75) $f(x)=|x+1|-1$
76) $f(x)=|x+1|+1$
77) $f(x)=|x-1|+1$
78) $f(x)=|x-1|-1$
79) $f(x)=-|x|$
80) $f(x)=-|x+1|$
81) $f(x)=-|x-1|$
82) $f(x)=-|x|+1$
83) $f(x)=-|x|-1$
84) $f(x)=-|x+1|-1$
85) $f(x)=-|x-1|-1$
86) $f(x)=-|x-1|+1$
87) $f(x)=-|x+1|+1$



<u>Graficar las funciones y deducir</u>:

88) $f(x)=|x+2|$
89) $f(x)=|x+3|$
90) $f(x)=|x+5|$

91) Dada $f_{(x)}=|x+\alpha|$
¿Qué representa "α"?

92) $f(x)=|x-2|$
93) $f(x)=|x-3|$
94) $f(x)=|x-5|$

95) Dada $f_{(x)}=|x-\alpha|$
¿Qué representa "α"?

96) $f(x)=|x|+3$
97) $f(x)=|x|+5$
98) $f(x)=|x|-4$

99) Dada $f_{(x)}=|x\pm\alpha|$
¿Qué representa "α"?

100) $f(x)=|2x|$
101) $f(x)=|3x|$
102) $f(x)=\left|\dfrac{1}{2}x\right|$

103) Dada $f_{(x)}=|\alpha\cdot x|$
¿Qué representa "α"?

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Inecuaciones e Intervalos

Número de Tema: **44**

Área: **Matemática**

☆ **<u>¿Qué son las Inecuaciones?</u>** Son las desigualdades de expresiones algebraicas en las que hay al menos una variable cuyo valor numérico se desconoce, esta variable es la que llamamos incógnita.

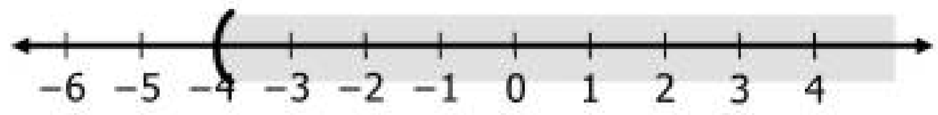
Repaso : ¿Te acordás de los signos "mayor que" y "menor que"?

Fijate en los ejemplos que siempre el "piquito" del signo apunta al número menor, y las "dos patitas" al mayor.

$13 > 7$ → Se lee "13 **es mayor que** 7"
$20 < 43$ → Se lee "20 **es menor que** 43"
$X \geq 2$ → Se lee "x **es mayor o igual que** 2"

<u>Nociones básicas</u>: Veamos la siguiente Desigualdad: $\mathbf{X > -4}$

"**x**" representa a **todos** lo valores mayores a (−4) Grafiquémoslo:

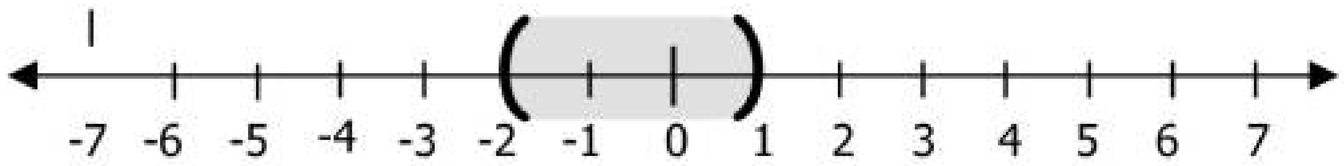


Así, este gráfico se denomina <u>intervalo</u>. Como el signo es "**>**" entonces **no incluye al "−4"** y en el gráfico se usa un **paréntesis**. Si hubiera sido "≥" **lo hubiera incluido** y para graficarlo en lugar de usar un paréntesis en el "−4" hubiéramos usado un **corchete**.

☆ **<u>Clasificación de intervalos</u>**:

☆ <u>Intervalos **Abiertos**</u>:

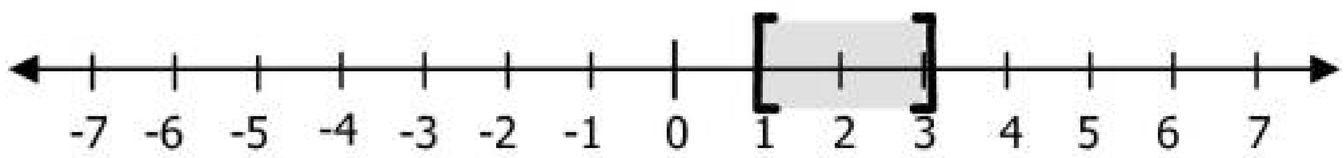
$-2 < x < 1$ ⟹ Esto significa: "<u>todos los valores mayores a **−2** y menores a **1**</u>"
<u>Ni el −2 ni el 1 pertenecen al intervalo</u>.-



<u>Se escribe</u>:
(-2,1)

☆ <u>Intervalos **Cerrados**</u>:

$1 \leq x \leq 3$ ⟹ "<u>todos los valores **mayores o iguales** a **1** y **menores o iguales** a 3</u>"
<u>Ambos extremos, el 1 y el 3, pertenecen al intervalo</u>.

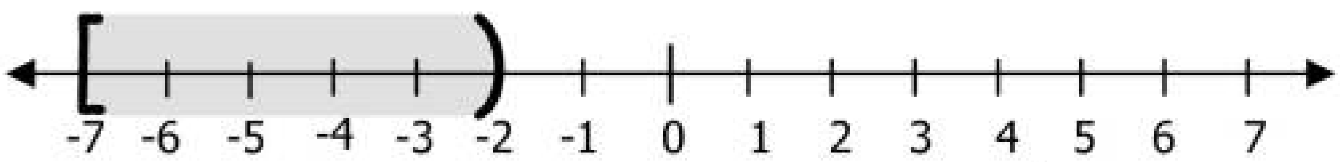


<u>Se escribe</u>:
[1,3]

Como los extremos están incluidos, usamos corchetes en vez de paréntesis.

◆ <u>Intervalos Finitos</u>: <u>Son aquellos que *tienen principio y fin*</u>, "x" toma valores entre dos puntos definidos:

$-7 \leq x < -2$ ⟹

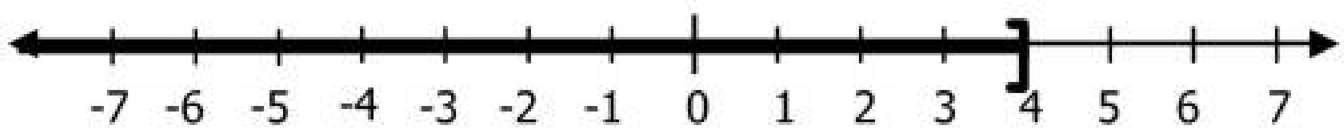


<u>Se conocen los dos extremos o límites del intervalo</u>

<u>Se escribe</u>:
[−7,−2)

◆ <u>Intervalos Infinitos</u>: Son aquellos que <u>*tienen principio pero no fin*</u>, "**x**" toma infinitos valores naturales:

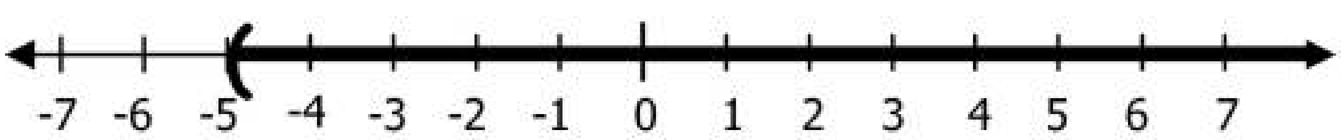
$x \leq 4$ ⟹



<u>Se escribe</u>:
(-∞,4]

<u>En este otro caso se conoce solo un extremo del intervalo</u> y como SI incluye al 4 se escribe un corchete

Otro ejemplo: $x > -5$



<u>Se escribe</u>:
(−5;∞)

Fijate que como NO incluye al −5, se escribe un paréntesis.

- **<u>Inecuaciones con doble planteo</u>:** Vamos a ver ahora Inecuaciones que se resuelven "partiendo al planteo en dos partes".

Veamos un ejemplo de este tipo. $\dfrac{2}{x-3} > 6$

Antes de empezar a resolverlo, debemos pedir que: $\mathbf{x \neq 3}$

***Ya que el denominador debe ser distinto de <u>cero</u>*.** Y si en este caso "**x**" fuera igual a **3**, el denominador sería cero, y se produciría una **<u>indeterminación</u>.** Si el resultado final incluyera al x=3, debo excluir este valor del mismo.

Ahora sí estamos listos para empezar a resolver el ejercicio, pero (**siempre hay un pero**) surge la duda de si se debe o no cambiar el signo de la desigualdad al pasar multiplicando **x-3**, ya que no sabemos si este factor es positivo o negativo...

<u>...por eso lo que hacemos es plantear las dos posibilidades</u>:

$x-3>0$ **ó** $x-3<0$

Ya que en esta "rama" **x-3** <u>resulta mayor a cero</u>, debemos tener presente que no vamos a cambiar el signo de la desigualdad cuando despejemos, y que: (esto sale de despejar "**x**" de **x-3>0**) $x>3$

Como de este lado suponemos que el factor (x–3) es positivo, dejamos el signo como estaba

$$2 > 6\cdot(x-3)$$

$$2 > 6\cdot x - 18 \Rightarrow 20 > 6\cdot x \Rightarrow \frac{20}{6} > x \Rightarrow \frac{10}{3} > x$$

En esta otra "rama" supusimos que **x-3** <u>resulta menor a cero</u>, y vamos a tener presente esto a la hora de despejar. Aparte sabemos que: $x<3$ (esto también sale de despejar "**x**" de **x-3<0**)

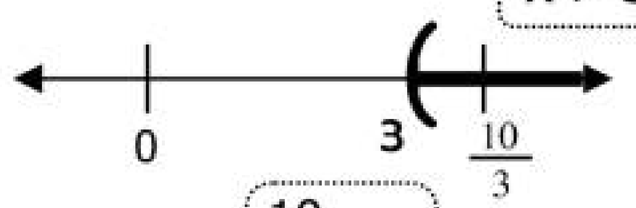
Como de este lado suponemos que el factor (x–3) es negativo, damos vuelta el signo.

$$2 < 6\cdot(x-3)$$

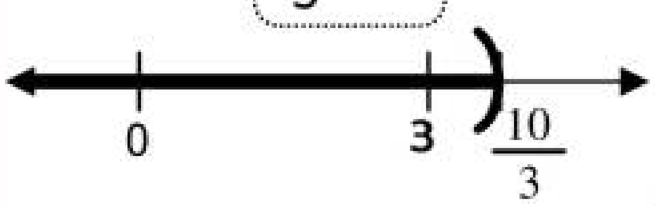
$$2 < 6\cdot x - 18 \Rightarrow 20 < 6\cdot x \Rightarrow \frac{20}{6} < x \Rightarrow \frac{10}{3} < x$$

Ahora hacemos las intersecciones entre los 2 resultados (en los círculos con línea punteada) en cada "rama".

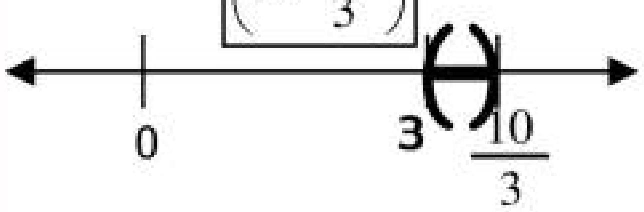
$\boxed{x>3}$



$\boxed{\dfrac{10}{3} > x}$



$\boxed{\left(3, \dfrac{10}{3}\right)}$



$\boxed{x<3}$

$\boxed{\dfrac{10}{3} < x}$

Ahora planteamos ambas INTERSECCIONES

$\boxed{\varnothing}$ Conjunto vacío, porque no hay intersección.

Ahora como arriba de todo dijimos que x-3 podría ser mayor **<u>ó</u>** menor que cero, hacemos *<u>una UNIÓN</u>* de los últimos intervalos hallados.

$$\left(3, \frac{10}{3}\right) \cup \varnothing \Longrightarrow \left(3, \frac{10}{3}\right)$$ Resultado final del ejercicio

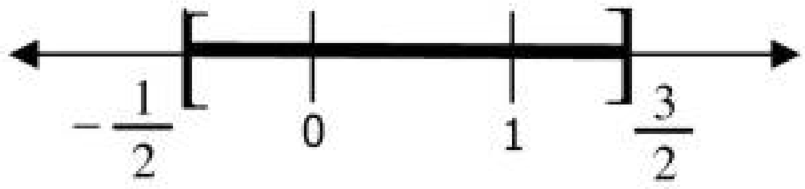
☆ <u>Otro ejemplo diferente</u>: Veamos uno "con Módulo": $\left| 2 \cdot x - 1 \right| \leq 2$

Por *<u>Propiedad del Módulo</u>*: $-2 \leq 2 \cdot x - 1 \leq 2$

Ahora "voy despejando" a ambos lados al mismo tiempo: $-2 \leq 2 \cdot x - 1 \leq 2$

$$-2+1 \leq 2 \cdot x \leq 2+1 \Longrightarrow -1 \leq 2 \cdot x \leq 3 \Longrightarrow \boxed{\frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}}$$

Como intervalo: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$



☆ <u>Otro Ejercicio</u>: $\dfrac{x+3}{x-1} < 0$ Acá tenemos que también hacer una salvedad $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Porque <u>el denominador debe ser siempre distinto de cero</u>.

Ahora sí, planteamos la resolución del ejercicio. Para este tipo de problemas el planteo es bastante interesante.

Fijate que tenemos un **cociente** <u>que es menor a cero</u>, es decir que siempre es negativo. Por eso es posible recurrir a la regla de los signos, que sirve tanto para la División como para la Multiplicación:

<u>Regla de los Signos</u>

+	÷	+	es	+
+	÷	−	es	−
−	÷	−	es	+
−	÷	+	es	−

Así que vamos a plantear otra vez dos posibilidades o "ramas". En una el numerador es positivo y el denominador negativo, y en la otra al revés, porque, si nos basamos en la Regla de los Signos, para que el cociente (división) sea negativo, <u>el numerador y el denominador tienen que tener distinto signo</u>.

Así que, nuestro ejercicio era: $\dfrac{x+3}{x-1} < 0$

El Numerador positivo y el Denominador negativo. *El Numerador negativo y el Denominador positivo*

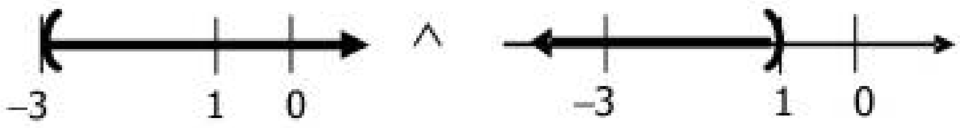
$$\boxed{x+3>0 \quad \wedge \quad x-1<0} \quad \vee \quad \boxed{x+3<0 \quad \wedge \quad x-1>0}$$

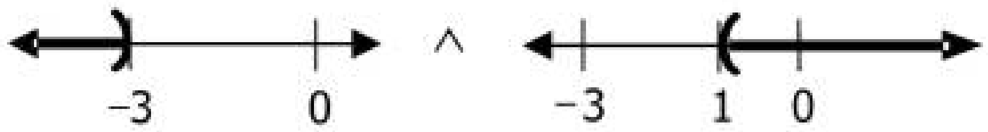
INTERSECCIÓN **UNIÓN** **INTERSECCIÓN**

$x+3>0 \quad \wedge \quad x-1<0 \qquad \vee \qquad x+3<0 \quad \wedge \quad x-1>0$

$\Downarrow$ Despejando X $\qquad \Downarrow$ Despejando X

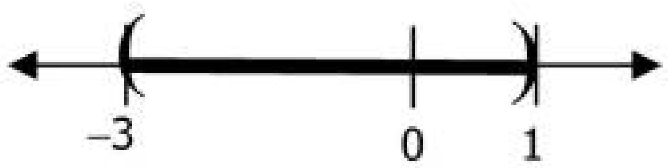
$x>-3 \quad \wedge \quad x<1 \qquad\qquad x<-3 \quad \wedge \quad x>1$



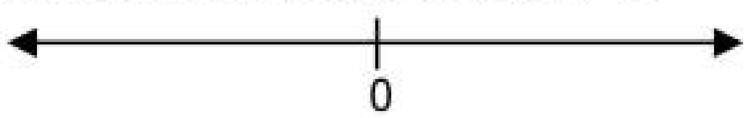


la **INTERSECCIÓN** sería: $-3 < x < 1$

$(-3;\ 1)$



Y como en esta rama los dos intervalos no se **INTERSECAN**, se obtiene como solución: $\varnothing$



Ya tenemos entonces las soluciones de las INTERSECCIONES, ahora falta unir estos resultados. En este caso es una unión porque viene de un "o", de modo que son válidas cualquiera de las dos ramas en las que dividimos el planteo, por lo tanto debemos unir los resultados obtenidos en cada "rama"

Y la solución final sería la UNIÓN de las soluciones de ambas ramas: $(-3;\ 1)\ \text{U}\ \varnothing \quad \Rightarrow \quad (-3;\ 1)$

☆ Otro Ejemplo: Vamos a ver ahora un ejemplo incluyendo al igual en la inecuación.

Resolvamos la siguiente inecuación: $\dfrac{x+3}{x-1} \geq 0$ *En este caso el cociente es positivo o cero.*

Planteamos primero la posibilidad de que sea cero, que es más fácil:

Para que la expresión sea cero, debe ser cero el numerador y el denominador debe ser siempre distinto de cero ya que la división por cero no existe. Planteamos entonces que el numerador sea cero:

$X + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{X = -3}$

Esto significa que x = –3 es parte de la solución de esta inecuación ya que con ese valor la expresión se hace cero. Por eso, debemos tener esto en cuenta para cuando terminemos el ejercicio ya que luego vamos a plantear que la expresión sea mayor a cero, porque hasta ahora solo planteamos que sea igual a cero, por lo tanto tendremos que agregar este resultado al resultado final.

Bueno, de ahora en adelante, el planteo es similar al planteo del ejemplo anterior. Si un cociente es positivo, entonces, tenemos dos posibilidades:

- Que el denominador y numerador sean ambos positivos: $X + 3 > 0 \quad \wedge \quad x - 1 > 0$
- Que el denominador y numerador sean ambos negativos: $X + 3 < 0 \quad \wedge \quad x - 1 < 0$

Así que vamos a plantear otra vez dos posibilidades o "ramas". En una el numerador y el denominador negativos, y en la otra ambos positivos. porque, si nos basamos en la Regla de los Signos, para que el cociente (división) sea positivo, el numerador y el denominador tienen que tener el mismo signo.

Así que, nuestro ejercicio era: $\dfrac{x+3}{x-1} \geq 0$

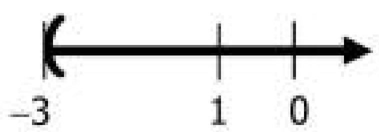
El Numerador y Denominador positivos. El Numerador y el Denominador Negativos

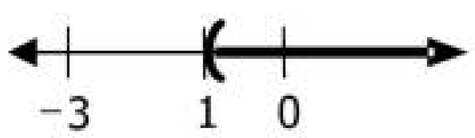
$\underbrace{x+3>0 \quad \wedge \quad x-1>0}_{\textbf{INTERSECCIÓN}} \quad \underset{\textbf{UNIÓN}}{\vee} \quad \underbrace{x+3<0 \quad \wedge \quad x-1<0}_{\textbf{INTERSECCIÓN}}$

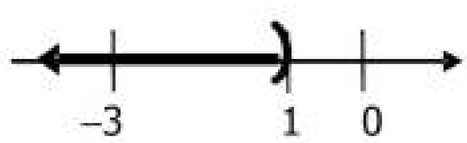
$x+3>0 \quad \wedge \quad x-1>0 \qquad \vee \qquad x+3<0 \quad \wedge \quad x-1<0$

⇩ Despejando X ⇩ Despejando X

$x>-3 \quad \wedge \quad x>1 \qquad\qquad x<-3 \quad \wedge \quad x<1$

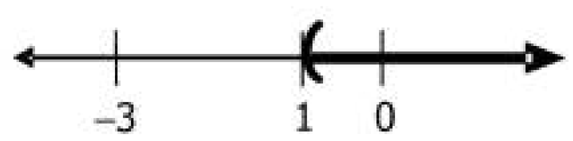


$\wedge$


$\wedge$


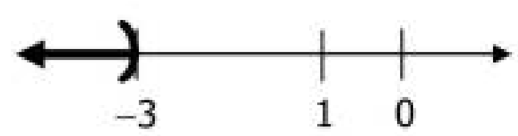
O sea que la **INTERSECCIÓN** sería: $1 < x$

$1 < x$



O sea que la **INTERSECCIÓN** sería: $x < -3$

$x < -3$



Ya tenemos entonces las soluciones de las INTERSECCIONES, ahora falta unir estos resultados.

Y a esta unión hay que sumarle la solución particular que obtuvimos al principio cuando igualamos la expresión a cero. Esa solución era que x = –3

Y la solución final sería la UNIÓN de todo: $(1;\ \infty) \cup (-\infty;\ -3) \cup \{-3\} \ \Rightarrow\ \boxed{(-\infty;\ -3] \cup (1;\ \infty)}$

Fíjense que para incluir al x=–3 ponemos un corchete en el intervalo que incluya al x=–3

Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $|X| < 5$

2) $|X| > 15$

3) $|X| < 4$

4) $|X| < a$

con $a \ \varepsilon \ \Re$

5) $|X| \leq 1$

6) $|3X| \leq 12$

7) $\frac{1}{2} \leq \left|\frac{X}{12}\right|$

8) $\left|\frac{X}{8}\right| \leq \frac{5}{4}$

9) $\left|\frac{2X}{-5}\right| < 8$

10) $|X-3| < 3$

11) $|X+5| \leq 10$

12) $|X-4| \leq 1$

13) $|X-4| \geq 1$

14) $|X-4| \leq 24$

15) $|X-6| \leq 12$

16) $|X+1| < 1$

17) $|2X-1| \leq 25$

18) $|8X-4| < 44$

19) $|8X+4| < 44$

20) $|5X-7| \leq 3$

21) $18 > |6X-18|$

22) $|2X-4| > 4$

23) $|12X-3| < 6$

24) $|X-1| \leq \frac{2}{3}$

25) $|X-(3X-1)| < 6$

26) $|2X-(3X-2)| \leq 6$

27) $|1-X| \geq 2$

28) $|-X+2| < 2$

29) $|3-4X| \leq 1$

30) $\left|\frac{X}{4}-1\right| \leq 8$

31) $\left|\frac{1}{3}X+3\right| \leq 9$

32) $\left|-\frac{2}{5}X+1\right| \leq -1$

Resolver las siguientes inecuaciones con doble planteo:

33) $\left|\frac{87X+1003}{-94X-4782}\right| < 0$

34) $\frac{2X+3}{6X-1} < 0$

35) $\frac{-2X+2}{X-1} \leq 0$

36) $\frac{-X+3}{X+1} \leq 0$

37) $\frac{-3X-6}{X+2} \leq 0$

38) $\frac{7X+7}{X+1} > 0$

39) $\frac{X+3}{X-1} > 0$

40) $\frac{X+2}{-X+1} \geq 0$

41) $\frac{-X+3}{X+2} \geq 0$

42) $\frac{X-1}{X+1} \geq 0$

Resolver las inecuaciones:

43) $\frac{2}{X+1} < 1$

44) $\frac{4}{X-1} < 2$

45) $\frac{5}{X-2} + 3 \geq 4$

46) $\frac{3}{X+2} + 1 \geq 2$

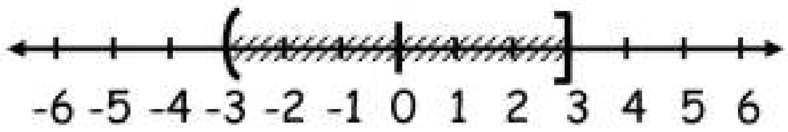
47) $\frac{3}{X+2} \geq \frac{2}{X+1}$

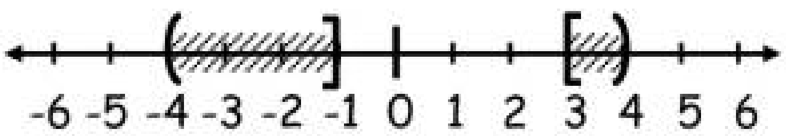
48) $\frac{2}{X-1} \geq 2$

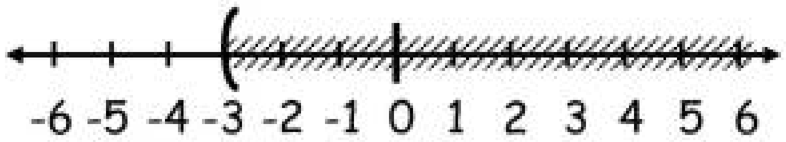
49) $\frac{5}{X+3} < 1$

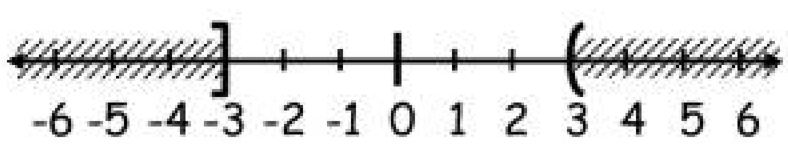
50) $\frac{16}{X-2} \geq 4$

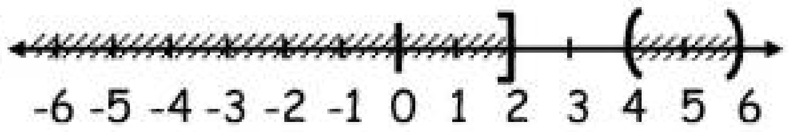
Expresar como intervalos los siguientes gráficos:

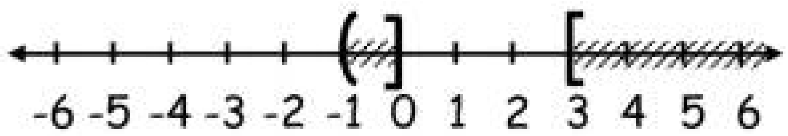
51) 

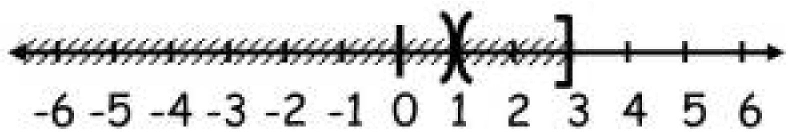
52) 

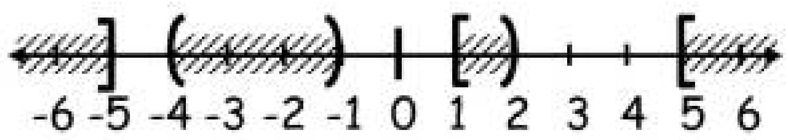
53) 

54) 

55) 

56) 

57) 

58) 

Graficar los siguientes intervalos:

58) $(-2;3]$

59) $(-1;1] \cup [2;+\infty)$

60) $(-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$

61) $(-\infty;-1] \cup [2;3]$

62) $[-4;-3) \cup (-2;\infty)$

63) $[-5;-3] \cup [-1;3) \cup (2;\infty)$

64) $(-\infty;-2) \cup (-2;-1]$

65) $(-\infty;-1] \cup [0;1)$

66) $(0;1] \cup (2;3) \cup (3;\infty)$

67) $[-1;-3] \cup (-2;0)$

Dar le conjunto solución de las siguientes inecuaciones:
Explicar como deducen el resultado.

68) $X^2 + 1 > 0$

69) $(X-1)^2 > -1$

70) $|X+3| > -2$

71) $(-|X+2|)^2 \geq 0$

72) $-1 < \dfrac{|x|}{X} \leq 1$

Resolver las siguientes inecuaciones:

Nota 1: El doble planteo que hay que hacer en un producto que es mayor o menor a cero, es el mismo que en las divisiones, usando convenientemente la regla de los signos.

Nota 2: En las que encuentren una ecuación cuadrática desarrollada, para resolverlas hay que factorizarla, es decir, encontrar las raíces primero y luego hacer el doble planteo correspondiente.

73) $(x+2)\cdot(x-1) \leq 0$

74) $(x-3)\cdot(x-1) > 0$

75) $(x+4)\cdot(x+2) < 0$

76) $(x-3)\cdot(-x+5) \geq 0$

77) $(x-3)^2 > 0$

78) $(x-1)^2 \leq 0$

79) $x^2-9 < 0$

80) $x^2-1 > 0$

81) $x^2+3x+2 \leq 0$

82) $x^2-x-6 < 0$

83) $x^2-5x-14 > 0$

84) $x^2+30 < 11x$

85) $x^2 \geq \dfrac{8x}{3}+1$

86) $(x+1)^2 \leq 3\cdot(x+1)$

87) $(x-7)^2 < x-5$

Unir con flechas. Identificar cada una de las inecuaciones con el gráfico que representa su solución:
Sugerencia: Se puede resolver probando con números que estén dentro de los intervalos solución para ver si verifican o no las soluciones. Otra manera de resolver estos ejercicios es haciendo triples planteos, es decir planteando por ejemplo que para que un producto A . B . C > 0, se puede dar mediante las posibilidades:
$A.B.C>0 \Leftrightarrow (A>0 \wedge B>0 \wedge C>0) \vee (A>0 \wedge B<0 \wedge C<0) \vee (A<0 \wedge B>0 \wedge C<0) \vee (A<0 \wedge B<0 \wedge C>0)$

88) $(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-4) < 0$ — a) $(-2;-1) \cup (4;\infty)$

89) $(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-4) > 0$ — b) $(-\infty;-1) \cup (2;4)$

90) $(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-4) > 0$ — c) $(-2;1) \cup (4;\infty)$

91) $(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-4) < 0$ — d) $(-1;2) \cup (4;\infty)$

92) $(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-4) < 0$ — e) $(-\infty;-2) \cup (1;4)$

93) $(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-4) > 0$ — f) $(-\infty;-2) \cup (-1;4)$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Sistemas de Inecuaciones

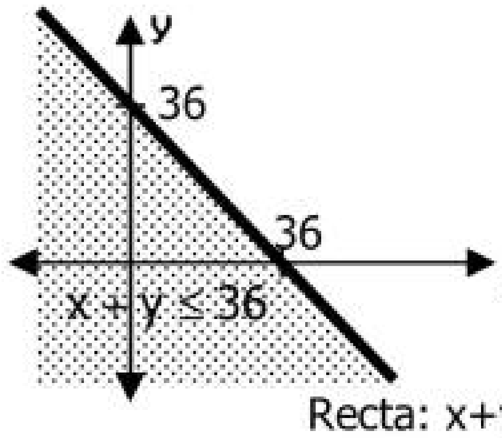
Número de Tema: **45**

Área: **Matemática**

☆ **Inecuaciones en el Plano** Ahora en las inecuaciones que vamos a estudiar, vamos a manejar 2 variables ("**x**" e "**y**") en vez de una sola ("**x**"), y que en vez de graficar en una Recta Numérica, vamos a hacerlo en un Sistema de Ejes Cartesianos.

Veamos como funciona esto, supongamos que tenemos: $x + y \leq 36$

Según esta inecuación, la suma de "x" e "y" siempre debe ser menor ó igual a 36, es decir: **existen infinitos pares de valores (x; y)... que verifican la desigualdad.** Te mostramos como es el gráfico:



Así obtuvimos **todos los puntos del plano que verifican:** $x + y \leq 36$

Importante : Fijate que al conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad lo podemos separar en dos partes:

- **La recta que une los puntos (36, 0) y (0, 36) y se extiende indefinidamente en ambos sentidos:** Es el límite del plano solución, y dichos puntos verifican: $x + y = 36$

Por tratarse de una inecuación "de menor o igual" todos los puntos de la recta se incluyen en la solución.

- **El Plano contenido debajo de la recta:** En este caso el plano se extiende por debajo de la recta y por ser una inecuación "de menor o igual", todos los puntos de dicho plano verifican: $x + y < 36$

Atención: De ahora en más vamos a expresar las inecuaciones con dos variables de la siguiente manera:

$$x + y \leq 36 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+y}{36} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{36} + \frac{y}{36} \leq 1$$

$$\frac{1}{36} \cdot x + \frac{1}{36} \cdot y \leq 1$$

... esta es la inversa del número por donde la recta corta al Eje "**x**"...
O sea que la recta corta al eje "x" en 36.

Inversa del numero donde corta al Eje "**y**"

... de este lado siempre nos debe quedar **1**.-

☆ Veamos ahora otro ejemplo: $4 \cdot x + 2 \cdot y > 8$

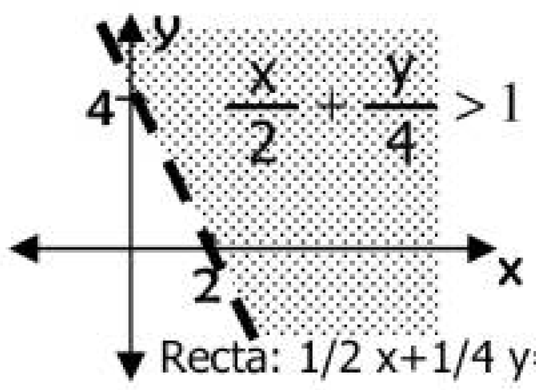
Pasamos el **8** dividiendo, para que nos quede **1** a la derecha. $\frac{4 \cdot x + 2 \cdot y}{8} > 1$

Operamos: $$\frac{4 \cdot x + 2 \cdot y}{8} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4 \cdot x}{8} + \frac{2 \cdot y}{8} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{4} > 1$$

Y al igual que en el ejercicio anterior: $\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot y > 1$

... esta es la inversa del número por donde la recta corta al Eje "**x**"...
O sea que la recta corta al eje "x" en 2.

La recta corta al eje "y" en 4



Nota : Fijate que dibujamos la línea punteada, porque en este caso no está incluida en la solución final, o sea que los puntos pertenecientes a la recta no satisfacen la inecuación.-

☆ **Sistemas de Inecuaciones:** Un sistema de inecuaciones es un conjunto de inecuaciones. Los casos que vamos a estudiar nosotros son sistemas de 2 o más inecuaciones con dos incógnitas (Que van a ser X e Y)

Te comentamos que lo que nos interesa es sólo la resolución gráfica.
Para empezar, vamos a ver un ejemplo: $\begin{cases} y > 1 \\ 3 \cdot x + 6 \cdot y \leq 12 \end{cases}$

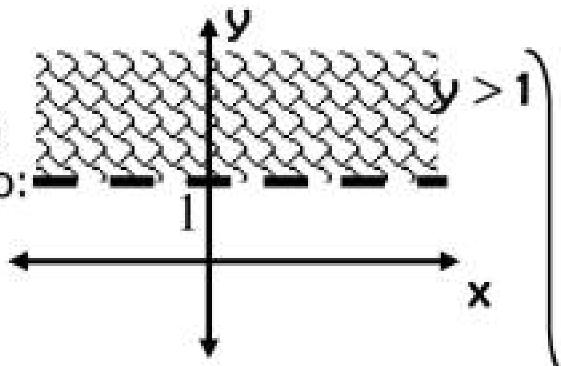
Lo primero es dejar expresadas ambas Inecuaciones de manera de poder graficarlas... con **y>1** "no hay problema", porque se puede graficar fácilmente, pero **3.x+6.y ≤ 12** requiere un poco de trabajo:

$$3 \cdot x + 6 \cdot y \leq 12 \quad \Rightarrow \quad \frac{3 \cdot x + 6 \cdot y}{12} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3 \cdot x}{12} + \frac{6 \cdot y}{12} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} \leq 1$$

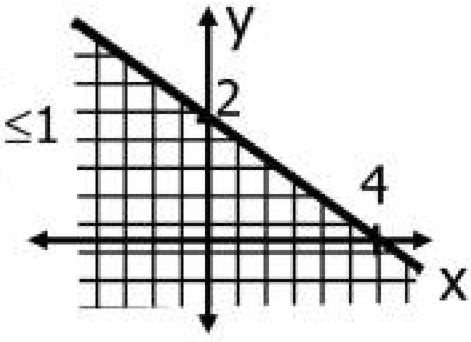
Entonces el Sistema de Inecuaciones quedaría así: $\begin{cases} y > 1 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} \leq 1 \end{cases}$

Resolver un Sistema de Inecuaciones gráficamente es encontrar el plano intersección entre los planos solución de cada inecuación...O sea que vamos a dibujar la solución de cada inecuación, y la solución del Sistema va a ser la "zona de intersección" de las soluciones de cada inecuación.

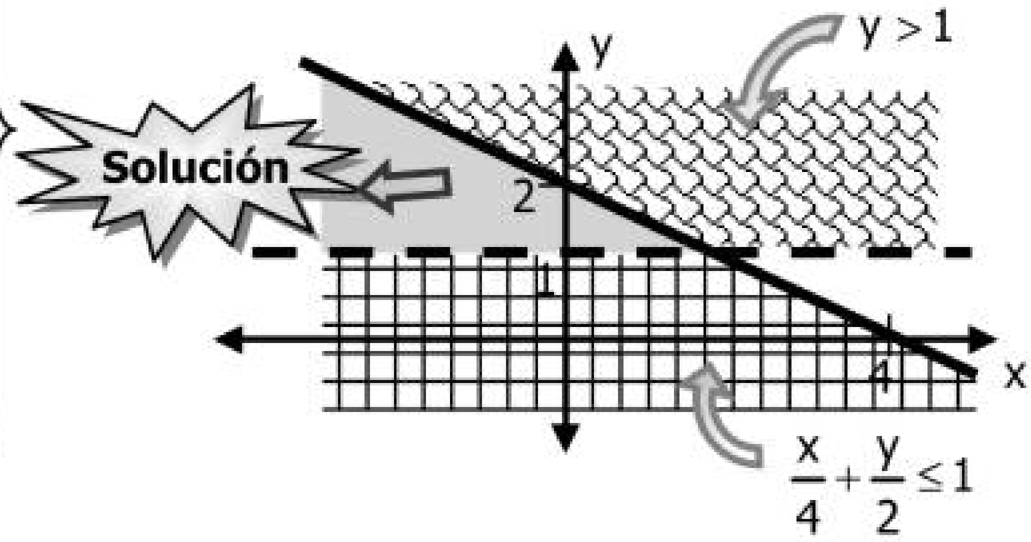
Por un lado tenemos la solución para **y>1**, como muestra el siguiente gráfico:



A su vez, también graficamos la solución de la otra ecuación: $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} \leq 1$



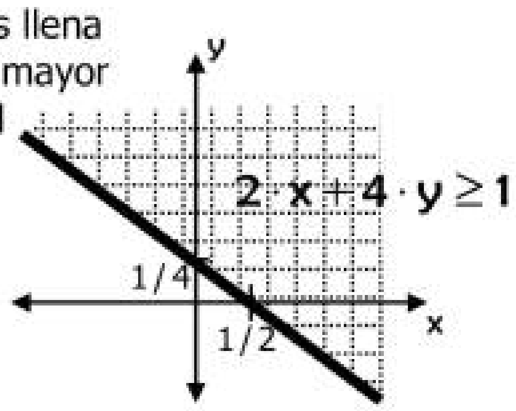
Y la solución del ejercicio es la zona en donde se interceptan ambas soluciones.

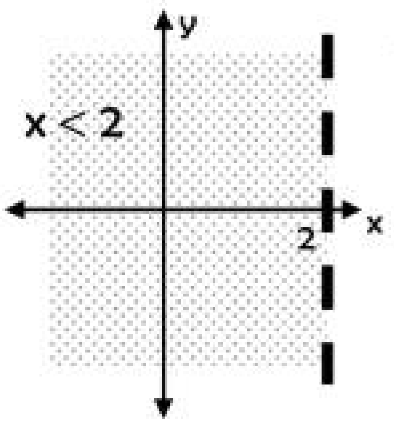


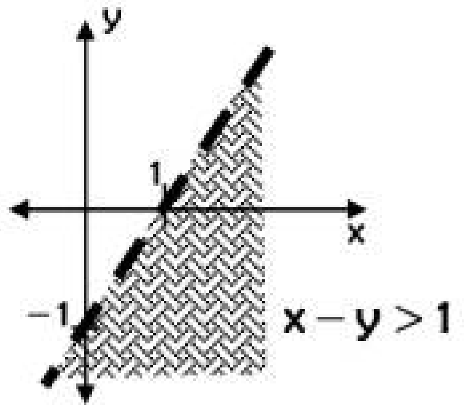
Y ahora veamos un Sistema con 3 Inecuaciones: $\begin{cases} \mathbf{2 \cdot x + 4 \cdot y \geq 1} \\ \mathbf{x < 2} \\ \mathbf{x - y > 1} \end{cases}$

Primero dibujamos las tres soluciones por separado:

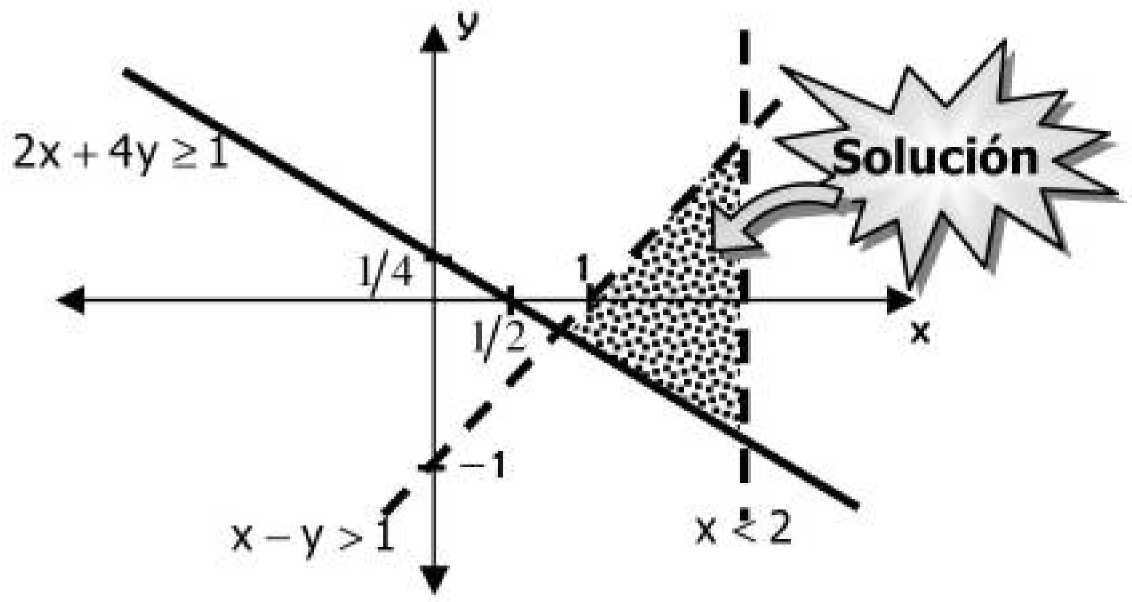
Esta línea es llena por el signo mayor o igual







Y ahora, debemos buscar la zona donde se intersecan esas tres áreas:



Para no "complicar" demasiado el gráfico, solamente sombreamos el área solución.

Consejo: Quizá te preguntarás... y cómo me doy cuenta yo "del lado que tengo que sombrear" cada una de las áreas? fijate en la tercera gráfica, $\mathbf{x - y > 1}$ tomemos dos puntos, uno de un lado de la línea que graficamos y otro del otro lado, por ejemplo el punto **(0,0)** que está a la izquierda arriba de la línea y el **(1,-1)** que se encuentra a la derecha abajo de la línea .

$(0,\ 0) \Rightarrow x = 0, \quad y = 0 \Longrightarrow x - y > 1 \Rightarrow 0 - 0 > 1$ **Absurdo !** $\Longrightarrow$ El punto (0;0) **no** verifica, por lo tanto no pertenece

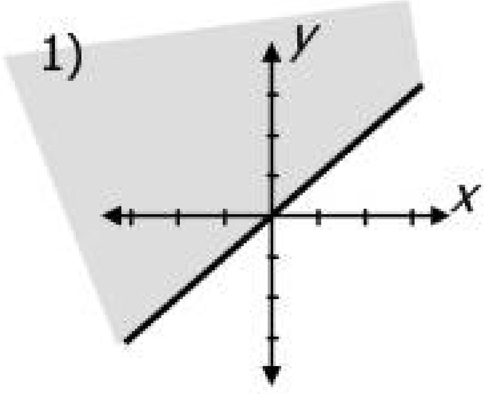
$(1,\ -1) \Rightarrow x = 1, \quad y = -1 \Longrightarrow 1 - (-1) > 1 \Rightarrow 1 + 1 > 1$ **Se verifica la desigualdad !**

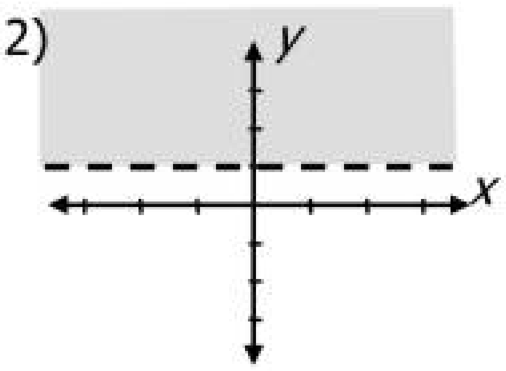
Entonces debemos "sombrear" la parte donde esta el (1;−1)

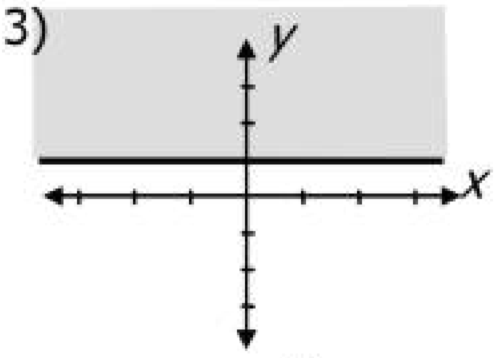
El punto (1;−1) **SI** verifica, por lo tanto **SI** pertenece.

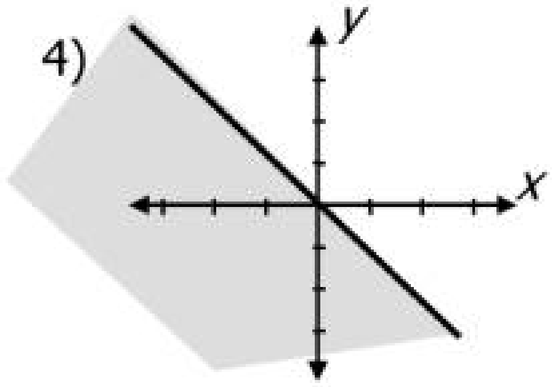
Decir a cuál de las siguientes desigualdades le corresponde cada gráfico:

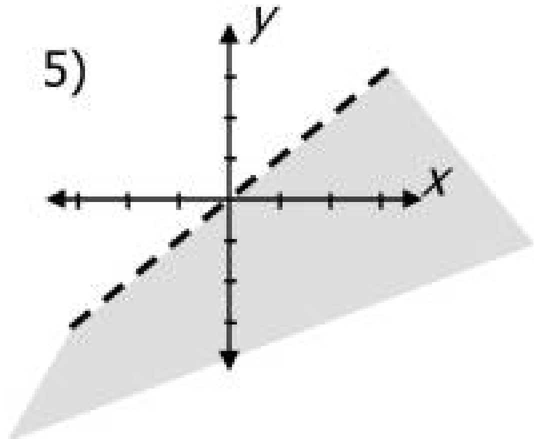
$y < X$ $\quad y \leq \frac{1}{2}X+1$ $\quad y > 1$ $\quad y < \frac{1}{2}X-1$ $\quad y \geq X$ $\quad y > -X$ $\quad y \leq -X$ $\quad y > \frac{1}{2}X+1$ $\quad y \geq 1$

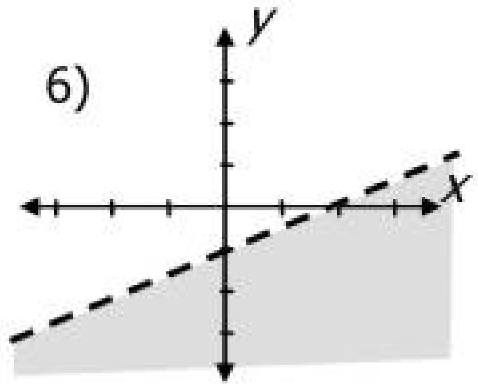
1)


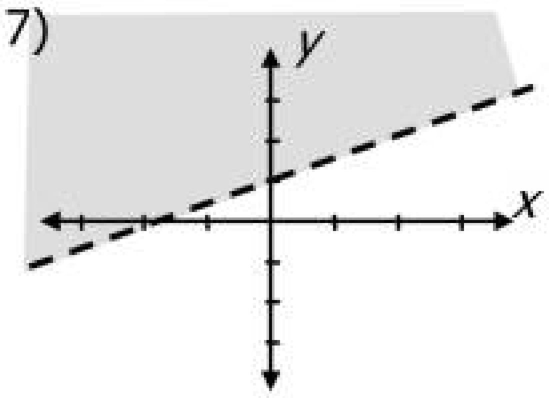
2)


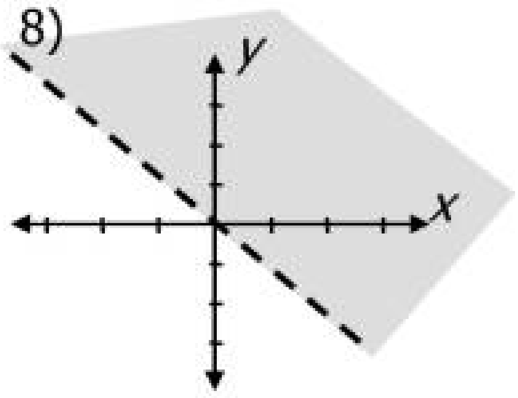
3)


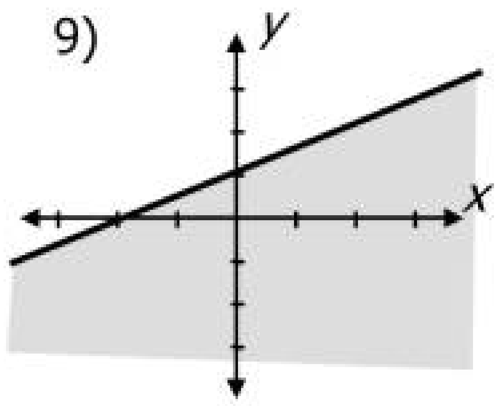
4)


5)


6)


7)


8)


9)


Encontrar el conjunto de puntos para cada Sistema de Inecuaciones:

10) $\begin{cases} x > 1 \\ y < 1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} -x + y \leq 3 \\ 3x + 2y \leq 6 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 10y - 10 < 5x \\ 7x - 14y \leq 14 \end{cases}$

13) $\begin{cases} y < 3 \\ x \leq 1 \\ y > -3 \\ x \geq -2 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x < 3 \\ y = 2 \end{cases}$

15) $\begin{cases} y \geq -1 \\ x + 2y \leq 1 \\ -x + 2y < 1 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 18x + 36y < 36 \\ 12y - 4x \leq 12 \\ -5x < 15 + 15y \end{cases}$

17) $\begin{cases} y \leq 2 \\ Y \leq X + 2 \\ y \geq -2 \\ Y \geq X - 2 \end{cases}$

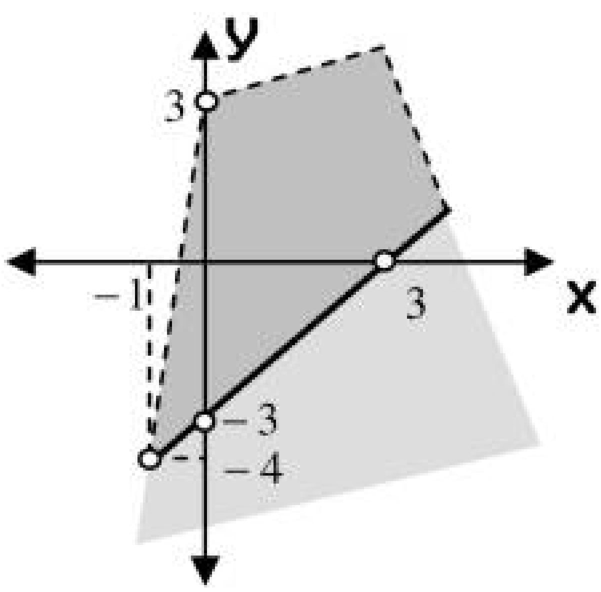
18) $\begin{cases} y \leq 1 \\ \frac{-2x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{2} < 1 \\ \frac{-2x}{\sqrt{3}} \leq 1 + \frac{y}{2} \\ y > -1 \\ \frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{2} \leq 1 \\ \frac{y}{2} < 1 - \frac{2x}{\sqrt{3}} \end{cases}$

19) $\begin{cases} y \leq 3 \\ Y < \frac{2}{3}X + 2 \\ y > -1 \\ Y \geq \frac{2}{3}X - 2 \end{cases}$

20) $\begin{cases} Y < \frac{1}{3}X + 1 \\ Y < -3X + 6 \\ y \leq -X/2 + 1 \\ Y > -X/2 - 4 \end{cases}$

21) Averiguar cuanto tienen que valer "a" y "b" para que la solución del sistema forme en el plano una figura que cumpla con las propiedades del romboide y sea como el de la figura a continuación.

$\begin{cases} Y < 7X + \text{"a"} \\ Y < \frac{1}{3}X + \text{"b"} \\ Y < -3X + 13 \\ Y \geq X - \text{"a"} \end{cases}$



by DaL-0r para TARINGA!

Decir cuales de los siguientes puntos pertenecen a la solución del sistema: $\begin{cases} y \geq -2 & x > 0 \\ y < 4 & x \leq 5 \end{cases}$

22) (–2 ; 3)
23) (2 ; 3)
24) (1 ; –1)
25) (1 ; –2)
26) (0 ; 3)
27) (0 ; 0)
28) (3 ; 4)
29) (3 ; –2)
30) (5 ; 3)
31) (0 ; –2)
32) (0 ; 4)
33) (5 ; 4)
34) (5 ; –2)
35) (4 ; –4)
36) (4 ; –2)
37) (4 ; 0)

Responder Verdadero o Falso:

38) Un sistema de inecuaciones, graficado en el plano siempre es un área infinita.

39) Un sistema de inecuaciones, graficado en el plano siempre es un área infinita o finita.

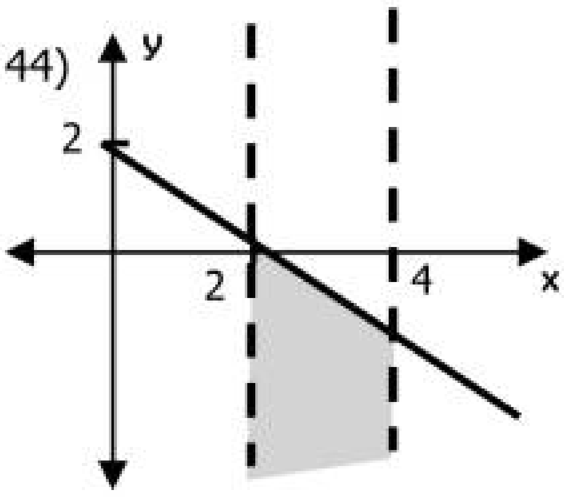
40) Un sistema de inecuaciones, graficado en el plano puede no ser ni siquiera un solo punto.

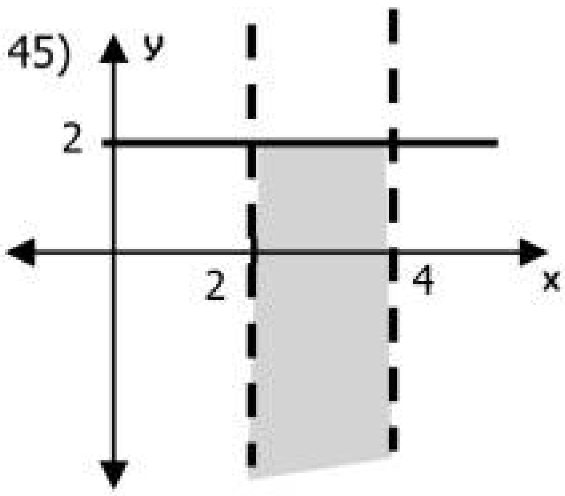
41) Un sistema de inecuaciones siempre se compone de al menos una inecuación.

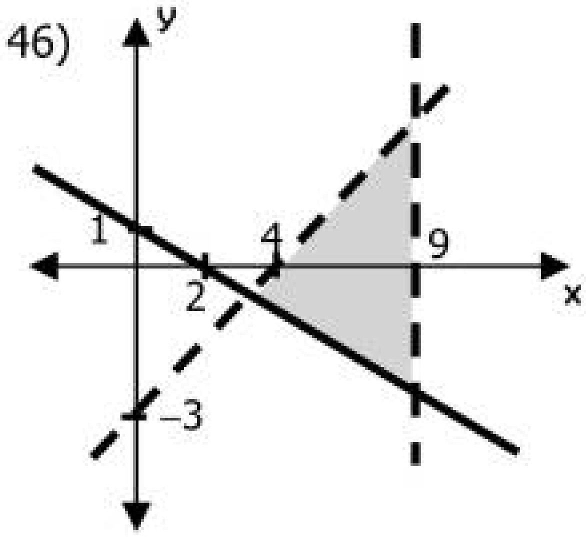
42) Un sistema e inecuaciones no puede tener nunca más de 10 inecuaciones.

43) La solución del siguiente sistema de inecuaciones es nula (el sistema es incompatible) $\begin{cases} x < 3 \\ x \geq 2 \end{cases}$

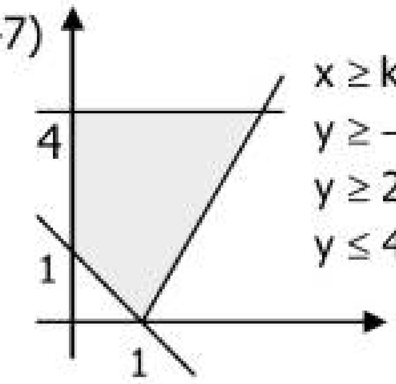
Construir los sistemas de inecuaciones cuya solución graficada en el plano X–Y sea la siguiente:

44) 

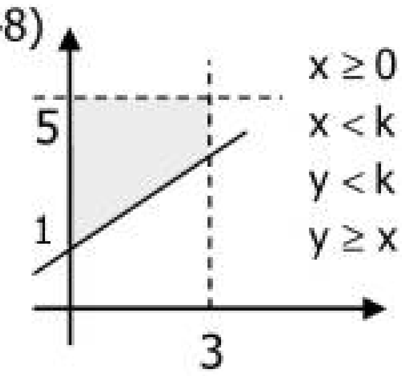
45) 

46) 

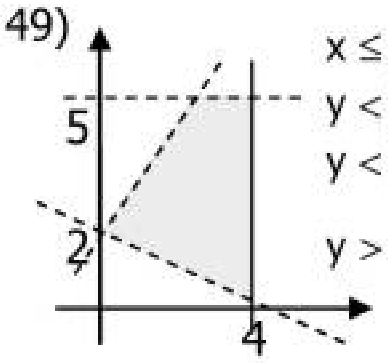
Decir cuánto tiene que valer "k" para que el sistema de inecuaciones se corresponda con el gráfico:

47) 

$\begin{cases} x \geq k \\ y \geq -x+1 \\ y \geq 2x-2 \\ y \leq 4 \end{cases}$

48) 

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < k+1 \\ y < k+3 \\ y \geq x+1 \end{cases}$

49) 

$\begin{cases} x \leq 3k+1 \\ y < 7k-2 \\ y < 2x+2 \\ y > -\frac{1}{2}x+2 \end{cases}$

Hallar el conjunto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones y expresarlo analíticamente:

50) $\begin{cases} x \leq 3 \\ y < 4 \\ y \geq -x+3 \\ y \leq x+3 \end{cases}$

51) $\begin{cases} x \leq 3 \\ y \leq 4 \\ y \geq -x+3 \\ x \leq 0 \end{cases}$

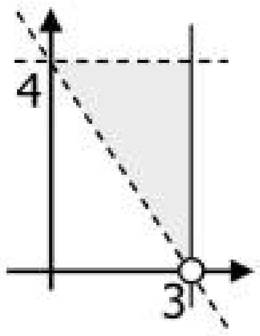
52) $\begin{cases} x \leq 3 \\ y \leq 4 \\ y \geq -x+3 \\ x < 0 \end{cases}$

53) $\begin{cases} y \leq -x+2 \\ y \leq x \\ x \geq 2 \end{cases}$

54) $\begin{cases} y \leq x-1 \\ y \geq x \\ x \geq 3 \end{cases}$

55) Dado el siguiente sistema de inecuaciones
¿Pertenece el punto P=(3 ; 0) al conjunto solución?

$\begin{cases} x \leq 3 \\ y < 4 \\ y > -x+3 \end{cases}$



by Dal-Or para TARINGA!

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Introducción a Función Cuadrática

Número de Tema: **46**

Área: **Matemática**

Relaciones entre dos variables. Por ejemplo, podemos relacionar las variables: "Área o superficie de una pared cuadrada" y "Lado del cuadrado", si relacionamos estas dos variables mediante una ley, estamos creando una función. Por ejemplo, podemos decir que la cantidad de metros cuadrados de la pared es el valor del lado del cuadrado, multiplicado por sí mismo o elevado al cuadrado. Entonces la fórmula quedaría de la siguiente manera:

"Superficie de la pared" = (Lado de la pared)^2

Ahora para simplificar su escritura, puedo ponerles nombres a las variables.
Como la superficie de la pared depende del valor del lado, pongámosle como nombre **"x" al lado y f(x) a la superficie**. De esta manera estamos simbolizando matemáticamente que la superficie es una función del lado. Con esta nomenclatura nos quedaría la fórmula anterior escrita así: $\boxed{F(x) = X^2}$

Por lo tanto ya tenemos escrita una función cuadrática.
Las funciones cuadráticas relacionan "F(x)" con "X^2" de la siguiente manera: $\boxed{F(x) = a\,.\,\mathbf{X^2} + b\,.\,x + c}$

$\forall\ a, b, c \in \Re \ \wedge\ a \neq 0$

Puede pasar que "b" o "c" sean cero o nulos, como en el ejemplo que pusimos antes, en el que "a" vale 1. Pero para que la función sea una cuadrática, "a" no puede ser cero, ya que si "a=0", no hay x^2 y por ende no es una función cuadrática.

Ejemplos: $F(x) = -3x^2 \Longrightarrow$ ✓ Es Función cuadrática — $F(x) = 3x + 1 \Longrightarrow$ No es Función cuadrática

$F(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - 5x + 2 \Longrightarrow$ ✓ Es Función cuadrática — $F(x) = x^3 + 2x^2 + 1 \Longrightarrow$ No es Función cuadrática

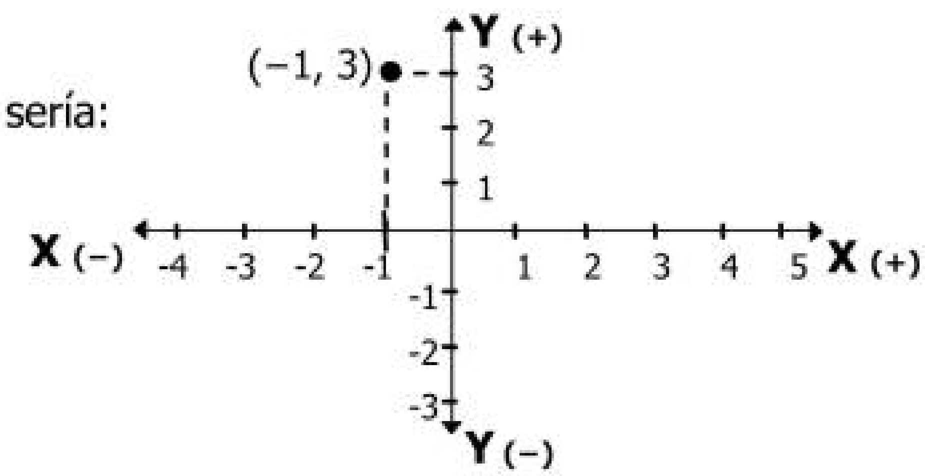
☆ **Ubicando puntos en el plano**: Como en funciones cuadráticas vamos a trabajar con el plano X-Y veamos antes de empezar, como ubicar puntos en el plano X-Y.

Los puntos en un plano cartesiano (llamamos plano cartesiano al plano X-Y), tienen 2 coordenadas, que son justamente la coordenada de "x" y la coordenada de "Y".

Un punto en el plano se simboliza de la siguiente manera: P = (−1 ; 3)
La primera coordenada es la de "X" y la segunda la de "Y"

Por lo tanto si ubicamos el punto P = (−1 ; 3) en el plano sería:

Coordenada "x" — Coordenada "Y"



☆ Graficando funciones Cuadráticas:

La forma de la ecuación cuadrática que veremos en principio es: $\mathbf{Y = a\,.\,X^2 + b\,.\,x + c}$ ("Forma Polinómica") Donde "a" , "b" y "c" son números reales cualesquiera

Para comenzar, vamos a ir a un caso sencillo: $y = x^2 + 3$
Donde "a" vale 1 y "b" vale 0 y "c" vale 3. Preparemos una **Tabla de Valores**:
La **Tabla de Valores** tiene 2 columnas:

- En la primera columna, **inventamos** los valores de las **x**. La variable **x** se llama variable **independiente**.
- En la segunda columna, **calculamos** los valores que va tomando **y** según cada valor de **x**. La variable **Y** se llama variable **dependiente**

Comencemos asignándole a x el valor 1...

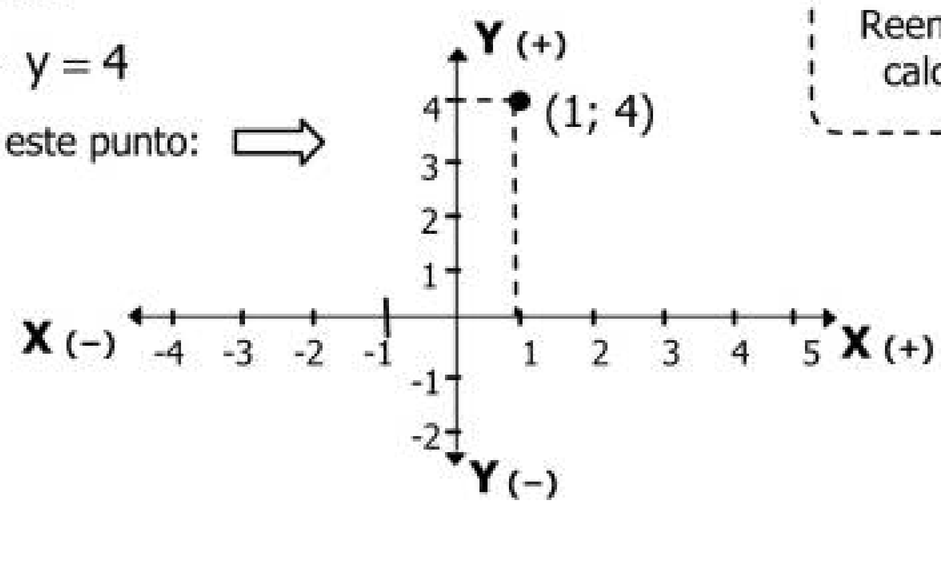
Si **x** vale:	Entonces **y** vale:
1	**4**

Reemplazamos la "X" por 1 y calculamos lo que vale "Y"

Partimos de la fórmula $y = x^2 + 3$

si $x = 1 \Rightarrow y = (1)^2 + 3 \Rightarrow y = 4$

Ya podemos ir graficando este punto: $\Longrightarrow$

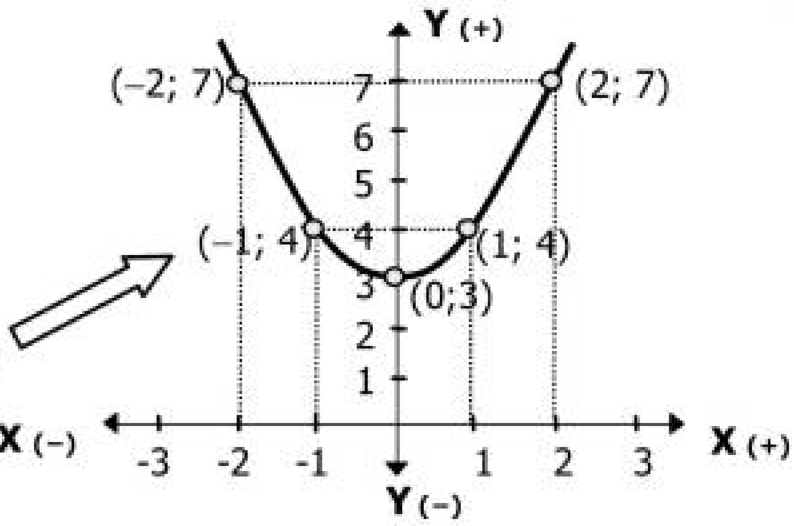


Y probando con otros puntos:

Si **x** vale	Entonces **y** vale:
1 →	$(1)^2+3$ → **4**
0 →	$(0)^2+3$ → **3**
−1 →	$(-1)^2+3$ → **4**
−2 →	$(-2)^2+3$ → **7**
2 →	$(2)^2+3$ → **7**

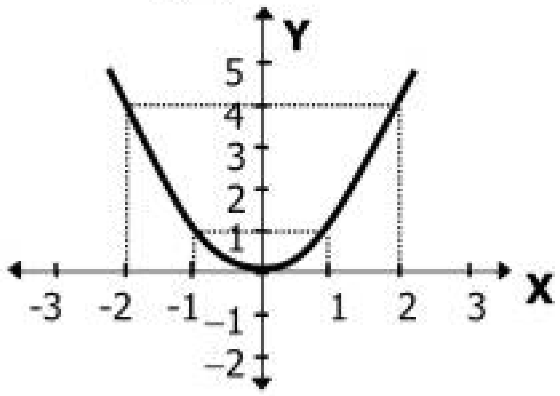
Para calcular la variable "**y**" siempre remplazamos "X" por el número que elegimos en cada fila.

Graficamos los puntos de la tabla y los unimos:



Desplazamientos de la función Cuadrática:

Comenzaremos estudiando las cuadráticas a partir de la función $f(x) = X^2$
La gráfica de $f(x) = X^2$, la veremos a continuación:

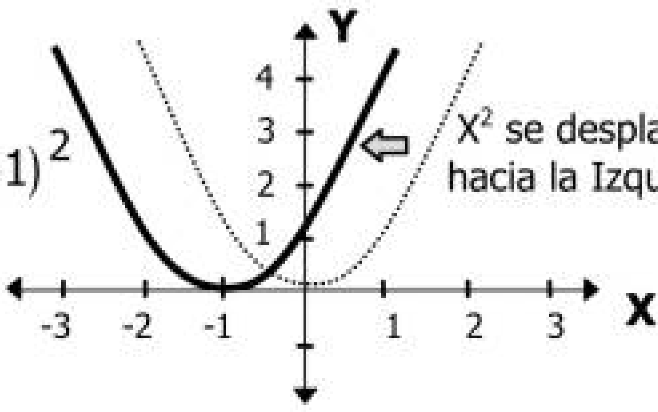


A partir de este gráfico, veremos como son (aproximadamente los gráficos de funciones cuadráticas similares, pero desplazadas vertical y horizontalmente.

Desplazamientos Horizontales: Cuando a la variable "x" se le suma o resta un valor, antes de ser elevado al cuadrado, este valor es el desplazamiento horizontal. Si a la variable "x" se le suma un valor, el desplazamiento es hacia la izquierda, en cambio si se le resta un valor, el desplazamiento es hacia la derecha, lógicamente, sobre el eje de las x.

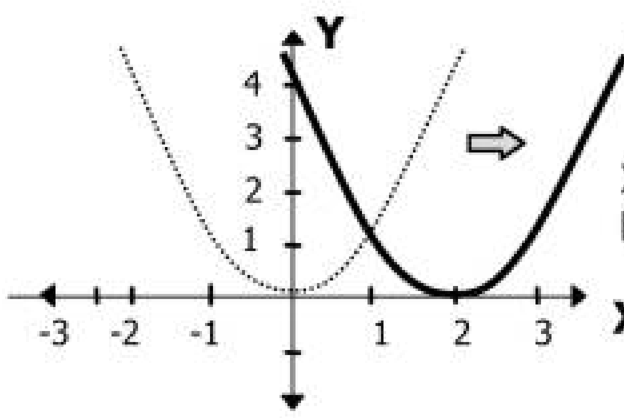
Ejemplos:

$f_{(x)} = (x+1)^2$



X^2 se desplaza **1** hacia la Izquierda

$f_{(x)} = (x-2)^2$

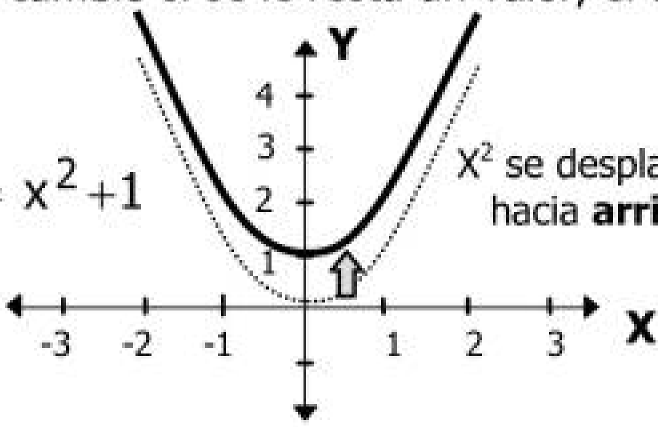


X^2 se desplaza **2** hacia la Derecha

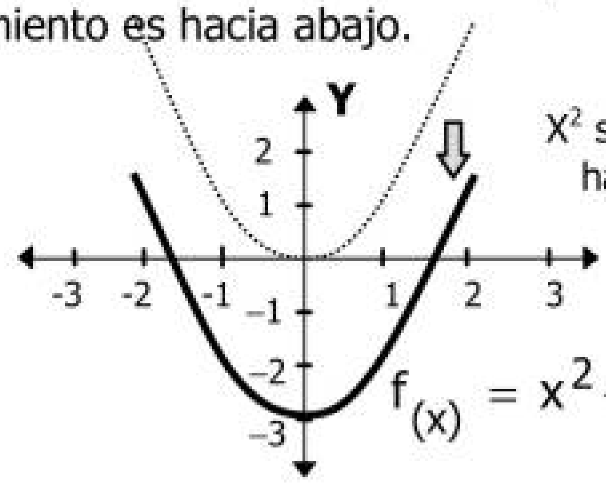
Desplazamientos Verticales: Cuando a la variable "x" se le suma o resta un valor, después de ser elevada al cuadrado, este valor es el desplazamiento Vertical. Si a la variable "x" se le suma un valor, el desplazamiento es hacia arriba, en cambio si se le resta un valor, el desplazamiento es hacia abajo.

Ejemplos:

$f_{(x)} = x^2+1$



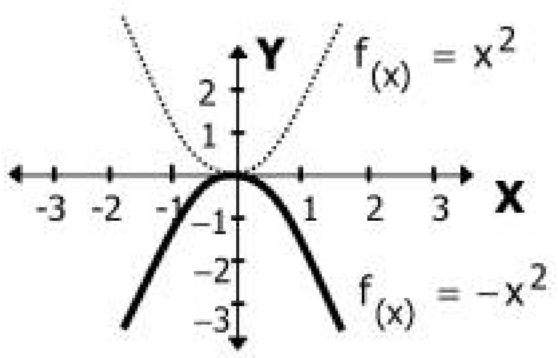
X^2 se desplaza **1** hacia **arriba**



X^2 se desplaza **3** hacia **Abajo**

$f_{(x)} = x^2-3$

Funciones cuadráticas de Concavidad Negativa: Cuando el coeficiente principal "a" (es decir el número que multiplica a la x^2) es negativo, la parábola que estamos estudiando cambia de concavidad, lo vemos graficado en el siguiente ejemplo (A la concavidad negativa suele llamársela también concavidad "Hacia Abajo"):



Raíces reales de una función cuadrática: Ceros de la Función.

La raíces o ceros de una función, son los valores en los cuáles una función corta al eje de las "x". Cuando una función cuadrática tiene raíces reales, éstas se calculan con la siguiente fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

Esta fórmula se aplica con los coeficientes de la función en forma polinómica: $f_{(x)} = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$

Ejemplo: Calculemos las raíces de la función: $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

1) Ubicar en el plano los siguientes puntos:

A = (2 ; 3)
B = (1 ; 5)
C = (0 ; 4)
D = (3 ; −1)
E = (−2 ; 0)
F = (−5 ; −9)
G = (−3 ; −1)
H = (1,2 ; −2)
I = (3/5 ; 2)
J = (2/3 ; −1)
K = (−2/3 ; 0)
L = (−1/4 ; −1/2)
M = (1/5 ; −6)
N = (0 ; 0)
O = (−2/3 ; −3)
P = (3/2 ; 5/2)
Q = (−1/2 ; −1/2)

➢ Decir cuáles de las siguientes funciones son funciones cuadráticas y cuáles no lo son:

2) $f_{(x)} = x+1$

3) $f_{(x)} = -x^2+1$

4) $f_{(x)} = \frac{x^2}{3}+1$

5) $f_{(x)} = x^2+x+1$

6) $f_{(x)} = \frac{3}{2}x^2+2$

7) $f_{(x)} = 2x-2$

8) $f_{(x)} = (x+1)^2+1$

9) $f_{(x)} = 2^2+x$

10) $f_{(x)} = 3^2+2x++1$

11) $f_{(x)} = x^2+\sqrt{2}$

12) $f_{(x)} = \sqrt{x^2+2}$

13) $f_{(x)} = \frac{x}{2^2}$

14) $f_{(x)} = \frac{2}{x^2}$

15) $f_{(x)} = 0x^2+2x+3$

16) $f_{(x)} = -5^2$

17) $f_{(x)} = x^2+3x^2$

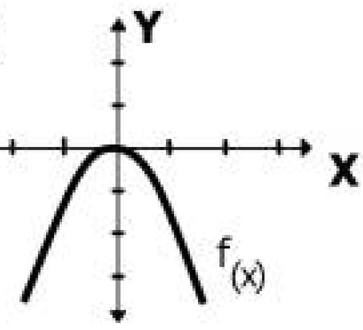
➢ Interpretar las siguientes situaciones y escribir la función cuadrática f(x) que represente a cada caso:

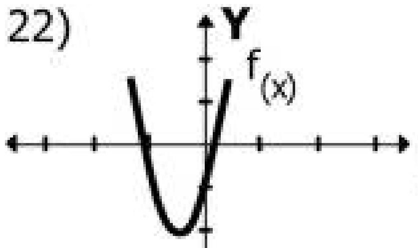
18) El espacio recorrido por un auto con movimiento acelerado (y aceleración de 6 kilómetros sobre hora cuadrada) que comienza a moverse con velocidad inicial de 20 kilómetros por hora es igual a su velocidad inicial por el tiempo transcurrido, más el triple del cuadrado del tiempo transcurrido. Escribir la función f(x) que represente al espacio recorrido en función del tiempo transcurrido.

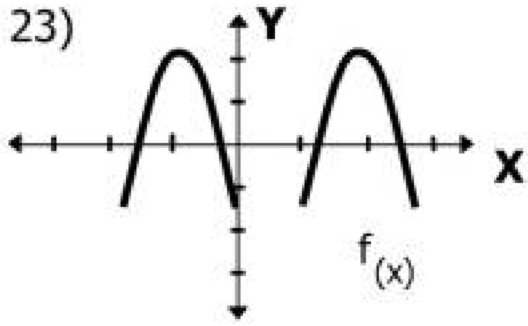
19) La población de insectos en un campo de investigación la primera semana era de 100 insectos, suponiendo que en ese campo, la población aumente de la siguiente manera: cada semana que pasa el nuevo valor de la cantidad de insectos es igual la cantidad inicial multiplicada por el número de semana elevada al cuadrado. Plantear la función f(x) que represente la población de insectos de este campo en función de la cantidad de semanas transcurridas desde el momento inicial.

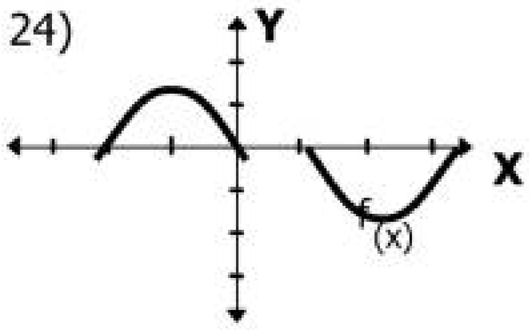
20) Una persona fabrica cuadros decorativos de acrílico, bordeados en su contorno con tiras de cobre. Los cuadros tienen forma cuadrada. El cm^2 de acrílico cuesta \$3, mientras el centímetro lineal de cobre cuesta \$2, a su vez para cada cuadro, tiene un gasto fijo de pegamento y otros de \$1. Escribir una función f(x) que represente el costo de cada cuadro en función de su tamaño (o sea en función del lado del cuadrado).

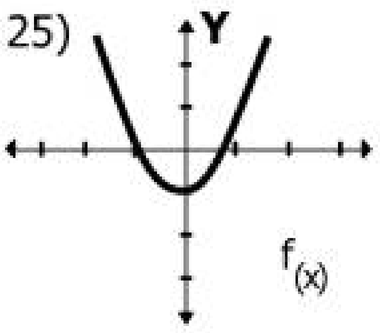
Indicar cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones cuadráticas:

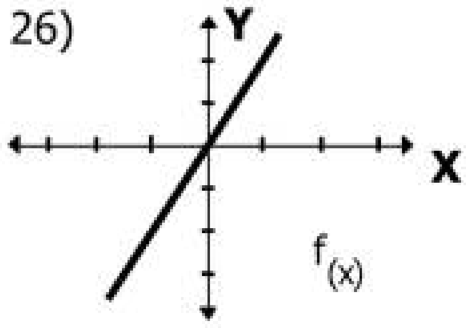
21) 

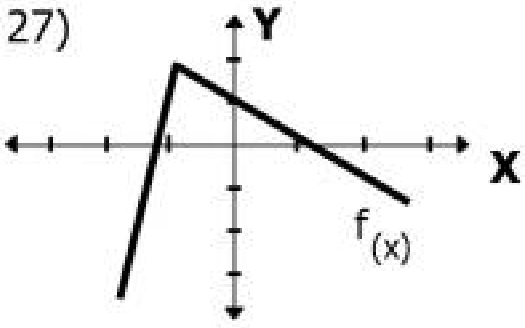
22) 

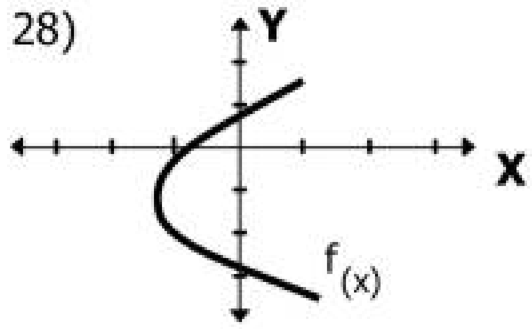
23) 

24) 

25) 

26) 

27) 

28) 

29) Graficar una función cuadrática cualquiera, pero que pase por el punto (2 ; −5) en el plano.

30) Dibujar en el plano X−Y, una función cuadrática cualquiera, no importa su fórmula, pero que el vértice de esta función sea el punto (2 ; − 1).

➢ Dada la función f(x) Completar las tablas de valores y con las tablas, graficar la función.

31) $f(x) = x^2+1$

X	Y
−2	
−1	
0	
1	
2	

32) $f(x) = x^2 - 1$

X	Y
−2	
−1	
0	
1	
2	

33) $f(x) = (x+2)^2$

X	Y
−2	
−1	
0	
1	
2	

34) $f(x) = -(x-2)^2$

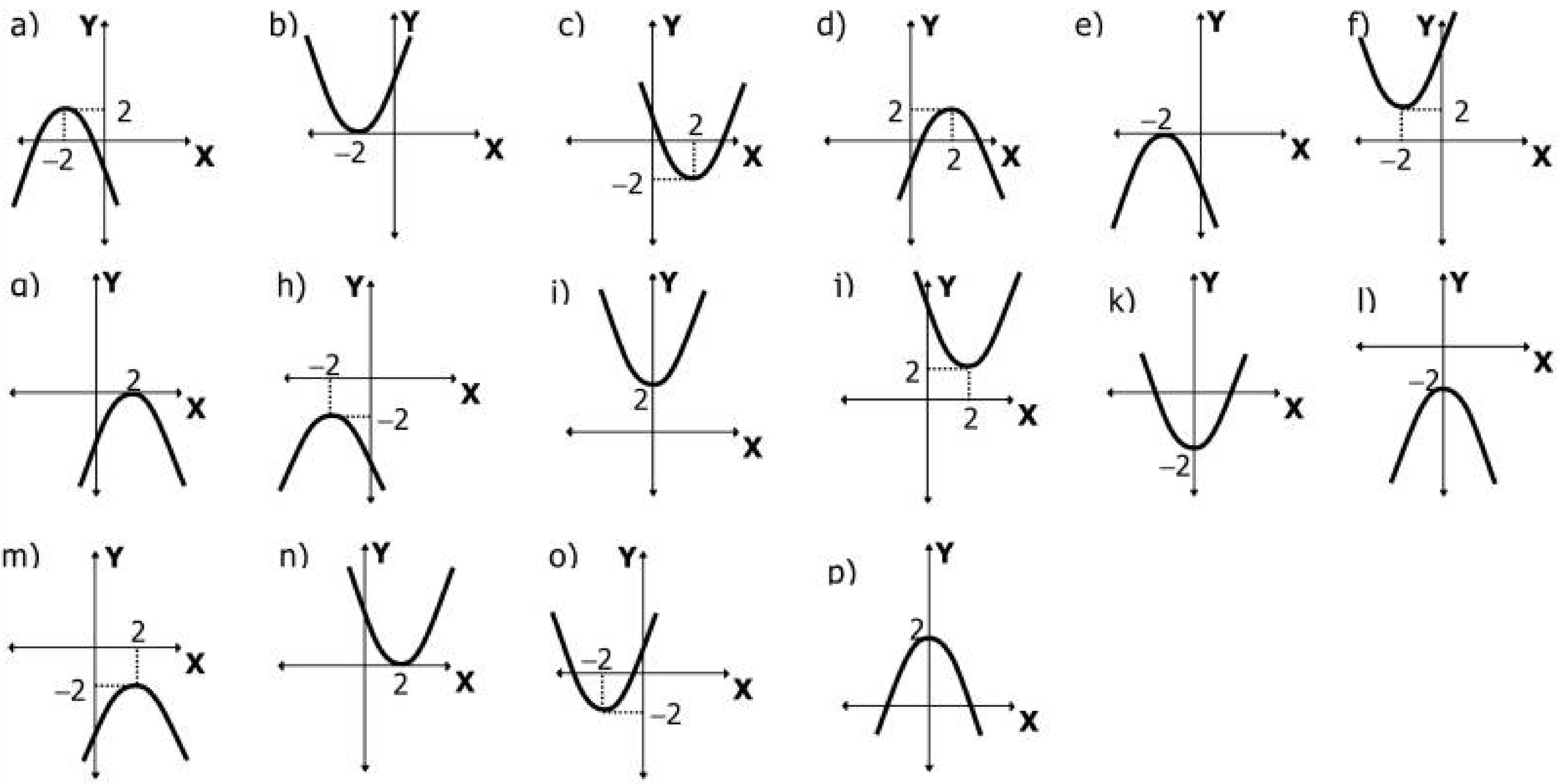
X	Y
−2	
−1	
0	
1	
2	

➢ Graficar en el plano X−Y las siguientes **funciones cuadráticas.** (Puede usarse la "tabla de valores")

35) $f_{(x)} = x^2$
36) $f_{(x)} = -x^2$
37) $f_{(x)} = 2x^2$
38) $f_{(x)} = -2x^2$
39) $f_{(x)} = \frac{1}{2}x^2$
40) $f_{(x)} = -\frac{1}{2}x^2$
41) $f_{(x)} = x^2+2x+1$
42) $f_{(x)} = -x^2+6x-9$
43) $f_{(x)} = -\frac{1}{4}x^2+2x-4$
44) $f_{(x)} = 4x^2-16x+16$
45) $f_{(x)} = \frac{1}{9}x^2-2x+9$
46) $f_{(x)} = -4x^2+4x-1$

Identificar cada una de las siguientes funciones cuadráticas con el gráfico que le corresponde:

47) $f_{(x)} = x^2+2$
48) $f_{(x)} = x^2-2$
49) $f_{(x)} = (x+2)^2$
50) $f_{(x)} = (x-2)^2$
51) $f_{(x)} = (x+2)^2+2$
52) $f_{(x)} = (x+2)^2-2$
53) $f_{(x)} = (x-2)^2+2$
54) $f_{(x)} = (x-2)^2-2$
55) $f_{(x)} = -x^2+2$
56) $f_{(x)} = -x^2-2$
57) $f_{(x)} = -(x+2)^2$
58) $f_{(x)} = -(x-2)^2$
59) $f_{(x)} = -(x+2)^2+2$
60) $f_{(x)} = -(x+2)^2-2$
61) $f_{(x)} = -(x-2)^2+2$
62) $f_{(x)} = -(x-2)^2-2$



Hallar, si existen, las raíces de las siguientes funciones cuadráticas:

63) $f_{(x)} = x^2-x-6$
64) $f_{(x)} = x^2-4x$
65) $f_{(x)} = x^2-4x+4$
66) $f_{(x)} = x^2-14x+33$
67) $f_{(x)} = x^2-3x-10$
68) $f_{(x)} = x^2-2x+5$
69) $f_{(x)} = x^2-3x+4$
70) $f_{(x)} = x^2-4x+3$
71) $f_{(x)} = x^2-11x+30$
72) $f_{(x)} = x^2+8x+15$
73) $f_{(x)} = x^2+3x+2$
74) $f_{(x)} = x^2-10x+25$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Ecuaciones de Segundo Grado

Número de Tema: **47**

Área: **Matemática**

☆ **Ecuaciones Cuadráticas**: Vamos a ver ahora la manera de resolver ecuaciones en las que tenemos las X elevada al cuadrado y al mismo tiempo la X elevada a la 1, Si observamos detenidamente una ecuación de este tipo, nos damos cuenta de que no hay manera de despejar la X como lo veníamos haciendo hasta ahora (eso de pasar sumando, restando, multiplicando, etc..) Veamos entonces cómo se resuelven estas ecuaciones con una fórmula resolvente:

Supongamos que tenemos una ecuación de la siguiente forma, con "a", "b" y "c" coeficientes reales. Con a≠0

$$"a".X^2 + "b".X + "c" = 0$$

La manera de hallar las soluciones es aplicando la fórmula resolvente:

$$\boxed{X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$$

Veamos un ejemplo:

Hallar X de la siguiente ecuación: $3X^2 + 2X - 5 = 0$

En este caso tenemos que $3X^2 + 2X - 5 = 0 \Rightarrow$ ***a = 3 , b = 2 y c = –5***

Aplicando la fórmula queda:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - (-60)}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-2 \pm 8}{6}$$

Hacemos dos caminos a partir del $\pm$ Por un lado usamos el "+" y por el otro usamos el "–" y así llegamos a las dos soluciones de la ecuación.

$$X_1 = \frac{-2+8}{6} = \frac{6}{6} \Rightarrow \boxed{X_1 = 1}$$

$$X_2 = \frac{-2-8}{6} = \frac{-10}{6} \Rightarrow \boxed{X_2 = -\frac{5}{3}}$$

Aplicaciones de las ecuaciones de Segundo Grado en funciones: Intersección de Parábolas y Rectas:

Vamos a ver ahora un ejercicio un poco mas complicado que se resuelve de la misma forma:

- Dada **la Parábola** $Y = -2X^2 + 16X - 34$ y **la Recta** $Y = 2X - 10$
  Hallar los puntos donde se intersecan las gráficas de ambas ecuaciones. Para ello hay que igualar ambas funciones, y hallar las coordenadas "x" e "y"

En este ejercicio tenemos un Sistema de dos Ecuaciones con dos Incógnitas, por lo cual podemos resolverlo de diferentes maneras... nosotros aplicamos el Método de Igualación:

$$\begin{cases} y = -2 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 34 \\ y = 2 \cdot x - 10 \end{cases}$$

Igualamos Y $\Rightarrow -2 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 34 = 2 \cdot x - 10 \Rightarrow -2 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 2 \cdot x - 34 + 10 = 0$

Y resolviendo y agrupando nos queda: $\Rightarrow -2 \cdot x^2 + 14 \cdot x - 24 = 0$

Nos queda una ecuación del tipo "a" X^2 .+"b" X + c, por lo tanto vamos a tener que aplicar la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas para saber el valor de "X".

Aplicamos entonces la Fórmula Resolvente para: **a= – 2** , **b=14** y **c= – 24**

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-24)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 192}}{-4} = \frac{-14 \pm 2}{-4}$$

$$X_1 = \frac{-12}{-4} \Rightarrow \boxed{X_1 = 3} \qquad X_2 = \frac{-16}{-4} \Rightarrow \boxed{X_2 = 4}$$

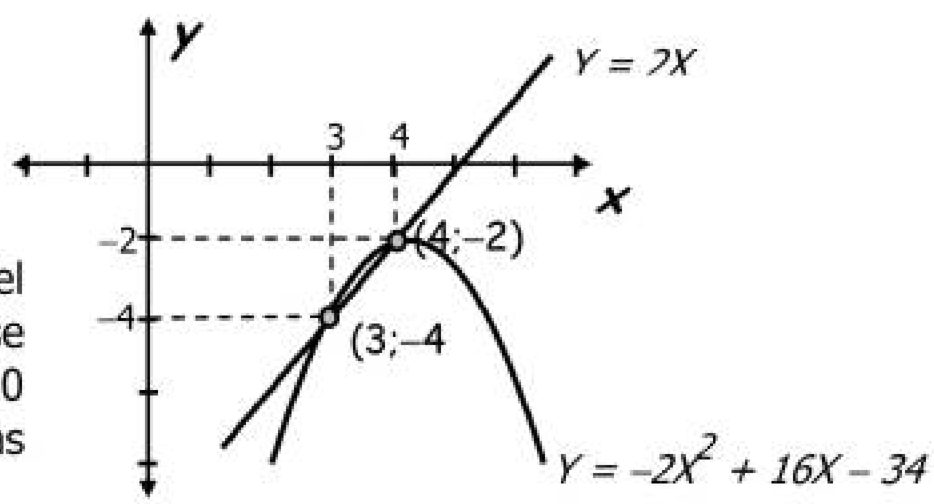
Sólo resta averiguar las coordenadas **y**, para lo cual sustituimos el valor de **x** hallado en cualquiera de las ecuaciones.

Con $\mathbf{X_1 = 3} \Rightarrow Y_1 = 2x_1 - 10 \Rightarrow Y_1 = 2 \cdot 3 - 10 \Rightarrow \boxed{Y_1 = -4}$

Con $\mathbf{X_2 = 4} \Rightarrow Y_2 = 2x_2 - 10 \Rightarrow Y_2 = 2 \cdot 4 - 10 \Rightarrow \boxed{Y_2 = -2}$

Por lo que los puntos buscados son: (3;–4) y (4;–2)

Y como se ve claramente en el gráfico, las soluciones del ejercicio, son las coordenadas de los puntos en donde se intersectan las funciones Y = $-2X^2 + 16X - 34$ e Y = 2X – 10 Justamente porque para calcular "X" e "Y" igualamos ambas funciones.



Otro caso típico son problemas de dos ecuaciones con dos incógnitas redactados, en los que tenemos que armar las ecuaciones y al querer resolverlas nos damos cuenta de que son ecuaciones cuadráticas, veamos un ejemplo:

Hallar dos números naturales consecutivos tales que su producto sea 9506

Lo primero que hay que hacer acá es plantear las ecuaciones:

Nos dicen que son dos números consecutivos, entonces llamando "X" al primer número e "Y" al segundo, nos queda la ecuación: $\Rightarrow Y = X + 1$

Por otro lado su producto da 9506, por lo tanto: $\Rightarrow X \cdot Y = 9506$

Y este es el sistema de ecuaciones que tenemos que resolver, vamos a usar el método de sustitución.

$$Y = X + 1$$
$$X \cdot Y = 9506$$

Sustituimos lo que vale Y en la primera ecuación (que ya está despejada) en la segunda ecuación, o sea que en la segunda ecuación, donde dice "Y" escribimos "X+1" $\Rightarrow X \cdot (X+1) = 9506$

$X \cdot (X+1) = 9506 \Rightarrow$ Hacemos la distributiva para sacar el paréntesis. $\Rightarrow X^2 + X = 9506 \Rightarrow$ Pasamos el 9506 restando y nos queda una ecuación cuadrática. $\Rightarrow X^2 + X - 9506 = 0$

Ahora para resolver esa ecuación cuadrática vamos a tener que aplicar la fórmula con a = 1 b = 1 y c = 9506. Veamos que nos queda:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-9506)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{38025}}{2} = \frac{-1 \pm 195}{2}$$

$$X_1 = \frac{194}{2} \Rightarrow \boxed{X_1 = 97}$$
$$X_2 = \frac{-196}{2} \Rightarrow \cancel{X_2 = -98}$$

Como pedían un número natural, descartamos la solución negativa.

Entonces ahora como sabemos que "X" vale 97, Y debe ser Y = X+1 (que era la 1º ecuación) $\Rightarrow \boxed{Y = 98}$

La respuesta al ejercicio es "***dichos números consecutivos cuyo producto es 9506 son 97 y 98***."
(Verificando por las dudas cuanto da 97 . 98, nos damos cuenta que realmente es 9506)

Otra aplicación de estas ecuaciones cuadráticas. Mas allá de los problemas redactados y de los problemas de hallar puntos de intersección de una parábola con otra función, estas ecuaciones cuadráticas tienen muchísimas otras aplicaciones, por ejemplo, simplemente el hecho de tener que resolver una ecuación que llegado un punto nos encontramos que tenemos que aplicar la formula que venimos viendo. Veamos un ejemplo cualquiera.

Resolver la siguiente ecuación: $\frac{X+2}{2X-1} = \frac{5X+1}{X+1}$

Para resolver esa ecuación aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones:
El producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$\frac{X+2}{2X-1} = \frac{5X+1}{X+1} \Rightarrow (X+2) \cdot (X+1) = (5X+1) \cdot (2X-1) \Rightarrow$ Distributiva en ambos miembros. $\Rightarrow X^2 + X + 2X + 2 = 10X^2 - 5X + 2X - 1$

Agrupo $\Rightarrow X^2 + 3X + 2 = 10X^2 - 3X - 1 \Rightarrow$ Paso todo del mismo lado $\Rightarrow X^2 + 3X + 2 - 10X^2 + 3X + 1 = 0$

Vuelvo a agrupar $\Rightarrow -9X^2 + 6X + 3 = 0 \Rightarrow$ Y me quedó una cuadrática.

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-9) \cdot 3}}{2 \cdot (-9)} = \frac{-6 \pm \sqrt{144}}{-18} = \frac{-6 \pm 12}{-18}$$

$$X_1 = \frac{-6+12}{-18} = \frac{6}{-18} \Rightarrow \boxed{X_1 = \frac{-1}{3}}$$
$$X_2 = \frac{-6-12}{-18} = \frac{-18}{-18} \Rightarrow \boxed{X_2 = 1}$$

Soluciones del ejercicio.

Y así, cada vez que en un ejercicio leguemos a un punto en que tenemos que despejar una incógnita y nos quede una ecuación de la forma <u>*$a.X^2 + b.X + c = 0$*</u> *vamos a tener que resolverla como vimos hasta ahora aplicando la fórmula de resolución de ecuaciones cuadráticas.*

Hallar la intersección entre las siguientes funciones (parábola y recta)

1) $Y = X^2 + 2X - 3$; $X + 3 = Y$
2) $X^2 - 2X + 8 = Y$; $Y = X + 2$
3) $Y - X^2 = 3X + 2$; $Y - X = 5$
4) $-7X + Y = 4X^2 - 2$; $Y - 15X = -6$
5) $Y - 2X = -X^2 + 3$; $Y = 5 - X$
6) $-\frac{1}{2} X^2 + Y = 2X - 6$; $X - 2 = Y$
7) $2X^2 + 3X = 2 + Y$; $X + 2 = Y$
8) $4X - 3 = -Y + X^2$; $1 - X = -Y$
9) $1X^2 + 5X = Y - 4$; $2 = Y - 2X$
10) $Y = 4X^2 + 3 - 2X$; $Y = 3 + 2X$
11) $-2 = -3X + X^2 - Y$; $1 = X - Y$
12) $5 + 3X = 2X^2 + Y$; $17 - 7X = Y$
13) $-Y = -X^2 - 6X - 5$; $Y = X + 1$
14) $Y = 2X + 3 - X^2$; $Y = X + 3$
15) $-3X^2 + Y = -6 + 4X$; $Y = 4X - 3$
16) $Y = 3X - X^2 + 4$; $2 = 2X - Y$
17) $4 + Y = 5X - X^2$; $X - 1 = Y$
18) $-4 = -Y + X^2 + 5X$; $4 = -X - Y$
19) $4 - X^2 = 3X - Y$; $2X + Y = -8$
20) $0 = -Y - X^2 - 2X + 3$; $0 = -Y + 3X + 1$

Hallar la intersección entre las siguientes funciones (parábola y parábola)

21) $Y = 1X^2 + 4X + 3$; $Y = -1X^2 - 2X + 3$
22) $2X^2 - 1 - 1X = Y$; $Y = 2X + X^2 - 3$
23) $3 + Y - 2X^2 + X = 0$; $Y - 3X - 4 + X^2 = 0$
24) $Y = 3X + X^2 - 4$; $Y = 3X^2 - X - 2$
25) $Y = 2X^2 + 4 + 6X$; $3 + 4X + X^2 = Y$
26) $Y = 3X - X^2 + 4$; $X^2 + 5X + 4 = Y$
27) $Y = 2X^2 - 5 - 3X$; $Y = X^2 - 3X - 4$
28) $Y = -1 - X^2 - 2X$; $Y = -4 + X^2 - 3X$
29) $Y - X = -X^2 + 6$; $Y + 4X = X^2 + 3$
30) $Y - 1 = 3X^2 + 2X$; $Y - 1 = 2X^2 + 3X$
31) $0 = 3X^2 + 2X - 5 - Y$; $-Y + X^2 + 3X - 4 = 0$
32) $-3 + Y + X^2 = 2X$; $-3X + Y = X^2$
33) $X = 3 - 2X^2 - Y$; $2X = X^2 - Y + 1$
34) $Y = X^2 + 3X + 2$; $Y = -2X^2 + X + 10$
35) $-2X^2 + X + 3 = Y$; $X^2 - 4X - 5 = Y$

Plantear la ecuación y Resolver: (Ojo, por mas que la solución matemática de dos respuestas, hay que leer bien la consigna del ejercicio y ver cuál respuesta es válida y cuál no lo es)

36) Calcular un número de dos cifras que multiplicadas por su consecutivo es igual a los cuatro tercios del cuadrado de dicho número menos 216.

37) Calcular un número tal que la suma entre dicho número y la mitad de su cuadrado es igual a 60.

38) Calcular un número tal que la suma del mismo y la tercera parte del cuadrado de su consecutivo sea 35.

39) Calcular "x" tal que la diferencia entre la cuarta parte del cuadrado de su antecesor y la quinta parte de "x" dé 3.

40) Calcular un número tal que el producto entre la mitad de dicho número y su cuarta parte, mas la tercera parte de su antecesor sea igual a 37.

41) Calcular un número tal que la suma entre dicho número y el cuadrado de su consecutivo sea 56.

42) Calcular "x" tal que la diferencia entre la mitad del cuadrado de su consecutivo y el triple de "x" sea igual a 23.

43) Calcular la edad de Lorena si sabemos que el cuadrado de su edad menos las tres cuartas partes del cuadrado de lo que va a tener el año que viene es igual a la edad que tenía el año pasado mas 43 años.

44) Calcular la edad de Ariel sabiendo que la diferencia entre el cuadrado de su edad y las 7/11 partes del cuadrado de la edad que va a tener el año que viene es igual al triple de la edad que va a tener dentro de 7 años, más 49 años.

45) Hallar dos números naturales consecutivos tales que su producto sea igual a 552.

46) Hallar dos números naturales cuya diferencia sea de 5 y que al multiplicarlos de 234.

47) Mariano tiene 3 CDs más que Diego y si multiplico la cantidad de CDs que tiene Mariano por los que tiene Diego obtengo el número 1258. ¿Cuántos CDs tiene cada uno?

48) La suma de la edad de Diego y su hermano es 44. Y si multiplicamos la edad de Diego ahora por la de su hermano el año pasado nos da 462 ¿Cuántos años tiene cada uno?

<u>Resolver las siguientes ecuaciones</u>: (Hallar un valor de X positivo y entero)

49) $\frac{X+1}{X}=\frac{3X+1}{2}$

50) $\frac{X+11}{4}=\frac{3}{6X-5}$

51) $\frac{X+7}{X+3}=\frac{7X}{3X+\frac{1}{2}}$

52) $\frac{X+1}{X-2}=\frac{7X+1}{-4}$

53) $\frac{9X-11}{-3X+1}=\frac{5}{8X-3}$

54) $\frac{X+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}X+1}=\frac{10X-2}{5X+3}$

<u>Problemas</u>:

55) El cociente entre el doble de la edad de martín y la edad que tenía hace 5 años, es igual al cociente la edad que tendrá dentro de 3 años y la edad que tuvo hace 9 años. ¿Cuántos años tiene Martín?

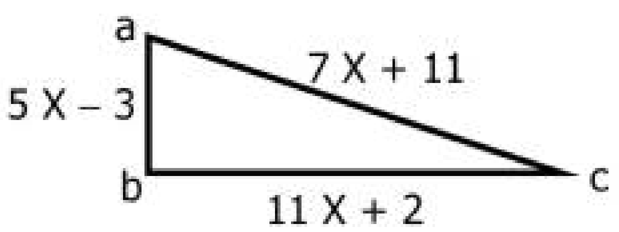
56) EL doble de la cantidad de Cds que tiene María multiplicado por la cantidad de Cds que tendría si le regalan 12 Cds más aparte de los que ya tiene, da 1610. ¿Cuántos CDs tiene María?

Problemas con aplicaciones geométricas:

57) Hallar la base y la altura de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 30 cm y su área 44 cm^2

58) Hallar el área de un rectángulo sabiendo que su diagonal vale 5 cm y que su perímetro vale 14 cm.

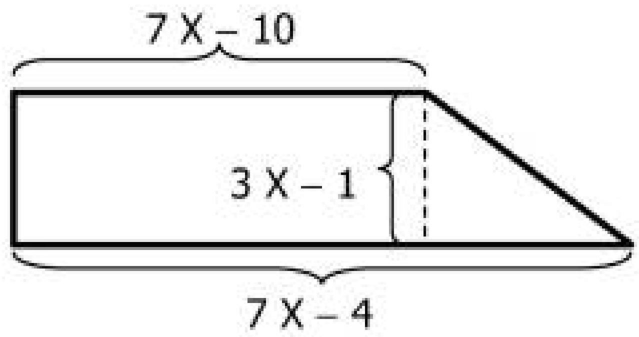
Perímetro = 14



59) Hallar X, sabiendo que abc es un triángulo rectángulo:
(Sugerencia: Utilizar el Teorema de Pitágoras)

60) Hallar X con los datos dados para el siguiente trapezoide rectángulo:

Área = 112 cm^2



Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas:

61) $X^4+3X^2-28=0$

62) $X^4-5X^2-36=0$

63) $2X^4-X^2-1=0$

64) $5X^4-78X^2-32=0$

65) $3X^4-107X^2-36=0$

66) $7X^4-4X^2-3=0$

67) $\frac{3}{2}X^4-5X^2-4=0$

68) $\frac{2}{3}X^4-\frac{17}{3}X^2-3=0$

69) $\frac{1}{12}X^4-\frac{13}{12}X^2+3=0$

70) $\frac{1}{8}X^4-\frac{5}{2}X^2+8=0$

71) $\frac{1}{4}X^4-5X^2+16=0$

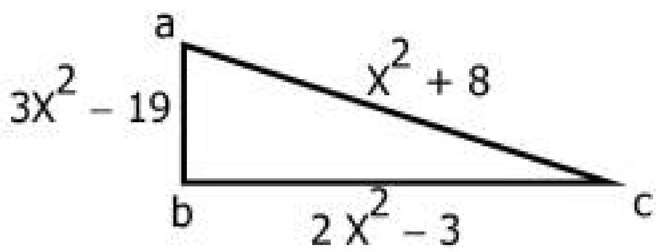
72) $\frac{1}{6}X^4-\frac{5}{6}X^2+\frac{2}{3}=0$

73) $\frac{1}{7}X^4-6X^2-49=0$

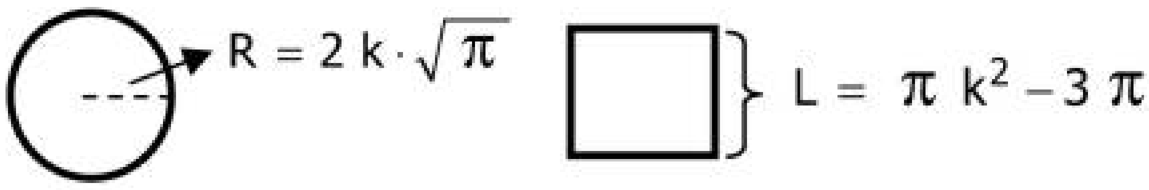
<u>Más aplicaciones geométricas de ecuaciones de Segundo Grado</u>:

74) Hallar el valor numérico del radio de un círculo, sabiendo que el valor numérico de la suma de los valores de su área y su perímetro es igual a $3.\P^2$

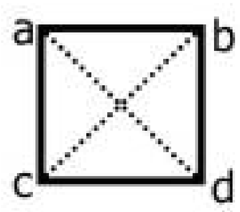
75) ¿Para qué valor/es de "x" el triángulo abc es rectángulo?



76) ¿Para qué valor/es de "k" el área del círculo es igual al área del cuadrado?



77) Dado el cuadrado abcd, y los valores de sus diagonales en función de "x".
Hallar x



$\overline{ad} = x^2 - 5$

$\overline{bc} = 2x + 3$

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Función Cuadrática

Número de Tema: **48**

Área: **Matemática**

☆ **Funciones Cuadráticas**: Comencemos estudiando la forma polinómica de las funciones cuadráticas.

Forma Polinómica: $Y = a \cdot X^2 + b \cdot x + c \Leftrightarrow$ "a" "b" y "c" son números reales, $a \neq 0$

Puntos característicos de las funciones cuadráticas: Estos puntos son los más importantes de estas funciones y nos van a ser muy útiles para su estudio.

☆ Raíces: Una función cuadrática puede tener 2, 1 o ninguna raíz real.
☆ Coordenadas del vértice: Toda función cuadrática tiene siempre un único vértice, con coordenadas "x" e "y" reales.
☆ Intersección con el eje Y: Toda función cuadrática corta al eje "y" en un único punto, al que podemos llamar ordenada al origen.

Vamos a estudiar todos estos puntos característicos con el siguiente ejemplo: $f_{(x)} = x^2 + 2x - 3$

Raíces reales o Ceros de una función cuadrática:

Las raíces de una función, son los valores en los cuáles la función corta al eje de las "x". Cuando una función cuadrática tiene raíces reales, éstas se calculan con la siguiente fórmula:

$$\boxed{X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a}}$$

Las raíces son entonces los valores de x para los cuales la función vale 0.

Esta fórmula se aplica con los coeficientes de la función cuadrática en forma polinómica, que como vimos antes es de la forma: $f_{(x)} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Ejemplo: Calculemos las raíces de la función: $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

O sea que en nuestro ejemplo las raíces son $\mathbf{X_1 = 1}$ **y** $\mathbf{X_2 = -3}$

Cálculo de las Coordenadas del vértice:

Vamos a ver unas fórmulas para calcular las coordenadas del vértice: $\boxed{X_v = \frac{-b}{2 \cdot a}}$ $\boxed{Y_v = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}}$

Con estas fórmulas remplazando los coeficientes "a", "b" y "c" de la ecuación en forma polinómica, vamos a calcular las coordenadas del vértice. Veámoslo en nuestro ejemplo:

Calculemos las coordenadas del vértice de la función de nuestro ejemplo: $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$$X_v = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad Y_v = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = \frac{4 \cdot 1 \cdot (-3) - 2^2}{4 \cdot 1} = \frac{-12 - 4}{4} = \frac{-16}{4} = -4$$

O sea que el vértice es el punto: $\mathbf{V = (-1\,;\,-4)}$
Una vez calculada "X_V" podemos calcular Y_V remplazando el valor de X_V en la función para no acordarse la fórmula de Y_V

Intersección con el eje "y":

La intersección con el eje "y", u "ordenada al origen" coincide con el valor del término independiente de la ecuación polinómica, es decir el valor de "c". O sea es el valor de la función cuando 2x" vale cero.

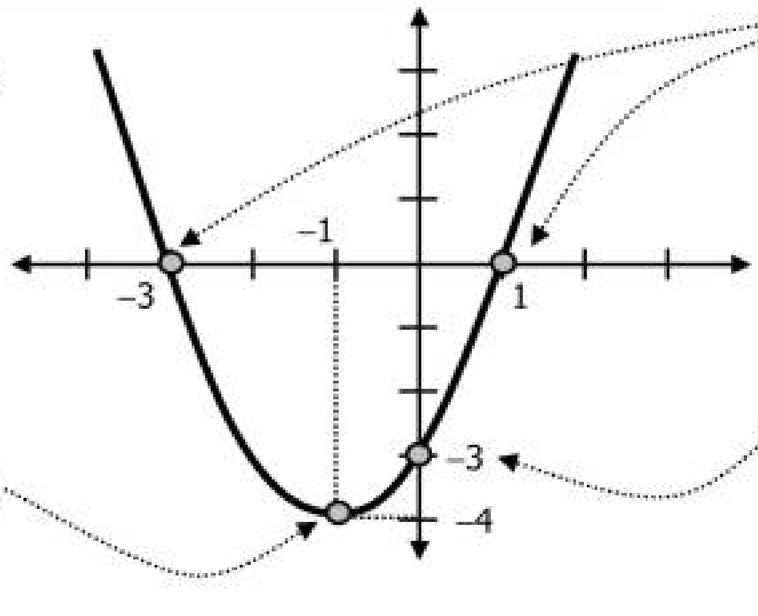
En nuestro ejemplo $f(x) = x^2 + 2x - 3$ la intersección con el eje "y" es $\mathbf{y = -3}$ $\boxed{\cap \text{ Eje } Y = c}$

Gráfica a partir de los puntos característicos de la función cuadrática:

Con estos puntos característicos podemos graficar aproximadamente la función.
Los Puntos utilizados en este caso son:

- Las Raíces.
- Las coordenadas del Vértice
- La Intersección con el eje "y"

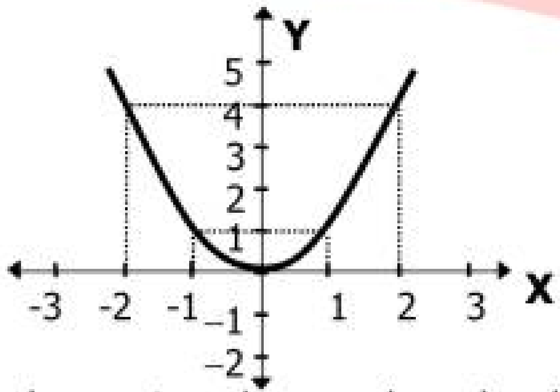
Raíces:
$X_1 = 1$
$X_2 = -3$



Vértice:
$V = (-1;-4)$

Intersección Eje "y":
$Y = -3$

Desplazamientos de la función Cuadrática:



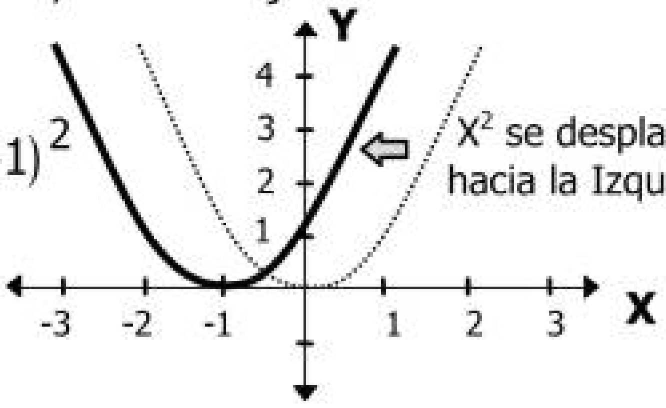
Comenzaremos estudiando las cuadráticas a partir de la función $f(x) = X^2$
La gráfica de $f(x) = X^2$, la veremos a continuación:

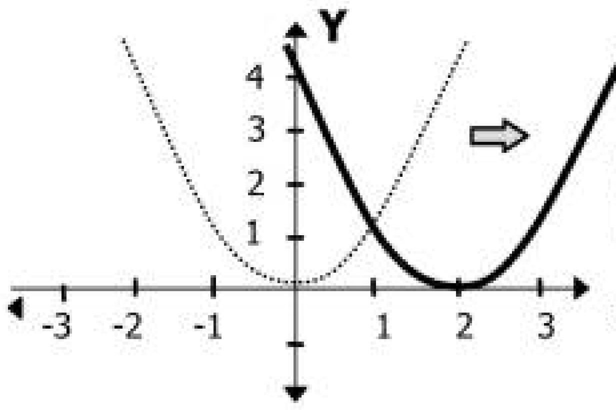
A partir de este gráfico, veremos cómo son (aproximadamente los gráficos de funciones cuadráticas similares, pero desplazadas vertical y horizontalmente.

Desplazamientos Horizontales: Cuando a la variable "x" se le suma o resta un valor, antes de ser elevado al cuadrado, este valor es el desplazamiento horizontal. Si a la variable "x" se le suma un valor, el desplazamiento es hacia la izquierda, en cambio si se le resta un valor, el desplazamiento es hacia la derecha, lógicamente, sobre el eje de las x.

Ejemplos:

$f_{(x)} = (x+1)^2$

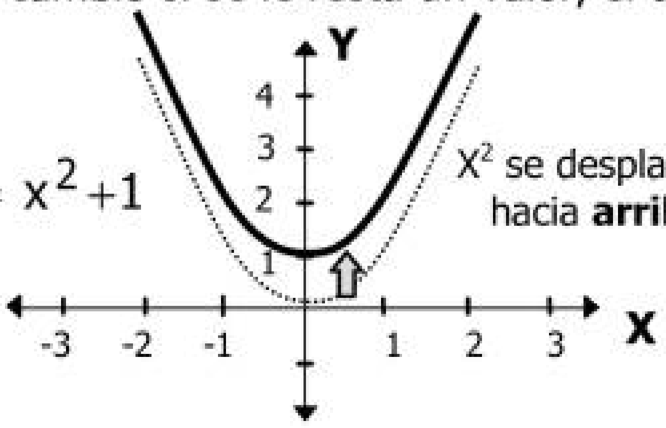


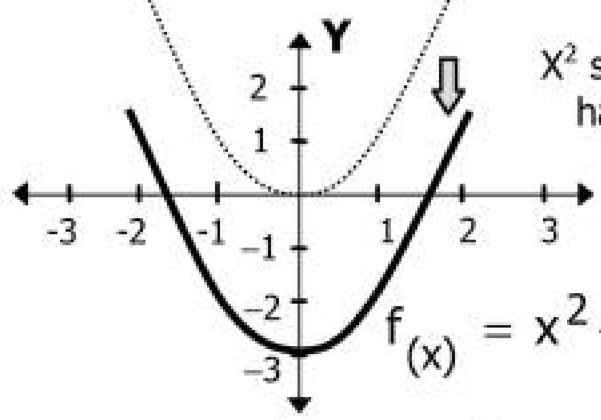


Desplazamientos Verticales: Cuando a la variable "x" se le suma o resta un valor, después de ser elevada al cuadrado, este valor es el desplazamiento Vertical. Si a la variable "x" se le suma un valor, el desplazamiento es hacia arriba, en cambio si se le resta un valor, el desplazamiento es hacia abajo.

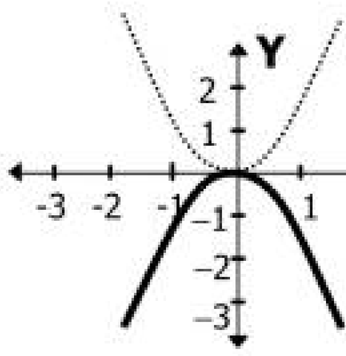
Ejemplos:

$f_{(x)} = x^2+1$





Funciones cuadráticas de Concavidad Negativa: Cuando el término cuadrático (es decir el término de la x^2) es negativo, la parábola que estamos estudiando cambia de concavidad, lo vemos graficado en el siguiente ejemplo:



Ecuación Canónica de las funciones cuadráticas:

Esta es la forma general de la **Ecuación Canónica** de la parábola

$$y = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$$

Es un factor que nos da idea de su "anchura"

$\mathbf{X_v}$: Coordenada "x" del Vértice

Este número es la coordenada x del Vértice de la Parábola.

$\mathbf{Y_v}$: Coordenada "Y" del Vértice

Este número es La coordenada "y" del Vértice de la Parábola.

Coordenadas del Vértice: $V = (x_v, y_v)$

Cálculo de Raíces: La manera de calcular las raíces, partiendo de la forma canónica es igualando la función a cero (ya que las raíces son los valores de "x" para los cuáles la función vale cero) y despejando "x".

Ejemplo: $f(x) = 2\,(x+2)^2 - 8 \quad \Rightarrow 2(x+2)^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2(x+2)^2 = 8 \Rightarrow (x+2)^2 = 8/2 \Rightarrow |x+2| = \sqrt{4}$

$$\Rightarrow |x+2| = \sqrt{4} \begin{cases} \Rightarrow x+2 = 2 \Rightarrow x = 2-2 \Rightarrow \boxed{x = 0} \\ \Rightarrow x+2 = -2 \Rightarrow x = -2-2 \Rightarrow \boxed{x = -4} \end{cases}$$

Intersección con el eje "y": La manera de calcular esto es reemplazando "X=0" y calculando el valor de "y"

☆ **<u>Dos Propiedades Importantes</u>:** Hay dos propiedades sumamente importantes a saber con respecto a las raíces de una parábola, son dos fórmulas que relacionan la suma de las raíces y el producto de las raíces con los coeficientes "a", "b" y "c" de la ecuación polinómica.

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \qquad \boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Claro que si nos dan en un ejercicio, por ejemplo las raíces y con eso solo y estas ecuaciones queremos averiguar la ecuación polinómica no vamos a poder.. **por qué?** Simple, porque tendríamos dos ecuaciones y tres incógnitas que serían "a", "b" y "c" Por eso necesitamos un dato más, aparte de las raíces, por ejemplo, la ordenada al origen.

Veamos a continuación un ejemplo:

Dadas: La Ordenada al Origen ⟶ $\mathbf{y = -15/2}$
Y las Raíces ⟶ $\mathbf{x_1 = -3}$ y $\mathbf{x_2 = 5}$

De una parábola, reconstruir la ecuación Polinómica de la Parábola.

Planteamos las dos fórmulas que acabamos de ver: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Y remplazamos X_1 y X_2 por –3 y 5 que son los valores de las raíces, que son datos, y "c" por –15/2 que también es dato (acordate que "c" es el valor de la ordenada al origen)

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow -3 \cdot 5 = \frac{-15/2}{a} \Rightarrow -15 = \frac{-15/2}{a} \Rightarrow a = \frac{-15/2}{-15} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -3+5 = -\frac{b}{a} \Rightarrow 2 = -\frac{b}{1/2} \Rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = b \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

Remplazamos "a" por 1/2 porque lo acabamos de calcular.

Y ya podemos escribir la ecuación polinómica ya que sabemos "a", "b" y "c" $\Rightarrow$ $\boxed{y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1x - \frac{15}{2}}$

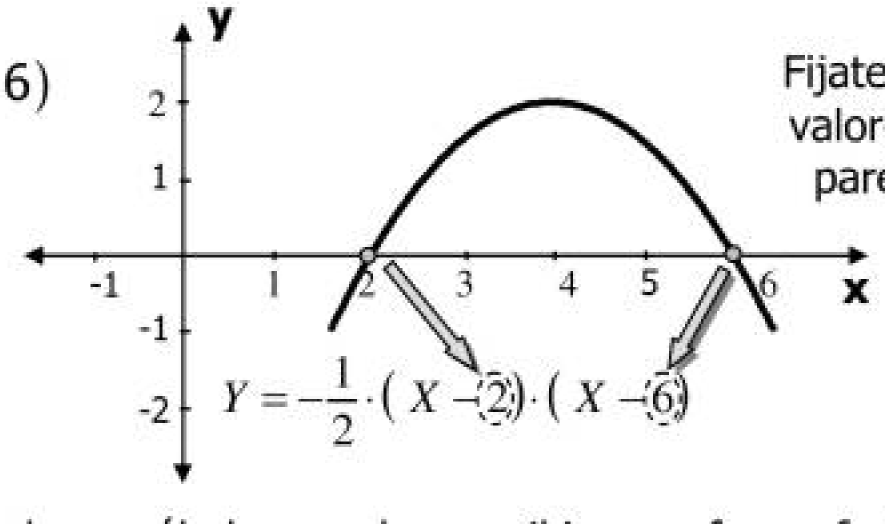
☆ **<u>Ecuación Factorizada</u>:**

$$\boxed{Y = a \cdot (X - x_1) \cdot (X - x_2)}$$

X_1 y X_2 son las raíces de la parábola, y "a" es el mismo "a" de siempre.

Ejemplo: grafiquemos la siguiente parábola dada en forma factorizada:

$$Y = -\frac{1}{2} \cdot (X - 2) \cdot (X - 6)$$



Fijate como las raíces son los valores que están dentro del paréntesis restando a la X

<u>Atención con esto</u>: No todas las parábolas pueden escribirse en forma factorizada. Esto pasa porque hay parábolas que no tienen raíces reales. Por eso la forma factorizada no es tan común.

☆ **<u>Pasaje de formas de una parábola</u>:** Ahora vamos a ver como pasar de una forma a otra:

- <u>Pasaje de Forma Polinómica a Canónica</u>: Hay que hallar coordenadas del vértice y escribir directamente la forma canónica con estos valores y sin olvidarse del valor de "a" que está también en la forma polinómica.
- <u>Pasaje de Forma Canónica a Polinómica</u>: Hay que desarrollar el cuadrado del binomio y operar.
- <u>Pasaje de Forma Polinómica a Factorizada</u>: Hallar las raíces y escribir directamente la forma factorizada.
- <u>Pasaje de Forma Factorizada a Polinómica</u>: Hay que hacer la distributiva del producto entre los paréntesis.
- <u>Pasaje de Forma Factorizada a Canónica</u>: Para pasar de forma factorizada a canónica, hay que pasar primero de factorizada a polinómica y luego de la polinómica a la factorizada.
- <u>Pasaje de Forma Canónica a Factorizada</u>: Hay que hallar las raíces de la parábola primero y después escribir la forma factorizada (sin olvidarse de "a" que también está en la forma canónica)

✫ **Método de completar cuadrados:** Ahora vamos a ver un método de pasar de forma polinómica a canónica sin hallar las coordenadas del vértice.

Antes que nada vamos a hacer un pequeño repaso: **Cuadrado de un Binomio**

Debemos saber la fórmula para hacer el cuadrado de un binomio: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ahora sí, vamos a ver este método directamente de un ejemplo:

Vamos a pasar a forma canónica la función cuadrática: $\mathbf{Y = 2X^2 - 5X + 2}$

Lo primero que hay que hacer es sacar factor común del número que esté multiplicando a la X^2 (si no hay nada multiplicando a la X^2 se saltea este paso)

$Y = 2X^2 - 5X + 2$ Saco factor común 2 (Divido a todos los términos por 2) $\Rightarrow$ $Y = 2\left(X^2 - \frac{5}{2}X + 1\right)$

Lo que voy a hacer con estos tres términos es compararlos con los tres términos de la fórmula del cuadrado de un binomio

Ahora debemos comparar: $\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 \\ x^2 - 5/2\,x + 1 \end{cases}$

Me queda esta expresión: $Y = 2\left(X^2 - \frac{5}{2}X + 1\right)$

Comparando el primer término, es obvio que a=X

$\boxed{a = X}$

$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

Como "a"=x, con el término del medio, despejo "b"

Simplifico las X

$2 \cdot a \cdot b = -\frac{5}{2}X \Rightarrow 2 \cdot x \cdot b = -\frac{5}{2}X \Rightarrow 2 \cdot b = -\frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{5}{4}}$

Reemplazo "a" por X

Este valor de "b" es muy importante ya que cambiándole el signo, tengo la coordenada "x" del vértice

Ahora que tengo "a" y "b" me fijo como quedaría el binomio $(a+b)^2$ remplazando a y b por lo que calculé: $\boxed{(a+b)^2 = \left(X - \frac{5}{4}\right)^2 = X^2 - \frac{5}{2}X + \frac{25}{16}}$

Acá sumo y resto el término que me falta para que me quede lo mismo que en el desarrollo de este cuadrado (en este caso + 25/16 y – 25/16). **Al sumar y restar el mismo número, no altero la expresión.**

$$\Rightarrow \quad Y = 2\left(X^2 - \frac{5}{2}X + 1\right) \quad \Rightarrow \quad Y = 2\left(X^2 - \frac{5}{2}X \boxed{+\frac{25}{16} - \frac{25}{16}} + 1\right)$$

$$\Rightarrow Y = 2\left(\boxed{X^2 - \frac{5}{2}X + \frac{25}{16}} - \frac{25}{16} + 1\right) = 2\left(\boxed{\left(X - \frac{5}{4}\right)^2} - \frac{25}{16} + 1\right) = 2\left(\left(X - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right) = \boxed{2\left(X - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}}$$

Acá reemplazo por la igualdad que tenía antes.

Sumo –25/16 + 1

Forma canónica de la parábola

Nota, pudimos haber terminado de otra forma, cuando ya teníamos el valor de "b" que nos daba la coordenada "x" del vértice, ya que si remplazábamos ese valor en la función polinómica obteníamos directamente el valor "y" del vértice que nos faltaba para llegar a la forma canónica, les muestro:

Teníamos: $\mathbf{Y = 2X^2 - 5X + 2}$ ⇨ $Y_v = 2(5/4)^2 - 5(5/4) + 2$ ⇨ $Y_v = 25/8 - 25/4 + 2$ ⇨ $Y_v = -9/8$

Con lo cual podíamos ya escribir la forma canónica: $Y = 2\,(x - 5/4)^2 - 9/8$

Comenzamos con los ejercicios. **Responder: Verdadero o Falso**

1) Todas las Parábolas cortan al **Eje x** en algún punto.
2) Todas las Parábolas tienen Ordenada al Origen.
3) $Y = 2x^2 + 3X - 5$ tiene una raíz positiva y una negativa.
4) De la Ecuación Canónica obtengo inmediatamente las Raíces.
5) En la Ecuación Factorizada tengo a la vista las Coordenadas del Vértice.
6) Puede darse que una Recta y una Parábola no se crucen.
7) De la Ecuación Polinómica obtengo inmediatamente la Ordenada al Origen.
8) $Y = (x-8)^2$ Tiene sólo una raíz (doble).
9) Dos Parábolas pueden cortarse en 3 puntos, sin que estén superpuestas.
10) Existe una Parábola con raíces $\mathbf{x_1=0}$ y $\mathbf{x_2=-5}$ y vértice en **(-3, 4)**.

Dadas las Ecuaciones Polinómicas:

-> Hallar las raíces
-> Dar la ecuación canónica y factorizada
-> Hallar el vértice
-> Graficar sin tabla de valores

11) $Y = -2X^2 + 5X - 2$
12) $Y = 3X^2 + 6X - 9$
13) $Y = 2X^2 + 3X + 1$
14) $Y = 4X^2 + 6X + 2$
15) $Y = 4X^2 + 3X - 1$
16) $Y = 2X^2 + 11X + 15$
17) $Y = 0{,}5X^2 + 4X + 6$
18) $Y = -1X^2 - 1X + 2$
19) $Y = -2X^2 + 1X + 1$
20) $Y = -3X^2 - 7X - 2$
21) $Y = 2X^2 + 7X + 3$
22) $Y = 1X^2 + 3X + 2$
23) $Y = -1X^2 - 3X - 2$
24) $Y = 2X^2 - 3X - 2$
25) $Y = 1X^2 + 2X + 1$
26) $Y = -2X^2 + 6X - 4$
27) $Y = 2X^2 - 3X + 1$
28) $Y = -3X^2 + 6X + 3$
29) $Y = -1X^2 + 8X - 15$
30) $Y = 1X^2 - 8X + 12$

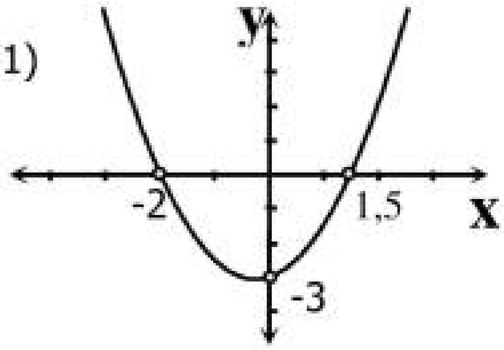
Dada la ecuación factorizada, hallar las ecuaciones polinómica y canónica:

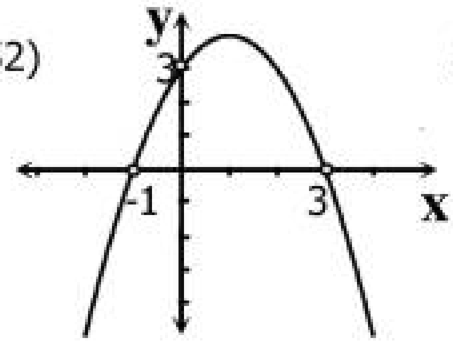
31) $Y = (X-1) \cdot (X+4)$
32) $Y = -1 \cdot (X+1) \cdot (X-6)$
33) $Y = -1 \cdot (X-1) \cdot (X-10)$
34) $Y = 2 \cdot (X + 1/2) \cdot (X+3)$
35) $Y = 2 \cdot (X+1) \cdot (X + 7/2)$
36) $Y = 2 \cdot (X + 5/2) \cdot (X+3)$
37) $Y = -2 \cdot (X - 3/2) \cdot (X-2)$
38) $Y = -4 \cdot (X - 1/4) \cdot (X-3)$
39) $Y = -2 \cdot (X-1) \cdot (X - 15/2)$
40) $Y = 2 \cdot (X-9) \cdot (X - 1/2)$

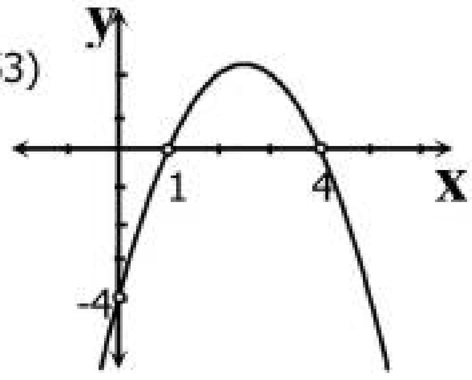
Dada la ecuación canónica, hallar las ecuaciones polinómica y factorizada:

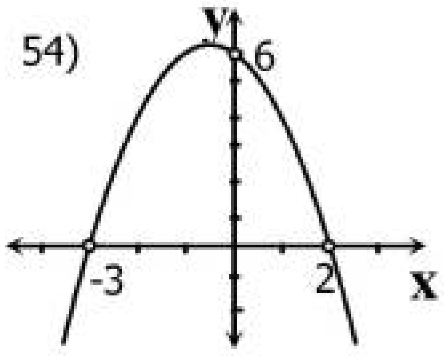
41) $Y = (X + 3)^2 - 25$
42) $Y = 3(X + 2/3)^2 - 25/3$
43) $Y = 1/2(X + 2)^2 - 8$
44) $Y = 1/4(X + 14)^2 - 25$
45) $Y = -5/2(X - 9/5)^2 + 121/10$
46) $Y = -5/4(X + 2)^2 + 20$
47) $Y = 1/2(X + 4)^2 - 2$
48) $Y = -1/4(X + 2)^2 + 4$
49) $Y = 3/4(X - 4)^2 - 3$
50) $Y = -(X - 1)^2 + 4$

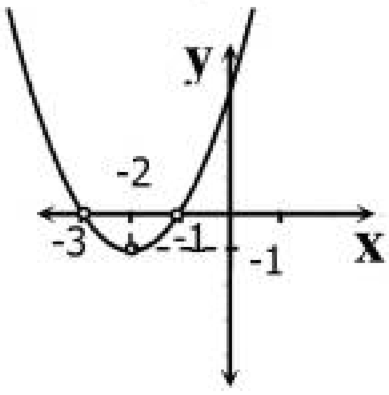
Reconstruir las ecuaciones de las siguientes parábolas (forma polinómica)

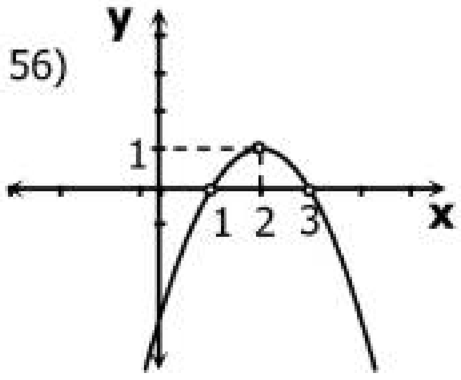
51) 

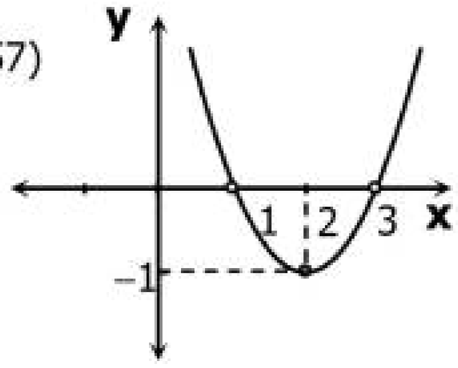
52) 

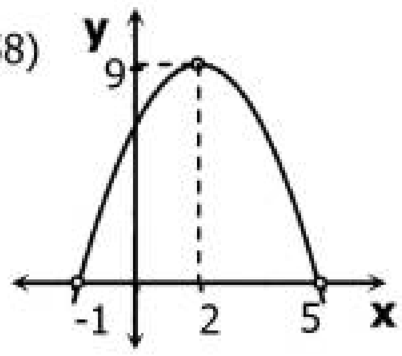
53) 

54) 

55) 

56) 

57) 

58) 

Llegar a la ecuación canónica, completando cuadrados:

59) $Y = 2X^2 + 12X + 19$

60) $Y = 3X^2 + 12X + 13$

61) $Y = 4X^2 + 16X + 7$

62) $Y = 3X^2 + 18X + 24$

63) $Y = 5X^2 + 10X - 15$

64) $Y = -1X^2 + 2X - 3$

65) $Y = -1X^2 + 8X - 12$

66) $Y = -1X^2 - 4X + 12$

67) $Y = -1X^2 + 4X + 5$

68) $Y = -1X^2 + 18X - \dfrac{725}{9}$

Hallar "k" para que el vértice de la parábola sea el punto (1;3):

69) $Y = 2X^2 - kX + k + 1$

70) $Y = (2-k)X^2 - 2X + k + 3$

71) $Y = (X + k - 1).(X - 2)$

72) $Y = \dfrac{8+k}{3}X^2 - 6kX + 6$

73) $Y = \left(3 + \dfrac{k}{3}\right)X^2 - \left(k^2 + 1\right)X + 8$

74) $Y = \left(\dfrac{3}{5}k - 1\right)X^2 - \left(k^2 - 21\right)X + 5$

75) $Y = \dfrac{31+k}{3}X^2 - 22X + \dfrac{1}{2}k + 13$

76) $Y = (9+k)X^2 + \left(k^2 - 11k + 2\right)X + 16$

77) $Y = \left(\dfrac{1}{3}k + 16\right)X^2 - \left(3k^2 + 5k - 8\right)X + 20$

78) $Y = (3k-1)X^2 - \left(k^2 - k - 4\right)X + 3k + 1$

79) $Y = \left(\dfrac{13}{6}k + 2\right)X^2 - \left(k^2 - 2k + 6\right)X + 18$

80) $Y = (k+8)X^2 - \left(5k^2 + 11k + 2\right)X + 12$

Hallar "a" sabiendo las raíces de la parábola:

81) $Y = a \cdot X^2 + 3X + 2 \Rightarrow X_1 = -1 \ ; \ X_2 = -2$

82) $Y = a \cdot X^2 + 2X + 3 \Rightarrow X_1 = -1 \ ; \ X_2 = 3$

83) $Y = a \cdot X^2 + 2X - 3 \Rightarrow X_1 = 1 \ ; \ X_2 = -3$

84) $Y = a \cdot X^2 + 4X + 2 \Rightarrow X_1 = -1 \ ; \ X_2 = -1$

85) $Y = a \cdot X^2 + 4X + 6 \Rightarrow X_1 = -1 \ ; \ X_2 = 3$

86) $Y = a \cdot X^2 + 3X + 6 \Rightarrow X_1 = -1 \ ; \ X_2 = 2$

87) $Y = a \cdot X^2 - 7X - 14 \Rightarrow X_1 = 2 \ ; \ X_2 = -1$

88) $Y = a \cdot X^2 + 4X - 2 \Rightarrow X_1 = 1 \ ; \ X_2 = 1$

89) $Y = a \cdot X^2 + 8X - 12 \Rightarrow X_1 = 1 \ ; \ X_2 = -3$

90) $Y = a \cdot X^2 + 22X - 33 \Rightarrow X_1 = 1 \ ; \ X_2 = -3$

Reconstruir la ecuación polinómica de la parábola, dadas las raíces y un punto:

91) $X_1=-1$; $X_2=-2$; $P_1=(1;-6)$

92) $X_1=-1$; $X_2=3$; $P_1=(2;-3)$

93) $X_1=1$; $X_2=-3$, $P_1=(-4;-5)$

94) $X_1=-1$; $X_2=-1$; $P_1=(0;-2)$

95) $X_1=-1$; $X_2=3$; $P_1=(1;-8)$

96) $X_1=-1$; $X_2=2$; $P_1=(1;-6)$

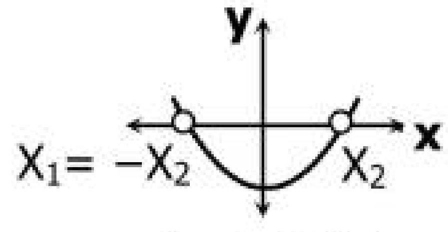
97) $X_1=2$; $X_2=-1$; $P_1=(3;4)$

98) $X_1=1$; $X_2=1$; $P_1=(2;2)$

99) $X_1=1$; $X_2=-4$; $P_1=(-5;6)$

100) $X_1=2$; $X_2=3$; $P_1=(4;-2)$

Hallar el valor de "k" para que las raíces reales sean iguales y opuestas:



O sea que se cumpla la condición: $X_1 = -X_2$

Se puede afirmar que cuando se cumple esta condición, la parábola es simétrica con respecto al eje "y"

101) $Y = X^2 + kX - 1$

102) $Y = -2X^2 + (k-1)X - 8$

103) $Y = -3X^2 + \left(\frac{2}{3}k - 4\right)X + 2k$

104) $Y = -\frac{1}{2}k\,X^2 + \left(\frac{1}{5}k + 1\right)X - k^3 + 3$

105) $Y = -X^2 + \left(\frac{1}{2}k^2\right)X - k^2 + 1$

106) $Y = X^2 + \left(k^2 - 1\right)X + k$

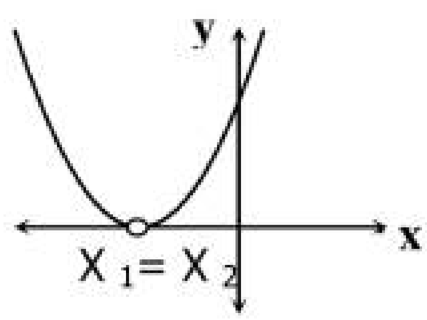
107) $Y = kX^2 + \left(9 - k^2\right)X + 3$

108) $Y = \frac{1}{2}(X - k)\cdot(X - 2)$

109) $Y = (X + 2k + 1)\cdot(X + 1)$

110) $Y = \frac{1}{k}\left(X + k^2 + 5\right)\cdot(X - 6)$

Hallar el valor de "k" para que la parábola tenga una sola raíz real:



111) $Y = X^2 + (k-1)X + 1$

112) $Y = X^2 + (3k-2)X + 4$

113) $Y = -X^2 - 2X - k$

114) $Y = X^2 + 4X + k^2 + 5k - 2$

115) $Y = (X-2)\cdot(X+k)$

116) $Y = (X+1)\cdot\left(X - k^2 + 3k - 1\right)$

117) $Y = (X-3)\cdot\left(X + \frac{1}{4}k^2 - k - 2\right)$

118) $Y = (X-3)^2 + 2k - 4$

119) $Y = -(X+1)^2 + k^2 - 2k + 1$

120) $Y = (X+2k)^2 + \frac{1}{25}\left(k^2 - 6k + 9\right)$

121) $Y = -k\left(X - \frac{1}{2}k + 1\right)^2 - \left(k^2 - 9\right)$

122) $Y = -X^2 - k$

123) Cuando la parábola tiene una sola raíz real ¿Cuánto vale la expresión $\sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}$?

Escribir la ecuación polinómica de una función cuadrática, sabiendo que la única raíz es –3 y que la parábola pasa por el punto:

124) $P_0=(0; 3)$

125) $P_0=(-1; 8)$

126) $P_0=(2; -25)$

127) $P_0=(0; -18)$

128) $P_0=(-1; 2)$

129) $P_0=(-1; 2/3)$

130) $P_0=(-6; 9)$

131) $P_0=(6; 567)$

132) $P_0=(11; 980)$

133) $P_0=(-7; 96)$

134) $P_0=(-5; 3)$

135) $P_0=(-6; 1)$

Problema de aplicación en física: Tiro Vertical

Sabiendo que la Altura de una piedra lanzada hacia arriba (desde una determinada altura inicial y con una determinada velocidad inicial) en función del tiempo, es una función cuadrática. Y Además sabemos que el valor de altura máximo alcanzado es de 16 metros y que alcanza esta altura a los 2 seg. Sabemos además que la altura inicial (es decir en el instante de tiempo x= 0 Seg.) es de 12 metros. Recordemos que la Altura es función del tiempo y que la altura está expresada en metros y el tiempo en segundos.

136) Según el enunciado. ¿Qué coeficiente representa dentro de la forma polinómica de la función cuadrática el valor de la altura inicial con que es lanzada la piedra?

137) ¿Cuál es el punto característico que es representado por los valores en que alcanza la altura máxima (o sea, la altura máxima y el tiempo que tarda en alcanzarla)?

138) ¿Cuánto vale en este caso Xv ?

139) ¿Cuánto vale en este caso Yv ?

140) Mediante las fórmulas de las coordenadas del vértice, hallar el valor del coeficiente "a" de la forma polinómica.

141) Escribir la forma Canónica de la función (Altura respecto de tiempo)

142) Escribir la forma Polinómica.

143) ¿Qué punto característico es representado por los valores de tiempo para los que la altura es igual a cero?

144) Hallar las raíces de esta función.

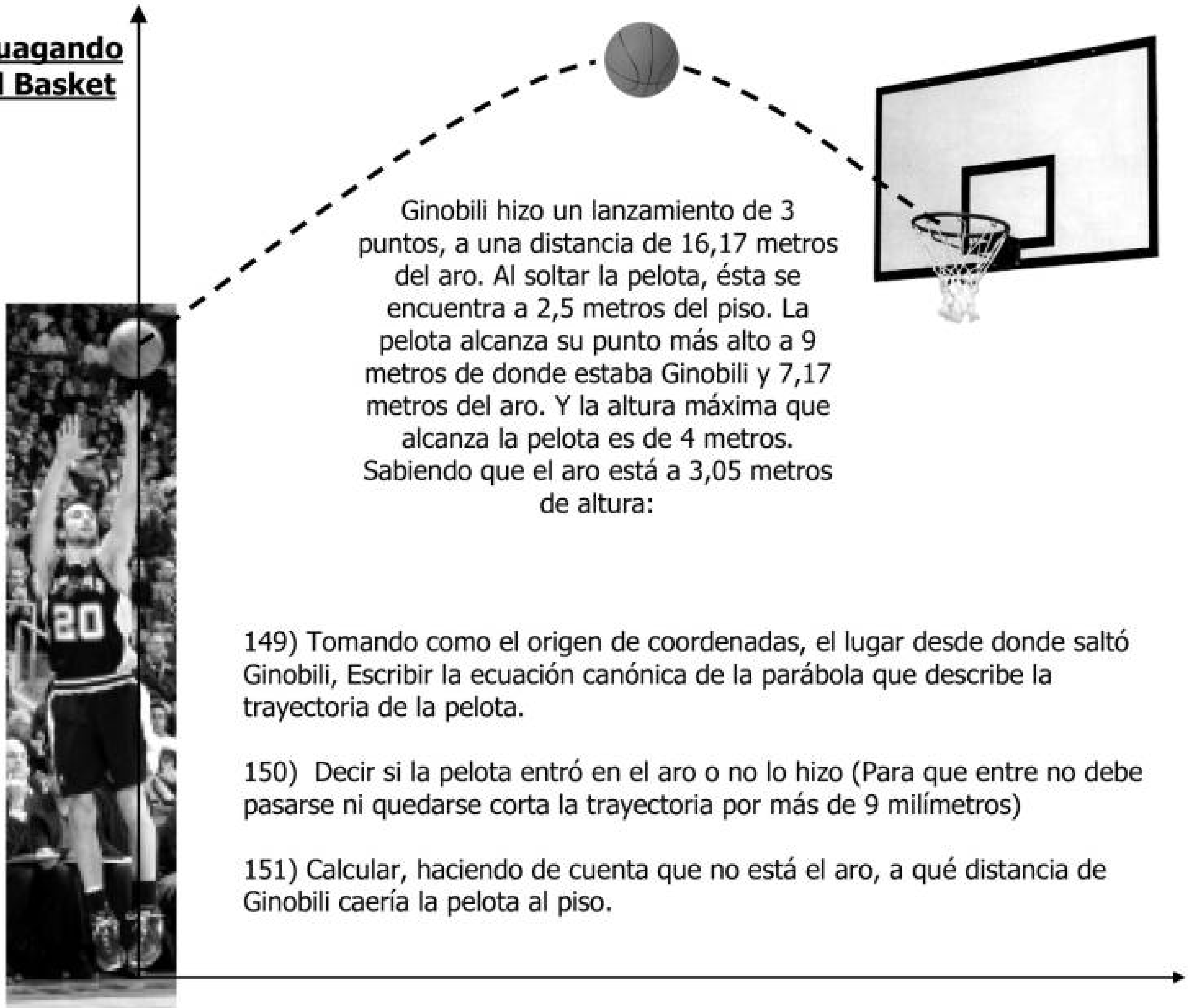
145) Escribir la forma Factorizada.

146) ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en caer hasta el suelo?

147) Graficar aproximadamente esta función.

148) ¿Qué significado en el ejemplo tiene la raíz negativa?

Juagando al Basket



Ginobili hizo un lanzamiento de 3 puntos, a una distancia de 16,17 metros del aro. Al soltar la pelota, ésta se encuentra a 2,5 metros del piso. La pelota alcanza su punto más alto a 9 metros de donde estaba Ginobili y 7,17 metros del aro. Y la altura máxima que alcanza la pelota es de 4 metros. Sabiendo que el aro está a 3,05 metros de altura:

149) Tomando como el origen de coordenadas, el lugar desde donde saltó Ginobili, Escribir la ecuación canónica de la parábola que describe la trayectoria de la pelota.

150) Decir si la pelota entró en el aro o no lo hizo (Para que entre no debe pasarse ni quedarse corta la trayectoria por más de 9 milímetros)

151) Calcular, haciendo de cuenta que no está el aro, a qué distancia de Ginobili caería la pelota al piso.

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Sistemas de Ecuaciones I

Número de Tema: **49**

Área: **Matemática**

¿Qué es un Sistema de Ecuaciones? Es un conjunto de una o más Ecuaciones. La respuesta parece obvia. En realidad los Sistemas de Ecuaciones que vamos a ver nosotros son solo los que tienen una característica muy importante: TIENEN LA MISMA CANTIDAD DE ECUACIONES QUE DE INCOGNITAS.

Por ejemplo: Este es un sistema de **2** ecuaciones con **2** incógnitas $\begin{cases} 2X + 3Y = 5 \\ 5X - 3Y = 2 \end{cases}$ Este es un sistema de **3** ecuaciones con **3** incógnitas $\begin{cases} 2X + 3Y + 2Z = 5 \\ 5X - 3Y + Z = 2 \\ 7X + 5Y + 5Z = 3 \end{cases}$

¿Cómo se resuelven los Sistemas de Ecuaciones? Ya no es tan fácil resolver un Sistema de Ecuaciones como lo era antes resolver una simple ecuación. Igualmente tampoco es tan difícil. Hay básicamente CINCO **Métodos para resolver un Sistema de Ecuaciones, de los cuales por ahora vamos a estudiar tres**:

- Sustitución
- Igualación
- Gráfico

Método de SUSTITUCIÓN

1. **DESPEJAR** una incógnita (X o Y) en una de las dos ecuaciones (cualquiera de la dos).
2. **SUSTITUIRLA** en la otra ecuación.
3. **RESOLVER** la ecuación que nos queda.
4. Con el resultado (punto 3) remplazarlo en una de las ecuaciones originales y **Hallar la otra incógnita**.

Ejemplo: Resolver el siguiente Sistema de Ecuaciones: $\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases}$

1. DESPEJAR una incógnita en una ecuación:

$\begin{cases} 2\mathbf{X} + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases} \Rightarrow$ Tomamos la primera ecuación y despejamos **X** $\Rightarrow$ $2\mathbf{X} + 3Y = 7$

Paso Restando "3Y"

$2\mathbf{X} = 7 - 3Y$

Paso Dividiendo el "2"

(Elegimos la primera ecuación para despejar X porque sí. Pudimos haber despejado "Y" de la segunda ecuación o "Y" de la primera, etc.)

$$\boxed{X = \frac{7-3Y}{2}}$$

Listo, Primer paso hecho!

2. SUSTITUIR:

$\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5\mathbf{X} - Y = 9 \end{cases} \Rightarrow$ En la otra ecuación, en donde dice X, lo sustituimos por lo que despejamos en el paso anterior, es decir reemplazamos X por: $\frac{7-3Y}{2}$

$5\,\boxed{\mathbf{X}} - Y = 9 \Rightarrow$ SUSTITUYO "**X**" por $\boxed{\frac{7-3Y}{2}} \Rightarrow 5\cdot\boxed{\left(\frac{7-3Y}{2}\right)} - Y = 9$

3. RESOLVER la ecuación que nos quedó:

$5\cdot\left(\frac{7-3Y}{2}\right) - Y = 9 \xRightarrow{\text{Propiedad Distributiva}} \frac{35-15Y}{2} - Y = 9 \xRightarrow{\text{Paso la "Y" Sumando}} \frac{35-15Y}{2} = 9 + Y \xRightarrow{\text{Paso el "2" multiplicando}} 35-15Y = (9+Y)\cdot 2$

$\xRightarrow{\text{Propiedad Distributiva con el "2"}} 35-15Y = 18 + 2Y \xRightarrow{\text{Las "Y" de un lado y los números del otro}} -15Y - 2Y = 18 - 35 \Rightarrow -17Y = -17 \Rightarrow Y = \frac{-17}{-17} \Rightarrow \boxed{Y = 1}$

4. HALLAR el valor de la otra incógnita: Tomamos una (cualquiera) de las dos ecuaciones: $2X + 3Y = 7$

Reemplazamos "Y" por "1": $2X + 3 \,.\, 1 = 7$ Y resolvemos.....

$2X + 3 = 7 \Rightarrow 2X = 7 - 3 \Rightarrow X = \frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{X = 2}$

Método de IGUALACIÓN

1. **DESPEJAR una incógnita** (cualquiera de las dos) **EN LAS DOS ecuaciones**.
2. **IGUALAR** las dos incógnitas despejadas.
3. **RESOLVER** la ecuación que nos queda.
4. **Calcular** la otra incógnita.

Ejemplo: Resolver el siguiente Sistema de Ecuaciones: $\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases}$ (Usamos el mismo, para verificar los resultados que calculamos con el método anterior...)

1. DESPEJAR una incógnita en las dos ecuaciones: (puede ser X o Y pero tiene que ser la misma en las dos)

$$\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases}$$

$$5X - Y = 9$$
$$5X = 9 + Y$$
$$\boxed{X = \frac{9+Y}{5}}$$

$$2X + 3Y = 7$$
$$2X = 7 - 3Y$$
$$\boxed{X = \frac{7-3Y}{2}}$$

2. IGUALAR: Al ser las dos expresiones iguales a "x", decimos que también son iguales entre sí...

Por lo tanto nos quedaría: $\frac{9+Y}{5} = \frac{7-3Y}{2}$ Y como vemos igualando, nos queda una sola ecuación con una sola incógnita.

3. RESOLVER la ecuación que nos quedó:

Seguimos resolviendo: $\frac{9+Y}{5} = \frac{7-3Y}{2} \xRightarrow{\text{Paso multiplicando los dos denominadores}} 2.(9+Y) = 5.(7-3Y) \xRightarrow{\text{Distributiva}} 18 + 2Y = 35 - 15Y$

Las "**Y**" de un lado los números de otro. $\Rightarrow 15Y + 2Y = 35 - 18 \Rightarrow 17Y = 17 \Rightarrow Y = \frac{17}{17} \Rightarrow \boxed{Y = 1}$

4. HALLAR el valor de la otra incógnita:

Tomamos una (cualquiera) de las dos ecuaciones originales: $2X + 3Y = 7$

Reemplazamos Y por 1: $2X + 3 . 1 = 7 \Rightarrow 2X + 3 = 7 \Rightarrow 2X = 7 - 3 \Rightarrow X = \frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{X = 2}$

EL MÉTODO GRÁFICO:

Damos por hecho que ya saben dibujar la función de una recta de la forma: **Y = a X + b**

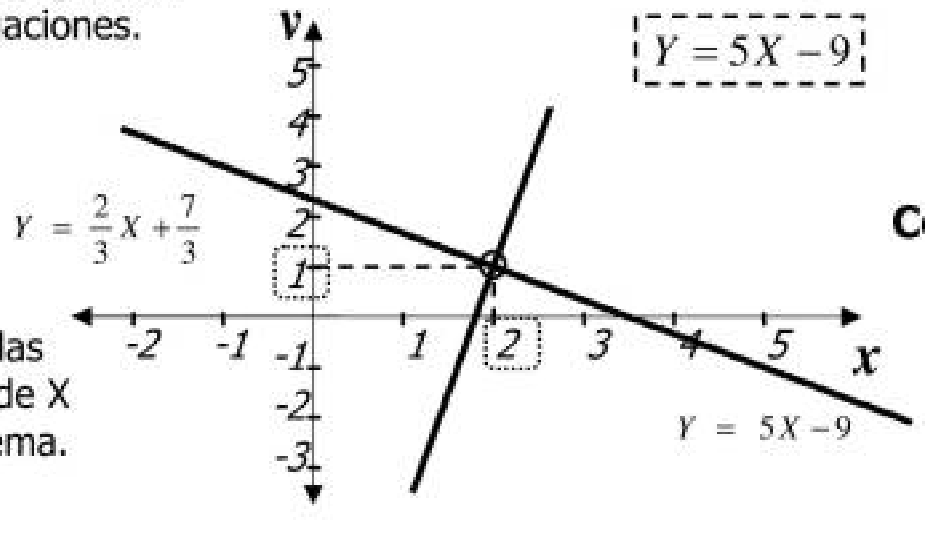
Vamos a ver como se grafica estudiando nuestro ejemplo: $\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases}$

$$2X + 3Y = 7$$
$$3Y = 7 - 2X$$
$$Y = \frac{(7-2X)}{3}$$
$$\boxed{Y = -\frac{2}{3}X + \frac{7}{3}}$$

$$5X - Y = 9$$
$$-Y = 9 - 5X$$
$$Y = \frac{(9-5X)}{-1}$$
$$\boxed{Y = 5X - 9}$$

Primero despejamos "Y" en las 2 ecuaciones.
Esto es para dibujar las rectas como: Y = ax + b

Ahora lo que vamos a hacer es graficar cada una de estas dos ecuaciones.



El punto de intersección de las rectas tiene las coordenadas de X e Y que son solución del Sistema.

Como vemos, la solución es:

X = 2

Y = 1

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

1- $\begin{cases} 2X - 5Y = -9 \\ X + 4Y = 2 \end{cases}$

2- $\begin{cases} 4X + 3Y = 10 \\ 7X - 2Y = 3 \end{cases}$

3- $\begin{cases} 6X - 4Y = -6 \\ X + Y = 4 \end{cases}$

4- $\begin{cases} 5X + 2Y = -1 \\ 9X + 4Y = 1 \end{cases}$

5- $\begin{cases} 4X - Y = -6 \\ 6X + 3Y = 0 \end{cases}$

6- $\begin{cases} -1X - Y = -1 \\ 5X + 4Y = -3 \end{cases}$

7- $\begin{cases} X + 4Y = 3 \\ -2X - 5Y = -9 \end{cases}$

8- $\begin{cases} -3X + 4Y = 1 \\ X + 2Y = 13 \end{cases}$

9- $\begin{cases} 5X - Y = -12 \\ -11X - 2Y = -3 \end{cases}$

10- $\begin{cases} 5X - 2Y = 11 \\ -2X - 5Y = 13 \end{cases}$

11- $\begin{cases} 5X - 8Y = 2 \\ -9X - Y = -19 \end{cases}$

12- $\begin{cases} 3X + 8Y = 5 \\ -3X - 7Y = -4 \end{cases}$

13- $\begin{cases} 1X + 4Y = 4 \\ -2X + \frac{1}{2}Y = 9 \end{cases}$

14- $\begin{cases} 3X + 10Y = 4 \\ -X - 3Y = 3 \end{cases}$

15- $\begin{cases} X - Y = 4 \\ X + 2Y = 1 \end{cases}$

➢ Unir con flechas cada sistema de ecuaciones con el gráfico que le corresponde según su resolución:

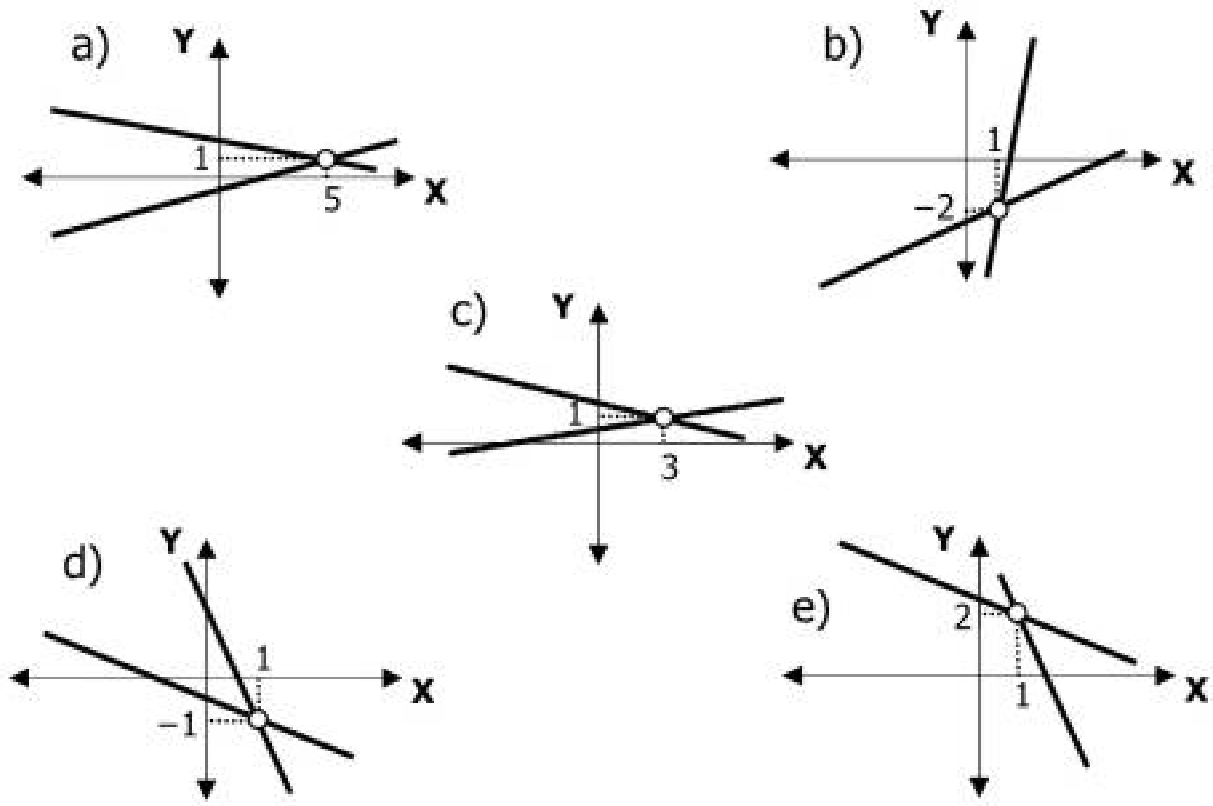
16- $\begin{cases} -1X + 2Y = -1 \\ 3X + 4Y = 13 \end{cases}$

17- $\begin{cases} 5X + Y = 4 \\ -X - 2Y = 1 \end{cases}$

18- $\begin{cases} X + 5Y = 10 \\ -2X + 7Y = -3 \end{cases}$

19- $\begin{cases} 3X - 4Y = 11 \\ -11X + 2Y = -15 \end{cases}$

20- $\begin{cases} 3X + Y = 5 \\ -2X - 3Y = -8 \end{cases}$



Más sistemas de ecuaciones para resolver y graficar: (Primero resolver los paréntesis y "trabajar" cada ecuación)

21- $\begin{cases} -2(2X - Y) = -14 \\ 6X + 3 = 15 + X - 3Y \end{cases}$

22- $\begin{cases} 2(1 - X) = 1 - 3Y - X \\ -4X + 6 = 2(4 - 3Y) \end{cases}$

23- $\begin{cases} 4X + 5 = 3(-X + Y) + 8 \\ -2(X - Y - 1) = 0 \end{cases}$

24- $\begin{cases} (6X + 3Y - 4) \div 3 = -\frac{7}{3} \\ -3X - 2Y = 3 \end{cases}$

25- $\begin{cases} 4(X + 3Y - 4) = 5(Y - 1) \\ -3(X + 1) = -4 - 2Y \end{cases}$

26- $\begin{cases} -6 + 5(X - Y) = -4Y \\ -3(X + Y) = -10(Y + 1) \end{cases}$

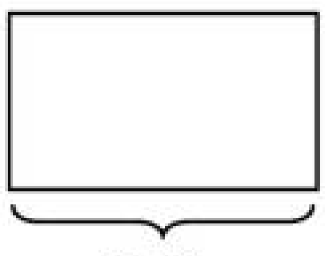
27- $\begin{cases} 3(X - 2) = 2(Y - 9) \\ -9X + 2Y = 0 \end{cases}$

28- $\begin{cases} -(X + 3) = -7 - Y \\ -(2X - 1) = -3(Y - 2) \end{cases}$

29- $\begin{cases} -7(X - 2) = 2Y + 19 \\ -17 = 3(X - 5) - (1 - Y) \end{cases}$

30- $\begin{cases} 14 + 5(2X - 3) = Y + 4X \\ 0 = -5X + 2(Y + 1) - 7 \end{cases}$

31) Calcular la base del rectángulo sabiendo que el perímetro es de 24 cm y que la base es igual al doble de la altura menos 3 centímetros.



B ??

32) En el siguiente crucigrama de números, hallar "A" y "B" sabiendo que tanto la suma de las filas como la suma de las columnas siempre da por resultado 20. Luego volver a resolver el problema comenzando con otro planteo diferente y verificar que se obtiene el mismo resultado.

16	−3	7
A	−8	6−**B**
B	31	**A**−15

Resolver los siguientes Sistemas de Ecuaciones. Estos se vienen con fracciones:

33- $\begin{cases} -\frac{1}{2}X - \frac{2}{3}Y = 1 \\ +\frac{1}{4}X + \frac{1}{5}Y = -\frac{1}{10} \end{cases}$

34- $\begin{cases} -\frac{3}{4}X - \frac{2}{3}Y = -1 \\ +\frac{1}{5}X + \frac{1}{6}Y = \frac{3}{10} \end{cases}$

35- $\begin{cases} -\frac{2}{5}X - \frac{3}{5}Y = -1 \\ +\frac{1}{5}X + \frac{4}{9}Y = \frac{16}{45} \end{cases}$

36- $\begin{cases} +\frac{1}{3}X + \frac{1}{5}Y = \frac{11}{15} \\ -\frac{2}{7}X + \frac{2}{5}Y = \frac{18}{35} \end{cases}$

37- $\begin{cases} -\frac{1}{9}X - \frac{3}{5}Y = \frac{7}{45} \\ +\frac{1}{8}X + \frac{1}{4}Y = \frac{1}{4} \end{cases}$

38- $\begin{cases} -\frac{1}{5}X - \frac{3}{4}Y = -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{8}X + \frac{1}{3}Y = \frac{17}{24} \end{cases}$

39- $\begin{cases} +\frac{2}{5}X - \frac{1}{5}Y = -\frac{3}{5} \\ +\frac{3}{4}X - \frac{2}{9}Y = -\frac{13}{36} \end{cases}$

40- $\begin{cases} +\frac{1}{3}X + \frac{1}{5}Y = -\frac{13}{15} \\ +\frac{2}{3}X - \frac{5}{8}Y = -\frac{17}{24} \end{cases}$

41- $\begin{cases} \frac{13}{30} + \frac{7}{10}Y = -\frac{5}{12}X \\ \frac{3}{5}X + \frac{5}{9}Y - \frac{11}{15} = 0 \end{cases}$

42- $\begin{cases} -\frac{9}{40} = -\frac{1}{8}X + \frac{17}{20}Y \\ \frac{1}{48} + \frac{1}{6}X = \frac{13}{16}Y \end{cases}$

43- $\begin{cases} \frac{3}{5}Y + \frac{19}{20} = -\frac{1}{12}X \\ \frac{1}{3}X + Y + 1 = 0 \end{cases}$

44- $\begin{cases} \frac{13}{20}X = \frac{3}{20} + \frac{1}{5}Y \\ -\left(\frac{7}{8}X - \frac{1}{5}Y\right) = \frac{3}{40} \end{cases}$

45- $\begin{cases} \frac{3}{5}Y = \frac{2}{5}X + 1 \\ \frac{2}{5}X + 4 = 5 + \frac{1}{5}Y \end{cases}$

46- $\begin{cases} 2\left(\frac{1}{6}X - \frac{1}{5}Y\right) + 1 = 0 \\ \frac{2}{3}X = \frac{1}{5}Y + 1 \end{cases}$

47- $\begin{cases} \frac{1}{2}X = 2 + \frac{3}{5}Y \\ \frac{13}{36} + \frac{2}{9}Y = \frac{3}{8}X \end{cases}$

48- $\begin{cases} 2X = 5\left(5 + \frac{3}{4}Y\right) \\ \frac{3}{2}Y = -9(X+1) \end{cases}$

49- $\begin{cases} -\left(\frac{1}{3}X + \frac{4}{5}Y\right) = \frac{7}{15} \\ 9\left(\frac{3}{10} + \frac{13}{90}X\right) = -4Y \end{cases}$

50- $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}X + \frac{3}{4}Y\right) = -1 \\ -\frac{1}{2}X = \frac{1}{5}(Y-1) \end{cases}$

51- $\begin{cases} -\frac{1}{3}Y = \frac{1}{10}(7X+3) \\ \frac{1}{5}\left(\frac{7}{3} - 4X\right) = \frac{1}{9}Y \end{cases}$

52- $\begin{cases} -\left(\frac{1}{3}X - \frac{1}{2}Y\right) = -2 \\ \frac{2}{3}X - 3 = \frac{1}{2}Y \end{cases}$

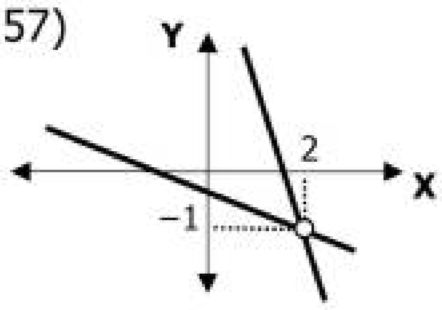
53- $\begin{cases} \frac{1}{3}Y = \frac{-1}{8}(5X+3) \\ \frac{1}{9}Y - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}X \end{cases}$

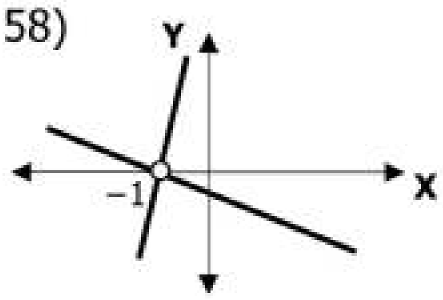
54- $\begin{cases} Y + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.\left(-\frac{1}{3}X\right) \\ X = \left(-3 - \frac{5}{9}Y\right):\left(-\frac{4}{9}\right) \end{cases}$

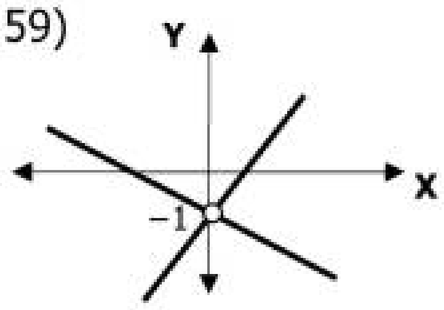
55- $\begin{cases} \frac{1}{2}Y = -\frac{1}{2}X \\ Y = \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{5}X\right).(-4) \end{cases}$

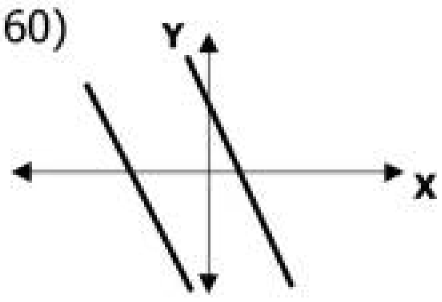
56- $\begin{cases} X = \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{8}Y\right):\frac{1}{4} \\ Y = \left(1 - \frac{1}{6}X\right).(-3) \end{cases}$

Dados los siguientes gráficos que representan sistemas de ecuaciones, decir cuál es la solución del sistema:

57)


58)


59)


60)


Para analizar en clase:
Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones y graficarlos. ¿Qué particularidad tienen? ¿Tiene solución el problema? ¿Puede un sistema de ecuaciones tener varias soluciones?

61- $\begin{cases} X - 2Y = -3 \\ -2X + 4Y = 6 \end{cases}$

62- $\begin{cases} A + 3B = 4 \\ 2A = 8 - 6B \end{cases}$

63- $\begin{cases} 9Y + 12 - 3X = 0 \\ X + 4 = 3Y \end{cases}$

64- $\begin{cases} \frac{1}{2}X = 1 + \frac{1}{3}Y \\ 3X - 2Y = 6 \end{cases}$

Plantear problemas con números o situaciones problemáticas que se representen con los siguientes sistemas de ecuaciones y luego resolverlos:

65- $\begin{cases} A + B = 15 \\ A = 2B \end{cases}$ 66- $\begin{cases} A - B = 12 \\ A = 3B \end{cases}$ 67- $\begin{cases} A + B = 15 \\ A = B + 1 \end{cases}$ 68- $\begin{cases} A = 2B - 3 \\ A - 2 = B \end{cases}$ 69- $\begin{cases} A = B - 1 \\ A = \frac{5}{6}B \end{cases}$

70- $\begin{cases} A + B = 10 \\ A - 1 = 2B \end{cases}$ 71- $\begin{cases} A + B = \$\,1.000 \\ A - B = \$\,200 \end{cases}$ 72- $\begin{cases} A = B - \$25 \\ A - \$15 = B \div 2 \end{cases}$ 73- $\begin{cases} A = -B \\ 2A - B = 15 \end{cases}$ 74- $\begin{cases} A = B \\ A + B = 6 \end{cases}$

Problemas con números:

75. La suma de 2 números es 106 y el mayor excede al menor en 8. Hallar los números.

76. A + B es 1154 y B es 506 menos que A. ¿Cuánto valen A y B?

77. Hallar 2 números naturales tales que su suma es 8 y su diferencia 4

78. Hallar 2 números, tal que la suma de ambos sea 15 y que uno de ellos más el doble del consecutivo del otro sea 25.

79. Hallar 2 números tales su suma sea 17 y que uno de ellos más el consecutivo del doble del otro es 27.

80. Hallar un número natural de 2 cifras sabiendo que la suma de sus cifras es 9, y que si cambio las cifras de lugar (invierto la decena con la unidad) el número aumenta 45. (Ayuda: Si tengo un número natural de 2 cifras, lo puedo escribir como "AB" donde "A" es la cifra de la decena y "B" la cifra de la unidad, por lo tanto, el valor de ese número sería "AB", donde AB = 10A + B, si lo invierto quedaría "BA" que sería BA = 10B + A)

81. Hallar un número natural de dos cifras sabiendo que la suma de ambas cifras es 6, y que si cambio las cifras de lugar número disminuye en 18 unidades.

82. El triple de un número racional, más el doble de otro número es tres. Y le diferencia entre ambos números es dos tercios ¿Cuáles son dichos números?

83. El triple de un número es igual a otro número aumentado en 5 unidades. La diferencia entre ambos es de 3 unidades. ¿De qué números estamos hablando?

84. La quinta parte de un número de dos cifras es igual al doble de su primera cifra. Si sumamos ambas cifras nos da 8. ¿Cuál es el número de dos cifras?

85. En un número de dos cifras, el doble de la primera cifra es igual a la segunda cifra. La diferencia entre ambas es 3. ¿Cuál es el número de dos cifras?

86. Un número de dos cifras es dos unidades mayor que el quíntuplo de su segunda cifra. La suma de ambas cifras da 10. ¿Cuál es el número?

87. La suma de dos números enteros es 3. El triple del mayor mas el cuádruplo del consecutivo del otro da 4. ¿Cuáles son esos números?

88. La suma de un número entero y el doble de otro número entero cambiado de signo es 14. La diferencia entre el mayor y la mitad del menor es 11. Calcular dichos números.

Problemas de Aplicación**:**

89. Ariel tiene 14 años menos que Emiliano y ambas edades suman 56 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

90. Melisa tiene 3 años más de la mitad de los que va a tener Belén el año que viene. Hoy por hoy Belén le lleva a Melisa 6 años. ¿Cuántos años tiene cada una?

91. Rocío tiene dos años menos de los que va a tener Florencia dentro de 5 años. Florencia tiene 7 años más, que la mitad de los años que tenía Rocío hace dos años. ¿Cuántos años tiene cada una?

92. En la alcancía de Andrea hay 160 pesos, todos en billetes de 5 y 2 pesos. Si en total tiene 53 billetes. ¿Cuántos billetes tiene de \$5 y cuántos de \$2?

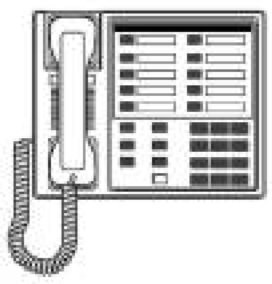
93. En una bicicletería hay entre bicicletas y triciclos 23 vehículos. La cantidad total de ruedas es de 49. ¿Cuántas bicicletas y cuántos triciclos hay?

94. Analía se gastó en Musimundo \$129 para comprarse entre libros de \$15 y CDs de \$18 en total 8 artículos. ¿Cuántos libros y cuántos CDs se compró?

95. En un negocio de música hay entre guitarras y bajos un total de 32 instrumentos. Teniendo en cuenta que cada guitarra tiene 6 cuerda y que cada bajo tiene 4 cuerdas, y que en el negocio entre las guitarras y los bajos tienen un total de 168 cuerdas. ¿Cuántas guitarras y cuántos bajos hay en el negocio?

96. En 9º A de un colegio hay 30 alumnos de los cuáles algunos tienen 14 años y otros 15 años. Si sumo las edades de todos los alumnos la cuenta me da 434. ¿Cuántos alumnos de ese 9º tienen 14 años y cuántos tienen 15 años?

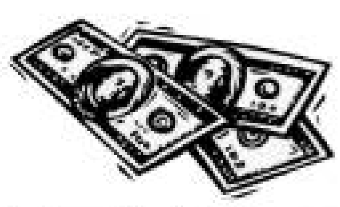
97. De los 15 varones de 9ª A algunos se sacaron 7 en música y los demás se sacaron 6. Si promediamos las notas de música de los 15 varones el promedio nos da 6,6666 ¿Cuántos se sacaron 7?



98. En un depósito hay 40 teléfonos, de los cuales algunos son de 16 teclas y otros de 20 teclas. La cantidad total de teclas entre los 40 teléfonos es 696. ¿Cuántos teléfonos de 20 teclas y cuántos de 16 hay?

99. En el estacionamiento de un supermercado hay en total 124 autos. Algunos de estos autos tiene solo dos puertas y otros tienen 4. La cantidad total de puertas es 416. ¿Cuántos autos de 4 puertas y cuántos de 2 puertas hay?

100. Abel compró 7 rollos de fotos, unos de 24 y otros de 36 fotos. Le alcanzan para sacar 228 fotos. ¿Cuántos rollos son de 36 fotos y cuántos rollos son de 24 fotos?



101. Si se cambia un billete de U$S 50 por billetes de U$S 10 y de U$S 1, y le dan 23 billetes ¿Cuántos son de U$S 1 y cuántos de U$S 10?

102. Ariel y María tienen entre los dos $ 2000. La mitad de lo que tiene Ariel mas las dos quintas partes de los que tiene María es igual a lo que tendría Ariel si hubiera perdido $ 280. ¿Cuánta plata tiene cada uno por separado?

103. Anabel se compró dos CD de distinto precio, uno vale dos pesos más que el otro, si en total gastó $32 ¿Cuánto le costó cada uno?

104. Un avión tiene una velocidad que es la tercera parte de la de un avión a retropropulsión. En una hora el avión a retropropulsión recorre 600 kilómetros más que los que recorre el otro avión en una hora y media ¿Cuál es la velocidad de cada uno de los aviones?

105. La diferencia entre el precio de un libro y el de otro es de $10 y uno cuesta las tres quintas partes de lo que cuesta el otro. ¿Cuánto cuesta cada uno?

106. El largo de un rectángulo es igual al ancho aumentado en un 40%. Si el perímetro de dicho rectángulo es de 48 metros ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

107. Si al numerador de una fracción se le suma 1 y se le resta 2 al denominador, dicha fracción se convierte en 1. Si se le resta 1 al numerador y se le suma 1 al denominador se transforma en 1/6. ¿De qué fracción estamos hablando?

108. Si se aumenta en 2 centímetros el largo y el ancho de un rectángulo, el perímetro resulta ser de 24 centímetros. Si el largo se disminuye en 2 centímetros el rectángulo se transforma en un cuadrado. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?

109. En un colegio mixto hay 1300 alumnos en total. Si se hubieran inscripto 50 mujeres más, el número de mujeres hubiera duplicado al de varones ¿Cuántas mujeres y cuantos varones hay en el colegio?

110. En un boliche se vende a $3 el vaso de gaseosa y $4 el vaso de cerveza. Se recaudó en total $964. Si tanto el vaso de gaseosa como el de cerveza hubieran costado $3, se hubieran recaudado $ 813. ¿Cuánto se hubiera recaudado si tanto el vaso de cerveza como el de gaseosa hubieran costado $4? Nota: Suponer que no varían las ventas con los cambios de precios.

111. Si a la primera cifra de un número de dos cifras impar la multiplico por 5, obtengo como resultado la mitad del antecesor del número de dos cifras en cuestión. Por otro lado si invierto de lugar las dos cifras y al número que me queda lo multiplico por dos séptimos, me da lo mismo que la décima parte del antecesor del número de dos cifras original. ¿Cuál es ese número de dos cifras? Complicado ¿no?

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Sistemas de Ecuaciones II

Número de Tema: **50**

Área: **Matemática**

¿Qué es un Sistema de Ecuaciones? Es un conjunto de una o más Ecuaciones. La respuesta parece obvia. En realidad los Sistemas de Ecuaciones que vamos a ver nosotros son sólo los que tienen una característica muy importante: TIENEN LA MISMA CANTIDAD DE ECUACIONES QUE DE INCOGNITAS.

Por ejemplo: Este es un sistema de **2** ecuaciones con **2** incógnitas $\begin{cases} 2X + 3Y = 5 \\ 5X - 3Y = 2 \end{cases}$ Este es un sistema de **3** ecuaciones con **3** incógnitas $\begin{cases} 2X + 3Y + 2Z = 5 \\ 5X - 3Y + Z = 2 \\ 7X + 5Y + 5Z = 3 \end{cases}$

¿Cómo se resuelven los Sistemas de Ecuaciones? No es tan fácil resolver un Sistema de Ecuaciones como lo era antes resolver una simple ecuación. Igualmente no es tan difícil. Hay básicamente 5 **Métodos para resolver un Sistema de Ecuaciones, ellos son:**

- Sustitución
- Igualación
- Sumas y Restas (Reducción)
- Determinantes
- Gráfico

Método de SUSTITUCIÓN

1. **DESPEJAR** una incógnita (X o Y) en una de las dos ecuaciones (cualquiera de la dos).
2. **SUSTITUIRLA** en la otra ecuación.
3. **RESOLVER** la ecuación que nos queda.
4. Con el resultado (punto 3) remplazarlo en una de las ecuaciones originales y **Hallar la otra incógnita**.

Ejemplo: Resolver el siguiente Sistema de Ecuaciones: $\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases}$

1. DESPEJAR una incógnita en una ecuación:

$\begin{cases} 2\mathbf{X} + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases} \Rightarrow$ Tomamos la primera ecuación y despejamos **X** $\Rightarrow$

(Elegimos la primera ecuación para despejar X porque sí. Pudimos haber despejado "Y" de la segunda ecuación o "Y" de la primera, etc.)

$$2\mathbf{X} + 3Y = 7$$

Paso Restando "3Y"

$$2\mathbf{X} = 7 - 3Y$$

Paso Dividiendo el "2"

$$\boxed{X = \frac{7-3Y}{2}}$$

Listo, Primer paso hecho!

2. SUSTITUIR:

$\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5\mathbf{X} - Y = 9 \end{cases} \Rightarrow$ En la otra ecuación, en donde dice X, lo sustituimos por lo que despejamos en el paso anterior, es decir reemplazamos X por: $\frac{7-3Y}{2}$

$5\mathbf{X} - Y = 9 \Rightarrow$ SUSTITUYO "**X**" por $\frac{7-3Y}{2} \Rightarrow 5\cdot\left(\frac{7-3Y}{2}\right) - Y = 9$

3. RESOLVER la ecuación que nos quedó:

$5\cdot\left(\frac{7-3Y}{2}\right) - Y = 9 \xRightarrow{\text{Propiedad Distributiva}} \frac{35-15Y}{2} - Y = 9 \xRightarrow{\text{Paso la "Y" Sumando}} \frac{35-15Y}{2} = 9 + Y \xRightarrow{\text{Paso el "2" multiplicando}} 35-15Y = (9+Y)\cdot 2$

$\xRightarrow{\text{Propiedad Distributiva con el "2"}} 35-15Y = 18 + 2Y \xRightarrow{\text{Las "Y" de un lado y los números del otro}} -15Y - 2Y = 18 - 35 \Rightarrow -17Y = -17 \Rightarrow Y = \frac{-17}{-17} \Rightarrow \boxed{Y = 1}$

4. HALLAR el valor de la otra incógnita: Tomamos una (cualquiera) de las dos ecuaciones: $2X + 3Y = 7$

Reemplazamos "Y" por "1": $2X + 3 \,.\, 1 = 7$ Y resolvemos.....

$$2X + 3 = 7 \Rightarrow 2X = 7 - 3 \Rightarrow X = \frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{X = 2}$$

Método de IGUALACIÓN

1. **DESPEJAR una incógnita** (cualquiera de las dos) **EN LAS DOS ecuaciones**.
2. **IGUALAR** las dos incógnitas despejadas.
3. **RESOLVER** la ecuación que nos queda.
4. **Calcular** la otra incógnita.

Ejemplo: Resolver el siguiente Sistema de Ecuaciones: $\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases}$ (Usamos el mismo, para verificar los resultados que calculamos con el método anterior...)

1. DESPEJAR una incógnita en las dos ecuaciones: (puede ser X o Y pero tiene que ser la misma en las dos)

$\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases}$

$5X - Y = 9$

$5X = 9 + Y$

$\boxed{X = \dfrac{9+Y}{5}}$

$2X + 3Y = 7$

$2X = 7 - 3Y$

$\boxed{X = \dfrac{7-3Y}{2}}$

2. IGUALAR: Al ser las dos expresiones iguales a "x", decimos que también son iguales entre sí...

Por lo tanto nos quedaría: $\dfrac{9+Y}{5} = \dfrac{7-3Y}{2}$ Y como vemos igualando, nos queda una sola ecuación con una sola incógnita.

3. RESOLVER la ecuación que nos quedó:

Seguimos resolviendo: $\dfrac{9+Y}{5} = \dfrac{7-3Y}{2} \xrightarrow[\text{dos denominadores}]{\text{Paso multiplicando los}} 2\,.(9 + Y) = 5\,.(7 - 3Y) \xrightarrow{\text{Distributiva}} 18 + 2Y = 35 - 15Y$

Las "**Y**" de un lado los números de otro. $\Rightarrow 15Y + 2Y = 35 - 18 \Rightarrow 17Y = 17 \Rightarrow Y = \dfrac{17}{17} \Rightarrow \boxed{Y = 1}$

4. HALLAR el valor de la otra incógnita:

Tomamos una (cualquiera) de las dos ecuaciones originales: $2X + 3Y = 7$

Reemplazamos Y por 1: $2X + 3\,.\,1 = 7 \Rightarrow 2X + 3 = 7 \Rightarrow 2X = 7 - 3 \Rightarrow X = \dfrac{4}{2} \Rightarrow \boxed{X = 2}$

EL MÉTODO GRÁFICO:

EL MÉTODO GRÁFICO: Damos por hecho que ya saben dibujar la función de una recta de la forma: **Y = a X + b**

Vamos a ver como se grafica estudiando nuestro ejemplo: $\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases}$

$2X + 3Y = 7$

$3Y = 7 - 2X$

$Y = \dfrac{(7-2X)}{3}$

$\boxed{Y = -\dfrac{2}{3}X + \dfrac{7}{3}}$

$5X - Y = 9$

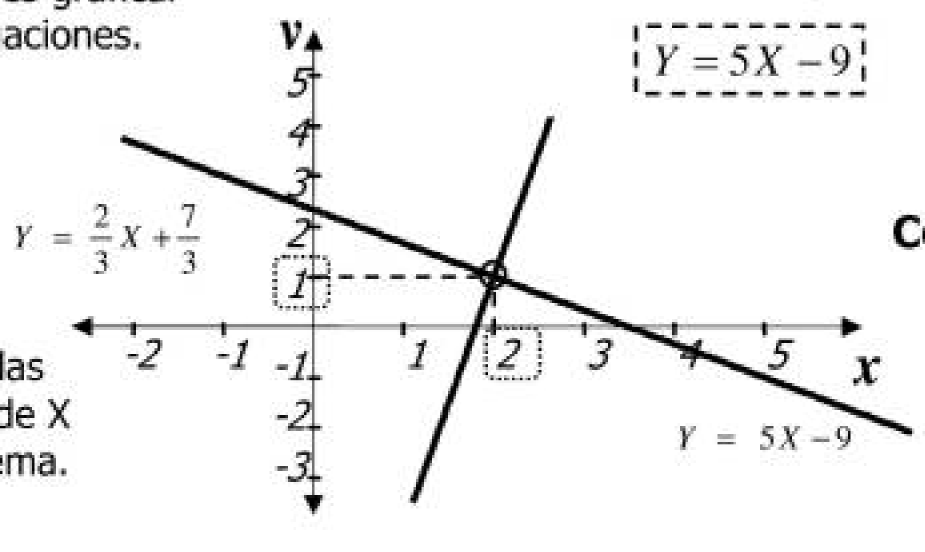
$-Y = 9 - 5X$

$Y = \dfrac{(9-5X)}{-1}$

$\boxed{Y = 5X - 9}$

Primero despejamos "Y" en las 2 ecuaciones.
Esto es para dibujar las rectas como: Y = ax + b

Ahora lo que vamos a hacer es graficar cada una de estas dos ecuaciones.



El punto de intersección de las rectas tiene las coordenadas de X e Y que son solución del Sistema.

Como vemos, la solución es:

X = 2

Y = 1

MÉTODO DE SUMAS Y RESTAS: (También llamado Método de Reducción)

1. **MULTIPLICAR** 1 ecuación, las 2, o de no ser necesario, ninguna, por un número, para poder restarlas o sumarlas.
2. **RESTAR O SUMAR** las ecuaciones.
3. **RESOLVER** la ecuación que nos queda.
4. **Calcular** la otra incógnita.

Ejemplo: $\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases}$

1. MULTIPLICAR por un número: Y si miro las dos ecuaciones, me doy cuenta que si multiplico a todos los números de la segunda ecuación por 3, me va a quedar en las dos ecuaciones 3Y.

Lo que voy a buscar con esto es que en las dos ecuaciones me quede en la X o en la Y el mismo número adelante. ⇒ Multiplico a la segunda ecuación por 3:

$$\begin{matrix} 2X + 3Y = 7 & \longrightarrow & 2X + 3Y = 7 \\ 3 \cdot (5X - Y = 9) & \Rightarrow \text{Aplico la Distributiva} \Rightarrow & 15X - 3Y = 27 \end{matrix}$$

Como en las dos ecuaciones me quedó el mismo número delante de la "Y", este paso ya está hecho (Hay veces que las ecuaciones de entrada tienen, en las X o en las Y, el mismo número delante, con lo que se saltea este paso)

2. SUMAR O RESTAR LAS ECUACIONES:

Como los signos de "Y" son DISTINTOS,

$$\begin{array}{rl} & 2X + 3Y = 7 \\ + & 15X - 3Y = 27 \\ \hline & \mathbf{17X + \cancel{0Y} = 34} \end{array}$$

3. RESOLVER la ecuación que nos quedó: $\mathbf{17X + 0Y = 34} \Rightarrow \mathbf{17X = 34} \Rightarrow \boxed{X = 2}$

4. HALLAR el valor de la otra incógnita:

Tomamos una (cualquiera) de las dos ecuaciones originales: $2X + 3Y = 7$

Reemplazamos X por 2: $2 \cdot 2 + 3Y = 7$

$$\Rightarrow 4 + 3Y = 7 \Rightarrow 3Y = 7 - 4 \Rightarrow Y = \frac{3}{3} \Rightarrow \boxed{\mathbf{Y = 1}}$$

Método de DETERMINANTES

1. **Hallar el valor del discriminante.**
2. **Hallar el valor de X y de Y** (dividiéndolos por dicho discriminante).

Dados $\begin{cases} X_1 \mathbf{X} + Y_1 \mathbf{Y} = C_1 \\ X_2 \mathbf{X} + Y_2 \mathbf{Y} = C_2 \end{cases}$ Este es el Sistema de Ecuaciones que nos dan para resolver. Los coeficientes numéricos los escribimos con letras para escribir la fórmula general...

Discriminante " D " = $\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$ - - - → Lo que está escrito entre barras es un **determinante**. Por eso este método se llama: **Método de los Determinantes**.

El determinante se resuelve así: Se multiplica cruzado y se resta lo que dan las multiplicaciones:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = \mathbf{X_1 \cdot Y_2 - X_2 \cdot Y_1}$$

Veamos las fórmulas usadas para calcular "x" e "y" en función de los coeficientes y el discriminante:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} Y_2 & C_2 \\ Y_1 & C_1 \end{vmatrix}}{\text{Discriminante}} = \frac{\begin{vmatrix} Y_2 & C_2 \\ Y_1 & C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}} = \frac{C_1 \cdot Y_2 - C_2 \cdot Y_1}{X_1 \cdot Y_2 - X_2 \cdot Y_1}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} X_1 & C_1 \\ X_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\text{Discriminante}} = \frac{\begin{vmatrix} X_1 & C_1 \\ X_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}} = \frac{X_1 \cdot C_2 - X_2 \cdot C_1}{X_1 \cdot Y_2 - X_2 \cdot Y_1}$$

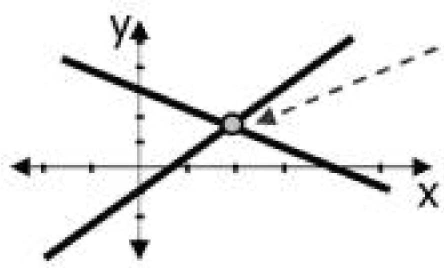
Veámoslo con el ejemplo: $\begin{cases} 2X + 3Y = 7 \\ 5X - Y = 9 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} Y_2 & C_2 \\ Y_1 & C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1\cdot 7 - 3\cdot 9}{-1\cdot 2 - 3\cdot 5} = \frac{-7-27}{-2-15} = \frac{-34}{-17} \Rightarrow \boxed{x=2} \qquad Y = \frac{\begin{vmatrix} X_1 & C_1 \\ X_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2\cdot 9 - 5\cdot 7}{-1\cdot 2 - 3\cdot 5} = \frac{18-35}{-2-15} \Rightarrow \boxed{y=1}$$

Como verán este método es muy rápido, y no hay muchas posibilidades de equivocarse para pasar de términos o despejando... "con este método sólo tenemos que hacer unas cuentas".

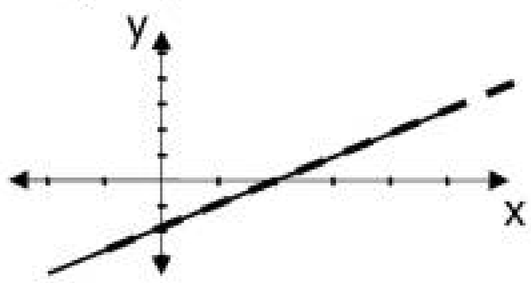
☆ **CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES** Nosotros hasta ahora vimos sólo ejemplos de Sistemas Compatibles Determinados, que son los más comunes. Ahora vamos a ver las diferencias con los otros sistemas.

- Sistemas COMPATIBLES **DETERMINADOS (SCD)**
  → Tienen una respuesta DETERMINADA – **SOLUCIÓN ÚNICA**
- Sistemas COMPATIBLES **INDETERMINADOS (SCI)**
  → Tienen respuesta INDETERMINADA–**INFINITAS SOLUCIONES**
- Sistemas **INCOMPATIBLES (SI)**
  → NO tienen respuesta – **SIN SOLUCIÓN**

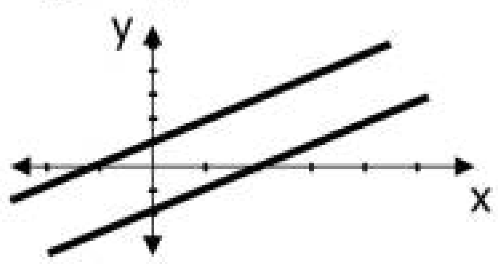


Las coordenadas "X" e "Y" de ese punto es la única solución del sistema.

☆ **SCD**: Sistema Compatible Determinado. **Tiene solución única**. **Es el punto de intersección de las rectas.**



☆ **SCI**: Sistema compatible indeterminado. **Tiene Infinitas soluciones**. Esto es porque **las dos rectas son coincidentes o sea, se superponen**. En el gráfico parece una sola recta, pero son en realidad las dos que están superpuestas, **se cruzan en todos sus puntos,** por eso es que todos esos puntos son soluciones... (INFINITAS soluciones).



☆ **SI**: Sistema Incompatible. Las rectas son paralelas, o sea que no se cortan nunca. Por eso estos sistemas no tienen solución. **Las rectas no se cortan, no hay solución.**

¿Cómo me doy cuenta sin hacer el gráfico que tipo de sistema es? veamos ejemplos.

➢ El sistema "**SCI**" ⇒ **COMPATIBLE INDETERMINADO tiene infinitas soluciones.**
Eso pasa, cuando al querer hallar X o Y, tengo que hacer la cuenta "**0 dividido 0**" (En el Método de los Determinantes). Con otro método se va a simplificar todo y finalmente va a quedarme **0 = 0**

➢ El sistema "**SI**" ⇒ **INCOMPATIBLE: NO tiene solución.** Esto ocurre, cuando al hallar X o Y , tengo que hacer la cuenta **"N" dividido 0** ("N" un número ≠ 0) Si uso el método de determinantes. Si uso cualquier otro método **se van a ir las "X" y las "Y"** y me va a quedar una expresión falsa, como por ejemplo: 5 = 0.

Veamos un ejemplo
Resolver el sistema: $\begin{cases} -2X + Y = 3 \\ 4X - 2Y = -2 \end{cases}$ **Uso SUSTITUCIÓN:** Despejo "Y" de la 1º ecuación. ⇒ $Y = 3 + 2X$

Sustituyo Y en la 2º ecuación ⇒ $4X - 2(3+2X) = -2$ ⇒ $4X - 6 - 4X = -2$ ⇒ $0 = 4$ Expresión Falsa
⇒ Sist. Incompatible.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

1- $\begin{cases} 2X = 5Y - 9 \\ 1 + X + 4Y = 3 \end{cases}$

5- $\begin{cases} 4X - Y + 10 = 4 \\ -2X + Y \div 2 = 5 \end{cases}$

9- $\begin{cases} 5X + 12 = Y \\ 9X + 2Y = 3 - 2X \end{cases}$

13- $\begin{cases} X + 4Y = 5(Y-1) - 1 \\ X + 3Y = 1 + 3X \end{cases}$

2- $\begin{cases} 10 - 4X = 3Y \\ 14X - 6 = 4Y \end{cases}$

6- $\begin{cases} X + Y + 3 = 4 \\ 10X + 7 = 1 - 8Y \end{cases}$

10- $\begin{cases} 3X - 2Y = 11 - 2X \\ 1 - 2X = 5(Y+2) + 4 \end{cases}$

14- $\begin{cases} 10Y + 1 = 5 - 3X \\ X + 3Y + 5 = 2 \end{cases}$

3- $\begin{cases} 3X + 3 = 2Y \\ 3X + 3Y = 12 \end{cases}$

7- $\begin{cases} 5 + X - 3 = 5 - 4Y \\ 11 - 5Y = 2 + 2X \end{cases}$

11- $\begin{cases} 5(X-Y) + 1 = 3(1+Y) \\ 9(2-X) = -1(1-Y) \end{cases}$

15- $\begin{cases} X + 2 = 6 + Y \\ 4X + 2Y = 5(X-1) \end{cases}$

4- $\begin{cases} 5 + 5X = -2Y + 4 \\ 1 - 4Y = 9X \end{cases}$

8- $\begin{cases} -3X + 4Y = 1 \\ 15X - 20Y = 2 \end{cases}$

12- $\begin{cases} 3X + 3Y = 5(1-Y) \\ -3X + 11 = 7(Y+1) \end{cases}$

➢ Unir con flechas cada sistema de ecuaciones con el gráfico que le corresponde según su resolución:

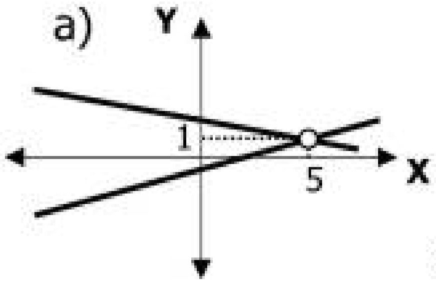
16- $\begin{cases} X + 1 = 2(X - Y) \\ 4Y - 10 = 3(1 - X) \end{cases}$

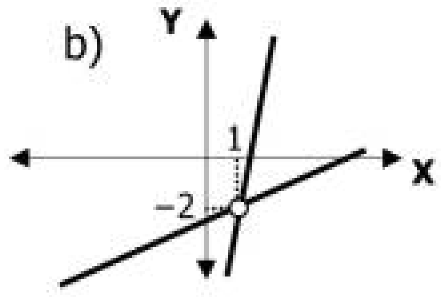
17- $\begin{cases} 1 + Y = 5(1 - X) \\ X + 3 = -2(Y - 1) \end{cases}$

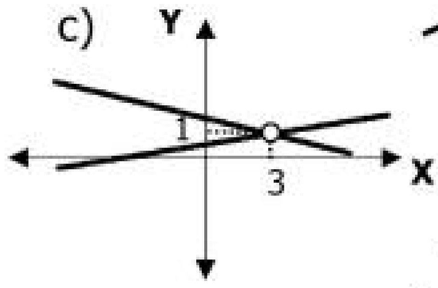
18- $\begin{cases} 10Y - 4 = -2(X - 8) \\ 4Y = -3(1 + Y) + 2X \end{cases}$

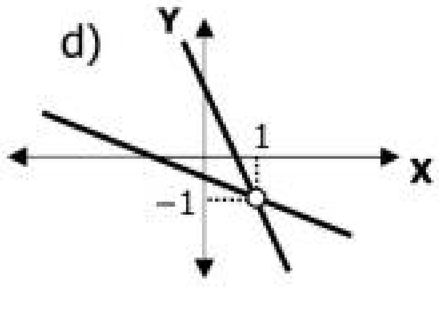
19- $\begin{cases} 3X - 7 = 4(1 + Y) \\ 2Y - 7 = 11(X - 2) \end{cases}$

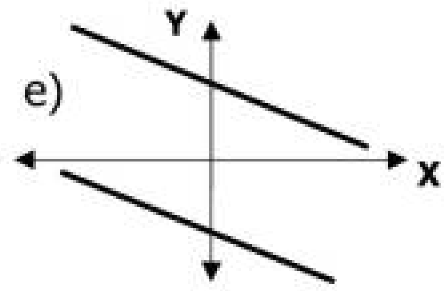
20- $\begin{cases} 3X + Y = 5 \\ 7 - 6X = 2Y \end{cases}$

a)


b)


c)


d)


e)


Más sistemas de ecuaciones para resolver y graficar:

21- $\begin{cases} -4X + 2Y = -14 \\ 6(X+1) = 18 + X - 3Y \end{cases}$

25- $\begin{cases} 4X + 9Y - 4^2 = 2Y - 5 \\ -3(X + 1) = -2^2 - 2Y \end{cases}$

28- $\begin{cases} 2(X + 3) - 3 = 11 + 2Y \\ -(2X - 5) = -3(Y - 2) + 4 \end{cases}$

22- $\begin{cases} 2(2 - X) = 3(1 - Y) - X \\ -4X + 6 = 2(4 - 3Y) \end{cases}$

26- $\begin{cases} -6 + 5X - Y = 0 \\ -3X - 3Y + 10(Y - 1) = 0 \end{cases}$

29- $\begin{cases} 7(X - 3) = -2(Y + 13) \\ 3X - (-16 - Y) = 15 \end{cases}$

23- $\begin{cases} 7X + \left|\sqrt{25}\right| = 3Y + 2^3 \\ 2(Y + 3 - X) = 4 \end{cases}$

27- $\begin{cases} 3(5 - X) = 2(9 - Y) + 9 \\ Y + 1 = \dfrac{9}{2}X + 1^5 \end{cases}$

30- $\begin{cases} 5(2X - 7) - Y = 2(X + 3) \\ X + 11 = -4X + 2(Y + 3) \end{cases}$

24- $\begin{cases} 2(3X + 1) = -3(1 + Y) + 2 \\ 1 - 2Y = 3(X + 1) + 1 \end{cases}$

<u>Resolver los siguientes Sistemas de Ecuaciones. Estos se vienen con fracciones</u>:

31- $\begin{cases} \dfrac{3}{2}X + 2Y = -3 \\ -\dfrac{5}{4}X - Y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

33- $\begin{cases} \dfrac{2}{5}X + \dfrac{3}{5}Y = 1 \\ X + \dfrac{20}{9}Y = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 \end{cases}$

35- $\begin{cases} -\dfrac{1}{3}X - \dfrac{9}{5}Y = \dfrac{7}{15} \\ +\dfrac{1}{4}X + \dfrac{1}{2}Y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

32- $\begin{cases} \dfrac{9}{4}X + 2Y = 3 \\ X + \dfrac{5}{6}Y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

34- $\begin{cases} +\dfrac{1}{3}X + Y = \dfrac{11}{3} \\ -\dfrac{5}{7}X + 2Y - 2 = \dfrac{4}{7} \end{cases}$

36- $\begin{cases} \dfrac{4}{5}X + 3Y = \dfrac{3}{5} \\ -\dfrac{3}{8}X + Y - 2 = \dfrac{1}{8} \end{cases}$

Más Sistemas de Ecuaciones con fracciones:

37- $\begin{cases} 3X - \frac{8}{9}Y + 1 = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ Y = \frac{1}{5}(3+2X) + \frac{4}{5}Y \end{cases}$

43- $\begin{cases} \frac{3}{5}Y + X^2 - 1 = X\left(\frac{2}{5} + X\right) \\ X + 1 = 2 + \frac{1}{5}(Y + 3X) \end{cases}$

49- $\begin{cases} 1 - \frac{2}{3}Y = \frac{1}{2}(7X+3) + Y + 1 \\ \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3} - 4X\right) = \frac{1}{3}Y - 1 \end{cases}$

38- $\begin{cases} \frac{5}{3}X + Y + 2^2 = -\frac{1}{3} \\ +2X - Y + 2 = -\frac{1}{8} + \frac{7}{8}Y \end{cases}$

44- $\begin{cases} 2\left(\frac{1}{6}X - \frac{1}{5}Y\right) + 1 = 0 \\ \frac{2}{3}X = \frac{1}{5}Y + 1 \end{cases}$

50- $\begin{cases} 3 - \left(\frac{1}{3}X - \frac{1}{2}Y\right) = 1 \\ \frac{1}{3}X - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}Y + 1 \end{cases}$

39- $\begin{cases} \frac{13}{15} + \frac{2}{5}Y = -\frac{5}{6}X - Y \\ X + \frac{5}{3}Y - 2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{5}X \end{cases}$

45- $\begin{cases} \frac{1}{4}X = 1 + \frac{3}{10}Y \\ \frac{13}{18} + Y\left[Y + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = \frac{3}{4}X + Y^2 \end{cases}$

51- $\begin{cases} 1 - \frac{2}{3}Y = \frac{1}{4}(5X+7) \\ X^2 + \frac{1}{3}Y = 2 + X(X+1) \end{cases}$

40- $\begin{cases} \frac{9}{10} + \frac{2}{5}Y = \frac{1}{2}X - 3Y \\ \frac{1}{24} + \frac{1}{3}X - \frac{5}{8}Y = Y \end{cases}$

46- $\begin{cases} 2X - 3Y = 25 + \frac{3}{4}Y \\ Y\left(\frac{3}{2} + Y\right) = -9(X+1) + Y^2 \end{cases}$

52- $\begin{cases} \frac{3}{2}Y + \frac{1}{3}X = -1 \\ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 X = 3 - \left(5 + \frac{5}{9}Y\right) \end{cases}$

41- $\begin{cases} \frac{2}{5}Y + \frac{4}{5} = -\frac{1}{3}X - 3 - 2Y \\ \frac{2}{3}X + 2Y = -2 \end{cases}$

47- $\begin{cases} A - \left(\frac{1}{3}X + \frac{4}{5}Y\right) = \frac{7}{15} + A \\ 3\left(\frac{3}{5} + \frac{13}{45}X\right) + 2Y = -\frac{2}{3}Y \end{cases}$

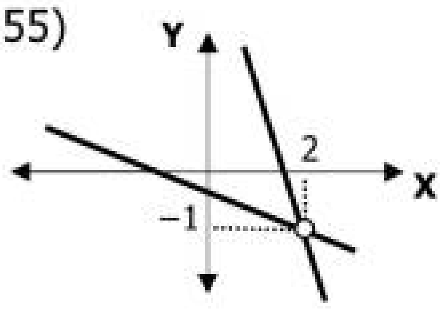
53- $\begin{cases} (Y+X) \div \frac{4}{3} = 0^3 \\ -\frac{1}{4}Y = \frac{1}{5}\left(\frac{3^2}{1^0+2^0} - X\right) \end{cases}$

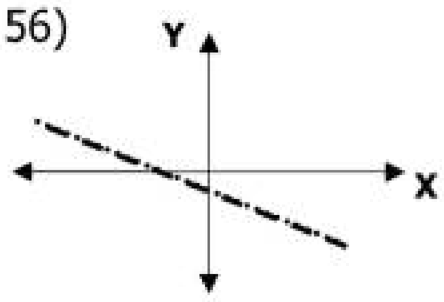
42- $\begin{cases} \frac{13}{20}X = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4} + Y\right) \\ \frac{-7}{8}X + Y\left(\frac{1}{5} + Y\right) = \frac{3}{40} + Y^2 \end{cases}$

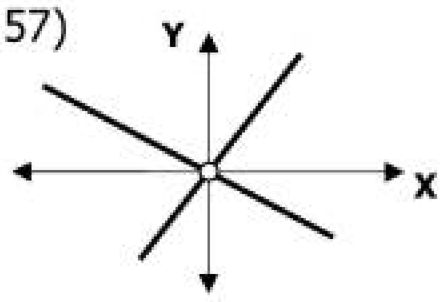
48- $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(X + \frac{3}{2}Y\right) = -2 \\ \frac{1}{2}X = \frac{3}{5}(1-Y) - X \end{cases}$

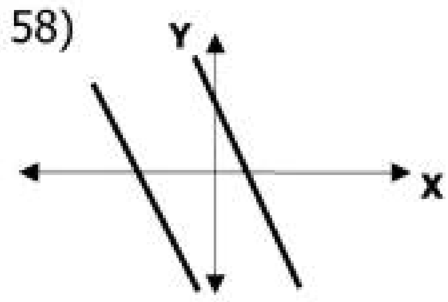
54- $\begin{cases} \frac{1}{2}X = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}Y\right) + \frac{1}{2} \\ 2Y + 6 + X^2 = X(X+1) \end{cases}$

Dados los siguientes gráficos que representan sistemas de ecuaciones, clasificarlos:

55)


56)


57)


58)


Para analizar en clase: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones y graficarlos. Clasificarlos. ¿Se puede dar alguna solución particular en los sistemas SCI?

59- $\begin{cases} \frac{2}{3}X + 2 - Y = \frac{1}{3}Y \\ 4Y = 6 + 2X \end{cases}$

60- $\begin{cases} \frac{1}{3}A + B - 1 = \frac{1}{3} \\ 2A = 2^3 - 6B \end{cases}$

61- $\begin{cases} \frac{1}{2}Y + 2 = \frac{1}{2}X - Y \\ X + 4 = 3Y \end{cases}$

62- $\begin{cases} \frac{1}{2}X(2X+1) = 1 + \frac{1}{3}Y + X^2 \\ X - \frac{2}{3}Y = 2 \end{cases}$

Plantear problemas con números o situaciones problemáticas que se representen con los siguientes sistemas de ecuaciones y luego resolverlos:

63- $\begin{cases} A + B = 15 \\ A = 2B \end{cases}$

64- $\begin{cases} A - B = 12 \\ A = 3B \end{cases}$

65- $\begin{cases} A + B = 15 \\ A = B + 1 \end{cases}$

66- $\begin{cases} A = 2B - 3 \\ A - 2 = B \end{cases}$

67- $\begin{cases} A = B - 1 \\ A = \frac{5}{6}B \end{cases}$

68- $\begin{cases} A + B = 10 \\ A - 1 = 2B \end{cases}$

69- $\begin{cases} A + B = \$\,1.000 \\ A - B = \$\,200 \end{cases}$

70- $\begin{cases} A = B - \$25 \\ A - \$15 = B \div 2 \end{cases}$

71- $\begin{cases} A = -B \\ 2A - B = 15 \end{cases}$

72- $\begin{cases} A = B \\ A + B = 6 \end{cases}$

73) Hallar la base del rectángulo abcd

74) Hallar la altura del rectángulo abcd

El perímetro vale 36 cm

La base mide 8 cm más que la altura.

by Dal-0r para TARINGA!

Problemas con números:

75. Hallar 2 números naturales tales que su suma es 8 y su diferencia 4.

76. Hallar 2 números, tal que la suma de ambos sea 15 y que uno de ellos más el doble del consecutivo del otro es 25.

77. Hallar 2 números tales su suma sea 17 y que uno de ellos más el consecutivo del doble del otro es 27.

78. Hallar un número natural de 2 cifras sabiendo que la suma de sus cifras es 9, y que si cambio las cifras de lugar (invierto la decena con la unidad) el número aumenta 45. (Ayuda: Si tengo un número natural de 2 cifras, lo puedo escribir como "AB" donde "A" es la cifra de la decena y "B" la cifra de la unidad, por lo tanto, el valor de ese número sería "AB", donde $AB = 10A + B$, si lo invierto quedaría "BA" que sería $BA = 10B + A$)

79. Hallar un número natural de dos cifras sabiendo que la suma de ambas cifras es 6, y que si cambio las cifras de lugar número disminuye en 18 unidades.

80. El triple de un número racional, más el doble de otro número es tres. Y le diferencia entre ambos números es dos tercios ¿Cuáles son dichos números?

81. El triple de un número es igual a otro número aumentado en 5 unidades. La diferencia entre ambos es de 3 unidades. ¿De qué números estamos hablando?

82. La quinta parte de un número de dos cifras es igual al doble de su primera cifra. Si sumamos ambas cifras nos da 8. ¿Cuál es el número de dos cifras?

83. En un número de dos cifras, el doble de la primera cifra es igual a la segunda cifra. La diferencia entre ambas es 3. ¿Cuál es el número de dos cifras?

84. Un número de dos cifras es dos unidades mayor que el quíntuple de su segunda cifra. La suma de ambas cifras da 10. ¿Cuál es el número?

85. La suma de dos números enteros es 3. El triple del mayor mas el cuádruple del consecutivo del otro da 4. ¿Cuáles son esos números?

86. La suma de un número entero y el doble de otro número entero cambiado de signo es 14. La diferencia entre el mayor y la mitad del menor es 11. Calcular dichos números.

Problemas de Aplicación:

87. Ariel tiene 14 años menos que Emiliano y ambas edades suman 56 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

88. Melisa tiene 3 años más de la mitad de los que va a tener Belén el año que viene. Hoy por hoy Belén le lleva a Melisa 6 años. ¿Cuántos años tiene cada una?

89. Rocío tiene dos años menos de los que va a tener Florencia dentro de 5 años. Florencia tiene 7 años más, que la mitad de los años que tenía Rocío hace dos años. ¿Cuántos años tiene cada una?

90. En la alcancía de Andrea hay 160 pesos, todos en billetes de 5 y 2 pesos. Si en total tiene 53 billetes. ¿Cuántos billetes tiene de \$5 y cuántos de \$2?

91. En una bicicletería hay entre bicicletas y triciclos 23 vehículos. La cantidad total de ruedas es de 49. ¿Cuántas bicicletas y cuántos triciclos hay?

92. Analía se gastó en Musimundo \$129 para comprarse entre libros de \$15 y CDs de \$18 en total 8 artículos. ¿Cuántos libros y cuántos CDs se compró?

93. En un negocio de música hay entre guitarras y bajos un total de 32 instrumentos. Teniendo en cuenta que cada guitarra tiene 6 cuerda y que cada bajo tiene 4 cuerdas, y que en el negocio entre las guitarras y los bajos tienen un total de 168 cuerdas. ¿Cuántas guitarras y cuántos bajos hay en el negocio?

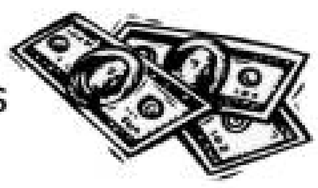
94. En 9º A de un colegio hay 30 alumnos de los cuáles algunos tienen 14 años y otros 15 años. Si sumo las edades de todos los alumnos la cuenta me da 434. ¿Cuántos alumnos de ese 9º tienen 14 años y cuántos tienen 15 años?

95. De los 15 varones de 9ª A algunos se sacaron 7 en música y los demás se sacaron 6. Si promediamos las notas de música de los 15 varones el promedio nos da 6,6666 ¿Cuántos se sacaron 7?

96. En un depósito hay 40 teléfonos, de los cuales algunos son de 16 teclas y otros de 20 teclas. La cantidad total de teclas entre los 40 teléfonos es 696. ¿Cuántos teléfonos de 20 teclas y cuántos de 16 hay?

97. En el estacionamiento de un mercado hay en 124 autos. Algunos de estos autos tiene solo dos puertas y otros tienen 4. La cantidad total de puertas es 416. ¿Cuántos autos de 4 puertas y cuántos de 2 puertas hay?

98. Abel compró 7 rollos de fotos, unos de 24 y otros de 36 fotos. Le alcanzan para sacar 228 fotos. ¿Cuántos rollos son de 36 fotos y cuántos rollos son de 24 fotos?



99. Si se cambia un billete de U$S 50 por billetes de U$S 10 y de U$S 1, y le dan 23 billetes ¿Cuántos son de U$S 1 y cuántos de U$S 10?

100. Ariel y María tienen entre los dos $ 2000. La mitad de lo que tiene Ariel más las 2/5 partes de lo que tiene María es igual a lo que tendría Ariel si hubiera perdido $280. ¿Cuántos $ tiene cada uno por separado?

101. Anabel se compró dos CD de distinto precio, uno vale dos pesos más que el otro, si en total gastó $32 ¿Cuánto le costó cada uno?

102. Un avión tiene una velocidad que es la tercera parte de la de un avión a retropropulsión. En una hora el avión a retropropulsión recorre 600 kilómetros más que los que recorre el otro avión en una hora y media ¿Cuál es la velocidad de cada uno de los aviones?

103. La diferencia entre el precio de un libro y el de otro es de $10 y uno cuesta las tres quintas partes de lo que cuesta el otro. ¿Cuánto cuesta cada uno?

104. El largo de un rectángulo es igual al ancho aumentado en un 40%. Si el perímetro de dicho rectángulo es de 48 metros ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

105. Si al numerador de una fracción se le suma 1 y se le resta 2 al denominador, dicha fracción se convierte en 1. Si se le resta 1 al numerador y se le suma 1 al denominador se transforma en 1/6. ¿Qué fracción es?

106. Si se aumenta en 2 centímetros el largo y el ancho de un rectángulo, el perímetro resulta ser de 24 centímetros. Si el largo se disminuye en 2 centímetros el rectángulo se transforma en un cuadrado. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?

107. En un colegio mixto hay 1300 alumnos en total. Si se hubieran inscripto 50 mujeres más, el número de mujeres hubiera duplicado al de varones ¿Cuántas mujeres y cuantos varones hay en el colegio?

108. En un boliche se vende a $3 el vaso de gaseosa y $4 el vaso de cerveza. Se recaudó en total $964. Si tanto el vaso de gaseosa como el de cerveza hubieran costado $3, se hubieran recaudado $813. ¿Cuánto se hubiera recaudado si tanto el vaso de cerveza como el de gaseosa hubieran costado $4? Nota: Suponer que no varían las ventas con los cambios de precios.

109. Si a la primera cifra de un número de dos cifras impar la multiplico por 5, obtengo como resultado la mitad del antecesor del número de dos cifras en cuestión. Por otro lado si invierto de lugar las dos cifras y al número que me queda lo multiplico por dos séptimos, me da lo mismo que la décima parte del antecesor del número de dos cifras original. ¿Cuál es ese número de dos cifras? Complicado ¿no?

<u>Clasificar los siguientes sistemas</u>:

110- $\begin{cases} X + 5Y = -1 \\ -2X - 10Y = 2 \end{cases}$

111- $\begin{cases} X - 5Y = 1 \\ -2X + 10Y = -3 \end{cases}$

112- $\begin{cases} X - Y = 6 \\ -X + Y = 2 \end{cases}$

113- $\begin{cases} 5X + 2Y = 2 \\ 9X + 4Y = 4 \end{cases}$

114- $\begin{cases} X - Y = -6 \\ -X + Y = 6 \end{cases}$

115- $\begin{cases} -1X - Y = -1 \\ 5X + 4Y = 5 \end{cases}$

116- $\begin{cases} X + 4Y = 3 \\ -2X - 8Y = -6 \end{cases}$

117- $\begin{cases} -2X + Y = -7 \\ 4X - 2Y = 14 \end{cases}$

118- $\begin{cases} -X + 3Y = -1 \\ 4X - 12Y = 4 \end{cases}$

119- $\begin{cases} 7X - 3Y = 3 \\ -7X + 3Y = -3 \end{cases}$

120- $\begin{cases} 2X + Y = -1 \\ -6X - 3Y = 4 \end{cases}$

121- $\begin{cases} X + 2Y = -1 \\ -2X - 4Y = 3 \end{cases}$

122- $\begin{cases} X - 3Y = 1 \\ -2X + 6Y = 2 \end{cases}$

123- $\begin{cases} X - Y = 1 \\ 3X + Y = 3 \end{cases}$

124- $\begin{cases} X - Y = -1 \\ -X + Y = 1 \end{cases}$

125- $\begin{cases} 2X + 5Y = 3 \\ 10X + 25Y = 18 \end{cases}$

126- $\begin{cases} 1X - 6Y = 8 \\ 5X - 3Y = 4 \end{cases}$

127- $\begin{cases} 3X - 6Y = 5 \\ -15X + 30Y = -25 \end{cases}$

128- $\begin{cases} -2X + 3Y = 3 \\ 4X + 2Y = 2 \end{cases}$

129- $\begin{cases} -X + 3Y = -1 \\ 4X - 12Y = 6 \end{cases}$

Dados los siguientes sistemas de ecuaciones, hallar k para que el sistema sea Compatible indeterminado SCI

130- $\begin{cases} -X + 2Y = -3 \\ 2X - 4Y = 9k - 3 \end{cases}$

131- $\begin{cases} X + Y = 2 \\ 3X + kY = 6 \end{cases}$

132- $\begin{cases} X + Y = 1 \\ 2X + 2Y = k^2 + 1 \end{cases}$

133- $\begin{cases} X = Y \\ 2X - 4k = 2Y \end{cases}$

134- $\begin{cases} X - Y = 1 \\ (3k - 1) \cdot X - kY = 2 \end{cases}$

135- $\begin{cases} kX + 2Y = 3 \\ 2kX + 4Y = k + 2 \end{cases}$

136- $\begin{cases} X = Y + 1 \\ 2X - (k + 3)Y = 2 \end{cases}$

137- $\begin{cases} kX + Y = k \\ X - Y = 1 \end{cases}$

138- $\begin{cases} kX + Y = k \\ X + kY = 1 \end{cases}$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Sistemas de Ecuaciones III

Número de Tema: **51**

Área: **Matemática**

Sistemas de 3x3 o 3 ECUACIONES y 3 INCÓGNITAS

En la resolución de Sistemas de ecuaciones de 3x3, o sea, de 3 ecuaciones y tres incógnitas, se pueden usar algunos de los métodos vistos hasta ahora para resolver sistemas de 2x2. Lo que puede seguir usándose son los métodos de Sustitución, Igualación y Sumas y restas. El método de determinantes ya no nos sirve y el gráfico tampoco. En realidad hay un desarrollo de esos dos métodos para resolución de sistemas de 3x3, pero al ser muy "engorroso" o complicado, no se usan, o al menos no los vamos a usar nosotros.

Vamos a resolver un ejemplo:
$$\begin{cases} 2X + 3Y + Z = 6 \\ 3X + Y - 2Z = 2 \\ X - 3Y + 5Z = 3 \end{cases}$$

Comenzamos con SUSTITUCIÓN: Despejemos "Z" en la 1º Ecuación y lo Sustituimos en las otras 2 ecuaciones.

$$\begin{cases} \mathbf{2X + 3Y + Z = 6} \\ 3X + Y - 2Z = 2 \\ X - 3Y + 5Z = 3 \end{cases}$$

Vamos a despejar "Z" en la 1º ECUACIÓN y lo que nos da lo SUSTITUIMOS en las otras dos ecuaciones (2º y 3º)

Primer Paso: Despejamos Z en la primera ecuación. $\Rightarrow$ $2X + 3Y + Z = 6$ $\Rightarrow$ $\boxed{Z = 6 - 2X - 3Y}$

Ahora hay que sustituir Z en las otras dos ecuaciones:

EMPEZAMOS CON LA 2º ECUACIÓN

Copiamos la **2º Ecuación.** $\Rightarrow$ $3X + Y - 2Z = 2$ $\Rightarrow$ SUSTITUIMOS "Z". $\Rightarrow$ $3X + Y - 2(6 - 2X - 3Y) = 2$

Propiedad Distributiva. $\Rightarrow$ $3X + Y - 12 + 4X + 6Y = 2$ $\Rightarrow$ Agrupo las X e Y. Paso sumando el 12 $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{7X + 7Y = 14}}$

SEGUIMOS CON LA 3º ECUACIÓN

Copiamos la **3º Ecuación.** $\Rightarrow$ $X - 3Y + 5Z = 3$ $\Rightarrow$ SUSTITUIMOS "Z" $\Rightarrow$ $X - 3Y + 5(6 - 2X - 3Y) = 3$

Propiedad Distributiva. $\Rightarrow$ $X - 3Y + 30 - 10X - 15Y = 3$ $\Rightarrow$ Agrupo las X e Y. Paso restando el 30. $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{-9X - 18Y = -27}}$

Bueno en definitiva nos quedaron estas dos ecuaciones:
$$\begin{cases} \mathbf{7X + 7Y = 14} \\ \mathbf{-9X - 18Y = -27} \end{cases}$$

Que como ven es un sistema de 2x2. Cuando resolvamos un sistema de 3x3 (TRES Ecuaciones con TRES Incógnitas), es conveniente pasarlo primero a uno de 2x2. Ahora hay que resolver ese sistema de 2x2 por cualquiera de los 5 métodos que vimos y después cuando ya saben el valor de X y de Y reemplazan en cualquiera de las tres ecuaciones originales para calcular "Z"

Apliquemos entonces el método de los DETERMINANTES para hallar "x" e "y":

$$x = \frac{\begin{vmatrix} Y_2 & C_2 \\ Y_1 & C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -18 & -27 \\ 7 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ -9 & -18 \end{vmatrix}} = \frac{-18 \cdot 14 - (-27) \cdot 7}{-18 \cdot 7 - (-9) \cdot 7} = \frac{-252 + 189}{-126 + 63} = \frac{-63}{-63} \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} X_1 & C_1 \\ X_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ -9 & -18 \end{vmatrix}} = \frac{-27 \cdot 7 - (-9) \cdot 14}{-18 \cdot 7 - (-9) \cdot 7} = \frac{-189 + 126}{-126 + 63} = \frac{-63}{-63} \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Ahora resta hallar "z"

Para ello tomamos una de las 3 ecuaciones originales del sistema de 3x3. (Cualquiera de las 3 ecuaciones)

Tomemos la primera ecuación de las tres. $\Rightarrow$ $2X + 3Y + Z = 6$

Como x = 1 y=1
Reemplazamos "x" e "y: $\Rightarrow$ $2X + 3Y + Z = 6 \Rightarrow 2.1 + 3.1 + Z = 6 \Rightarrow 2 + 3 + Z = 6$

$\Rightarrow 5 + Z = 6 \Rightarrow Z = 6 - 5 \Rightarrow \boxed{Z = 1}$

Clasificación de los Sistemas de Ecuaciones de 3x3.
La clasificación de estos sistemas es la misma que la de los sistemas de 2x2. Es Decir:

- Sistemas Compatibles Determinados: SCD. Una Única Solución.
- Sistemas Compatibles Indeterminados: SCI. Infinitas soluciones.
- Sistemas Incompatibles: SI. Ninguna Solución.

¿Cómo me doy cuenta sin hacer el gráfico que tipo de sistema es? veamos ejemplos.

- El sistema "**SCI**" $\Rightarrow$ **COMPATIBLE INDETERMINADO tiene infinitas soluciones.** Eso pasa, cuando al querer hallar X o Y, tengo que hacer la cuenta "**0 dividido 0**" (En el Método de los Determinantes). Con otro método se va a simplificar todo y la ecuación finalmente va a quedar: **0 = 0**
- El sistema "**SI**" $\Rightarrow$ **INCOMPATIBLE: NO tiene solución.** Esto ocurre, cuando al hallar X o Y, tengo que hacer la cuenta **"N" dividido 0** ("N" un número $\neq 0$) Si uso el método de determinantes. Si uso cualquier otro método **se van a ir las "X" y las "Y"** y me va a quedar una expresión falsa, como por ejemplo: 5 = 0.

❖ Anexo - Resolución de sistemas de "n" ecuaciones por "n" incógnitas aplicando matrices:

Dado un sistema de "n" ecuaciones por "n" incógnitas que sea compatible determinado. Siendo A, la matriz cuadrada formada por filas tal que cada fila representa los coeficientes de cada ecuación y siendo V el vector formado por los términos independientes de cada ecuación, se puede hallar la solución del sistema $S=(S_1, S_2, .. S_n)$ con la ***<u>siguiente fórmula</u>****:*

$$\boxed{A^{-1} \times V = S}$$

Ejemplo: Sistema de Ecuaciones:
$$\begin{pmatrix} x & +2y & +4z & =17 \\ -3x & +2y & -z & =-2 \\ 5x & +y & -2z & =1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = A^{-1} x V$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{77} & -\frac{8}{77} & \frac{10}{77} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{13}{77} & -\frac{9}{77} & -\frac{8}{77} \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} \frac{3}{77} & -\frac{8}{77} & \frac{10}{77} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{13}{77} & -\frac{9}{77} & -\frac{8}{77} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

O sea que:
X=1
Y=2
Z=3

Nota: También hay otros métodos prácticos para hallar la solución de sistemas de ecuaciones aplicando propiedades de matrices o reducciones o cosas similares. Hay un método llamado Gauss Jordan, en el que se va reduciendo el sistema de 4x4 a 3x3 y de allí a 2x2 y finalmente a 1x1 para hallar así una de las variables. También se puede operar la matriz extendida con operaciones entre filas para ir reduciendo el sistema. En fin, hay muchos métodos, entre los cuáles, a mi parecer, este que vimos es el más directo ya que hallamos en una sola operación la solución completa, es decir el valor de las tres variables en una sola operación (en realidad dos operaciones, la inversión de la matriz y el producto).

✔ Hallar X - Y - Z

1- $\begin{cases} 2X + 5Y + 3Z = 10 \\ -2X - 3Y + 2Z = -3 \\ 5X + 3Y - 4Z = 4 \end{cases}$

2- $\begin{cases} 2X + 5Y + 3Z = 6 \\ -2X - 3Y + 2Z = -9 \\ 5X + 3Y - 4Z = 17 \end{cases}$

3- $\begin{cases} 3X + 4Y - 5Z = 6 \\ -2X - 2Y + 5Z = -1 \\ 5X + 4Y + 7Z = 20 \end{cases}$

4- $\begin{cases} 3X + 2Y - Z = 0 \\ 5X - 7Y + 6Z = 5 \\ 3X - 2Y + 4Z = 6 \end{cases}$

5- $\begin{cases} 3X - 5Y + 3Z = 6 \\ 2X - 2Y + 7Z = 9 \\ 2X + 3Y - 5Z = -3 \end{cases}$

6- $\begin{cases} -2X + 7Y - 3Z = 8 \\ 2X - 3Y + 11Z = -12 \\ -5X + 2Y - 4Z = 1 \end{cases}$

7- $\begin{cases} 7X + 5Y + 3Z = 12 \\ -2X - 4Y - 3Z = -6 \\ -11X + 3Y - 4Z = -8 \end{cases}$

8- $\begin{cases} 3X + 5Y - 2Z = 0 \\ -7X - 3Y + 2Z = 6 \\ 5X + 3Y - 4Z = -6 \end{cases}$

9- $\begin{cases} 4X + 5Y + 3Z = 8 \\ 2X + 7Y + 2Z = 9 \\ 5X + 6Y - 2Z = 4 \end{cases}$

10- $\begin{cases} 7X + 5Y - 3Z = 2 \\ 2X + 3Y - 2Z = -1 \\ 5X - 3Y + 4Z = 8 \end{cases}$

11- $\begin{cases} 7X - 4Y - 5Z = 5 \\ 2X + 2Y + 5Z = -3 \\ 3X - 4Y + 7Z = 9 \end{cases}$

12- $\begin{cases} 2X + 2Y - 2Z = 2 \\ 4X + 7Y + 6Z = 1 \\ 3X - 4Y + 5Z = 10 \end{cases}$

13- $\begin{cases} 4X - 3Y + 5Z = 13 \\ 4X + 2Y + 4Z = 12 \\ 5X + 3Y - 5Z = 5 \end{cases}$

14- $\begin{cases} 2X + 7Y + 4Z = 0 \\ -7X - 3Y + 4Z = 18 \\ 5X + 2Y + 3Z = -7 \end{cases}$

15- $\begin{cases} 4X + 2Y - 7Z = 18 \\ 2X - 4Y - 3Z = 8 \\ 5X - 3Y - 4Z = 13 \end{cases}$

16- $\begin{cases} 2X + 5Y + 5Z = 12 \\ 7X - 2Y + 3Z = 13 \\ 9X + 3Y + 1Z = 11 \end{cases}$

✔ Clasificar los siguientes sistemas de 3x3

17- $\begin{cases} 3X + Y - 2Z = 0 \\ -9X - 3Y + 3Z = 6 \\ 3X + Y - Z = -2 \end{cases}$

18- $\begin{cases} X + Y + Z = 1 \\ 2X - 3Y + Z = 13 \\ 2X + 2Y + 2Z = 3 \end{cases}$

19- $\begin{cases} X + Y - 2Z = 2 \\ -X + 2Y + 3Z = 5 \\ X + Y - 2Z = 3 \end{cases}$

20- $\begin{cases} X + Y - 2Z = -2 \\ -X + 2Y + 3Z = 3 \\ X + 3Y + Z = 1 \end{cases}$

21- $\begin{cases} X + Y = 5 \\ X - Y + Z = 1 \\ X + 3Y - 2Z = 9 \end{cases}$

22- $\begin{cases} 2X + Y - Z = -2 \\ X + 2Y + 3Z = 3 \\ -6X - 3Y + 3Z = 6 \end{cases}$

✔ Problemas:

23) En un curso de 29 alumnos, hay cinco hinchas de River más que hinchas de boca, y además, la cantidad de hinchas de boca supera por tres a la cantidad de hinchas de otros clubes, sin contar los de River. ¿Cuántos son hinchas de River? ¿Cuántos de Boca? Y ¿Cuántos de otros clubes?

24) La suma de los dígitos de un número de tres cifras es igual a 13. Si cambio de lugar la cifra de la unidad por la cifra de la decena el número aumenta 9 unidades, y además sé que la cifra de la centena es la tercera parte de la cifra de la unidad. ¿Cuál es el número de tres cifras del que estoy hablando?

25) En una bolsa tengo 30 caramelos, entre los cuales hay de limón, de frutilla y de naranja. Yo sé que la tercera parte de los caramelos de frutilla que hay más las tres cuartas partes de la cantidad de caramelos de limón equivalen a la cantidad de caramelos de naranja. Y además sé que hay 2 caramelos de naranja más que caramelos de limón. ¿Cuántos caramelos hay en la bolsa de cada gusto?

26) La suma de las edades de Pablo, Matías y Emiliano es 51. Pablo le lleva a Matías 4 años, y hace 11 años, la suma de las edades de Matías y Emiliano era igual a la edad de Pablo. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, aplicando los conocimientos adquiridos en matrices:

27) $\begin{cases} X_1 - 2X_2 - X_3 + X_4 = -1 \\ X_1 - X_2 + X_3 - 2X_4 = -1 \\ -X_1 - X_2 - X_3 - X_4 = -4 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 5 \end{cases}$

29) $\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 1 \\ -X_1 + X_2 + X_3 - 2X_4 = -1 \\ 2X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 2 \\ -X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = -1 \end{cases}$

31) $\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4 = -3 \\ 2X_1 + 3X_2 - X_3 + X_4 = -5 \\ 2X_1 - 2X_2 - X_3 - X_4 = 0 \\ 2X_1 - 3X_2 + X_3 - X_4 = 1 \end{cases}$

28) $\begin{cases} 2X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 - 2X_4 = -2 \\ X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = -1 \\ -2X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 2 \end{cases}$

30) $\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = -3 \\ X_1 - 2X_2 + 2X_3 - 2X_4 = -7 \\ -2X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = -2 \\ X_1 + 3X_2 - X_3 - X_4 = 7 \end{cases}$

32) $\begin{cases} -X_1 + 2X_2 + 3X_3 - X_4 = 8 \\ 2X_1 + 3X_2 + X_3 + 5X_4 = 31 \\ 2X_1 - 2X_2 + X_3 + 4X_4 = 17 \\ -5X_1 - 3X_2 + 7X_3 - X_4 = 6 \end{cases}$

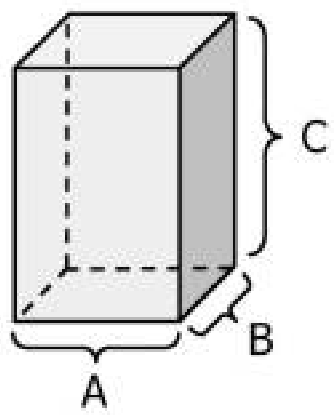
<u>Más problemas de aplicación</u>:

33) Diego, Nicolás y Alejandro, juntan sus ahorros para irse de vacaciones. En total tienen $420. Nicolás tenía $20 más que diego, y Diego tenía la mitad de lo que tenían Nicolás y Alejandro juntos. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado cada uno por separado?

34) Se construye una caja de la siguiente forma:
La caja es un paralelepípedo.

La caja se construye con acrílico y todas las aristas se recubren con tiras de bronce para decorar.

En total se usan 40 cm lineales de tiras de bronce para las aristas. Además se usan 62 cm^2 de acrílico para las "paredes" de la caja.



La medida de la altura debe ser igual a la suma de las medidas de la base:

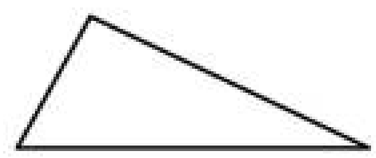
C = A + B

¿Cuáles son las medidas de la caja? Es decir hallar el valor de sus aristas.

35) Si para el problema anterior hubiéramos dicho que la superficie de acrílico usada fura de 80cm^2. y mantenemos todos los otros datos. ¿Cuáles hubieran sido las medidas? ¿Qué tipo de sistema hubiera sido?

36) ¿Se puede construir un triángulo de lados "A", "B" y "C" tales que cumplan las siguientes condiciones? Si se puede ¿Cuáles serían las medidas de los lados del triángulo?

Perímetro del triángulo = 27 cm.
A + B = 2 C
C = 3 B



37) ¿Se puede construir un triángulo de lados "A", "B" y "C" tales que cumplan las siguientes condiciones? ¿Qué tipo de sistema es? ¿Es Incompatible?

Perímetro del triángulo = 6 cm.
A + 3 B = C + 4 cm
C = B – 1 cm

38) Dadas f(x) y g(x) dos funciones lineales. Hallar al menos un valor de "a", "b" y "c" $\in \Re$ para que ambas funciones se intersecten en el punto (1;2). ¿Qué tipo de sistema es? ¿Cuántas soluciones existen para este ejercicio?

$f(x) = \mathbf{a}\,x + 3$ $\qquad g(x) = \mathbf{b}\,x + \mathbf{c}$

39) Dadas f(x), g(x) y h(x) tres funciones lineales. Hallar "a", "b" y "c" $\in \Re$ de modo tal que las tres rectas se intersecten en el punto (1 ; 3). ¿Qué tipo de sistema es? ¿Cuántas soluciones tiene?

$f(x) = \mathbf{a}\,x - 1$ $\qquad g(x) = x + \mathbf{b}$ $\qquad h(x) = -x + \mathbf{c}$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

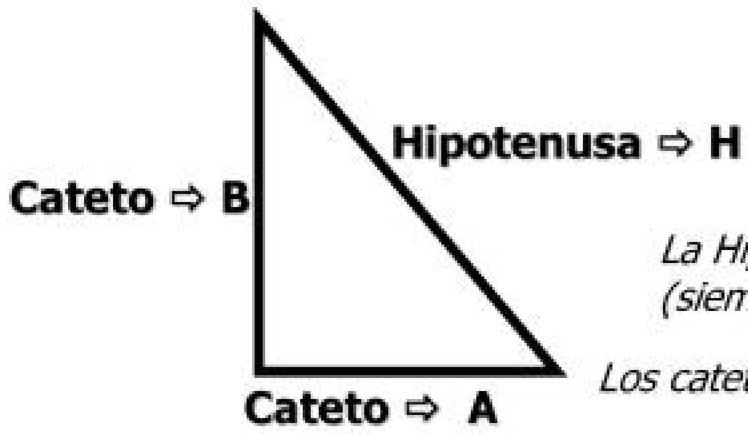
Título del Tema:

Trigonometría
Nivel I

Número de Tema: **52**

Área: **Matemática**

Repaso del Teorema de Pitágoras:



El teorema de Pitágoras dice:

" La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa "

La Hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto. (siempre es el lado más largo del triángulo)

$$\boxed{A^2 + B^2 = H^2}$$

Los catetos son los dos lados que forman el ángulo recto

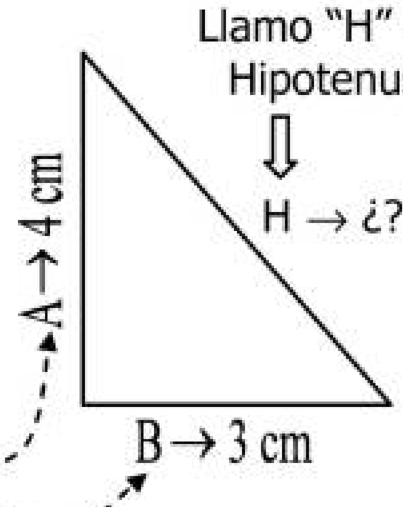
Como vemos es sólo una fórmula, y nos sirve para calcular el tercer lado de un triángulo rectángulo, sabiendo cuanto valen los dos primeros!

Hay que acordarse que, el teorema de Pitágoras, sólo se puede usar con triángulos rectángulos.

Vamos a ver un ejemplo:

Supongamos que tenemos como dato que un cateto mide 3 cm y el otro cateto mide 4 cm. Y tenemos que calcular la hipotenusa

Si dibujamos el triángulo que dice el enunciado nos quedaría como este:



Llamo "A" y "B" a los catetos

Lo primero que hago es plantear la fórmula de Pitágoras: $A^2 + B^2 = H^2$

Luego, remplazo los valores que tengo como dato:

(En este caso, tenemos como dato, los dos catetos)

Entonces remplazo un cateto por 4 cm y el otro por 3 cm

$$(3\text{ cm})^2 + (4\text{ cm})^2 = H^2$$

Hago las cuentas

$$9\text{ cm}^2 + 16\text{ cm}^2 = H^2$$

Sumo 9 + 16

$$25\text{ cm}^2 = H^2$$

Paso el cuadrado como Raíz

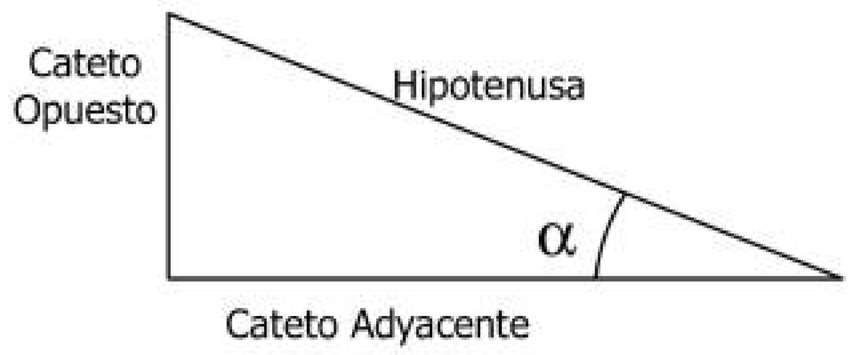
$$\sqrt{25\text{ cm}^2} = H$$

$$\boxed{5\text{ cm} = H}$$

Por lo tanto ya calculamos la hipotenusa: Nos dio 5 cm

La Trigonometría es la parte de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos.

✰ *Primero vamos a estudiar los **Triángulos Rectángulos***



- Llamamos Hipotenusa al lado más grande del triángulo.
- Llamamos Cateto Opuesto al lado Opuesto al ángulo α.
- Llamamos Cateto Adyacente al lado Adyacente al ángulo α.

A partir de estos tres lados y este ángulo surgen tres relaciones muy importantes:

$$\textbf{Seno } \alpha = \frac{Cateto\ \ Opuesto}{Hipotenusa}$$

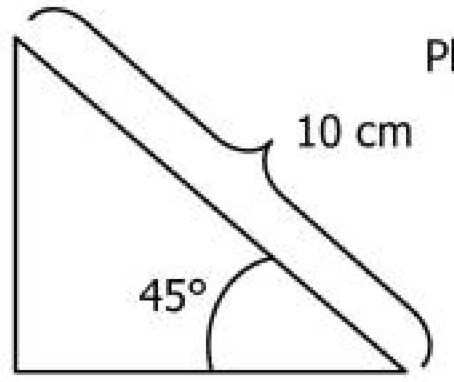
$$\textbf{Coseno } \alpha = \frac{Cateto\ \ Adyacente}{Hipotenusa}$$

$$\textbf{Tangente } \alpha = \frac{Cateto\ \ Opuesto}{Cateto\ \ Adyacente}$$

¿Para qué me sirven esas tres fórmulas? Esas tres fórmulas son muy útiles, si para cualquier triángulo rectángulo yo tengo como datos un lado y un ángulo, puedo calcular los otros dos lados usando dichas fórmulas. Y si tengo como dato el valor de dos lados puedo calcular los ángulos y el lado que falta.

Veamos un ejemplo:

En este ejemplo tenemos como dato un ángulo y un lado, y vamos a calcular los otros dos lados del triángulo.



Planteamos la fórmula del Seno

$$\textbf{Seno } \alpha = \frac{Cateto\ \ Opuesto}{Hipotenusa}$$

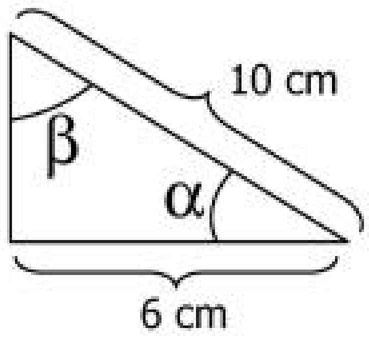
➢ Primero reemplazo los valores que conozco (la hipotenusa y el ángulo α). ⇒ $\text{Seno } 45^\circ = \dfrac{\text{Cateto Opuesto}}{10\,\text{cm}}$

Luego despejo el Cateto Opuesto que es lo que voy a calcular. ⇒ $\boxed{\text{Seno } 45^\circ}\,.\ 10\text{ cm} = \text{Cateto Opuesto}$

Ahora con la calculadora calculo el Seno de 45°. ⇒ Seno 45° = 0,707

⇒ Cateto Opuesto = 7,07 cm

Veamos un ejemplo en el que calculemos un ángulo:



En este ejemplo tenemos como dato dos lados, y vamos a calcular los ángulos del triángulo.

Obviamente que ya sabemos que uno de los ángulos vale 90º . Si no fuera así no podríamos usar las fórmulas de Trigonometría que vimos antes.

Planteamos la fórmula del Coseno: ⇒ $\text{Coseno } (\alpha) = \dfrac{Cateto\ \ Adyacente}{Hipotenusa}$

Reemplazamos los valores ⇒ $\text{Coseno } (\alpha) = \dfrac{6\ cm}{10\ cm}$

Usamos la fórmula del **Coseno** porque tenemos como dato al cateto adyacente de alfa y a la hipotenusa, con esta fórmula podemos calcular alfa.

Hago la división ⇒ $\text{Coseno } (\alpha) = 0,6$

Ahora al despejar el **Coseno**, pasa para el otro lado como **ArcCoseno** que es la función inversa. ⇒ $(\alpha) = ArcCoseno\ (0,6)$ ⇒ $\alpha = 53,13^\circ$ ⇒ $\alpha = 53^\circ\ 7'\ 21''$

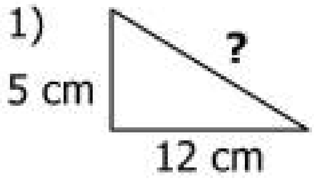
Para calcular el **ArcCoseno 0,6** con la calculadora pongo "0,6", aprieto la tecla "Inv" y después la tecla "Cos"
En las calculadoras más nuevas, primero aprieto "Inv", luego "Cos" y después "0,6" . Por último la tecla "=" o "Enter"

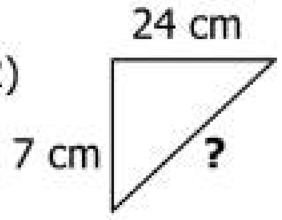
α es un ángulo y no me puede dar con coma, tengo que pasarlo a grados, minutos y segundos.
Para eso las calculadoras tienen una tecla con los símbolos de los grados, minutos y segundos
(En la mayoría de las calculadoras primero hay que apretar la tecla "Inv").

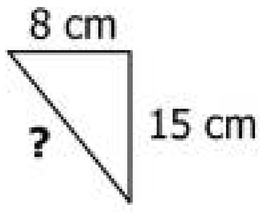
Obviamente que si ahora quiero calcular el ángulo β, voy a ir por un camino mas directo, usando la propiedad que dice que "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º "

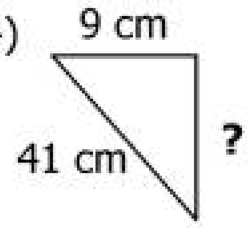
De esta manera lo único que tengo que hacer es $\beta = 180^\circ - 90^\circ - 53^\circ\ 07'\ 21''$
Entonces: $\beta = 36^\circ\ 52'\ 49''$

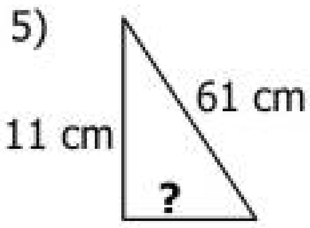
Calcular el lado que falta del Triángulo:

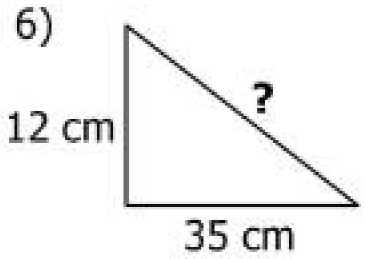
1) 

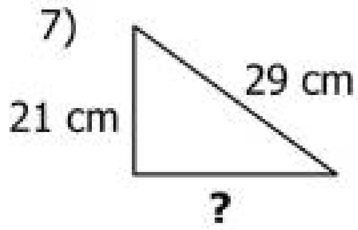
2) 

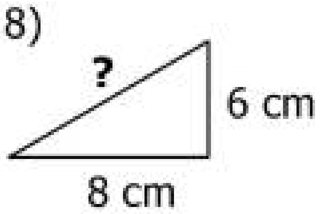
3) 

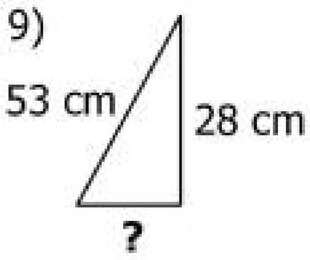
4) 

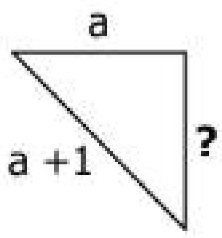
5) 

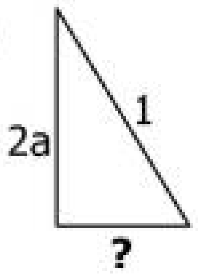
6) 

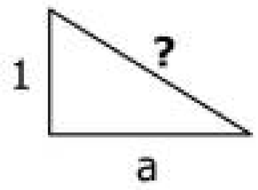
7) 

8) 

9) 

10) 

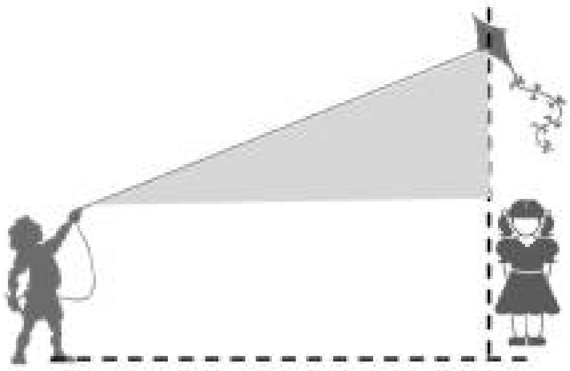
11) 

12) 

13) En un rectángulo de 35mm x 120mm se traza su diagonal. ¿Cuánto mide esta diagonal?

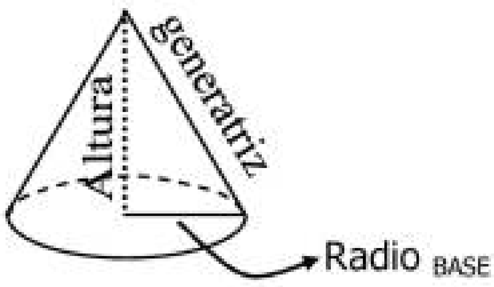
14) En un rectángulo de 55 mm de base, se traza su diagonal. La diagonal trazada mide 305mm ¿Cuánto mide la altura del rectángulo?

15) Maximiliano está remontando su barrilete. El largo del hilo desenredado es de 15.9 metros. El barrilete está justo encima de su hermana, que está a 8,4 metros de distancia de Maximiliano. Calcular la altura a la que está en ese momento el barrilete del piso. Maxi y su hermana miden los dos 1,5 metros.



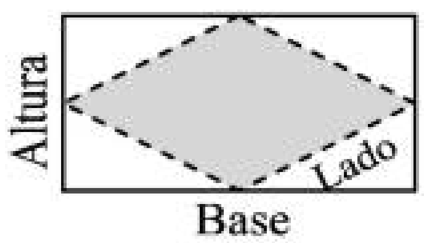
16) Mariano hace un rectángulo uniendo fósforos. Para la base usó 36 fósforos y para la altura 15 fósforos. ¿Cuántos fósforos necesita para hacer su diagonal?

En un cono tenemos los siguientes elementos:

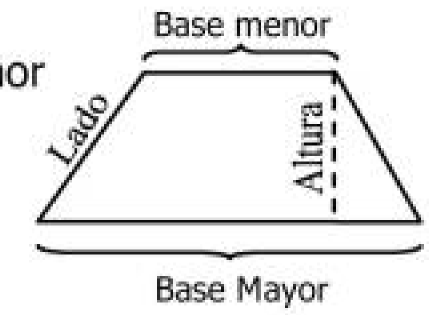


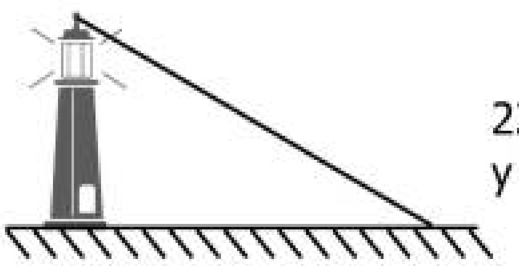
17) Hallar la altura de un cono de 24 cm de radio y 74 cm de generatriz.
18) Hallar el radio de un cono de 42 cm de altura y 58 cm de generatriz.
19) Hallar la generatriz de un cono de 7,5 cm de radio y 4 cm de altura.

20) Hallar el valor del lado del rombo. Si sabemos que la base del rectángulo mide 80 cm y la altura del rectángulo mide 18 cm.



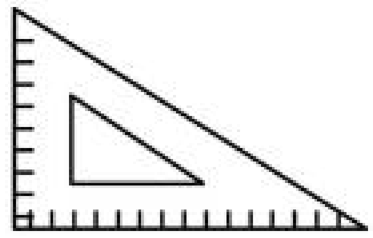
21) La base mayor de un trapecio isósceles mide 142 cm, la base menor mide 100 cm y los lados miden 35 cm. Hallar la altura del trapecio.





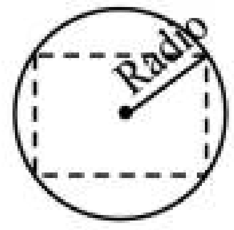
22) Desde la punta de un faro, un persona ata una cuerda de 91 m de largo y la ubica a 35 m de distancia del faro. Calcular la altura del faro.

23) Alejandro compró una escuadra que en sus lados más cortos mide 20 cm y 21 cm. ¿Cuánto mide su lado mas largo?

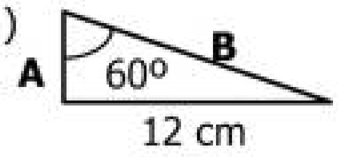


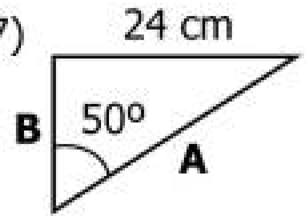
24) Mario apoya una escalera de 8,2 metros en una pared, separada a 1,8 metros de la misma. ¿A qué altura del piso estará el escalón más alto de la escalera?

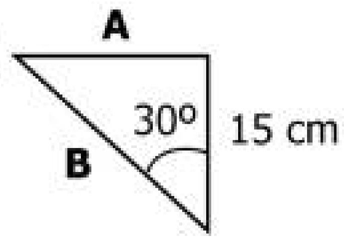
25) Dentro de una circunferencia dibujamos Un rectángulo de 30 cm de base, perfectamente centrado dentro de la misma. El radio de la circunferencia es 17 cm. ¿Cuánto mide la altura de este rectángulo?

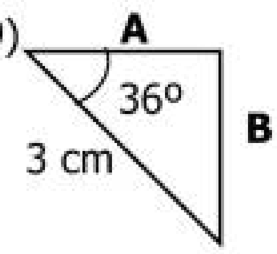


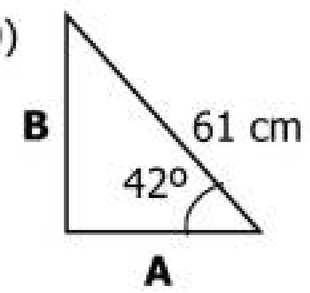
En los siguientes triángulos rectángulos: Hallar A y B.

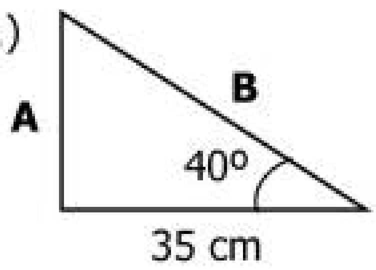
26)


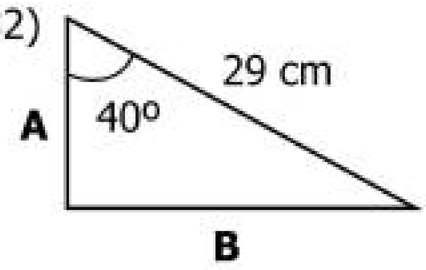
27)


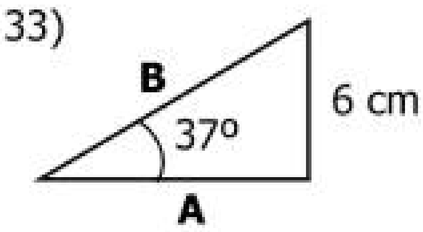
28)


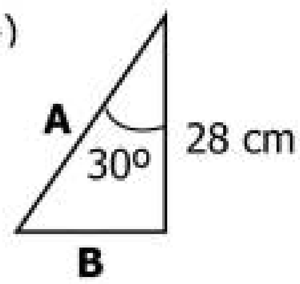
29)


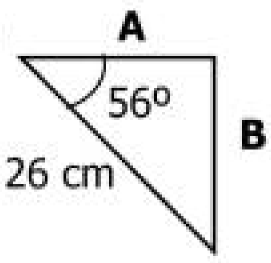
30)


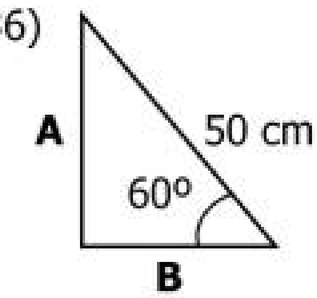
31)


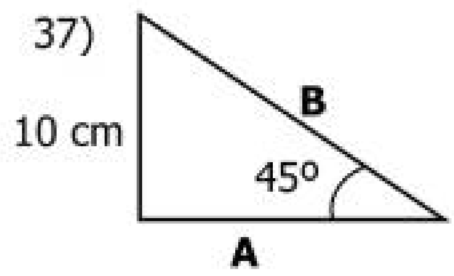
32)


33)


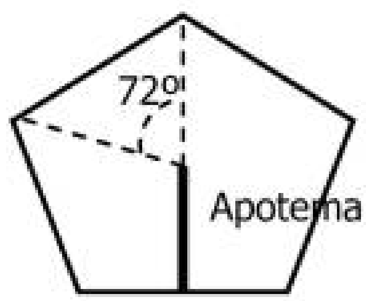
34)


35)


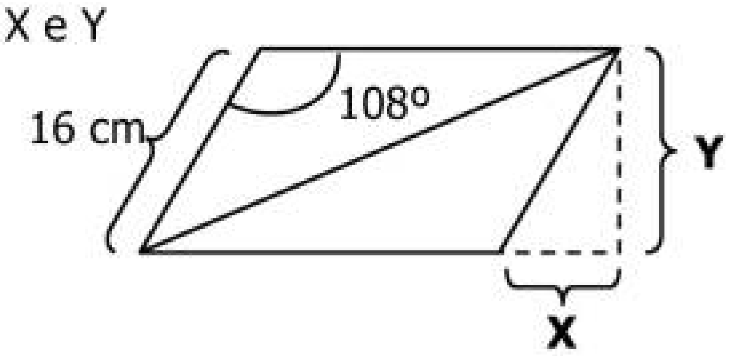
36)


37)


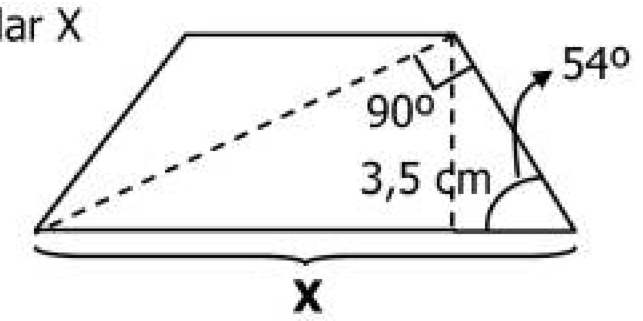
38) Calcular el apotema de un pentágono de 12 cm de lado (Recordar que los ángulos centrales del pentágono son 72º y que la apotema es el segmento que va desde el centro hasta la mitad del lado, cortando al mismo perpendicularmente).



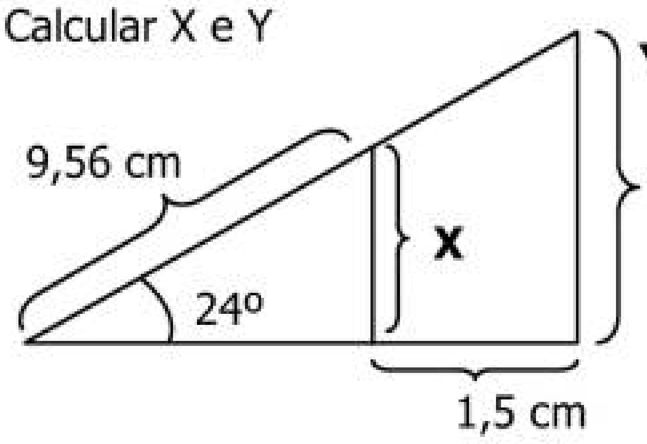
39) calcular X e Y



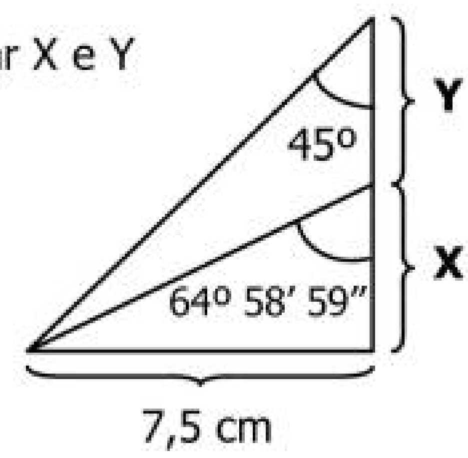
40) Calcular X



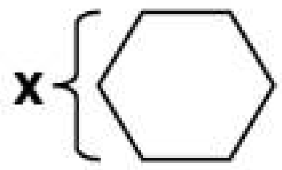
41) Calcular X e Y



42) Calcular X e Y

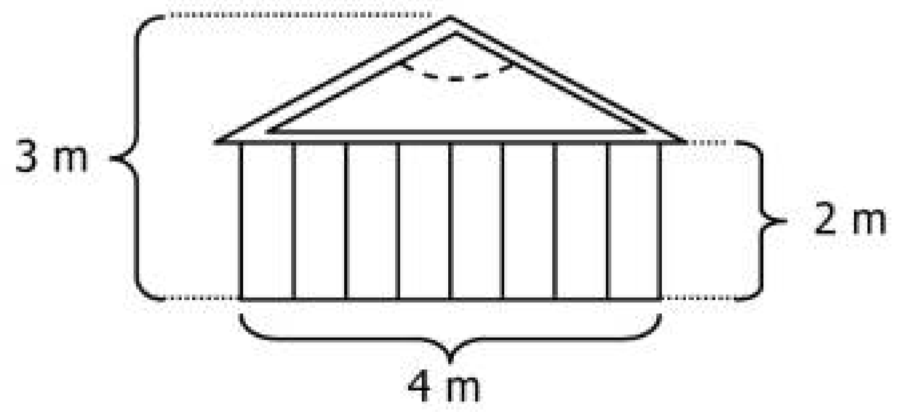


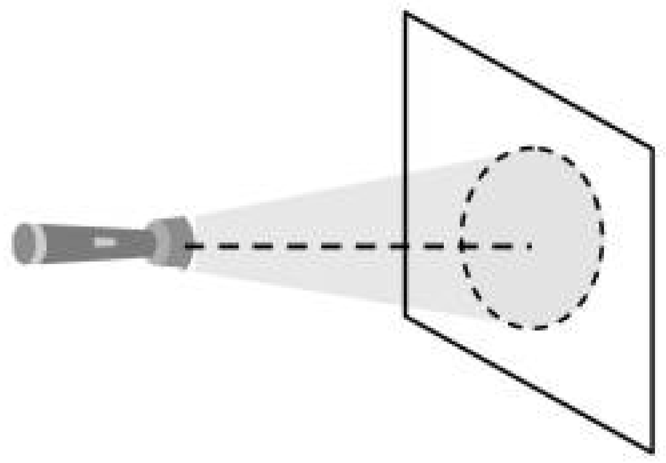
43) Calcular la "altura" de un hexágono de 5 centímetros de lado.



44) Calcular el valor del lado de un octógono inscripto en una circunferencia de 10 centímetros de radio.

45) Hallar el ángulo de la cumbrera del garage.





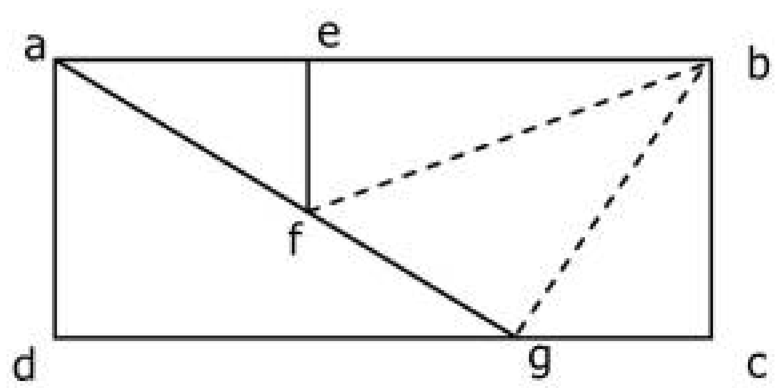
46) ¿A qué distancia hay que colocarse de una pared para iluminarla formando en ella un círculo de 40 centímetros de radio si tengo una linterna que refleja la luz con un ángulo de apertura total de 40º?

47) A- ¿Cuál es el área del círculo que se forma en la pared si la alumbro con esta linterna desde 1 metro de distancia?

B- ¿Y si lo hago desde 2 metros de distancia?

C- Cual es la relación entre la distancia a la que estoy y el área del círculo que se forma?

48) Hallar: ag ; gc ; fb y gb



Datos:

ad = 9 cm

af = 5cm

ef = 3 cm

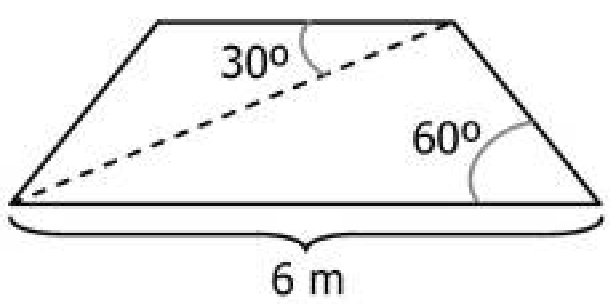
dc = 16 cm

Nota: el dibujo no está a escala!

49) Hallar la diagonal de un cuadrado de 5 centímetros de lado.

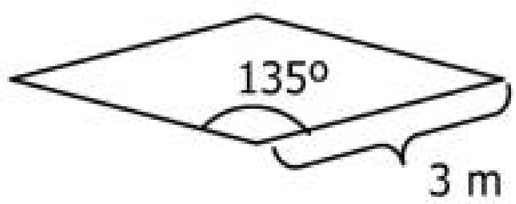
50) Hallar el perímetro de un pentágono sabiendo que su apotema vale 3 centímetros.

51) Hallar el radio de la circunferencia inscripta en un pentágono cuyo perímetro es 30 centímetros.



52) Hallar la diagonal del trapecio (es un trapecio cuyos lados laterales son iguales)

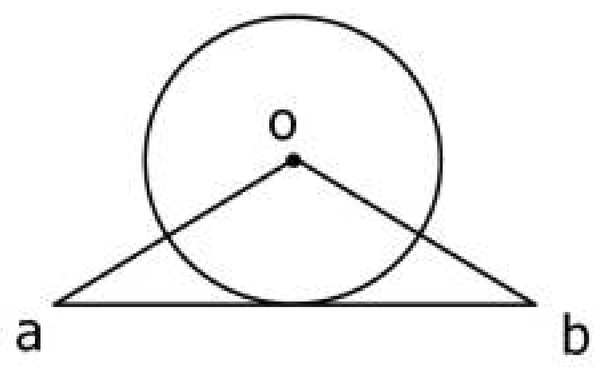
53) Hallar las diagonales del rombo.



54) Hallar el área del triángulo isósceles aob

Datos:

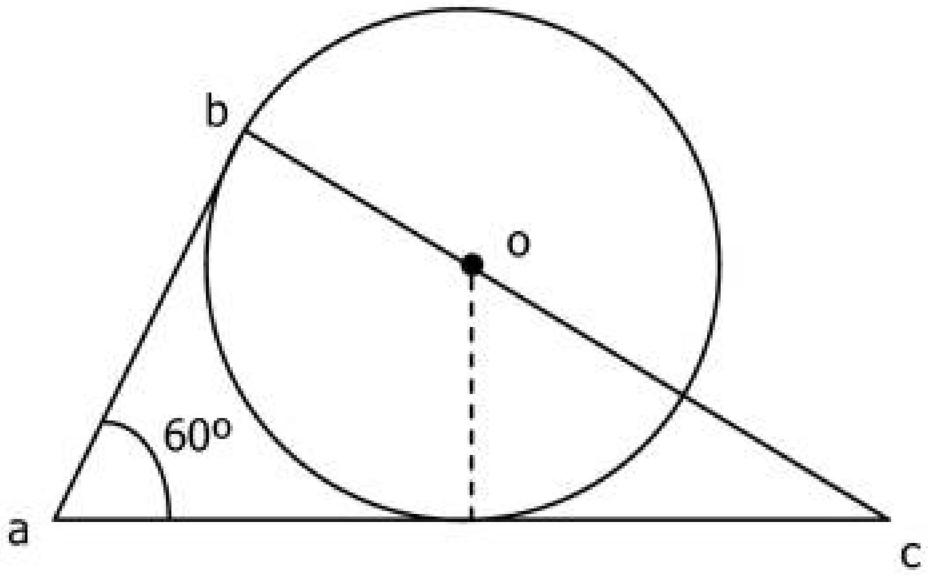
o es el centro del círculo
El radio del círculo mide 10 cm
El ángulo obtuso del triángulo mide 120º



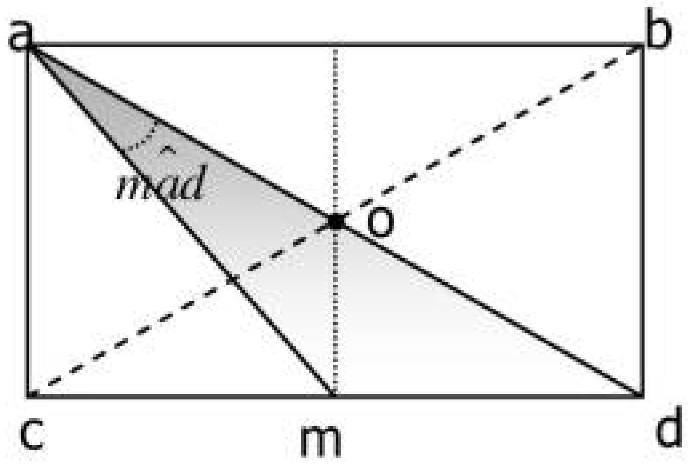
55) Hallar el perímetro del triángulo abc:
(**Este si que es difícil**)

ob = 3 cm (es el radio del círculo)
oc = 6 cm

Recomiendo para este ejercicio calcular primero el ángulo c y ver después que pasa con el ángulo b.



56) *Hallar el ángulo* $\widehat{mad}$



Datos:

$\begin{cases} \overset{\square}{abcd} \text{ es un rectángulo} \\ \overline{ab} = 8 \text{ cm} \\ \overline{ac} = 5 \text{ cm} \\ m \text{ es punto medio del lado } \overline{cd} \\ \overline{ad} \text{ y } \overline{bc} \text{ son diagonales del rectángulo} \end{cases}$

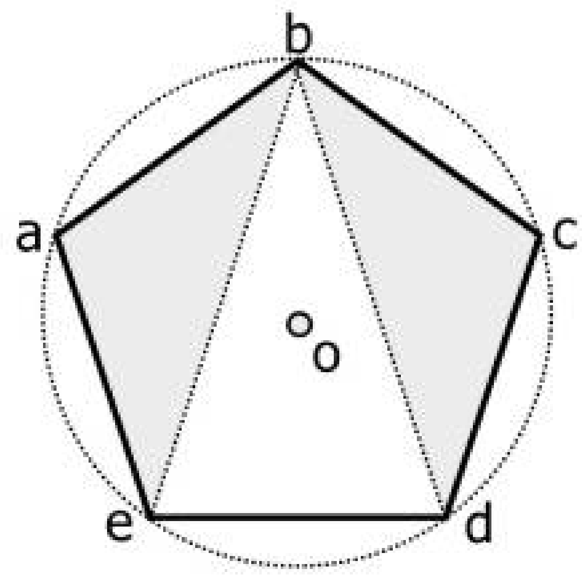
Sugerencia: Calcular el ángulo mediante una resta de ángulos de triángulos rectángulos y utilizar la función arco tangente.

Ejercicios Integradores:

$\overset{\pentagon}{abcde}$ es un pentágono regular, por lo tanto todos sus lados son iguales.
El pentágono está inscripto en una circunferencia de centro "o"
El radio de la circunferencia vale: R=10 cm

Sus ángulos interiores, por ejemplo $\widehat{abc}$, valen 108°

Sus ángulos centrales, por ejemplo $\widehat{aob}$, valen 72°



57) Hallar el valor de los lados del pentágono.

58) Hallar el valor del apotema del pentágono.
Recordemos que la apotema es el segmento que va del centro "o" a la mitad de cualquier lado.

59) ¿Qué porcentaje del área del círculo ocupa el pentágono inscripto?

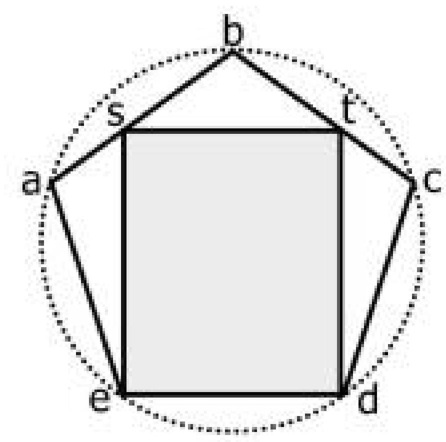
60) Hallar el área del triángulo $\overset{\triangle}{ebd}$

61) Hallar el ángulo $\widehat{ebd}$ (Tomar la máxima cantidad de decimales posible en las cuentas parciales para obtener el resultado exacto ya que el ángulo no tiene ni minutos ni segundos)

62) Hallar el valor del lado $\overline{eb}$

63) Hallar el área de los triángulos $\overset{\triangle}{abe}$ y $\overset{\triangle}{bcd}$

Supongamos que ahora dibujamos dentro del pentágono un rectángulo de base "ed" los más alto que entre dentro del pentágono.



64) Hallar la altura del triángulo $\overset{\triangle}{bst}$

65) Hallar el área del rectángulo $\overset{\square}{edts}$

66) Hallar el área del triángulo $\overset{\triangle}{bst}$

67) Hallar el segmento $\overline{bs}$

68) Hallar el segmento $\overline{as}$

69) Hallar el área de los triángulos $\overset{\triangle}{aes}$ y $\overset{\triangle}{cdt}$

by Dal-0r para TARINGA!

<u>Ejercicios con las Funciones y sus valores</u>:

Nota: Tomar siempre α entre 0 y 90º

Realizar estos ejercicios usando la calculadora y aproximar los resultados con 2 decimales

70) Sabiendo que Sen$(\alpha)=1/2$ Averiguar Cos(α)

71) Sabiendo que Sen$(\alpha)=1/2$ Averiguar Tg(α)

72) Sabiendo que Sen$(\alpha)=\sqrt{3}/2$ Averiguar Cos(α)

73) Sabiendo que Sen$(\alpha)=\sqrt{3}/2$ Averiguar Tg(α)

74) Sabiendo que Sen$(\alpha)=1$ Averiguar Cos(α)

75) Sabiendo que Sen$(\alpha)=0$ Averiguar Cos(α)

76) Sabiendo que Tg$(\alpha)=1$ Averiguar Sen(α)

77) Sabiendo que Tg$(\alpha)=1$ Averiguar Cos(α)

78) Sabiendo que Sen$(\alpha)=1/2$ Hallar: $\text{Cos}^2(\alpha)$

79) Sabiendo que Sen$(\alpha)=1/2$ Hallar: $\text{Cos}^2(\alpha) + 3\ \text{Tg}^2(\alpha)$

80) Sabiendo que Sen$(\alpha)=1/2$ Hallar: $8\ \text{Cos}^4(\alpha) - \text{Sen}(\alpha)$

<u>Problemas de Aplicación</u>:

Carmen que mide 1,6 metros está parada en el patio del colegio a 15 metros del mástil de la bandera, el ángulo que tiene que inclinar su cuello (Suponiendo que mira siempre frontalmente) para ver la punta del mástil es de 50º

81) ¿Cuál es la altura del mástil?

82) ¿A qué distancia debería pararse Carmen para ver la punta del mástil inclinando su cuello solo 30º?

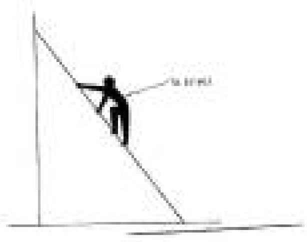
83) Si Carmen, a 15 metros del mástil se sube a una tarima de 90 cm ¿Qué ángulo debe inclinar entonces su cuello para ver la punta del mástil hora?

Al mediodía, el sol se ubica perpendicularmente sobre nosotros, motivo por el cual la sobra que generamos es tan pequeña que la tapamos con nuestros propios pies. Pero pocos minutos después, a cierta hora, el ángulo formado con respecto a la Tierra es de 80º. En ese momento un árbol del parque tiene una sombra que mide exactamente 94 centímetros de largo.

84) ¿Cuál es la altura del árbol?

85) ¿A qué distancia se encuentra el fin de su sombra con la cima del árbol?

86) ¿Cuál debe ser el ángulo del sol con la tierra para que la sombra del árbol sea del mismo tamaño que el árbol?



Un pintor coloca una escalera de una sola parte para pintar la parte más alta del frente de un edificio. El largo de la escalera es de 4 metros.

87) Si coloca la escalera con un ángulo de 75º respecto el piso ¿Cuál será la altura a la que llega la punta de la escalera?

88) Con ese ángulo ¿A qué distancia quedaría separada la escalera en su parte inferior de la pared?

89) Si colocara la escalera a 65º respecto del piso ¿Cuál será ahora la altura a la que llega la punta de la escalera?

90) Con ese ángulo ¿A qué distancia quedaría separada la escalera en su parte inferior de la pared?

91) Si las indicaciones de la escalera dicen que para mayor seguridad se coloque a exactamente a 78º respecto del piso ¿A qué distancia debería separarla en su parte inferior de la pared?

92) Si el pintor coloca el pie de la escalera a 70 cm de la pared ¿Qué ángulo quedará formado entre la escalera y el piso?

Más problemas de aplicación:

Mariana y Claudia viven cada una en un edificio, y los mismos están enfrentados y separados por una distancia de 65 metros. Mariana vive en el 5º piso y Claudia en el 19º piso del edificio de enfrente. La altura del balcón de la casa de Claudia es de 58 metros. Además sabemos que el ángulo de observación de Mariana para ver el balcón de la casa de Claudia es de 35º

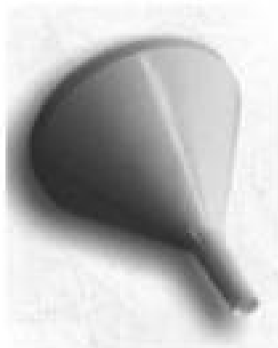
93) Hallar la altura del balcón de la casa de Mariana.

94) ¿Cuál es el ángulo de observación hacia abajo desde el balcón de Mariana con respecto a la planta baja del edificio de Claudia?

95) Sabiendo que el sonido viaja a una velocidad de aproximadamente 340 metros/segundo. Si del balcón de Mariana se produjera una explosión ¿En cuánto tiempo llegaría el sonido a escucharse desde la explosión en el balcón de la casa de Claudia?

96) En la subida a una autopista el ángulo de subida es proporcional al 13% (Por cada 100 metros horizontales hay una altura de 13 metros). Si el indicador de kilometraje de un auto marca que recorre 116,4 metros para realizar la subida ¿Cuál es la altura total que se eleva el auto desde el nivel del suelo al entrar en la autopista?

97) Fabiana tiene un embudo cuyo diámetro mayor es de 20 cm y su diámetro menor es de 1 cm. La parte cilíndrica de diámetro 1 cm del embudo mide 5 cm de largo. Si la longitud total del embudo es de 18 cm. Hallar el ángulo exacto de apertura del embudo



Dado el siguiente gráfico:

98) Hallar $\overline{ob}$

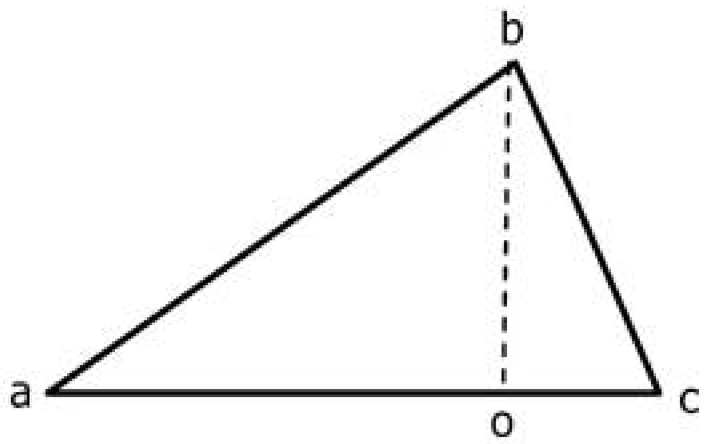
99) Hallar $\overline{oc}$

100) Hallar $\overline{ab}$

101) Hallar $\overline{bc}$

102) Hallar el perímetro de $\widehat{abc}$

103) Hallar el área de $\widehat{abc}$



Datos:

$\overline{ao} = 8\ cm$

$\widehat{bac} = 37°$

$\widehat{acb} = 51°$

Problemas con figuras geométricas:

104) Hallar el área de un triángulo isósceles cuya base mide 10 cm y sus ángulos iguales miden 70º

105) Dado un paralelogramo cuyos lado mayor mide 10 cm. Sabiendo que su lado menor forma un ángulo de 60º respecto de la base. Y sabiendo que su área vale 50 cm^2. Calcular su perímetro.

106) Si en el centro de una circunferencia de 20 cm de diámetro dibujamos un rectángulo de 10 cm de altura, de modo tal que los cuatro vértices del rectángulo pertenezcan a la circunferencia. ¿Cuál es el ángulo que forma la diagonal del rectángulo con su base?

Si tenemos un trapecio isósceles cuya base mayor mide 20 cm, y el ángulo formado por la diagonal y dicha base es de 30º, y además sabemos que sus lados iguales miden 7cm cada uno y que su ángulo respecto a la base mayor es de 60º.

107) ¿Cuánto vale su altura?

108) ¿Cuánto vale su perímetro?

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

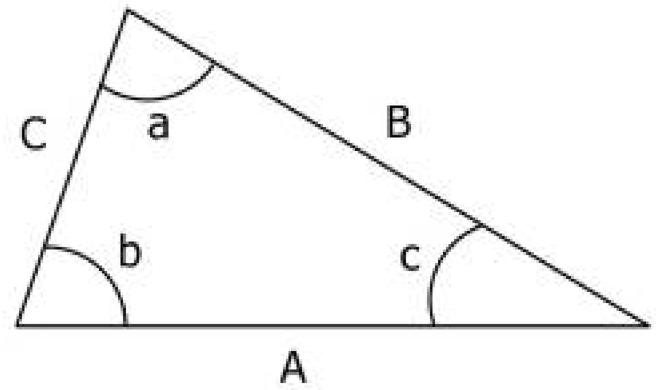
Trigonometría
Nivel II

Número de Tema: **53**

Área: **Matemática**

☆ Teorema del Seno

La Razón entre los lados de cualquier triángulo y los Senos de sus ángulos opuestos es constante.



Fórmula: $$\frac{A}{\text{Sen}(a)} = \frac{B}{\text{Sen}(b)} = \frac{C}{\text{Sen}(c)}$$

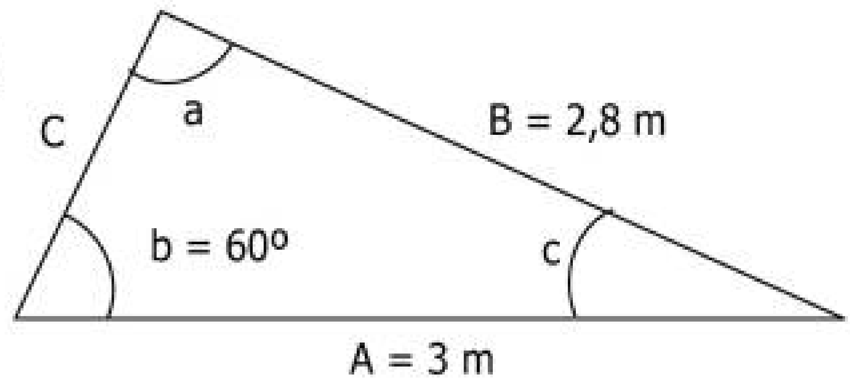
Esta fórmula es una triple igualdad. Y parece complicada para usar. Pero en realidad, cuando usemos este teorema, no vamos a usar esa triple igualdad así como está escrita. Vamos a usar sólo una parte. Por ejemplo de la fórmula yo puedo extraer las siguientes partes:

$$\frac{A}{\text{Sen}(a)} = \frac{B}{\text{Sen}(b)} \qquad \frac{B}{\text{Sen}(b)} = \frac{C}{\text{Sen}(c)} \qquad \frac{A}{\text{Sen}(a)} = \frac{C}{\text{Sen}(c)}$$

Claro que voy a usar una parte u otra de esa ecuación según me convenga, en función de lo que tengo de dato y de lo que tengo que calcular. Por ejemplo, si tengo de dato el lado **A** y los ángulos **a** y **c** y tengo que calcular el lado **C,** entonces voy a usar la fórmula que relaciona "A" y "C".

Fíjense que interesante. No hace falta que el triángulo sea rectángulo, por lo tanto esto lo puedo usar en cualquier triángulo. Otra aclaración. Se puede usar la "fórmula dada vuelta", o sea que en lugar de los lados sobre los Senos de los ángulos, se puede escribir como los Senos de los ángulos sobre los lados, ya que en realidad, el teorema dice: "la razón entre los lados y los Senos de sus ángulos opuestos es constante", o sea, las relaciones son proporcionales.

Ejemplo del Teorema del Seno: Calcular C y los ángulos a y c



Primero escribo la fórmula: $$\frac{A}{\text{Sen}(a)} = \frac{B}{\text{Sen}(b)} = \frac{C}{\text{Sen}(c)}$$

Primero calculo el ángulo "a"

$\frac{A}{\text{Sen}(a)} = \frac{B}{\text{Sen}(b)} \Longrightarrow$ Reemplazo los valores que conozco... $\Longrightarrow \frac{3\text{ m}}{\text{Sen}(a)} = \frac{2{,}8\text{m}}{\text{Sen}(60)} \Longrightarrow$ Paso multiplicando los denominadores $\Longrightarrow 3\text{ m}\cdot\text{Sen}(60) = 2{,}8\text{m}\cdot\text{Sen}(a)$

$2{,}59\text{ m} = 2{,}8\text{m}\cdot\text{Sen}(a) \Longrightarrow$ Despejo el ángulo "a" $\Longrightarrow \frac{2{,}59\text{ m}}{2{,}8\text{m}} = \text{Sen}(a) \Longrightarrow \text{Sen}(a) = 0{,}92 \Longrightarrow a = \text{Arco Sen}(0{,}92)$

Para despejar un ángulo afectado por la función Seno, debo usar su función inversa que es "Arco Sen"

$\Longrightarrow a = \text{Arco Sen}(0{,}92) = 68º16'$

Para calcular el **ArcSeno 0,92** con la calculadora escribo "0,92", aprieto la tecla "Inv" y después la tecla "Sen"
En las calculadoras más nuevas, primero aprieto "Inv", luego "Sen" y después "0,92". Y Por último la tecla "=" o "Enter"

Ya calculé "**a**". Ahora, usando la propiedad de la suma de los ángulos interiores del triángulo voy a calcular el ángulo que me falta "c". Propiedad: **La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º**

Entonces si yo ya sé que:
a = 68º 16′ b = 60º c = ?

Escribo la fórmula, reemplazo los ángulos que conozco y despejo c:

$a + b + c = 180º \Longrightarrow 68º16' + 60º + \mathbf{c} = 180º \Longrightarrow \mathbf{c} = 180º - 68º16' - 60º \Longrightarrow \boxed{c = 51º\,44'}$

Ahora lo último que me falta calcular es el lado C:

Vuelvo a escribir la fórmula: $\frac{A}{\text{Sen}(a)} = \frac{B}{\text{Sen}(b)} = \frac{C}{\text{Sen}(c)} \Longrightarrow$ Reemplazo los valores que conozco... $\Longrightarrow \frac{3\text{ m}}{\text{Sen}(68º16')} = \frac{\mathbf{C}}{\text{Sen}(51º\,44')}$

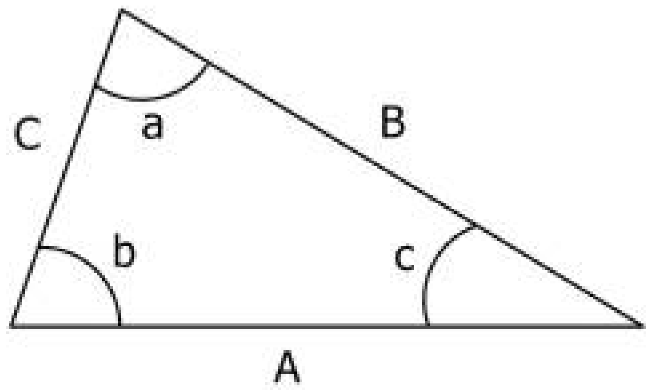
$\Longrightarrow$ Despejo "**C**" $\Longrightarrow \text{Sen}(51º\,44')\cdot\frac{3\text{ m}}{\text{Sen}(68º16')} = \mathbf{C} \Longrightarrow$ Hago las cuentas $\Longrightarrow \boxed{C = 2{,}55\text{ m}}$

✩ Teorema del Coseno

> El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos, el doble producto de ellos multiplicados por el Coseno del ángulo que forman.

Fórmulas:

$$\begin{cases} A^2 = B^2 + C^2 - 2 \cdot B \cdot C \cdot \text{Coseno (a)} \\ B^2 = A^2 + C^2 - 2 \cdot A \cdot C \cdot \text{Coseno (b)} \\ C^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cdot \text{Coseno (c)} \end{cases}$$

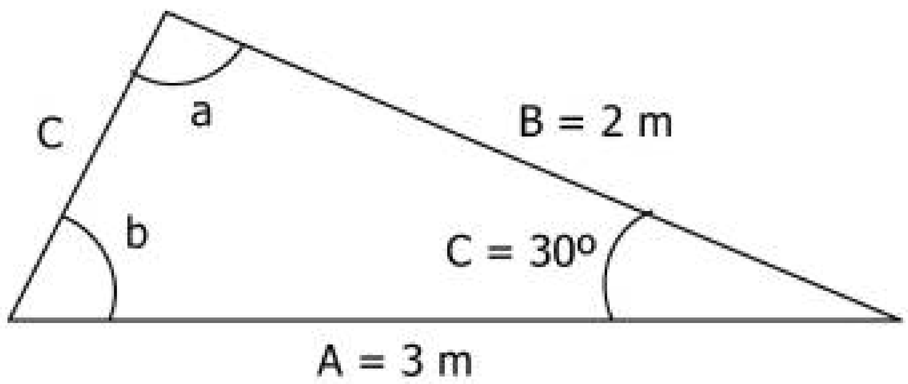


Con estas tres fórmulas puedo calcular:

- **Un ángulo** (si tengo como dato los tres lados).
- **Un lado** (Si tengo como dato los otros dos lados y el ángulo que forman).

Fíjense que interesante. No hace falta que el triángulo sea rectángulo, por lo tanto lo puedo usar en cualquier triángulo. Lo mismo que pasaba con el Teorema del Seno.

Ejemplo: Calcular el lado C y los ángulos a y b.



Lo primero que voy a calcular es el lado C.
Pude haber empezado con los ángulos, es lo mismo.

Fórmula: $C^2 = A^2+B^2 -2 \cdot A \cdot B \cdot \text{Cos (c)} \Rightarrow$ Reemplazo los valores que conozco... $\Rightarrow C^2 = (3m)^2+(2m)^2 -2 \cdot 3m \cdot 2m \cdot \text{Cos } 30º$

$$C^2 = 9m^2+4m^2 -12m^2 \cdot \text{Cos } (30º) \Rightarrow C^2 = 9m^2+4m^2 -12m^2 \cdot 0{,}866 \Rightarrow C^2 = 9m^2+4m^2 -10{,}39m^2$$

$$\Rightarrow C^2 = 2{,}61m^2 \Rightarrow C = \sqrt{2{,}61\ m^2} \Rightarrow \boxed{C = 1{,}61\ m}$$

Ahora voy a calcular los ángulos. Empezamos con "a"

$A^2 = B^2 + C^2 -2 \cdot B \cdot C \cdot \text{Cos (a)} \Rightarrow$ Reemplazo valores $\Rightarrow (3m)^2= (2m)^2 +(1{,}61m)^2 -2 \cdot 2m \cdot 1{,}61m \cdot \text{Cos (a)}$

$\Rightarrow 9m^2 = 4m^2 + 2{,}591m^2 - 6{,}44m^2 \cdot \text{Coseno (a)} \Rightarrow$ Despejo el ángulo "a" $\Rightarrow \dfrac{9\ m^2 - 4\,m^2 - 2{,}59m^2}{-6{,}44\,m^2} = \text{Cos}\,(a)$

$\Rightarrow \text{Cos}\,(a) = -0{,}374 \Rightarrow a = \text{Arc Cos } (-\,0{,}37) \Rightarrow \boxed{a = 111º\ 58'\ 35''}$

Para despejar un ángulo afectado por la función Seno, debo usar su función inversa que es "Arco Sen"

Para calcular el **ArcCos –0,374** con la calculadora escribo "–0,374", aprieto la tecla "Inv" y después la tecla "Cos"

En las calculadoras más nuevas, primero aprieto "Inv", luego "Cos" y después "–0,374". Por último presiono la tecla "="

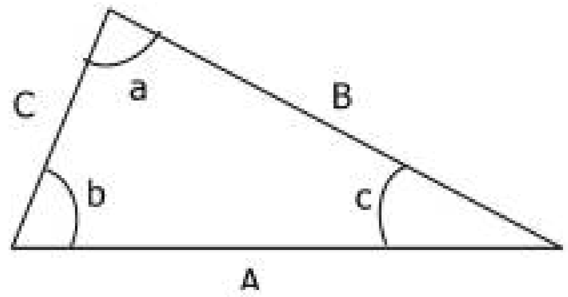
Yo ya sé que:
$a = 111º\ 58'\ 35''$ y $c = 30º$

Entonces para calcular el ángulo "b" que me falta, escribo la fórmula de los ángulos interiores de un triángulo, reemplazo los ángulos que conozco y despejo "b":

$$a + b + c = 180º \Rightarrow 111º\ 58'\ 35'' + b + 30º = 180º \Rightarrow b = 180º - 111º\ 58'\ 35'' - 30º$$

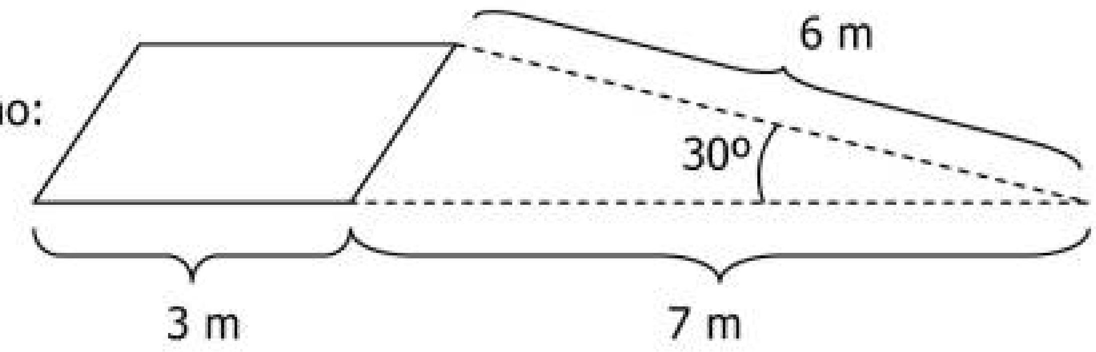
$$\Rightarrow \boxed{b = 38º\ 1'\ 25''}$$

Dado el siguiente triángulo:
Hallar los lados y/o ángulos que faltan:

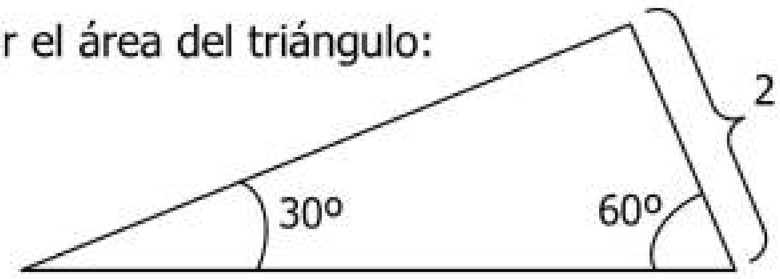


1)A = 3 m B = 2 m b = 40º	4)A = 15 m C = 10 m b = 60º	6)A = 21 cm B = 20 cm b = 70º	8)A = 5 m C = 2 m b = 45º	10) A = 1,5 dm B = 11 cm C = 90 mm	12) A=3 m B = 5 m c = 120º
3)A = 12 m B = 10 m c = 30º	5)A = 18 m C = 16 m c = 58º	7)B = 51 m C = 45 m b = 65º	9)C = 14 cm a = 30º b = 96º	11) A = 3 m B = 2 m C = 4 m	13) A=9 cm B = 12 cm C = 15 cm

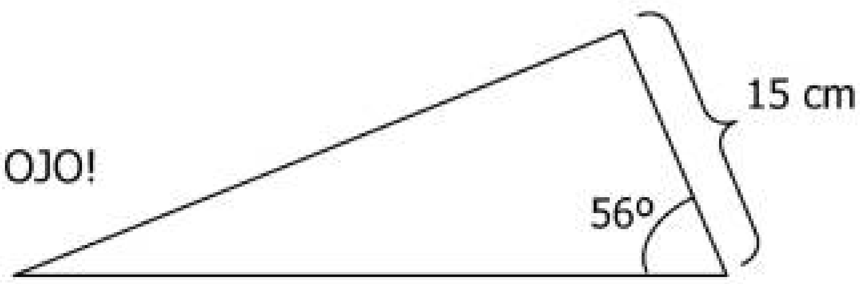
14) Hallar el área del paralelogramo:



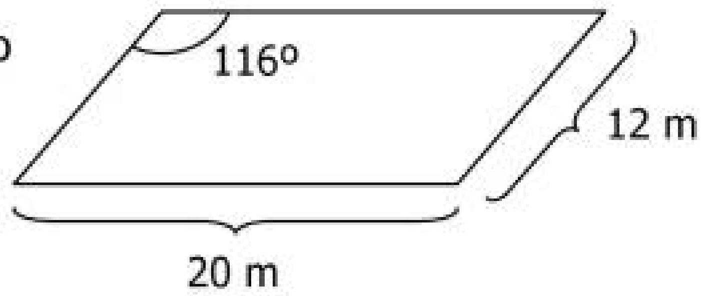
14) Hallar el área del triángulo:



15) Hallar la altura del triángulo: Este es medio tramposo. OJO!
NO falta ningún dato.



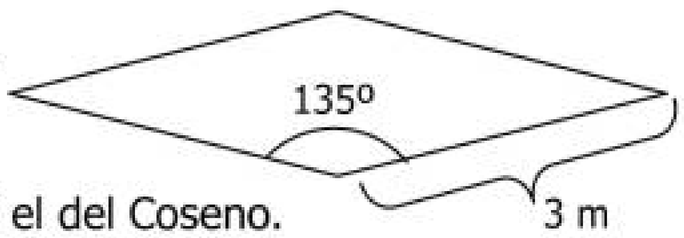
16) Hallar la diagonal mayor del paralelogramo



17) Hallar la diagonal menor del rombo, usando el Teorema del Coseno.

18) Hallar la diagonal menor del rombo, usando el Teorema del Seno.

19) Hallar la diagonal menor del rombo, sin usar el Teorema del Seno ni el del Coseno.

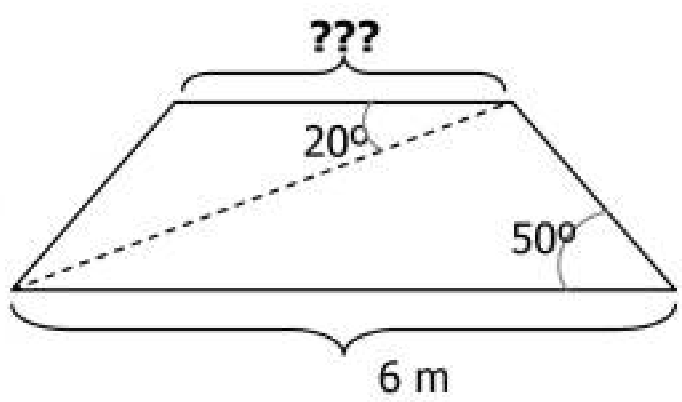


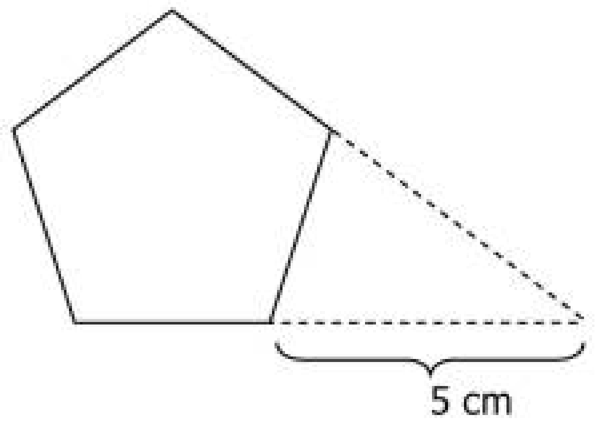
20) TRIÁNGULOS RAROS:
¿Cuál tiene una superficie mayor, un triángulo con lados 5, 5, 6 o uno con lados 5, 5, 8

Ideal para usar el Teorema del Coseno para hallar un ángulo y después con la función Seno es igual a opuesto sobre hipotenusa se puede calcular la altura de cada triángulo. Esto sumado a que ya sabemos la base (porque sabemos el valor de los tres lados) nos sirve para calcular las áreas.

Pero, un momento! Hay una manera mucho más fácil. El desafío es que lo hagas de las dos maneras. Una es como lo expliqué muy brevemente ahí arriba, y la otra..... bueno tratá de descubrirlo vos. Te digo que ni siquiera hace falta usar calculadora, hay que hacer cuentas muy fáciles.

21) Hallar la base menor del trapecio
(es un trapecio cuyos lados laterales son iguales)
Ah no falta ningún dato, con los que hay alcanza y sobra. Está difícil no?

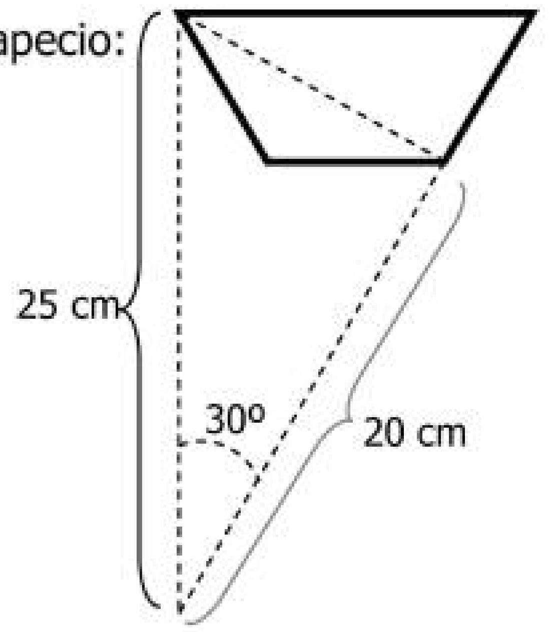




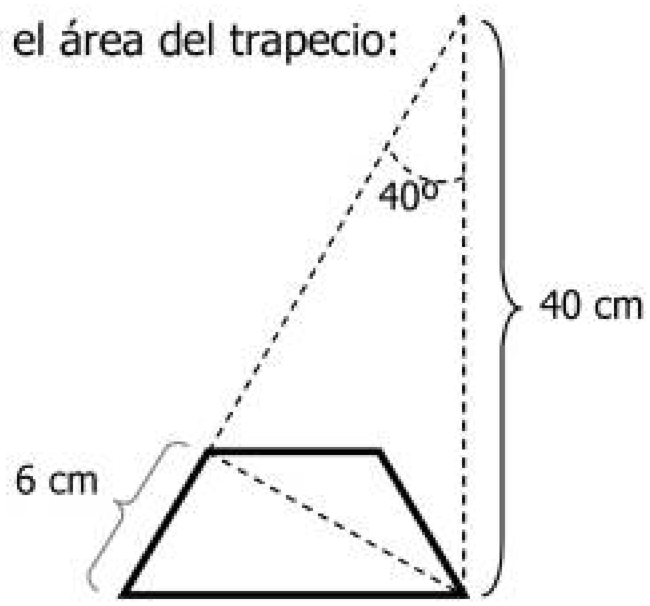
22) Hallar el valor del lado del siguiente pentágono regular.
Ojo, no faltan datos!!

(Tienen que tener en cuenta que en cualquier pentágono el ángulo central es 72º que es lo que da 360º dividido 5)

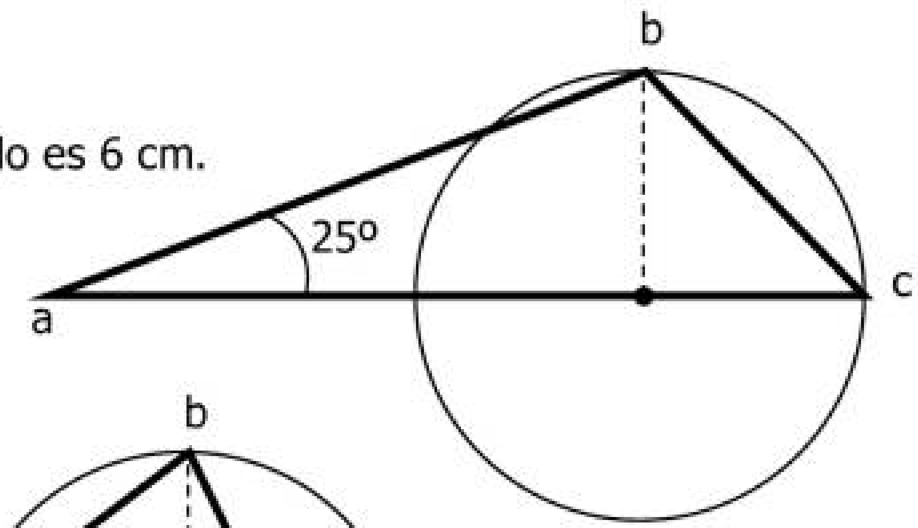
23) Hallar el área del trapecio:



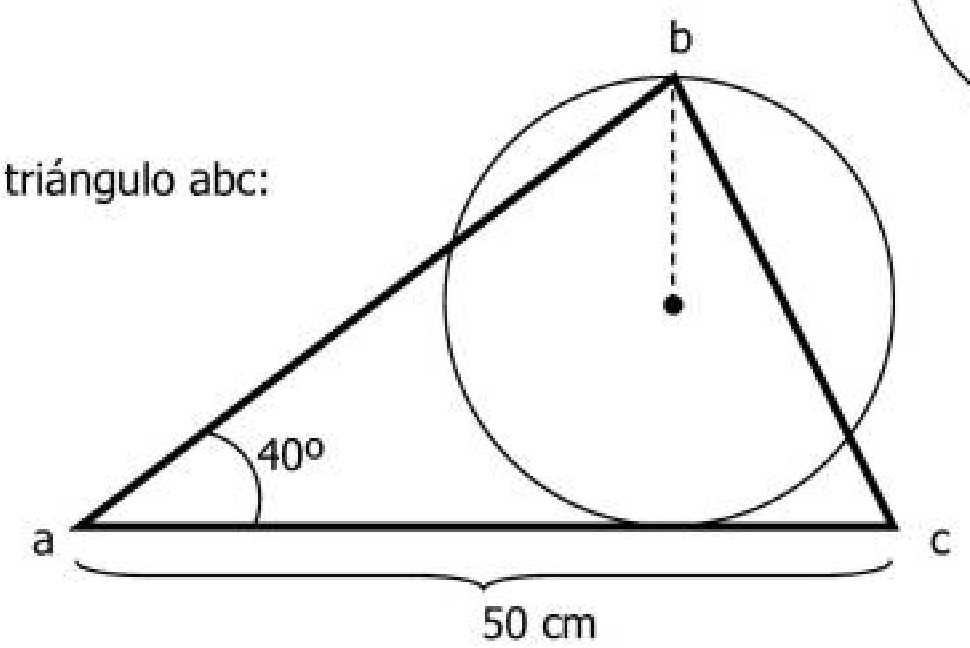
24) Hallar el área del trapecio:

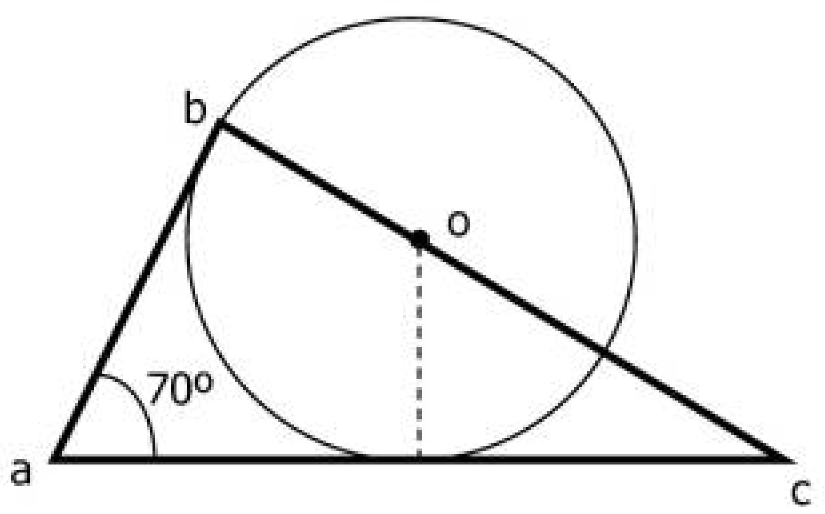


25) Hallar el área del triángulo abc si el radio del círculo es 6 cm.



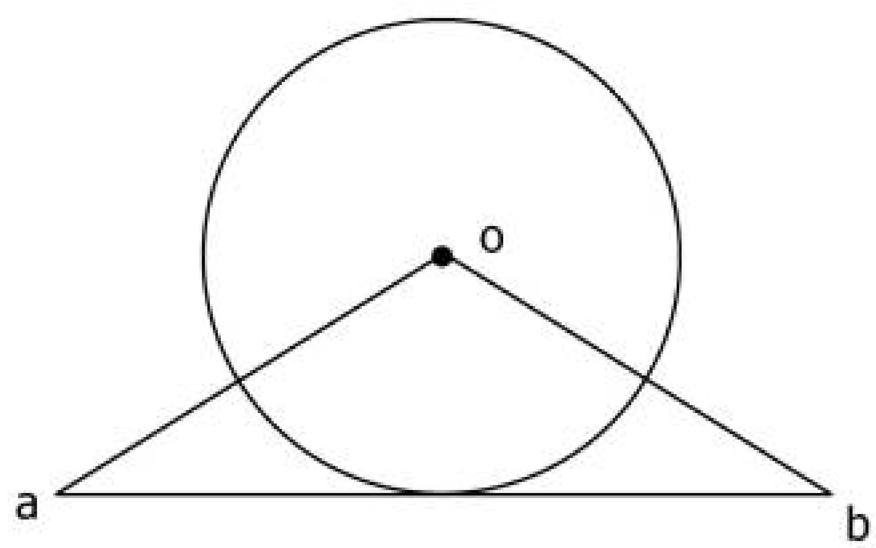
26) Calcular el perímetro del triángulo abc:
Radio del círculo: 20 cm





27) Hallar el perímetro del triángulo abc:
ob = 5 cm (es el radio del círculo)
oc = 10 cm

28) Hallar el área del triángulo isósceles aob
"o" es el centro del círculo
El radio del círculo mide 10 cm
El ángulo obtuso del triángulo mide 120º



Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Trigonometría Nivel III

Número de Tema: **54**

Área: **Matemática**

Razones Trigonométricas – Fórmulas

1 $\operatorname{cosec}(\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}$

2 $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$

3 $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

4 $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{cotg}(\alpha)}$

5 $\operatorname{Cotg}(\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}$

6 $\operatorname{cotg}(\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}$

Relaciones Fundamentales – Fórmulas

7 $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

8 $1 + \operatorname{tg}^2(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$

9 $\operatorname{tg}(\alpha).\operatorname{cotg}(\alpha) = 1$

10 $1 + \operatorname{cotg}^2(\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}$

Estas 4 relaciones son muy importantes. Nos van a servir después para resolver las identidades trigonométricas.

Razones trigonométricas de la suma o diferencia de ángulos – Fórmulas

11 $\operatorname{sen}(2.\alpha) = 2.\operatorname{sen}(\alpha).\cos(\alpha)$ $\Longrightarrow$ El Seno del doble de un ángulo.

12 $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$ $\Longrightarrow$ El Seno de la mitad de un ángulo.

13 $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha).\cos(\beta) \pm \cos(\alpha).\operatorname{sen}(\beta)$ $\Longrightarrow$ El Seno de una suma o resta.

14 $\cos(2.\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 2.\cos^2(\alpha) - 1$ $\Longrightarrow$ El Coseno del doble de un ángulo.

15 $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$ $\Longrightarrow$ El Coseno de la mitad de un ángulo.

16 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) \mp \operatorname{sen}(\alpha).\operatorname{sen}(\beta)$ $\Longrightarrow$ El Coseno de una suma o resta.

17 $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}(\alpha) \pm \operatorname{tg}(\beta)}{1 \mp \operatorname{tg}(\alpha).\operatorname{tg}(\beta)}$ $\Longrightarrow$ La Tangente de una suma o resta.

18 $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{cotg}(\alpha).\operatorname{cotg}(\beta) \mp 1}{\operatorname{cotg}(\alpha) \pm \operatorname{cotg}(\beta)\ \alpha}$ $\Longrightarrow$ La Cotangente de una suma o resta.

Transformación en producto de la suma y resta de razones trigonométricas – Fórmulas

19 $\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}.\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

20 $\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}.\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

21 $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}.\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

22 $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}.\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

23 $\operatorname{tg}(\alpha) \pm \operatorname{tg}(\beta) = \dfrac{\operatorname{sen}((\alpha) \pm (\beta))}{\cos(\alpha).\cos(\beta)}$

24 $\operatorname{cotg}(\alpha) \pm \operatorname{cotg}(\beta) = \dfrac{\operatorname{sen}((\alpha) \pm (\beta))}{\operatorname{sen}(\alpha).\operatorname{sen}(\beta)}$

Producto de funciones – Fórmulas

25 $\operatorname{sen}(\alpha).\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}.\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \dfrac{1}{2}.\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

26 $\operatorname{sen}(\alpha).\operatorname{sen}(\beta) = \dfrac{1}{2}.\cos(\alpha-\beta) - \dfrac{1}{2}.\cos(\alpha+\beta)$

27 $\cos(\alpha).\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}.\cos(\alpha-\beta) + \dfrac{1}{2}.\cos(\alpha+\beta)$

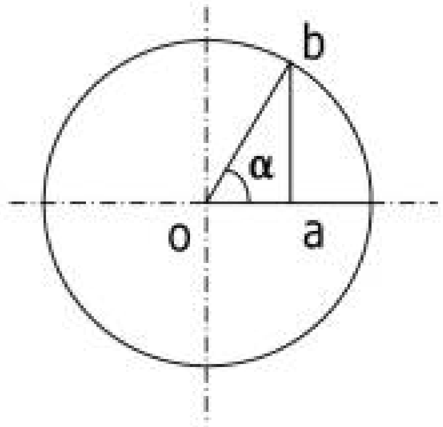
28 $\operatorname{tg}(\alpha).\operatorname{tg}(\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)}{\operatorname{cotg}(\alpha) + \operatorname{cotg}\beta}$

29 $\operatorname{cotg}(\alpha).\operatorname{cotg}(\beta) = \dfrac{\operatorname{cotg}(\alpha) + \operatorname{cotg}(\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)}$

☆ La Circunferencia Trigonométrica

☆ Razones Trigonométricas

✳ Seno $(\alpha) = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{ob}}$ ✳ Coseno $(\alpha) = \dfrac{\overline{ao}}{\overline{ob}}$ ✳ Tangente $(\alpha) = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{ao}}$



Vamos a suponer que el radio de la circunferencia vale 1 $\Longrightarrow$ $\overline{ob} = \textit{Radio de la Circunferencia} = 1$

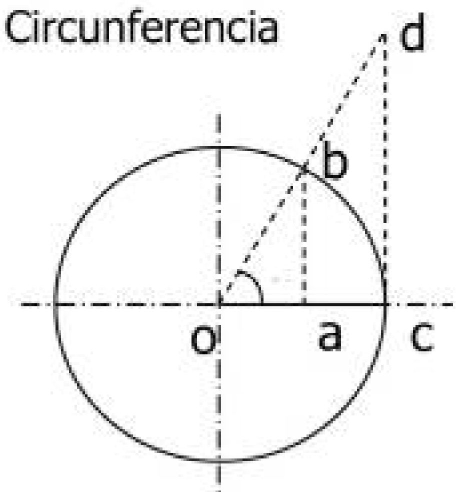
Entonces si $\overline{ob} = 1$ las fórmulas de las Funciones Trigonométricas (dentro de la Circunferencia Trigonométrica) se simplifican un poco.

✳ Seno $(\alpha) = \overline{ab}$

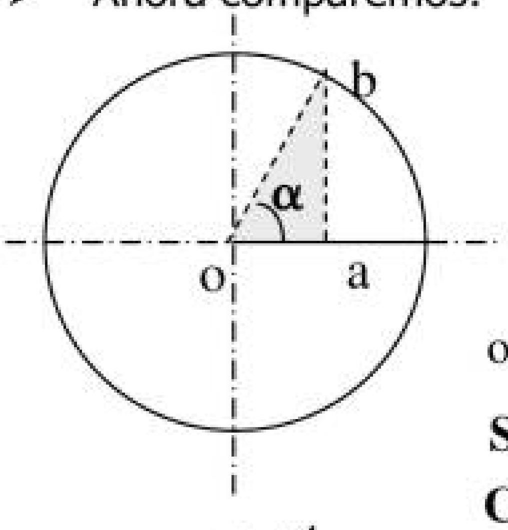
✳ Tg $(\alpha) = \boxed{\dfrac{\overline{ab}}{\overline{oa}}} = \boxed{\dfrac{\overline{cd}}{\overline{oc}}} = \overline{cd}$

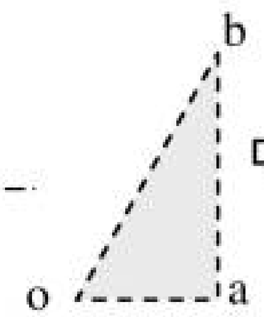
✳ Coseno $(\alpha) = \overline{ao}$

Por Semejanza de triángulos

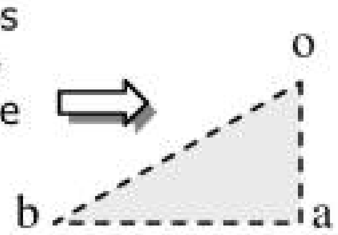


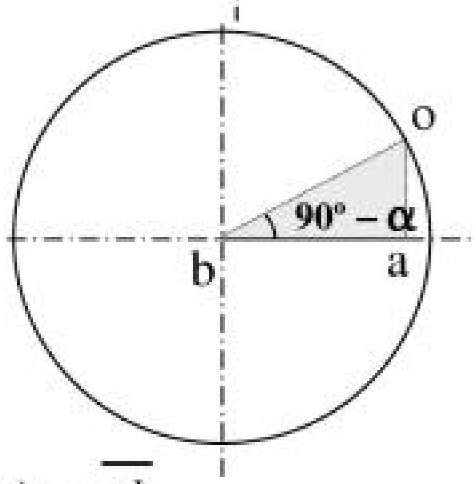
➢ Ahora comparemos: Veamos qué pasa con los Ángulos Complementarios





Los triángulos formados son congruentes, solo que están orientados de diferente manera.





Seno $(\alpha) = \overline{ab}$

Coseno $(\alpha) = \overline{ao}$

Coseno $(90^\circ - \alpha) = \overline{ab}$

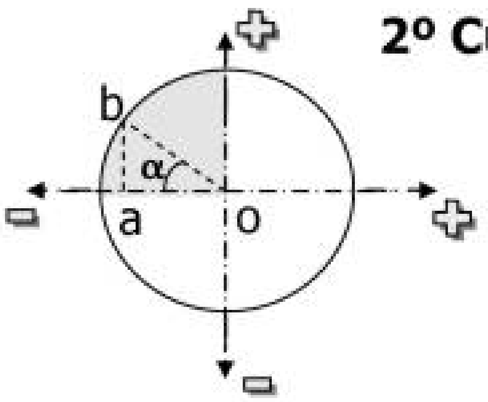
Seno $(90^\circ - \alpha) = \overline{ao}$

30 Coseno $(\alpha) =$ Seno $(90^{\circ} - \alpha)$

31 Seno $(\alpha) =$ Coseno $(90^{\circ} - \alpha)$

☆ Signos de las Funciones Trigonométricas en los distintos cuadrantes:

2º Cuadrante



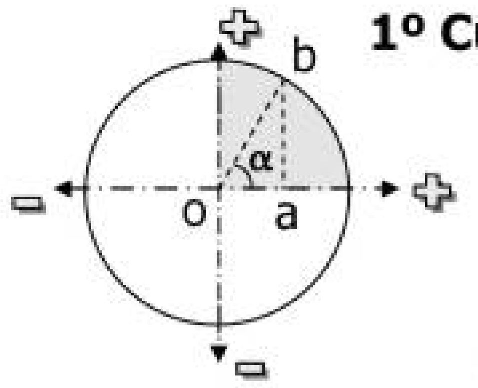
Sen $(\alpha) = \overline{ab}$ +

Cos $(\alpha) = \overline{ao}$ −

Tg $(\alpha) = \dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{+}{-}$ −

Regla práctica: **S**egundo cuadrante, empieza con **S**, entonces la **única función positiva** es el **Seno** (que también empieza con **S**)

1º Cuadrante



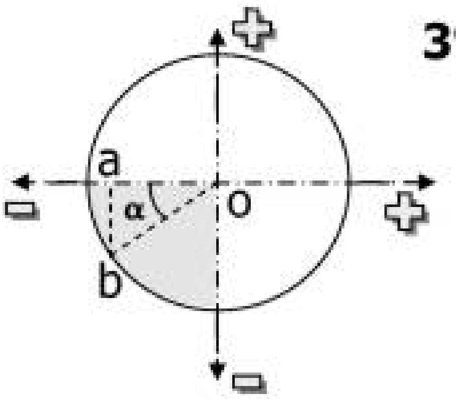
Sen $(\alpha) = \overline{ab}$ +

Cos $(\alpha) = \overline{ao}$ +

Tg $(\alpha) = \dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{+}{+}$ +

En el primer cuadrante son todas las razones positivas.

3º Cuadrante



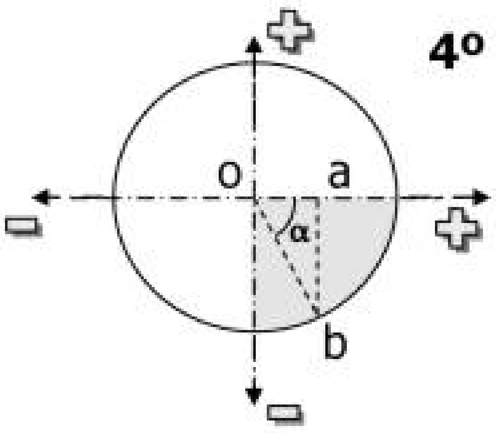
Sen $(\alpha) = \overline{ab}$ −

Cos $(\alpha) = \overline{ao}$ −

Tg $(\alpha) = \dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{-}{-}$ +

Regla práctica: **T**ercer Cuadrante, empieza con **T**, entonces la **única función positiva** es la **T**angente (que también empieza con **T**)

4º Cuadrante



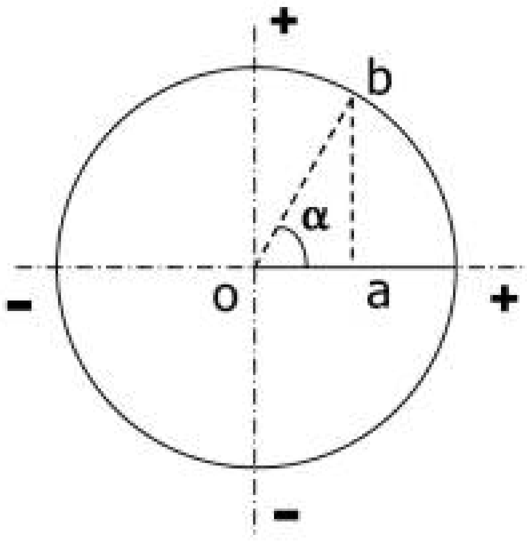
Sen $(\alpha) = \overline{ab}$ −

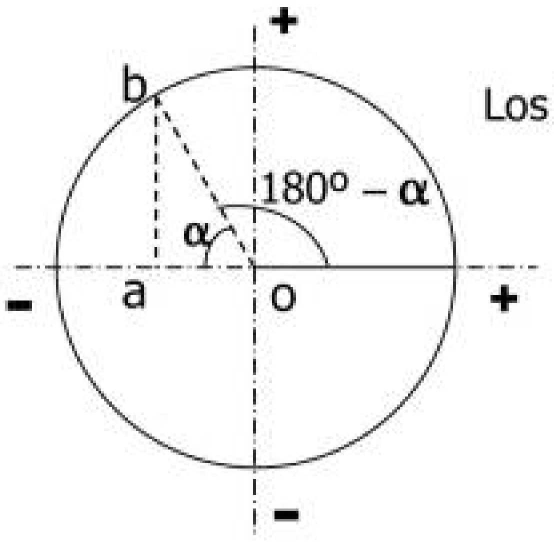
Cos $(\alpha) = \overline{ao}$ +

Tg $(\alpha) = \dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{-}{+}$ −

Regla práctica: **C**uarto cuadrante, empieza con **C**, entonces la **única función positiva** es el **C**oseno (que también empieza con **C**)

- Ahora comparemos: Veamos la relación entre las funciones en el **Primer Cuadrante y en el Segundo.**





Los Senos son iguales y del mismo signo (positivos)

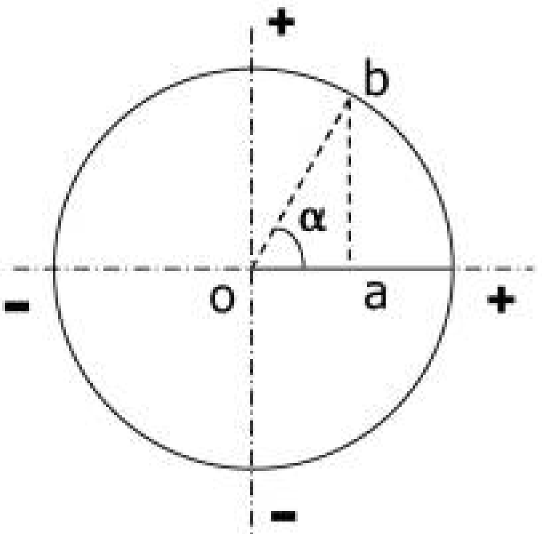
$$\text{Seno }(\alpha) = \text{Seno }(180^o - \alpha) \quad \textbf{32}$$

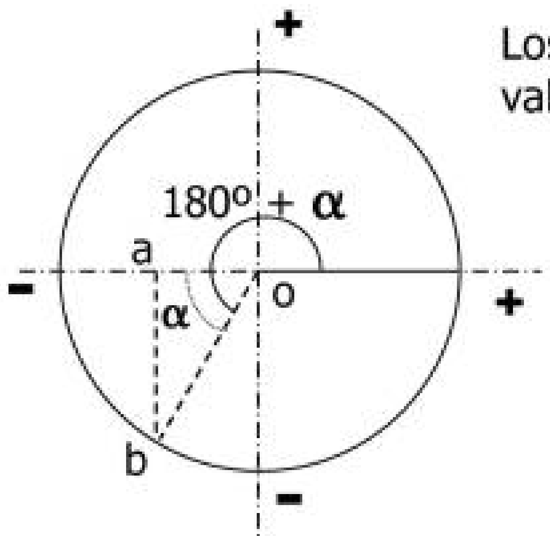
Los Cosenos son del mismo valor absoluto y distinto signo

$$\text{Coseno }(\alpha) = -\text{Coseno }(180^o - \alpha) \quad \textbf{33}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Seno }(\alpha) = \overline{ab} & \text{Seno }(180^o - \alpha) = \overline{ab} \\ \text{Coseno }(\alpha) = \overline{ao} & \text{Coseno }(180^o - \alpha) = -\overline{ao} \end{array}\right\} \text{Tangente }(\alpha) = -\text{Tangente }(180^o - \alpha) \quad \textbf{34}$$

- Ahora vamos a ver la relación entre las funciones en el Primer Cuadrante y en el Tercero...





Los Senos son del mismo valor absoluto y distinto signo

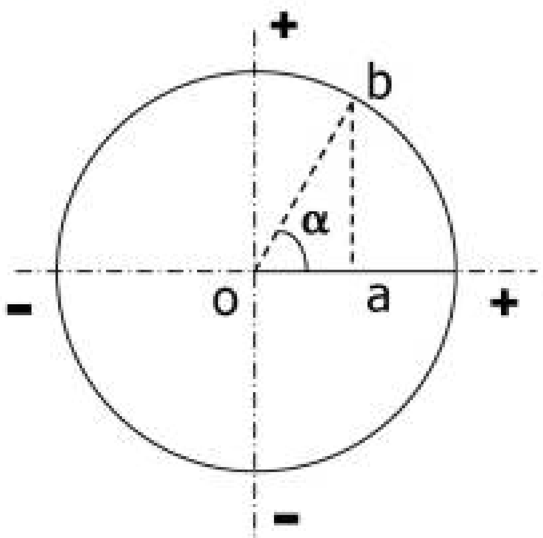
$$\text{Seno }(\alpha) = -\text{Seno }(180^o + \alpha) \quad \textbf{35}$$

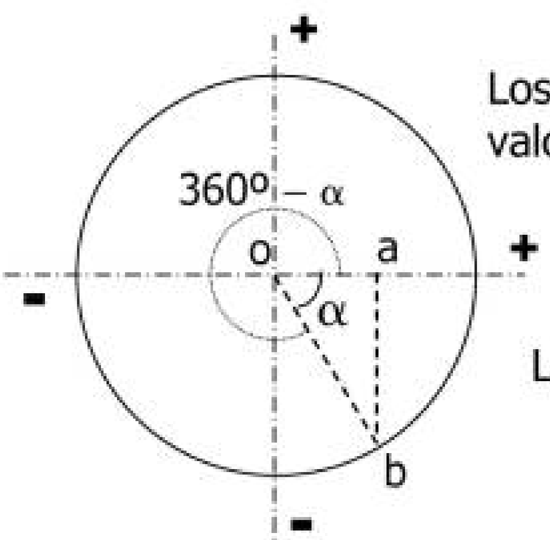
Los Cosenos son del mismo valor absoluto y distinto signo

$$\text{Coseno }(\alpha) = -\text{Coseno }(180^o + \alpha) \quad \textbf{36}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Seno }(\alpha) = \overline{ab} & \text{Seno }(180^o + \alpha) = -\overline{ab} \\ \text{Coseno }(\alpha) = \overline{ao} & \text{Coseno }(180^o + \alpha) = -\overline{ao} \end{array}\right\} \text{Tangente }(\alpha) = \text{Tangente }(180^o + \alpha) \quad \textbf{37}$$

- Por último vamos a ver la relación entre las funciones en el Primer Cuadrante y en el Cuarto...





Los Senos son del mismo valor absoluto y distinto signo

$$\text{Seno }(\alpha) = -\text{Seno }(360^o - \alpha) \quad \textbf{38}$$

Los Cosenos son iguales y del mismo signo

$$\text{Coseno }(\alpha) = \text{Coseno }(360^o - \alpha) \quad \textbf{39}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Seno }(\alpha) = \overline{ab} & \text{Seno}(360^o - \alpha) = -\overline{ab} \\ \text{Coseno }(\alpha) = \overline{ao} & \text{Coseno }(360^o - \alpha) = \overline{ao} \end{array}\right\} \text{Tangente }(\alpha) = -\text{Tangente }(360^o - \alpha) \quad \textbf{40}$$

- Uso de los π Radianes

Equivalencias: $2\pi \text{ Radianes} \xrightarrow{\text{equivalen a}} 360^o$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \pi \longrightarrow 180^o & \frac{1}{3}\pi \longrightarrow 60^o \\ \frac{1}{2}\pi \longrightarrow 90^o & \frac{1}{4}\pi \longrightarrow 45^o \end{array}\right.$$

Y Para pasar cualquier valor de un ángulo de grados a π Radianes o viceversa puedo plantear una regla de tres simple con cualquiera de las equivalencias citadas.

✓ Cálculo de Funciones Trigonométricas en función de Valores de tabla:

Acá tenemos una tabla de Senos, Cosenos y Tangentes, conocida desde hace muchos años.

En función de esta tabla podemos calcular algunos Senos, Cosenos y Tangentes sin calculadora.

	0º	30º	45º	60º	90º
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

Ejemplo –> Calcular Sen 15º   Reemplazo 15º por 45º – 30º (Que es lo mismo).

Sen (15º) = Sen (45º – 30º)

Aplico la fórmula del Seno de una resta.

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}(\alpha).\cos(\beta) \pm \cos(\alpha).\text{sen}(\beta)$$ 13

Sen 15º = Sen 45º . Cos 30º – Cos 45º Sen 30º

$$\text{Sen } 15º = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Sen } 15º = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \boxed{\text{Sen } 15º = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

Reemplazo los Senos y Cosenos que tengo en la tabla de arriba.

Hago las cuentas.

Nota: Es mejor dejar expresado el resultado así, con raíces, que hacer las cuentas, ya que si hacemos las cuentas, estaríamos truncando la parte decimal.

Otro Ejemplo –> Calcular Cos 105º

Aplico la fórmula del Coseno de una suma

Cos (105º) = Cos (45º + 60º)

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) \mp \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta)$$ 16

Cos 105º = Cos 45º . Cos 60º + Sen 45º Sen 60º

$$\text{Cos}\,105º = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Cos } 105º = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \boxed{\text{Cos } 105º = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

☆ Identidades Trigonométricas

¿Cómo se resuelven? Lo que hay que hacer es ir reemplazando las funciones, usando todas las fórmulas que vimos, hasta simplificar la expresión al mínimo posible, hasta que quede una igualdad obvia.

Ejemplo: Verificar la siguiente identidad: $\frac{\text{Sen}(180º - \alpha)}{\text{Cos}(\alpha)} + \text{Co tg}(\alpha) = \frac{1}{\text{Sen}(\alpha).\text{Sen}(90º - \alpha)}$

$$\frac{\text{Sen}(180º - \alpha)}{\text{Cos}(\alpha)} + \text{Co tg}(\alpha) = \frac{1}{\text{Sen}(\alpha).\text{Sen}(90º - \alpha)}$$

32 Seno (α) = Seno $(180º - \alpha)$

6 cotg $(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}$

30 Cos (α) = Sen $(90º - \alpha)$

Reemplazo usando esas fórmulas (Las estrellas indican el número de fórmula, como fueron expuestas en la teoría)

Reemplazando me queda: $\frac{\text{Sen}(\alpha)}{\text{Cos}(\alpha)} + \frac{\text{Cos}(\alpha)}{\text{Sen}(\alpha)} = \frac{1}{\text{Sen}(\alpha).\text{Cos}(\alpha)}$

Hago la cuenta con común denominador del 1º miembro de la igualdad:

$$\frac{\text{Sen}(\alpha)}{\text{Cos}(\alpha)} + \frac{\text{Cos}(\alpha)}{\text{Sen}(\alpha)} = \frac{.....}{\text{Sen}(\alpha).\text{Cos}(\alpha)}$$

$$\frac{\text{Sen}(\alpha)}{\text{Cos}(\alpha)} + \frac{\text{Cos}(\alpha)}{\text{Sen}(\alpha)} = \frac{\text{Sen}^2(\alpha) + \text{Cos}^2(\alpha)}{\text{Sen}(\alpha).\text{Cos}(\alpha)}$$

Reemplazo el resultado de esta cuenta en la identidad

$$\frac{\boxed{\text{Sen}^2(\alpha) + \text{Cos}^2(\alpha)}}{\text{Sen}(\alpha).\text{Cos}(\alpha)} = \frac{1}{\text{Sen}(\alpha).\text{Cos}(\alpha)}$$

Reemplazo esta expresión

$$\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad 7 \Rightarrow \frac{1}{\text{Sen}(\alpha)\text{Cos}(\alpha)} = \frac{1}{\text{Sen}(\alpha)\text{Cos}(\alpha)}$$

...y como vemos, verificamos la igualdad.

Verificar las siguientes identidades trigonométricas:
Nota, algunas son bastante trabajosas, la serie del final de la unidad es más fácil de resolver

1) $4.\operatorname{sen} x.\operatorname{sen}(60^\circ - x).\operatorname{sen}(60^\circ + x) = \operatorname{sen} 3.x$

2) $\operatorname{sen} x + \cos x + 1 = 2.\sqrt{2}.\cos\frac{x}{2}.\cos\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)$

3) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2 = 4\cos^2\frac{(\alpha+\beta)}{2}$

4) $\operatorname{sen} 10^\circ + 2.\operatorname{sen} 5^\circ.\cos 15^\circ + \cos 50^\circ = \cos 10^\circ$

5) $1 - \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos 2.x}{\cos^2 x}$

6) $\cos 10^\circ.\cos 50^\circ.\cos 70^\circ = \sqrt{3}/8$

7) $\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}(\beta-\gamma) + \operatorname{sen}\gamma.\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = -\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\alpha-\gamma)$

8) $\operatorname{tg} 20^\circ.\operatorname{tg} 40^\circ.\operatorname{tg} 60^\circ.\operatorname{tg} 80^\circ = 3$

9) $(1 + \operatorname{sen}(\alpha)).\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{Sec}(\alpha)\cdot\left(\operatorname{Sen}(\alpha) + 1 - \operatorname{Cos}^2(\alpha)\right)$

10) $\operatorname{Tg}(\alpha) + \operatorname{Cotg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{Sen}(\alpha)\cdot\operatorname{Cos}(\alpha)}$

11) $(\operatorname{Sen}(\alpha) + \operatorname{Cos}(\alpha))^2 + (\operatorname{Cos}(\alpha) - \operatorname{Sen}(\alpha))^2 = 2$

12) $\frac{(1 + \operatorname{Cos}(\alpha))\cdot(1 - \operatorname{Cos}(\alpha))}{\operatorname{Cos}(\alpha)} = \operatorname{Sec}(\alpha) - \operatorname{Cos}(\alpha)$

13) $\operatorname{Sen}^4(\alpha) - \operatorname{Sen}^2(\alpha) = \operatorname{Cos}^4(\alpha) - \operatorname{Cos}^2(\alpha)$

14) $\frac{\cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\beta)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)\cdot\operatorname{sen}^2(\beta)} = \operatorname{tg}^2(\pi/2 - \alpha)\cdot\operatorname{tg}^2(\pi/2 - \beta) - 1$

15) $\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}$

16) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$

17) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{1 + \operatorname{tg}^2(\beta)} = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha)\cdot\operatorname{tg}^2(\beta)}$

18) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)} = \cos^2(\alpha)$

19) $(1 + \operatorname{tg}\alpha)\cdot(1 - \operatorname{tg}\alpha) + \sec^2(\alpha) = 2$

20) $\operatorname{sen}^2(\alpha)\cdot\left[1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)\right] = \operatorname{tg}^2(\alpha)$

21) $\operatorname{Cos}(\alpha)\cdot\operatorname{Cosec}(\alpha)\cdot\operatorname{Tg}(\alpha) - \operatorname{Sen}^2(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{Sec}^2(\alpha)}$

22) $\operatorname{Cotg}(2x) = \frac{\operatorname{Cotg}(x) - \operatorname{Tg}(x)}{2}$

24) $\operatorname{Sen}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{Sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{Sen}^2(\alpha) - \operatorname{Sen}^2(\beta)$

23) $\operatorname{Sen}(3\alpha) = 3\operatorname{Sen}(\alpha) - 4\operatorname{Sen}^3(\alpha)$

Calcular sin calculadora (Con la tabla de 30º, 45º, 60º y 90º) y las fórmulas:

25) Sen 240° =

26) Tg 225° =

27) Tg 300° =

28) Sen 390° =

29) Sec 135° =

30) Sec 660° =

31) Sen 135 =

32) Cos 120 =

33) Tg 75º =

34) Sen 75º =

35) Cos 75º =

36) Sen 150º =

37) Cos 165º =

38) Tg 165º =

39) Sen 195º =

40) Cos 210º =

41) Sen 255º =

42) Cos 255º =

43) Tg 255º =

44) Sen 285º =

45) Cos 285º=

46) Tg 285º=

47) Sen 345º =

48) Cos 345º=

49) Tg 345º=

Pasar a grados los siguientes ángulos expresados en π radianes:

50) 1π 54) $3/5\ \pi$ 57) $3/2\ \pi$ 60) $7/4\ \pi$

52) $1/6\ \pi$ 55) $2/3\ \pi$ 58) $5/2\ \pi$ 61) $9/4\pi$

53) $1/12\ \pi$ 56) $1/9\ \pi$ 59) $3/4\ \pi$

Pasar a fracciones de π radianes los siguientes ángulos en grados:

62) 10º 64) 40º 66) 100º 68) 150º 70) 250º

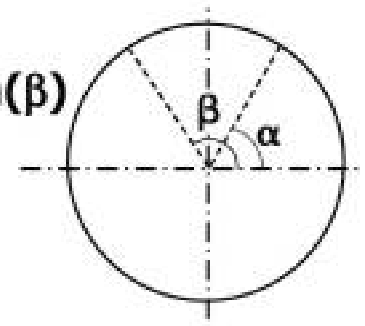
63) 20º 65) 50º 67) 110º 69) 200º 71) 260º

Dados los siguientes ángulos**, buscar para cada uno de ellos el ángulo del tercer cuadrante para el cual la función tangente es igual en ambos ángulos.**

72) $\alpha = 30^{o}$ 74) $\alpha = 1/5\ \pi$ 76) $\alpha = 1/3\ \pi - 5^{o}$

73) $\alpha = 45^{o}$ 75) $\alpha = 1/4\ \pi$ 77) $\alpha = 1/2\ \pi - 10^{o}$

Dados $0^{o}<\alpha<90^{o}$ y $90^{o}<\beta<180^{o}$ **Hallar "k" en cada caso para que Sen(α) = Sen(β)**



78) $\beta = 3\,\mathbf{k} - \alpha$
79) $\alpha + \beta = 7\,\mathbf{k} + 40^{o}$
80) $2\alpha + 2\beta - \pi/2 = \mathbf{k} + \pi$
81) $3\alpha + 3\beta - 2\pi = 3\mathbf{k} + \pi/6$

Ahora, dos Sistemas de Ecuaciones Trigonométricos:

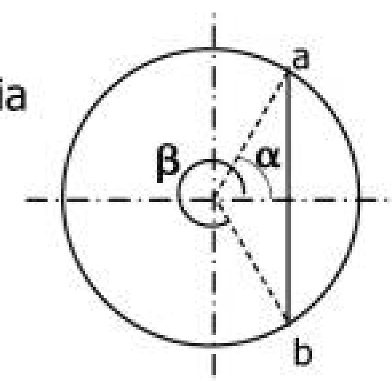
81) Teniendo los siguientes datos:
Hallar "α" y "β"

$$\begin{cases} 0^{o}<\alpha<90^{o} \\ 180^{o}<\beta<270^{o} \\ \text{Cos}(\alpha) = -\text{Cos}(\beta) \\ 13\alpha - 2\beta - 10^{o} = \pi \end{cases}$$

82) Teniendo los siguientes datos:
Hallar "α" y "β"

$$\begin{cases} 0^{o}<\alpha<90^{o} \\ 0^{o}<\beta<90^{o} \\ \text{Cos}(\alpha) = \text{Sen}(\beta) \\ 5\alpha - 2\beta + 60^{o} = \pi/2 \end{cases}$$

Si el segmento ab es paralelo al eje vertical de la circunferencia
83) ¿Qué relación hay entre "α" y "β" ?
84) ¿Qué relación hay entre los cosenos de "α" y "β" ?



Responder Verdadero o Falso:

85) Todos los ángulos del 1° cuadrante tienen un ángulo del 4° cuadrante tal que sus Cosenos son iguales

86) Si sabemos que Cos $\alpha = 0{,}3$ y que $0<\alpha<2\pi$, entonces hay un único valor de α que verifica esto.

87) Si sabemos que Cos $\alpha = 0{,}3$ y que $0<\alpha<2\pi$, entonces hay 2 valores de α que verifican esto.

88) EL Seno de un ángulo menor a 180º siempre es positivo.

89) EL Coseno de un ángulo menor a 180º siempre es positivo.

89) EL Coseno de un ángulo "α" tal que $-\pi/2< \alpha<\pi/2$, siempre es positivo.

90) EL Coseno de un ángulo "α" tal que $\pi/2 < \alpha < 3/2\ \pi$, siempre es positivo.

91) El Seno de cualquier ángulo es igual al Coseno de su complementario, para todo ángulo menor a 90º.

Conociendo el valor del seno de un ángulo, **calcular su coseno sin calcular el ángulo**: $(0<\alpha<\pi/2)$
(Expresar el resultado como una fracción)

92) $\text{Sen}(\alpha) = 12/13$
93) $\text{Sen}(\alpha) = 35/37$
94) $\text{Sen}(\alpha) = 7/25$
95) $\text{Sen}(\alpha) = 40/41$
96) $\text{Sen}(\alpha) = 2\sqrt{(2)}/3$
97) $\text{Sen}(\alpha) = 45/53$
98) $\text{Sen}(\alpha) = 15/17$
99) $\text{Sen}(\alpha) = 33/65$

Conociendo el valor de una función trigonométrica, **calcular Sen(α) sin calcular α**: $(0<\alpha<\pi/2)$
(Expresar el resultado como una fracción)

100) $\text{Cosec}(\alpha) = 8/5$
101) $\text{Sec}(\alpha)=5\sqrt{(6)}/12$
102) $\text{Sec}(\alpha) = 7\sqrt{(3)}/12$
103) $\text{Tg}(\alpha) = \sqrt{(5)}/20$
104) $\text{Cotg}(\alpha) = 3\sqrt{(7)}$
105) $\text{Sec}(\alpha) = 25/24$
106) $\text{Cosec}(\alpha) = 2$
107) $\text{Sec}(\alpha) = 89/13$

Conociendo el valor de una función trigonométrica, **calcular Sen(2α) sin calcular α**: $(\pi/2<\alpha<\pi)$
(Expresar el resultado como una fracción)

108) $\text{Sen}(\alpha)=8/17$
109) $\text{Cos}(\alpha)=-3/5$
110) $\text{Tg}(\alpha)=-1$
111) $\text{Cotg}(\alpha)=-\sqrt{(3)}/3$

Conociendo el valor de una función trigonométrica, **calcular Sen(α/2) sin calcular α**: $(0<\alpha<\pi)$
(Expresar el resultado como una fracción)

112) $\text{Cos}(\alpha)=1/2$
113) $\text{Sec}(\alpha)=-8$
114) $\text{Cosec}(\alpha)=25/24$
115) $\text{Tg}(\alpha)=\sqrt{(3)}$

Comencemos nuevamente con las identidades para verificar:
Estas son más sencillas que las primeras de la unidad.

116) $\dfrac{\text{Cotg}(\alpha)}{\text{Cosec}(\alpha)} = \dfrac{1}{\text{Sec}(\alpha)}$

117) $\text{Cos}(\alpha)\cdot\text{Cosec}(\alpha)\cdot\text{Tg}(\alpha) = 1$

118) $\left[\text{Cos}(\alpha)+\text{Sen}(\alpha)\right]^2 - 2\dfrac{\text{Sen}(\alpha)}{\text{Sec}(\alpha)} = 1$

119) $\text{Cos}(\alpha)\text{Sen}(\alpha)\left[\text{Sec}(\alpha)+\text{Cosec}(\alpha)\right] = \text{Cos}(\alpha)+\text{Sen}(\alpha)$

120) $\dfrac{\text{Sen}^2(\alpha)}{\text{Cos}(\alpha)} + \text{Cos}(\alpha) = \text{Sec}(\alpha)$

121) $\text{Sen}^2(\alpha) - \text{Sen}^2(\alpha)\cdot\text{Cos}^2(\alpha) = \text{Sen}^4(\alpha)$

122) $\text{tg}(\alpha)\cdot\text{Cotg}(\alpha) + \dfrac{1}{\text{Cotg}^2(\alpha)} = \text{Sec}^2(\alpha)$

Seguimos con más identidades trigonométricas:

123) $\mathrm{Sec}^2(\alpha)\left[\mathrm{Cosec}^2(\alpha)-1\right]=\mathrm{Cosec}^2(\alpha)$

124) $\left[1+\mathrm{tg}(\alpha)\right]\cdot\left[1-\mathrm{tg}(\alpha)\right]+\mathrm{Sec}^2(\alpha)=2$

125) $\left[1+\mathrm{Cotg}(\alpha)\right]\cdot\left[1-\mathrm{Cotg}(\alpha)\right]+\mathrm{Cosec}^2(\alpha)=2$

126) $\mathrm{Sen}(\alpha)-\mathrm{tg}(\alpha)\cdot\mathrm{Cos}(\alpha)+\mathrm{Cos}^2(\alpha)=1-\mathrm{Sen}^2(\alpha)$

127) $\left[\mathrm{Sen}(\alpha)-\mathrm{Cos}(\alpha)\right]\left[\dfrac{1}{\mathrm{Sec}(\alpha)}+\dfrac{1}{\mathrm{Cosec}(\alpha)}\right]=2\,\mathrm{Sen}^2(\alpha)-1$

128) $\left[\mathrm{Sen}(\alpha)+\mathrm{Cos}(\alpha)\right]^2+\left[\mathrm{Cos}(\alpha)-\mathrm{Sen}(\alpha)\right]^2=2$

129) $1+\mathrm{Sen}(\alpha)\,\mathrm{tg}(\alpha)=\dfrac{\mathrm{Sen}(\alpha)+\mathrm{Cotg}(\alpha)}{\mathrm{Cotg}(\alpha)}$

130) $\dfrac{\left[1+\mathrm{Cos}(\alpha)\right]\cdot\left[1-\mathrm{Cos}(\alpha)\right]}{\mathrm{Cos}(\alpha)}=\mathrm{Sec}(\alpha)-\mathrm{Cos}(\alpha)$

131) $\dfrac{\mathrm{Sec}(\alpha)-\mathrm{Cos}(\alpha)}{\mathrm{Cosec}(\alpha)-\mathrm{Sen}(\alpha)}=\mathrm{tg}^3(\alpha)$

132) $\left[1+\mathrm{tg}(\alpha)\right]^2+\left[1-\mathrm{tg}(\alpha)\right]^2=2\ \mathrm{Sec}^2(\alpha)$

133) $\left[1+\mathrm{Cotg}^2(\alpha)\right]\cdot\left[1-\mathrm{Cos}^2(\alpha)\right]=1$

134) $\mathrm{tg}(\alpha)+\mathrm{Cotg}(\alpha)=\mathrm{tg}(\alpha)\cdot\mathrm{Co\,sec}^2(\alpha)$

135) $\mathrm{tg}^2(\alpha)+\mathrm{Cos}^2(\alpha)=\mathrm{Sec}^2(\alpha)-\mathrm{Sen}^2(\alpha)$

136) $\dfrac{\left[1+\mathrm{Sen}(\alpha)\right]\cdot\left[1-\mathrm{Sen}(\alpha)\right]}{\dfrac{1}{\mathrm{Sec}(\alpha)}}=\mathrm{Tg}(\alpha)\left[1-\mathrm{Sen}(\alpha)\right]+\dfrac{1}{\mathrm{Cos}(\alpha)}-\mathrm{Sen}(\alpha)\cdot\mathrm{Sec}(\alpha)$

137) $\mathrm{Cos}^2(\alpha)+\mathrm{Sen}^2(\alpha)\cdot\mathrm{Sec}^2(\alpha)=\dfrac{1}{\mathrm{Cos}^2(\alpha)}-\mathrm{Sen}(\alpha)\cdot\mathrm{Cosec}^{-1}(\alpha)$

Nota del Autor: Quiero agradecer especialmente a la excelente profesora Silvia León, a quien tuve el gusto de conocer, y quien ha aportado muchas ideas en cuánto a ejercitación y muchas de las identidades trigonométricas que están en esta unidad. Juan Pablo Pisano

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Trigonometría
Nivel IV

Número de Tema: **55**

Área: **Matemática**

☆ **Grados y Radianes**: Los Radianes son una forma nueva de expresar medidas angulares en función de π

La equivalencia en grados de **1** π **Radian** es **180°** ⇨ $\boxed{\pi = 180°}$

Para pasar un ángulo a Radianes, sólo debemos hacer una Regla de 3 Simple.
Ejemplo pasemos 135º a radianes.

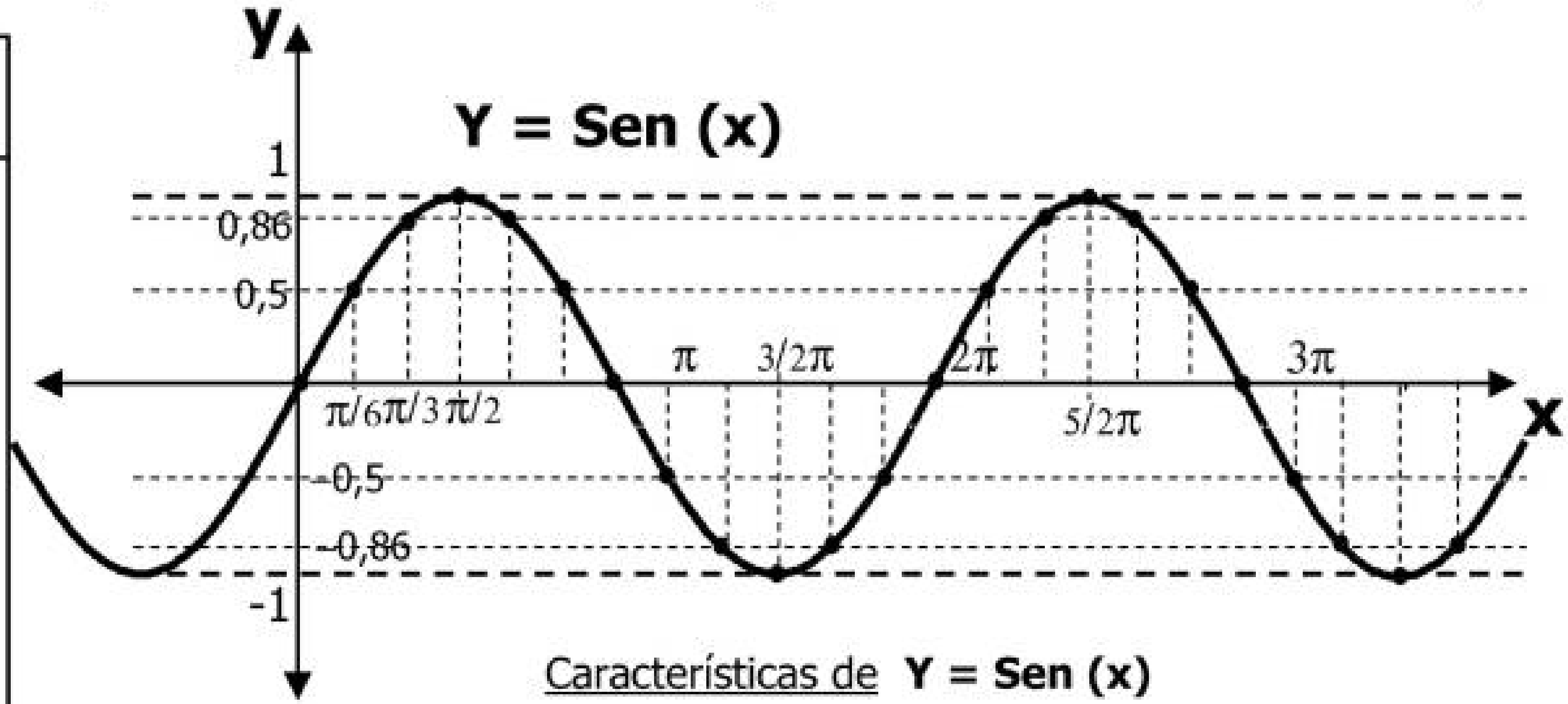
180º.............. **1** π Radianes
135º.............. **x** Radianes

$$x = \frac{135° \cdot \pi}{180°} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{4}\pi}$$

☆ **Características de las Funciones Trigonométricas**

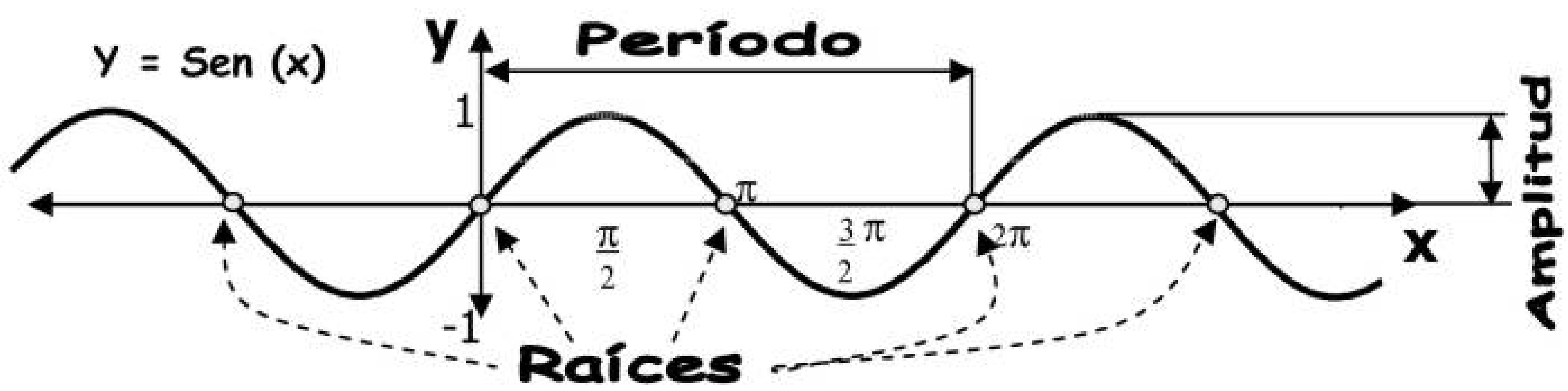
➢ **Función Seno** Veamos el gráfico del Seno en el Sistema de Ejes X–Y. Veamos la tabla de valores X;Y

X		Y
Grados	Radianes	
0 °	0 π	0
30 °	1/6 π	0,5
60 °	1/3 π	0,866
90 °	1/2 π	1
120 °	2/3 π	0,866
150 °	5/6 π	0,5
180 °	1 π	0
210 °	7/6 π	-0,5
240 °	4/3 π	-0,866
270 °	3/2 π	-1
300 °	5/3 π	-0,866
330 °	11/6 π	-0,5
360 °	2 π	0



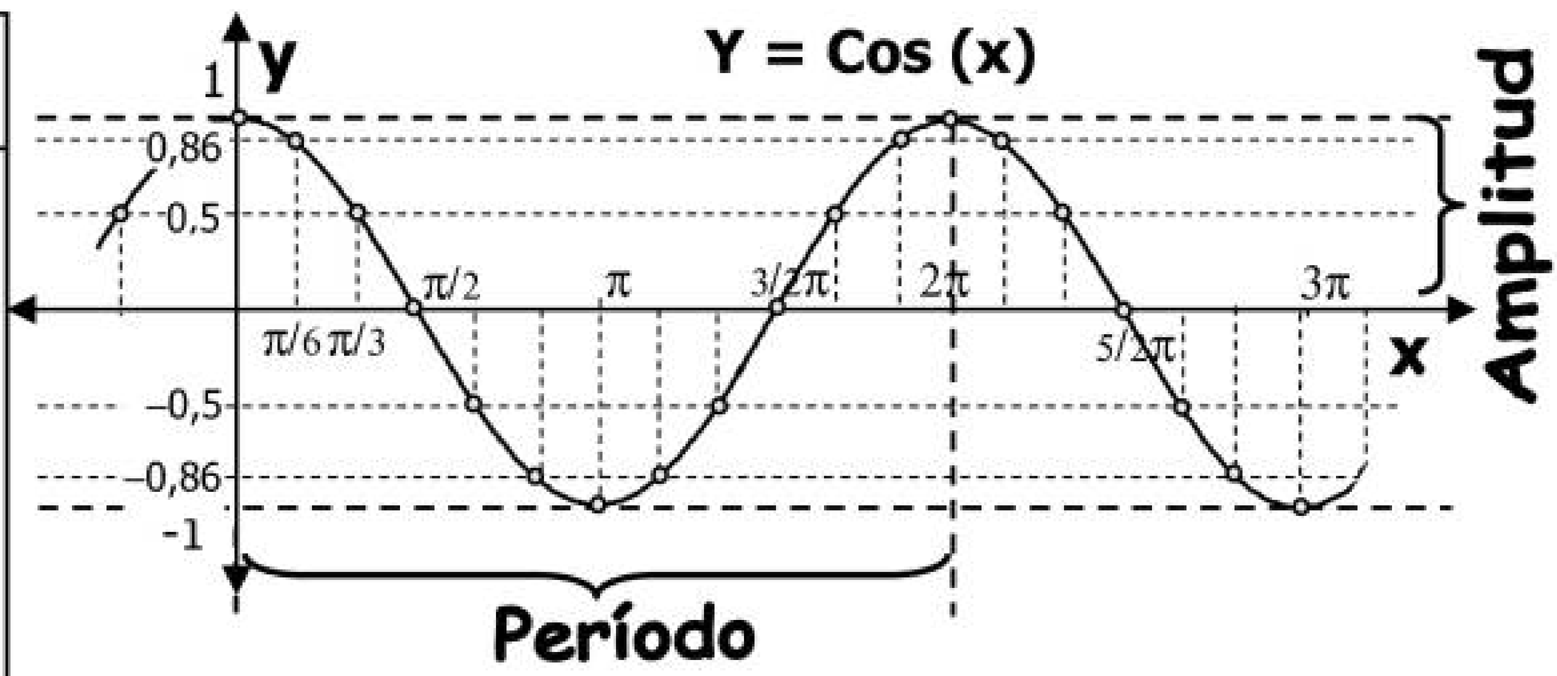
Características de **Y = Sen (x)**

- Raíces: Corta al **Eje x** en todos los puntos **k.** π (con **k** entero)
- Amplitud: Esta función **está acotada** entre **1** y **–1** . La amplitud es 1
- Período: El período es **2**π. O sea que **la sinusoide** "repite el ciclo" cada 360º



➢ **Función Coseno** Estudiemos ahora la función **Y = Cos (x)**

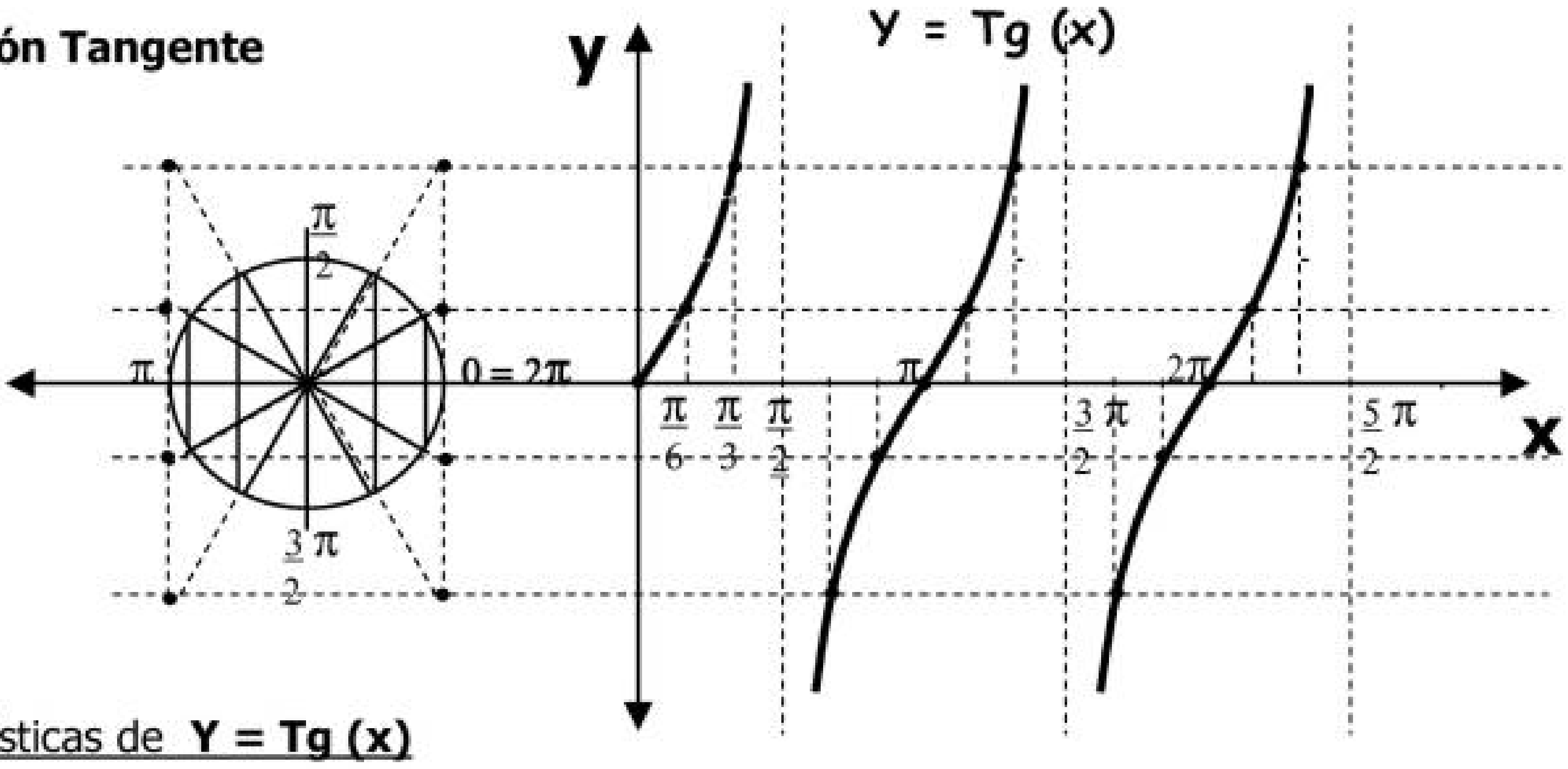
X		Y
Grados	Radianes	
0 °	0 π	1
30 °	1/6 π	0,866
60 °	1/3 π	0,5
90 °	1/2 π	0
120 °	2/3 π	-0,5
150 °	5/6 π	-0,866
180 °	1 π	-1
210 °	7/6 π	-0,866
240 °	4/3 π	-0,5
270 °	3/2 π	0
300 °	5/3 π	0,5
330 °	11/6 π	0,866
360 °	2 π	1



Características de **Y = Cos (x)**

- Raíces: Corta al **Eje x** en todos los puntos π/2+**k**π (**k** es un número Entero)
- Amplitud: Esta función **está acotada** entre **1** y **–1**. La amplitud es 1
- Período: El período es **2**π ... o sea que "repite la onda" cada 360º

- **Función Tangente**



Características de **Y = Tg (x)**

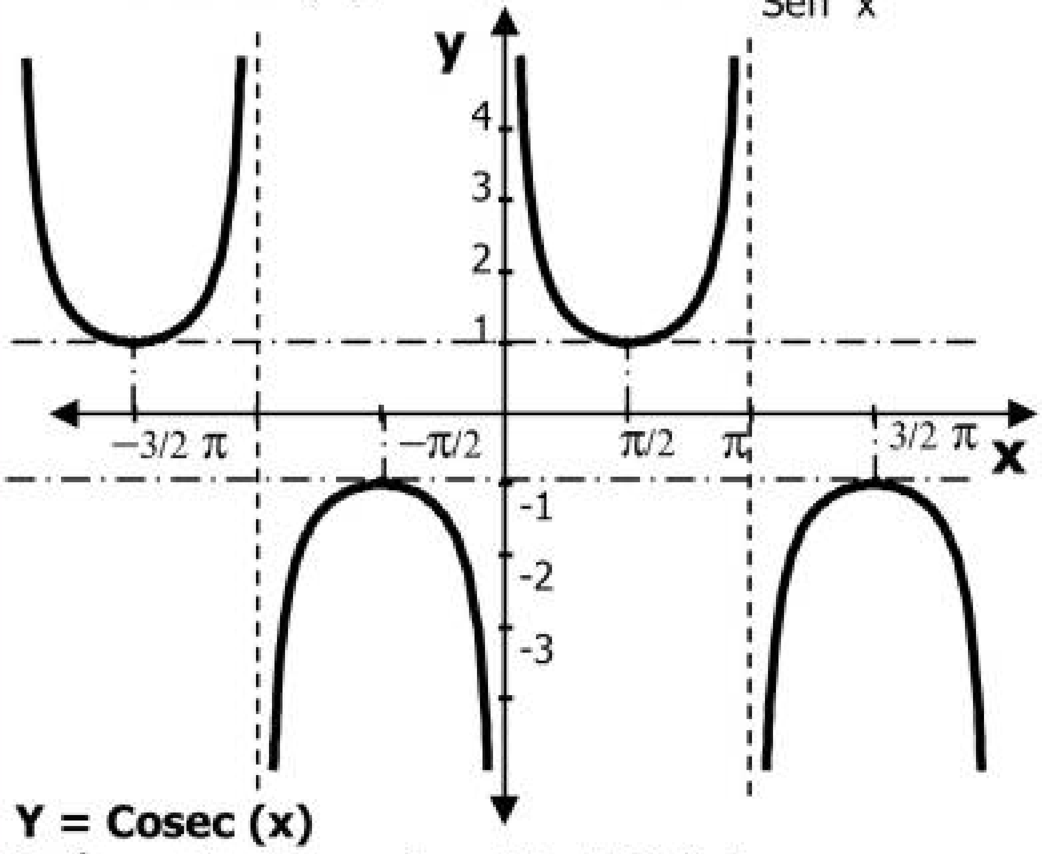
- Raíces: Corta al **Eje x** en todos los puntos **k.** π (Con **k** Entero).
- Amplitud: **no está acotada**. El Codominio es el conjunto de los reales, la amplitud es infinita.
- Período: El período es π.

OjO!! El Dominio de la Función **Tangente** NO es "todos los Números Reales". Porque hay valores de "x" que no tienen un correspondiente sobre el Eje Y, Así que debemos excluir estos valores:

$$\text{Dom Tg } x = \left\{ x / x \in \Re \quad \wedge \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ , \ \ k \in Z \right\}$$

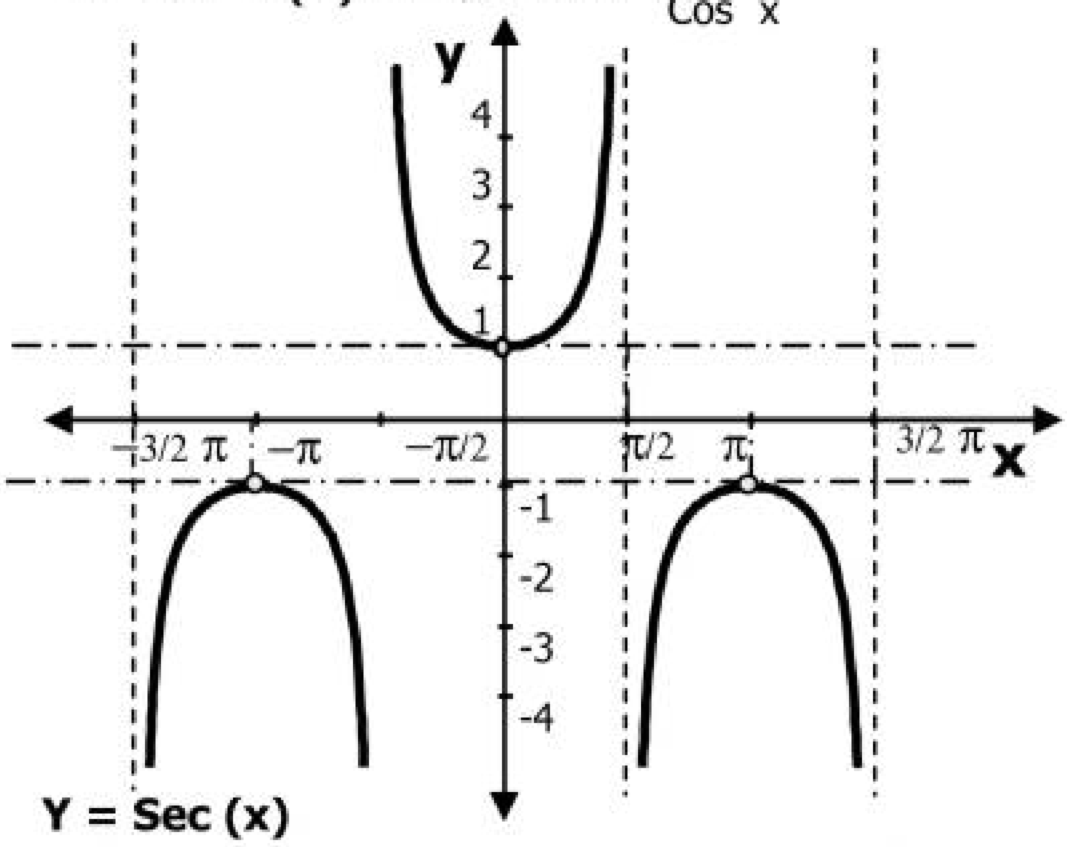
☆ Otras Funciones Trigonométricas: Vamos a ver ahora las funciones **inversas multiplicativas** de las tres funciones que vimos hasta ahora.

$Y = \text{Cosec}\ (x) \Rightarrow \text{Cosec}\ (x) = \dfrac{1}{\text{Sen}\ x}$



Y = Cosec (x)
Raíces: No tiene. **Amplitud:** Infinita.
Período: 2π.

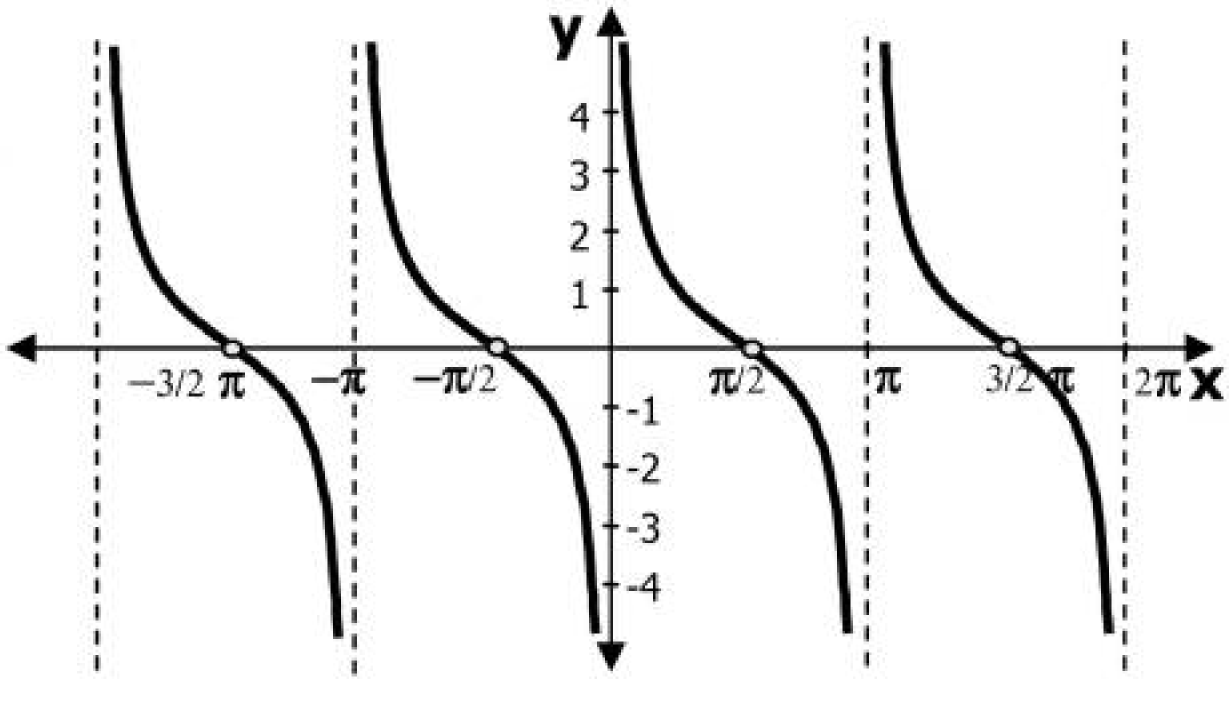
$Y = \text{Sec}\ (x) \Rightarrow \text{Sec}\ (x) = \dfrac{1}{\text{Cos}\ x}$



Y = Sec (x)
Raíces: No tiene. **Amplitud:** Infinita. **Período**: 2π.

$Y = \text{Cotg}\ (x) \Rightarrow \text{Cotg}\ (x) = \dfrac{1}{\text{Tg}\ x}$

Y = Cotg (x)
Raíces: π/2+kπ.
Amplitud: Infinita.
Período: π.

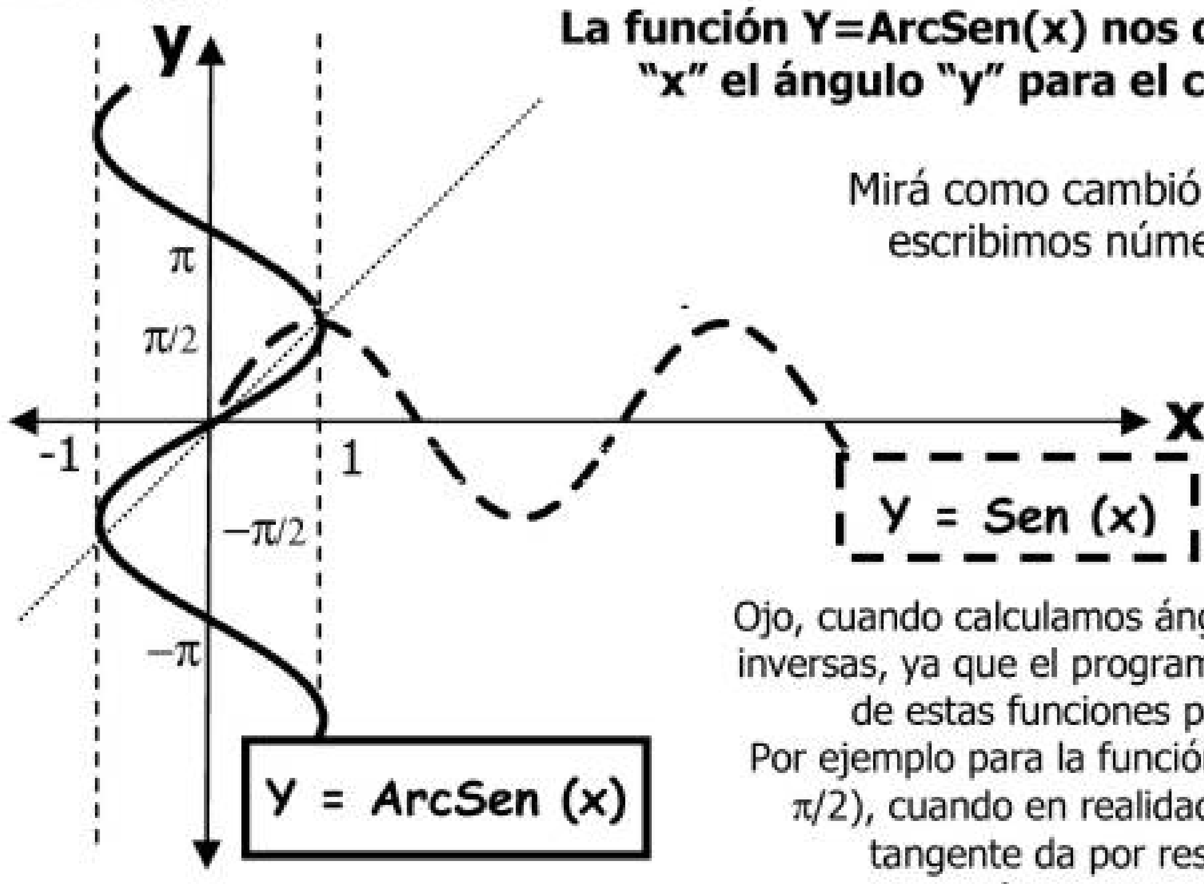


☆ <u>Funciones Trigonométricas Inversas</u>: Ahora vamos a ver unas Funciones muy importantes. La característica fundamental de estas funciones que vamos a estudiar ahora, es que, a diferencia de **Sen**, **Cos**, **Tg, Cosec, Sec** y **Cotg**, <u>el Dominio está compuesto por valores reales, y el Codominio por ángulos</u>.

- **Arco Seno**, (Inversa del Seno) $Y = \text{ArcSen}\ (x)$
- **Arco Coseno**, (Inversa del Coseno) $Y = \text{ArcCos}\ (x)$
- **Arco Tangente**, (Inversa de la tangente) $Y = \text{ArcTg}\ (x)$

Ojo, no confundan estas funciones inversas con las inversas multiplicativas que vimos antes!!

$Y = ArcSen\ (x)$



La función Y=ArcSen(x) nos da, para cada valor "x" el ángulo "y" para el cual Sen (y) = x

Mirá como cambió la cosa ¿ves que en el **Eje x** escribimos números y en el **Eje y** ángulos?

Ojo, cuando calculamos ángulos con la calculadora usando funciones inversas, ya que el programa de las calculadoras restringe la imagen de estas funciones para poder "devolver" un solo valor.
Por ejemplo para la función Y=Arctg(x) la tomo como $f(\Re)\to(-\pi/2;\ \pi/2)$, cuando en realidad no hay un solo ángulo para el cual la tangente da por resultado un determinado valor real.
Para la función Y=ArcSen(x) la toma como $f(-1;1)\to(-\pi/2;\ \pi/2)$

☆ **<u>Ecuaciones</u>**: Veamos un ejemplo resuelto

Averiguar los valores de **x** Que satisfacen esta ecuación $-1+2\cdot \text{Cos}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1-\text{Sen}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
(evaluar entre 0 y 2π)

<u>Lo primero</u> siempre es intentar (reemplazando alguna parte de la ecuación) dejar una sola Función Trigonométrica en toda la expresión... Fijate que acá tenemos un Coseno por un lado y un Seno por el otro, así que mediante un conveniente reemplazo, sólo nos van a quedar Cosenos...

Como: $\text{Cos}^2x+\text{Sen}^2x=1 \Rightarrow \text{Cos}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\text{Sen}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1 \Rightarrow \boxed{\text{Cos}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1-\text{Sen}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

Despejando

Si sustituimos en la ecuación, "$1-\text{Sen}^2(x+\pi/2)$" nos quedaría: $-1+2\cdot\text{Cos}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\text{Cos}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Luego tenemos que "agrupar" los Cosenos en el mismo miembro de la expresión, **operar y despejar**:

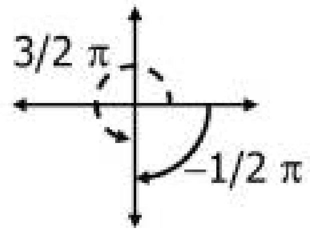
$$-1+2\cdot\text{Cos}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\text{Cos}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0 \Rightarrow -1+\text{Cos}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0 \Rightarrow \text{Cos}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1 \Rightarrow \left|\text{Cos}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=\sqrt{1}$$

Ahora "desdoblamos" el módulo y pasamos de miembro el **Coseno** como **ArcCoseno**: $\Rightarrow \left|\text{Cos}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=1$

$$x+\frac{\pi}{2}=\text{ArcCos}\ (1) \quad \Big\| \quad x+\frac{\pi}{2}=\text{ArcCos}\ (-1)$$

Para calcular el valor de **ArcCoseno (1)** , debemos tener en cuenta que en el enunciado sólo "nos piden" evaluar entre 0 y 2π, por lo tanto **ArcCoseno (1)** =0 y 2π, pero como ambos valores son equivalentes, es suficiente con evaluar sólo uno de ellos. Con **ArcCoseno (-1)** sabemos que vale: π

$x+\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3\pi}{2}}$



$\Big\|$ $x+\frac{\pi}{2}=\pi \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{2}}$

Por lo tanto la solución es: X= 3/2 π o X = ½ π

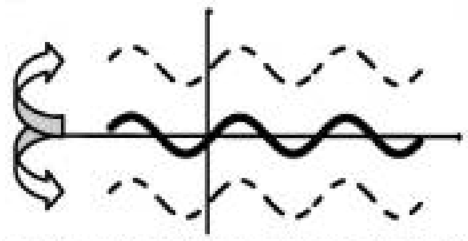
☆ **<u>Coeficientes de las Funciones Trigonométricas</u>**: Esto nos va a servir para poder graficar cualquier Función Trigonométrica una vez conocida la **gráfica característica** de esa función. Estas **gráficas características** son las que estudiamos hasta ahora. Veamos los **modelos** para las Funciones típicas.

$y = a \,.\, \text{Sen}\,(b \,.\, x + \alpha) + c$	$y = a \,.\, \text{Cos}\,(b \,.\, x + \alpha) + c$	$y = a \,.\, \text{Tg}\,(b \,.\, x + \alpha) + c$

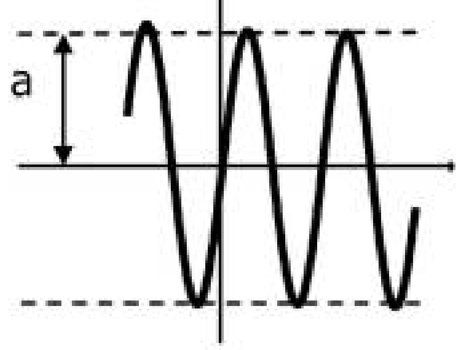
Vamos a ver qué significa cada parámetro de los **modelos** estudiando **Y = Sen x**

$$y = a \,.\, \text{Sen}\,(b \,.\, x + \alpha) + c$$

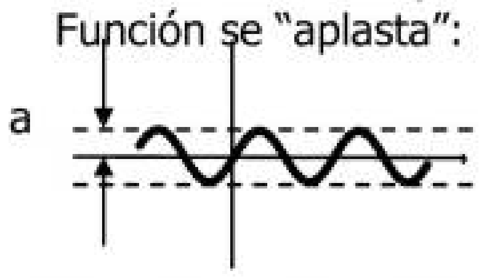
C: **Desplazamiento Vertical**. "desplaza" la gráfica hacia arriba ó abajo (según si es positivo ó negativo, respectivamente).-



Cuánto más grande es **a**, la Función se **estira** mas

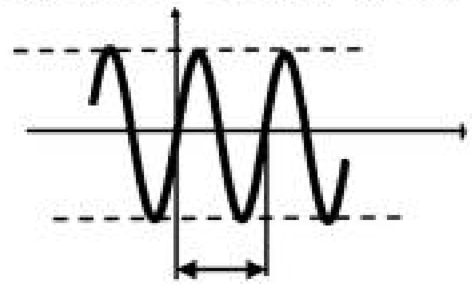


Y si **a** es más chica, la Función se "aplasta":

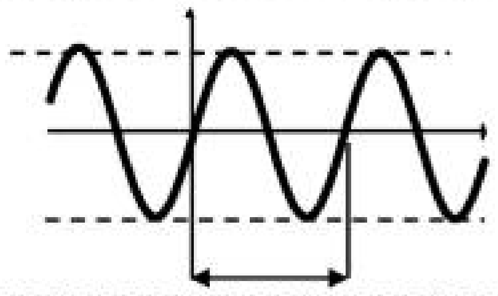


b: Pulsación

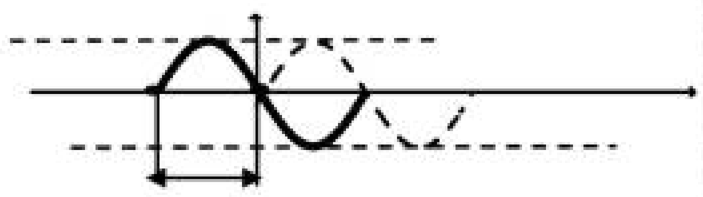
Cuánto mayor sea **b**, el Período se "acorta" más:



Si por el contrario, **b** es más chica, el Período se "alarga":



α "**Ángulo de fase**", corre la gráfica para la izquierda o la derecha:



En este ejemplo, α es positiva, pero si habría sido negativa, la gráfica se hubiese "corrido" para la derecha.-

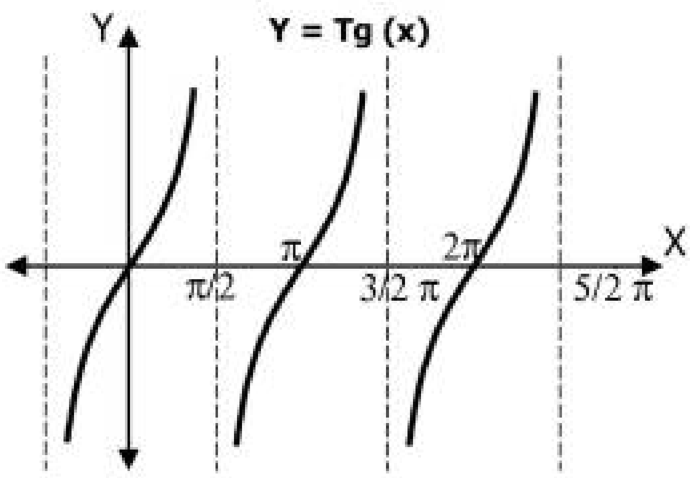
Pulsación: cantidad de ciclos que hay presentes en el **período** normal de la función (el período normal para el seno y el coseno es 2π y para la tangente es π)

☆ Veamos un ejemplo para graficar una función según sus coeficientes: Graficar **Y = Tg (π/2 + 2. x)**

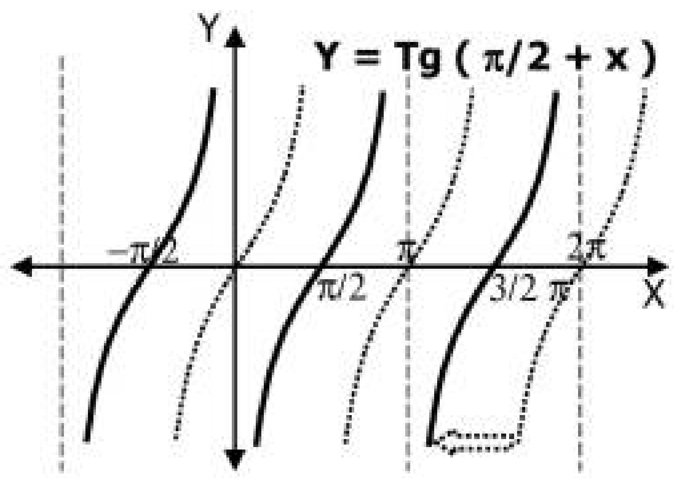
$$Y = 1 \,.\text{Tg}\,(2.x + \pi/2) + 0 \;\Rightarrow\; \boxed{y = a \,.\, \text{Tg}\,(b \,.\, x + \alpha) + c} \;\Rightarrow\; a = 1 \quad b = 2 \quad \alpha = \pi/2 \quad c = 0$$

- **a = 1**, la gráfica de esta función no se "estira" ni se "aplasta" respecto de la gráfica de **y = Tg x**
- **b = 2**, el Período de la gráfica de esta función se **reduce a la mitad** respecto del período de **y = Tg x**... y como el Período de **y = Tg x** es π, el de **y = Tg (2.x + π/2)** será π/2.
- **α**= π/2, la gráfica de esta función se "desfasa" 90º hacia la izquierda respecto de Y = **Tg x**
- **c** = 0 La gráfica <u>no</u> se desplaza verticalmente respecto de **y = Tg x**

1° Partimos de la gráfica de **y = Tg x**

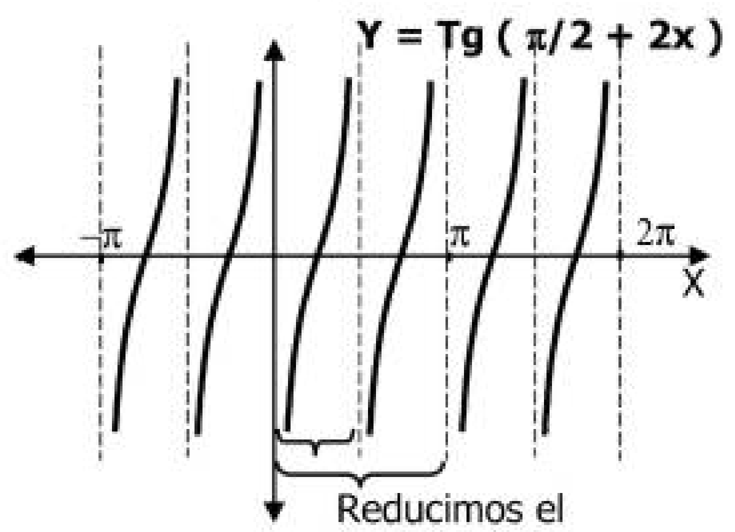


2° La desplazamos π/2 para la izquierda



Se desplaza π/2 para la izquierda

3° Reducimos a la mitad el período



Reducimos el período a la mitad

En lo que antes era el período "π" entraba una curva, ahora en "π" entran 2 curvas.

Resolver las siguientes Ecuaciones (Hallar el menor valor positivo de "x")

1) $\text{Sen}\ (x/2 + \pi/6) = 1$

2) $\text{Cos}\left(\frac{5}{6}\cdot x - \pi/4\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\text{Cos}\ (x - \pi/4) = \text{Sen}(4x + \pi/6)$

4) $\text{Tg}\ (3x - \pi/2) = \text{Sen}(\pi/2)$

5) $\text{Sen}^2\left(\frac{2}{3}\cdot x\right) = \frac{3}{4}$

6) $\text{Cos}^{-2}\ (2x - \pi/3) = 4$

¿Verdadero o Falso?

7) La función **y = Tg x** no tiene raíces entre π**/6** y π**/2**

8) **2 Cos x = 2** para **x = 0** y **x =** π

9) Puede darse que **Sen x = 2** (siempre y cuando **x** varíe entre **0** y **2.** π)

10) **y = Cotg x** es función acotada.

11) **y = Cos x** es función acotada.

12) **y = Cos (2.x)** tiene Período más corto que **y = Cos (3.x)**

13) Todas las gráficas de las Funciones Trigonométricas son sinusoides.

14) 14) **y = Sen (2.x) + 0,2** tiene 5 raíces entre π**/2** y **3/2**π

15) La única raíz de **y = ArcSen x** es **x = 0**

16) **Cotg 0º = Cotg 90º**

Ubicar que gráfico le corresponde a cada función.

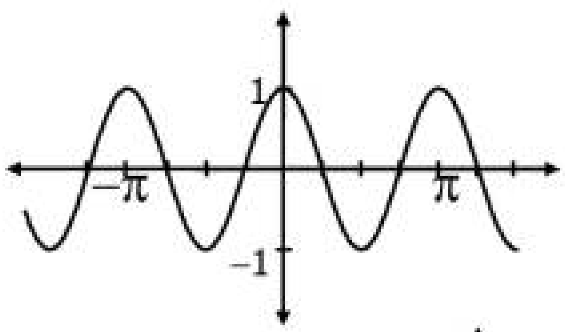
17) $y = \text{Sen}(2x)$

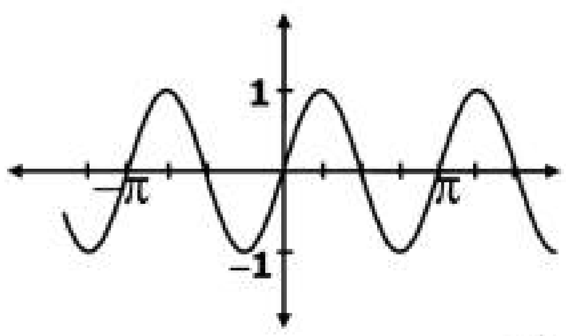
18) $y = \text{Sen}\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)$

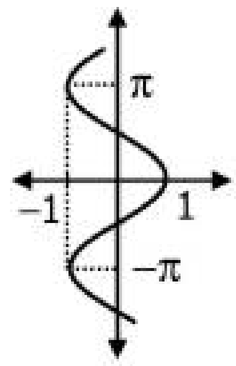
19) $y = \text{Sen}\ (x) + 2$

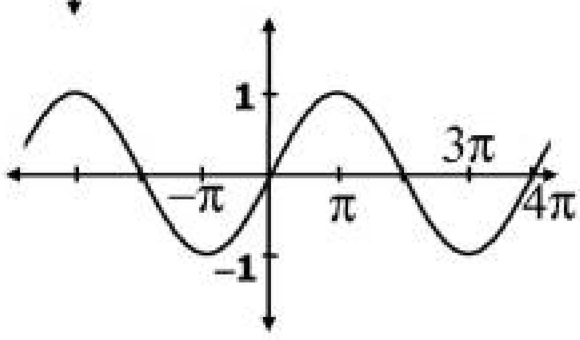
20) $y = \text{Cos}\ (2\cdot x)$

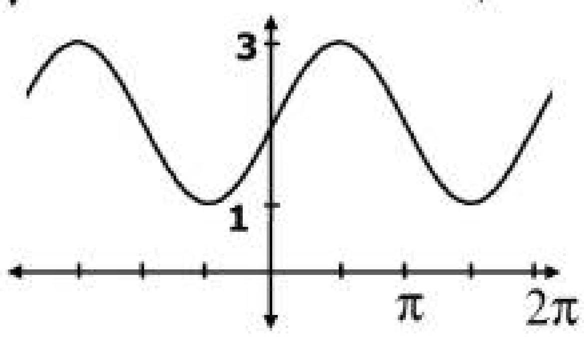
21) $y = \text{ArcCos}\ (x)$











Hallar todos los valores de "x" posibles en un giro (con 0<x<360º)

22) $\text{Sen}^2(x) + 5\cdot\text{Sen}(x) = 6$

23) $2\cdot\text{Sen}^2(x) - \text{Sen}(x) = 1$

24) $3\cdot\text{Sen}^2(x) = \text{Cos}^2(x)$

25) $\frac{5}{2}\cdot\text{Sec}(2x) = 4 + 2\cdot\text{Cos}(2x)$

26) $\sqrt{3}\cdot\text{Sen}(x) - 2\cdot\text{Cos}^2(x) = 1$

27) $[\ \text{Sen}(2x+20)\cdot\text{Sec}(x+10)\ ]^2 = 2$

Dada la siguiente función trigonométrica: $f(x) = (2+k)^2\cdot\text{Sen}[\ (k-1)x + 30º\ ]$

28) Hallar el o los valores de "k" para que el período de la función sea de 60º

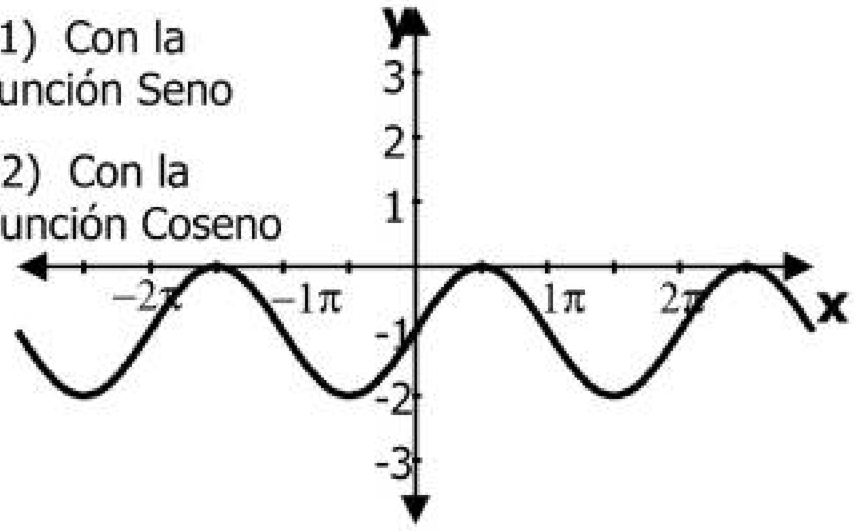
29) Hallar el o los valores de "k" para que la imagen de f(x) sea el intervalo [-4;4]

30) Hallar el o los valores de "k" para que f(0)=8

Teniendo en cuenta la gráfica (y en algunos casos la función característica) indicar para cada ejercicio la expresión de la función graficada.

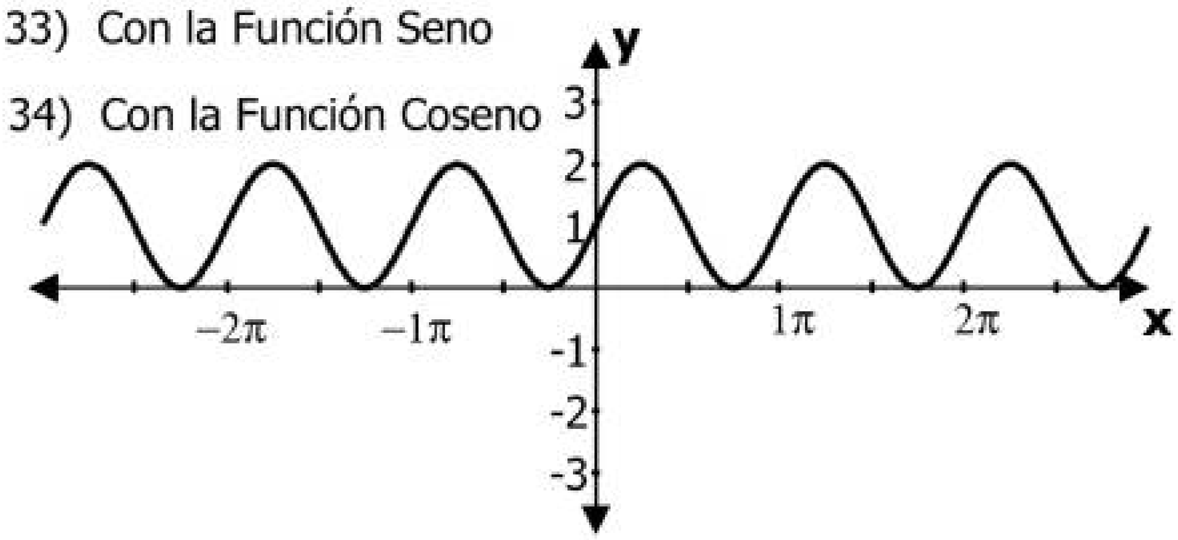
31) Con la Función Seno

32) Con la Función Coseno



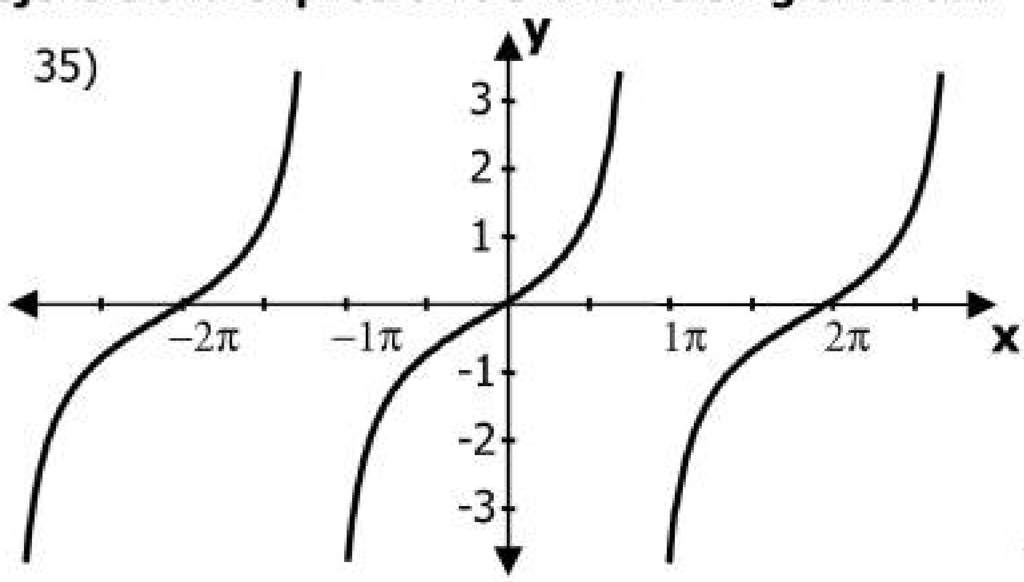
33) Con la Función Seno

34) Con la Función Coseno

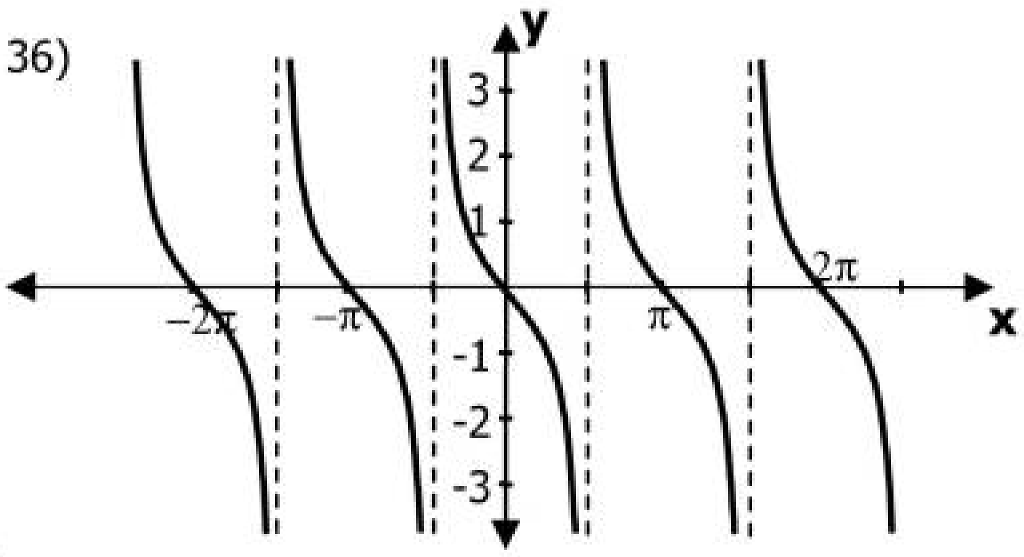


Teniendo en cuenta la gráfica (y en algunos casos la función característica) indicar para cada ejercicio la expresión de la función graficada.

35)

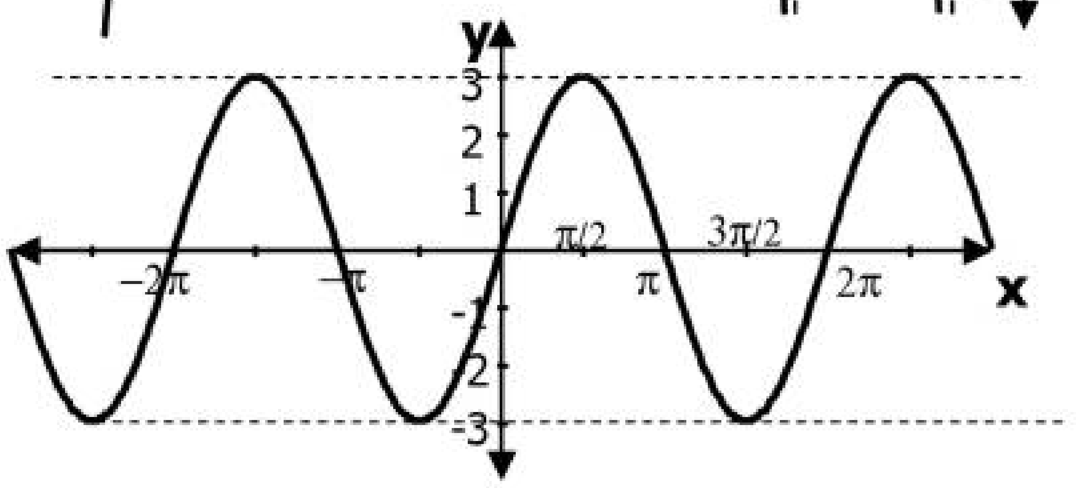


36)



37) Con la Función Seno

38) Con la Función Coseno



Resolver los siguientes Sistemas de Ecuaciones: (Redondear en función de π cuando sea necesario)

39) $\left\{\begin{array}{l}\text{Sen } x + \text{Cos } y = 1 \\ \text{Sen } x - \text{Cos } y = 1\end{array}\right\}$ Entre 0 y 2π

40) $\left\{\begin{array}{l}\text{Tg}^2 x - \text{Sen } y = 0 \\ \text{Cos } x - \text{Sen } y = 1\end{array}\right\}$ Entre −π/2 y π/2

41) $\left\{\begin{array}{l}1.\text{Sec}^{-1} x - 2\text{Cos } x\ .\ [2\text{Cos } x+1] - 3 + \text{Tg } y = 0 \\ \text{Tg } y + \text{Cos } x = 0\end{array}\right\}$ Entre −π/2 y π/2

¿Verdadero o Falso?

42) En el Tercer Cuadrante, **Cos x < Sen x** .-
43) En el Segundo Cuadrante, **Cos x < Sen x** .-
44) **Tg x < Cos x** sólo en el Cuarto Cuadrante.-
45) **Tg x > Cos x** para valores de **x** dentro del intervalo (π/4 ; π/2)

46) Esta desigualdad (tomado el 1º Cuadrante) sólo se verifica para valores de **x** entre 0 y π/4

$$\frac{1}{\text{Sec}(x)} < \text{Cos}(x) + \text{Sen}(x) < -1 + 2\cdot\text{Cos}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

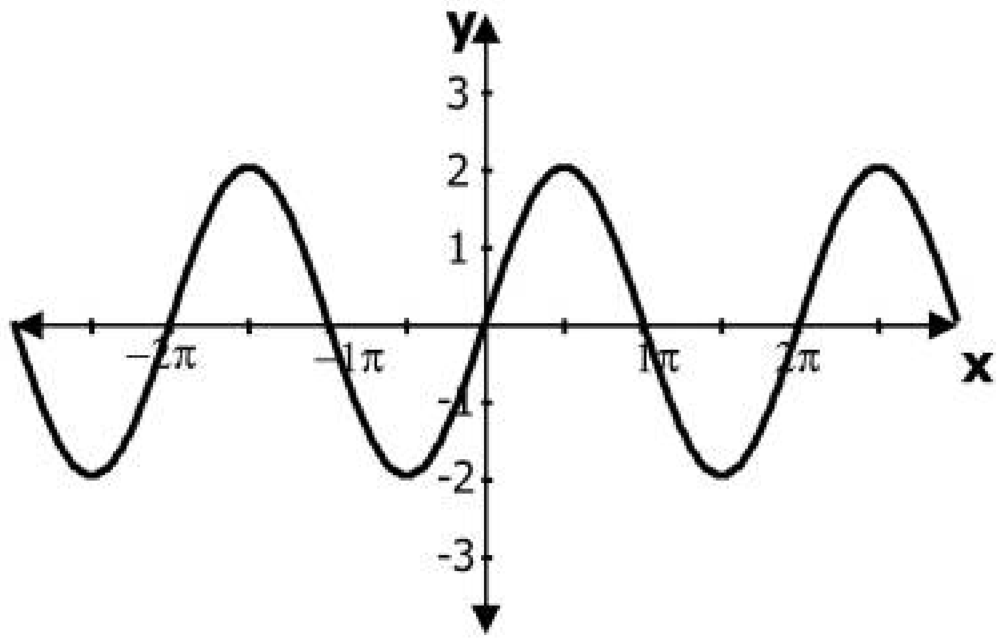
47) Esta desigualdad (tomado el 1º Cuadrante) sólo se verifica para valores de **x** entre π/4 y π/2

$$\text{Sen}^2(x) - 1 < \text{Cos}(x)\cdot(1 - \text{Cos}(x)) < \text{Cos}^2(x) - \text{Cos}(2\cdot x)$$

48) Esta inecuación se verifica para al menos un valor de **x**, estando **x** en el 4º Cuadrante: $0 < \left(\operatorname{Sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Dado el siguiente gráfico:

$$f_{(x)} = a \cdot \operatorname{Cos}(b \cdot x + \alpha) + c$$



49) Definir f(x)
50) Definir conjunto de raíces.
51) Definir conjunto de Positividad. (entre 0 y 2π)
52) Definir conjunto de Negatividad. (entre 0 y 2π)
53) Definir conjunto de Crecimiento. (entre 0 y 2π)
54) Definir conjunto de Decrecimiento. (entre 0 y 2π)
55) Definir conjunto de Positividad. ($\forall\ x \in \Re$)
56) Definir conjunto de Negatividad. ($\forall\ x \in \Re$)
57) Definir conjunto de Crecimiento. ($\forall\ x \in \Re$)
58) Definir conjunto de Decrecimiento. ($\forall\ x \in \Re$)

Ayuda para que tomen de guía en los ejercicios 56, 57 y 58, damos la respuesta el ejercicio 55, ya que la notación de intervalos de este tipo es un poco complicada de deducir solo:
Ejercicio 55, respuesta: Positividad: $\{x/x \in \Re \ \wedge \ 2k\pi < x < (2k+1)\,\pi\ ,\ \ \forall\ k \in Z\}$

Dadas las siguientes funciones trigonométricas, construir aproximadamente la gráfica y completar el cuadro:

	Amplitud	Pulsación	Período	Ángulo de Fase	Raíces	Intervalo Positividad	Intervalo Negatividad	Intervalo Crecimiento	Intervalo Decrecimiento
$f\,(0,2\pi) \to (-1,1)$ 59) $\operatorname{Sen}(x - \pi/3)$									
$f\,(0,2\pi) \to (-1,1)$ 60) $f(x) = -\operatorname{Cos}(x)$									
$f(0,2\pi) \to (-3,3)$ 61) $f(x) = 3\operatorname{Cos}(2x)$									
$f\,(0,2\pi) \to (-1,1)$ 62) $f(x) = \operatorname{Cos}(2x + \frac{\pi}{2})$									
$f(0,2\pi) \to (0,2)$ 63) $f(x) = \operatorname{Sen}(x) + 1$									
$f(0,2\pi) \to \Re$ 64) $\operatorname{Tg}(x + \pi/4)$									

<u>Últimas ecuaciones</u>:

65) Sabiendo que la inversa del cuadrado del Seno de un ángulo menos el cuadrado de la cotangente del mismo ángulo es igual a 1, calcular dicho ángulo entre 0 y 2π.

66) Si al doble del producto del cuadrado del seno y del cuadrado del coseno de un ángulo se le suma el cuadrado del coseno del doble de ese ángulo, se obtiene 1, calcular dicho ángulo entre 0 y 2π.

<u>Últimas ecuaciones</u>:

67) $\sqrt{1-\text{Sen}^2(x)}+\text{Sen}(x)\cdot\text{Sec}(x)=1+\dfrac{1}{\text{Cotg}(x)}$ Para: $0\le x<2\pi$

68) $2\cdot\sqrt{1-\text{Cos}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}\cdot\text{Cos}\left(\dfrac{x}{2}\right)+\text{Cos}(x)\cdot\text{Tg}(x)=\text{Sen}(x)$ Para: $0\le x<2\pi$

69) $1-\dfrac{\text{Sen}^2(2\cdot x)}{4\cdot\left(\text{Cos}(2\cdot x)+\text{Sen}^2(x)\right)}=\dfrac{1}{2}$ Para: $0\le x<\pi$

70) $\dfrac{1}{\dfrac{2\cdot\left(2\cdot\text{Cos}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-1\right)\cdot\text{Cos}(x)}{\text{Sen}(2\cdot x)}}=0$ Para: $0\le x<2\pi$

71) $\dfrac{\text{Cos}(x)+1-\sqrt{\dfrac{1+\text{Cos}(2\cdot x)}{2}}}{1-\text{Sen}^2(x)}=\dfrac{1}{\text{Sec}(4\cdot\pi)}$ Para: $0\le x<2\pi$

72) $\sqrt{1-\dfrac{\text{Cos}(2\cdot x+2\cdot\pi)+1}{2}}=-\dfrac{\text{Sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sqrt{\dfrac{1-\text{Cos}(x)}{2}}}$ Para: $\pi\le x<2\pi$

73) $\dfrac{1}{\text{Cotg}(x)}\cdot\left(\dfrac{\text{Cos}^2(x)+\text{Sen}^2(x)}{\text{Sen}^2(x)\cdot\text{Cos}^2(x)}\right)=2\cdot\text{Sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\text{Tg}(x)+\dfrac{1}{1-\text{Cos}^2(x)}\cdot\dfrac{1}{\text{Cotg}(x)}$ Para: $\pi\le x<2\pi$

74) $\text{Sen}(x)\cdot\text{Cos}(\pi)+\text{Sen}(\pi)\cdot\text{Cos}(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Para: $\pi\le x<\dfrac{3}{2}\pi$

75) $\text{Sen}(x)\cdot\text{Cos}(x+\pi)-\text{Sen}(x+\pi)\cdot\text{Cos}(x)=0$ Para: $0\le x<\dfrac{3}{2}\pi$

76) $\text{Cos}(2\cdot x)+1=2\cdot\text{Cos}^2(x)$ Para: $\dfrac{\pi}{4}\le x<\dfrac{7}{4}\pi$

77) $\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\text{Cotg}^2(x)}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Para: $\dfrac{3}{2}\pi\le x<2\pi$

78) $\text{Cos}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\text{Cos}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=2$ Para: $\dfrac{3}{2}\pi\le x<\dfrac{5}{2}\pi$

79) $\dfrac{2}{\text{Sec}\left(\dfrac{x+\pi}{2}\right)}\cdot\dfrac{1}{\text{Cosec}\left(\dfrac{x-\pi}{2}\right)}=0$ Para: $0\le x<\pi$

80) $\dfrac{1}{\text{Cotg}(x)}\cdot\sqrt{\dfrac{1+\text{Cos}(2\cdot x)}{2}}-\text{Cos}^2x=1+\text{Sen}^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-2\cdot\text{Cos}^2x$ Para: $0\le x<\pi$

81) $\text{Sen}(x)=\text{Cos}(x)\cdot\text{Cos}(2\cdot x)-2\cdot\text{Cos}^3(x)$ Para: $\dfrac{1}{2}\pi\le x<\pi$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Estudio de Funciones
Nivel I

Número de Tema: **56**

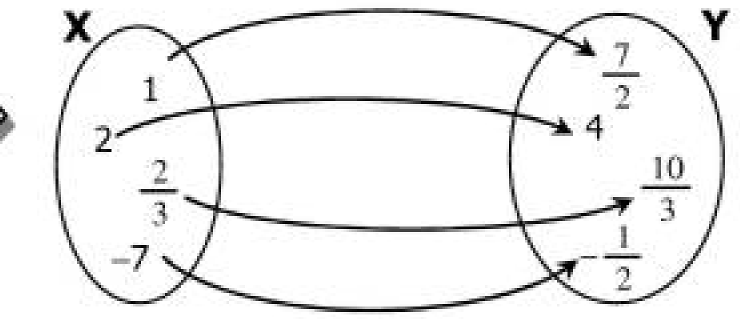
Área: **Matemática**

☆ **Concepto de Variables dependientes, independientes y función:** Una función, se define como, partiendo de un dominio, el conjunto de operaciones que transforman cada valor del dominio en un **único** valor que denominamos imagen. Al conjunto de "valores imagen" de cada valor del dominio se lo denomina justamente imagen de la función.

Ahora bien, en las funciones que vamos a estudiar nosotros, tenemos valores del Dominio y Valores imágenes de ese dominio. Entonces dada una función f(x), para cada valor "x" del dominio tenemos una imagen f(x). Una Notación muy típica en funciones es llamar "Y" a los valores de la imagen, por lo tanto "Y" remplazaría a f(X) en esta notación. Y en este caso llamaríamos:
X: Variable independiente de la función.
Y: Variable dependiente de la función (Recordemos que "Y" remplazaría a f(x))

☆ **¿Qué es una relación entre dos variables?** ***"Es una operación o conjunto de operaciones"*** que transforma un número real en otro.

Por ejemplo: $Y = \frac{1}{2} X + 3$

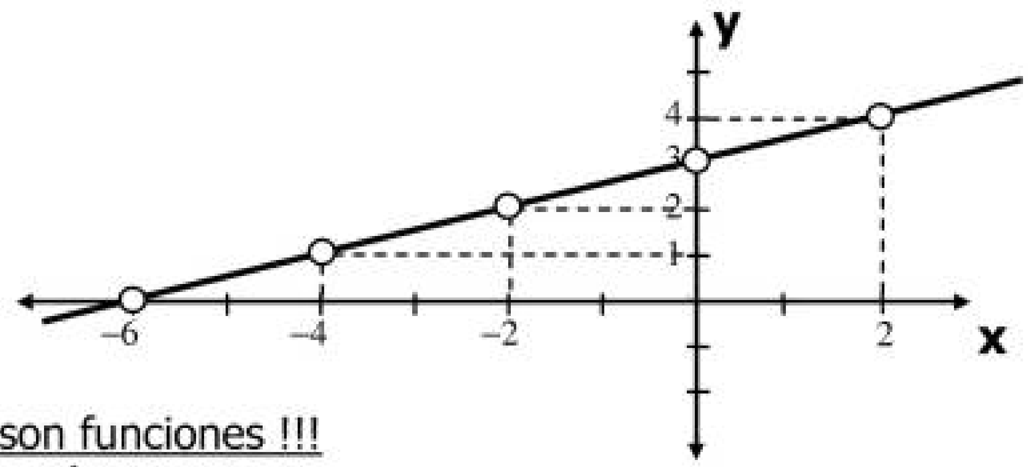


Esta relación "multiplica" a los elementos del conjunto **X** por 1/2 y le suma 3.

Nota: Como verán, en el conjunto X sólo ponemos algunos números, para que veas la relación, pero podríamos poner muchos números más, sólo que se complicaría para entenderlo. Para poder graficar una relación entre dos variables y poner todos los números se usan los "gráficos cartesianos" se dibujan dos ejes (X e Y) y se grafica en dos coordenadas. Grafiquemos entonces: Y = 1/2X + 3 en un gráfico cartesiano. Para ello primero armamos una tabla de valores, en los que inventamos valores para X y calculamos los valores de Y luego ubicamos los pares ordenados en la gráfica y unimos los puntos.

Y = 1/2 X + 3

X	Y
−6	0
−4	1
−2	2
0	3
2	4

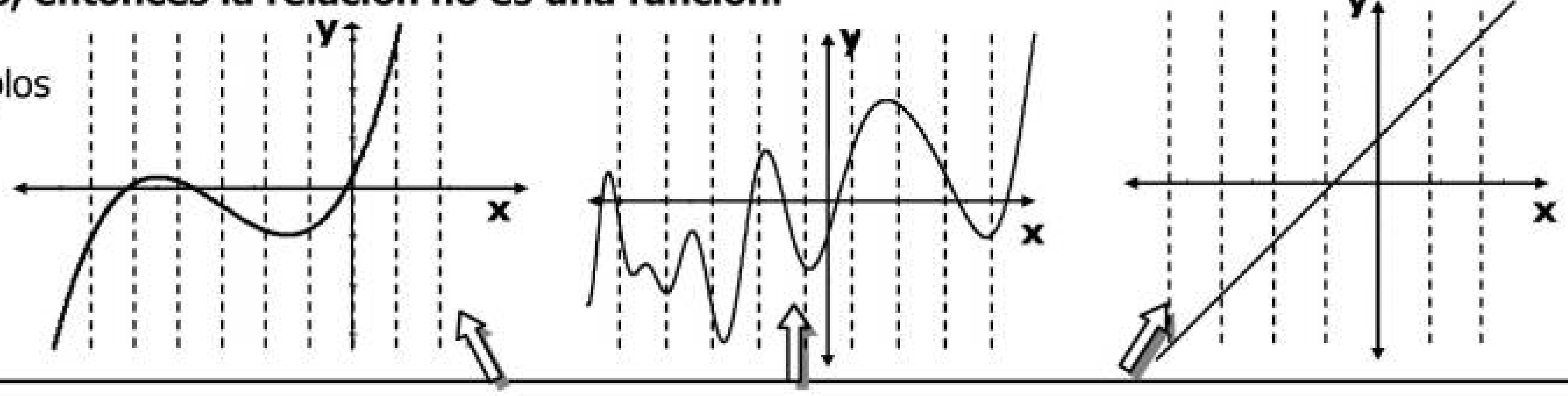


OJO! No todas las relaciones entre dos variables son funciones !!!
Condición Necesaria para que una relación sea función:

- Para que una relación sea función, a cada valor de la variable independiente (X) le tiene que corresponder un solo elemento del conjunto de la variable dependiente (Y)

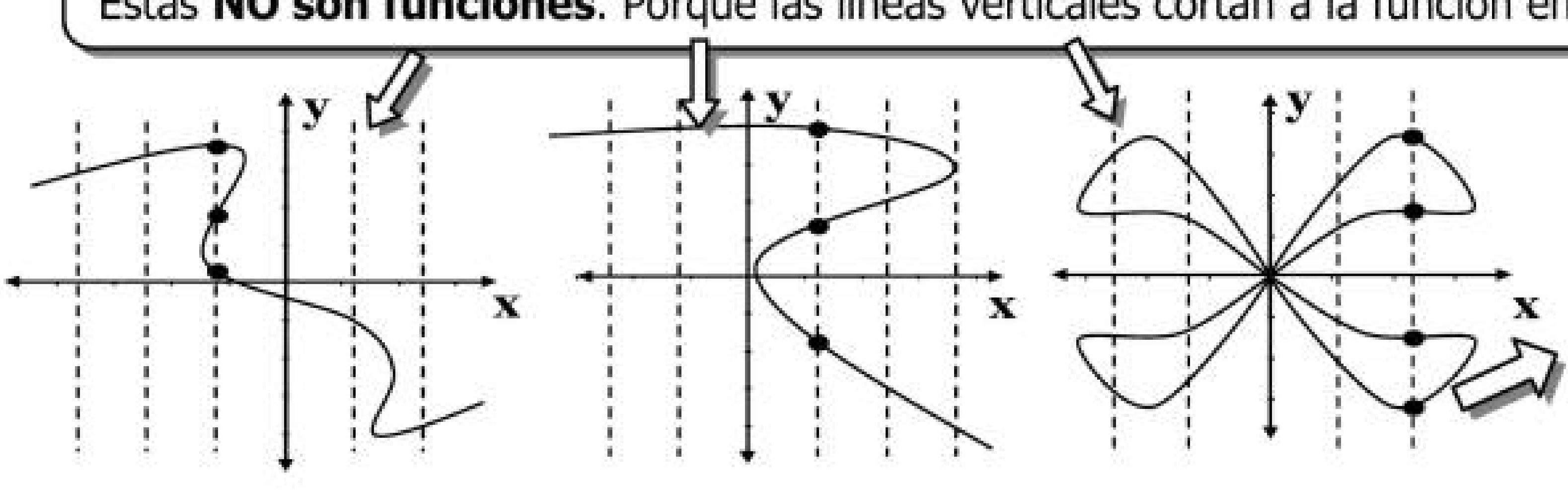
Esto es como decir, que a cada valor del dominio de la función, le debe corresponder **una sola** imagen.
Y... ¿Cómo me doy cuenta de eso? **Fácil, mirando el gráfico cartesiano, imaginando rectas verticales que corten a la función: Si las rectas imaginadas cortan a la gráfica en más de un punto, entonces la relación no es una función.**

Ejemplos



Todas estas **son funciones**. Porque las líneas verticales cortan a la función en **un solo punto.**

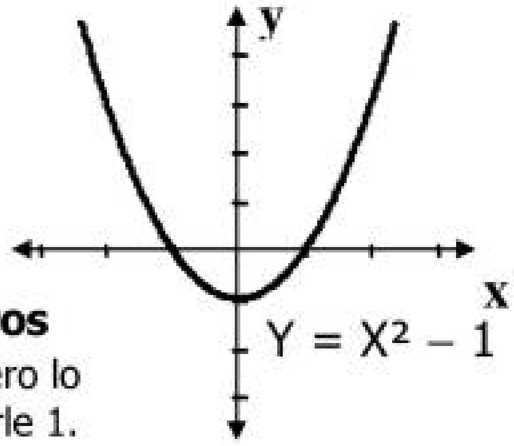
Estas **NO son funciones**. Porque las líneas verticales cortan a la función en **varios puntos**.



Fijate que por ejemplo **esta línea corta a la gráfica en 4 puntos**, y habíamos dicho que para que sea función tenía que cortar en un punto, así que **NO es función.**

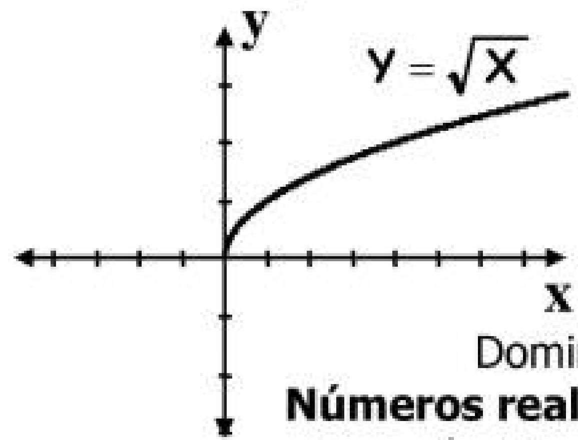
☆ **Dominio de una Función:** Son Todos los elementos de la variable independiente "X" a los que les corresponde una imagen "Y".

Veamos unos ejemplos:



Dominio: **Todos los números reales**, ya que a cualquier número lo puedo elevar al cuadrado y sumarle 1.

$$D\ f_{(x)} = \left\{ {}^{X}\!/_{X} \in \Re \right\} \Rightarrow D\ f_{(x)} = (-\infty;\infty)$$



Dominio: **Números reales positivos**

$$D\ f_{(x)} = \left\{ {}^{X}\!/_{X} \in \Re \wedge x \geq 0 \right\}$$
$$\Rightarrow D\ f_{(x)} = [0;\infty)$$

☆ **Restricciones al Dominio:** Las restricciones más comunes son:

- **Los denominadores:** "Deben ser distintos de cero" Ya que la división por cero no existe.
- **Las raíces de índice par:** "EL argumento de las raíces debe ser mayor o igual a cero" ya que no existen las raíces pares de números negativos en el campo de los números reales.
- **Los logaritmos:** "El valor o expresión afectado/a por un logaritmo debe ser mayor a 0"
- **La Tangente:** "La tangente de 90º y 270º no existe"

Nota: Cuando quiera ver cual es el dominio de una función debo plantear que se cumplan las 4 condiciones. Si la función no tiene ni denominadores, ni raíces ni logaritmos ni tangentes, por ahora podemos decir que su dominio son todos los números reales, ya que no tienen ninguna restricción.

☆ Ejemplo: Veamos cual es el dominio de: $Y = \dfrac{x+1}{5X+6}$ La restricción en este caso, es que el DENOMINADOR debe ser DISTINTO de CERO.

Entonces planteo: $5x + 6 \neq 0 \Rightarrow$ El denominador debe ser $\neq 0$

$$5x \neq -6 \Rightarrow x \neq \frac{-6}{5} \Rightarrow D\ f_{(x)} = \left\{ {}^{X}\!/_{X} \in \Re \wedge x \neq -\frac{6}{5} \right\}$$

☆ **Clasificación de las Funciones**

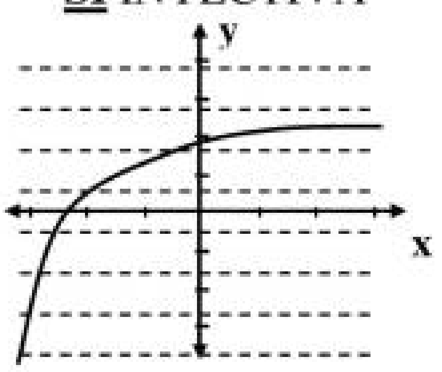
Inyectivas: Cuando NO hay dos valores de "X" distintos que tengan la misma imagen "Y".

Sobreyectivas: Cuando NO hay ningún elemento de "Y" que no sea imagen de ninguno de "X".

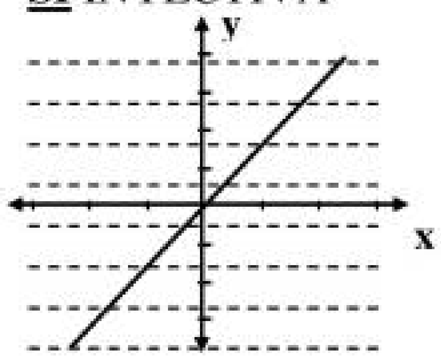
Biyectivas: Cuando son inyectivas y sobreyectivas a la vez.

*Para que sean INYECTIVAS: Si dibujamos líneas horizontales, las líneas tienen que cortar a la gráfica **como máximo en un punto** (Si alguna línea toca a la gráfica en dos o más puntos, la función NO es INYECTIVA)*

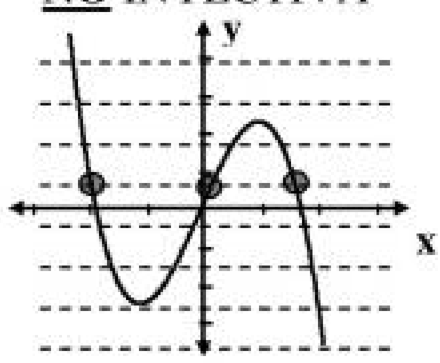
SÍ INYECTIVA



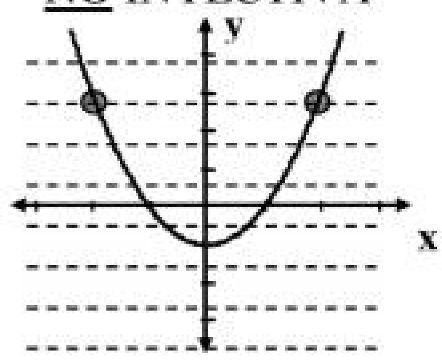
SÍ INYECTIVA



NO INYECTIVA

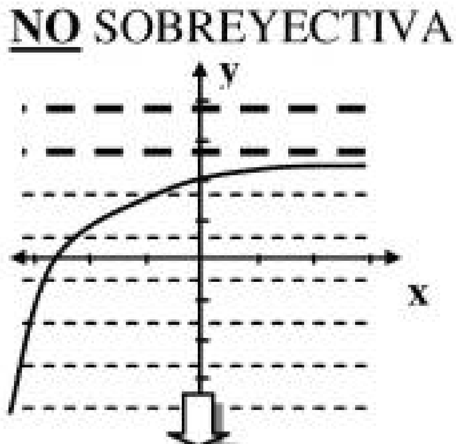


NO INYECTIVA



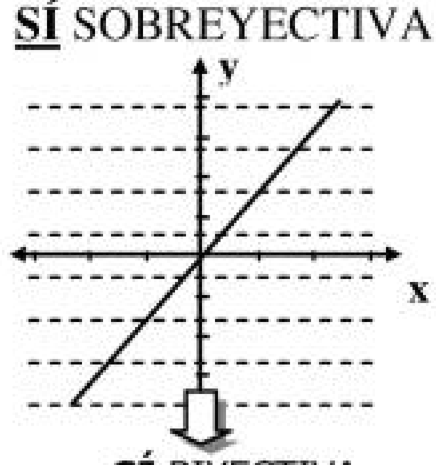
*Para que sean SOBREYECTIVAS: Si dibujamos líneas horizontales, las líneas tienen que cortar a la gráfica en **un punto SIEMPRE** (Si alguna línea NO toca en ningún punto, la función NO es SOBREYECTIVA)*

NO SOBREYECTIVA



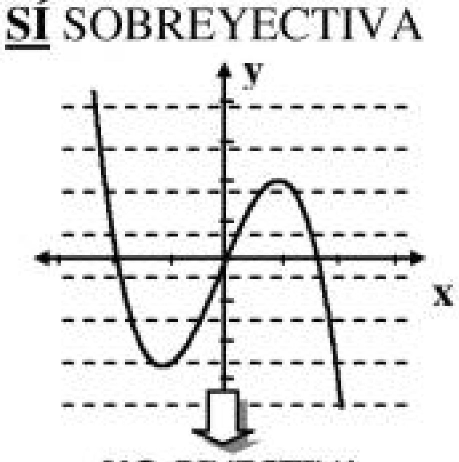
NO BIYECTIVA

SÍ SOBREYECTIVA



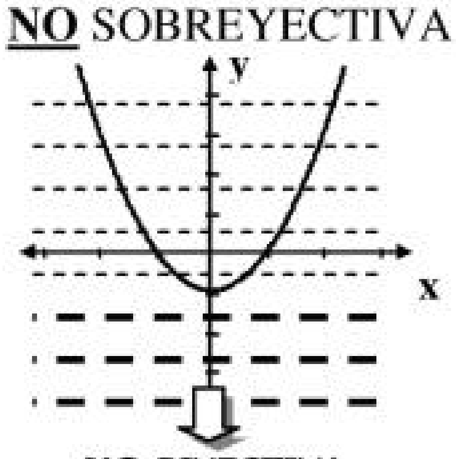
SÍ BIYECTIVA

SÍ SOBREYECTIVA



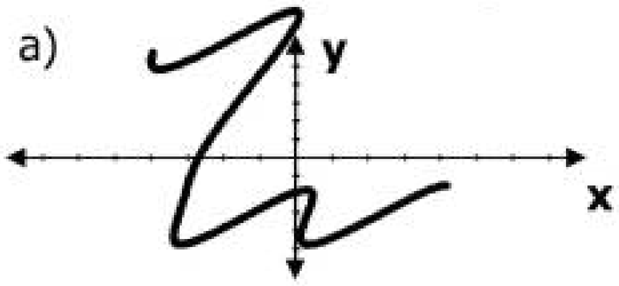
NO BIYECTIVA

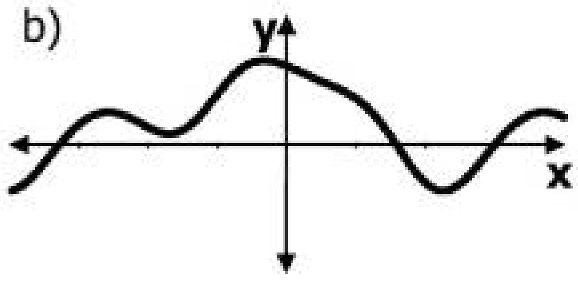
NO SOBREYECTIVA

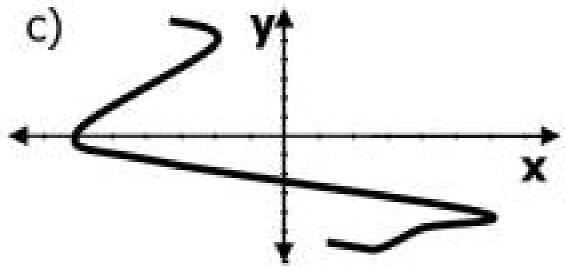


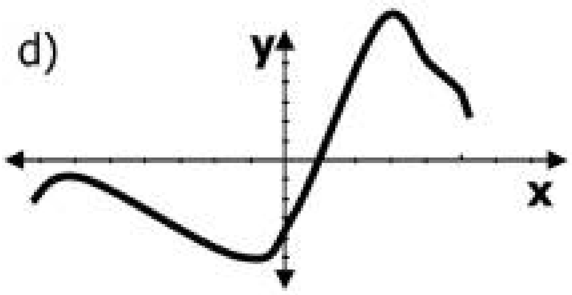
NO BIYECTIVA

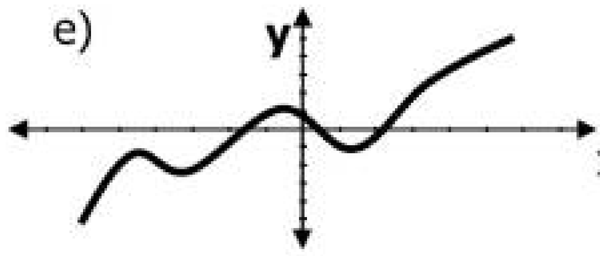
1- Dadas las siguientes gráficas en los ejes X–Y **Decir cuáles son funciones y cuáles NO.**

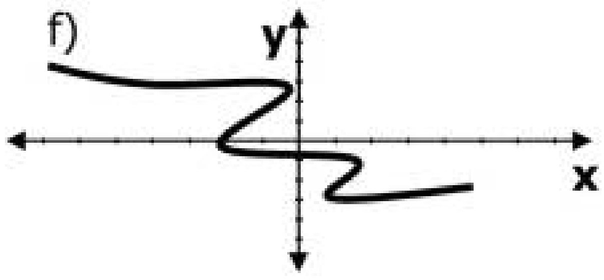
a)


b)


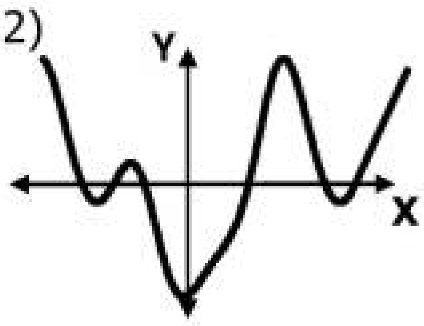
c)


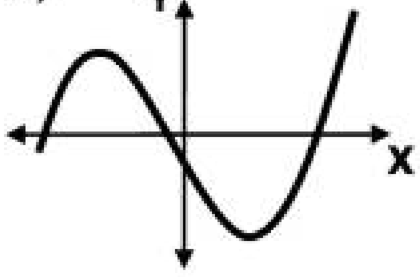
d)


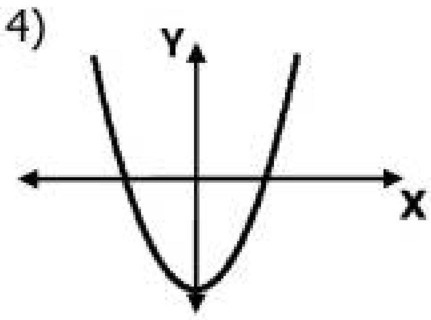
e)


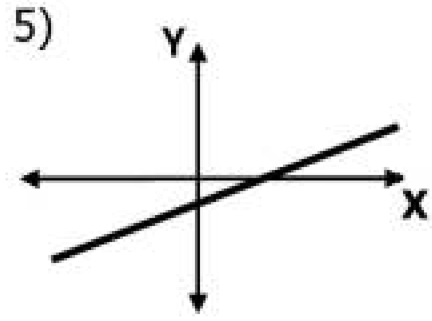
f)


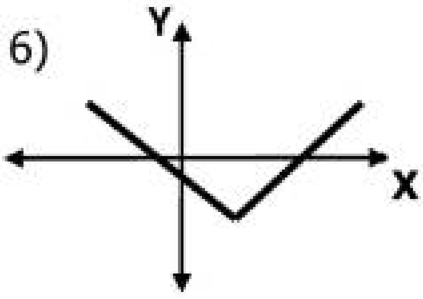
Clasificar las siguientes funciones:

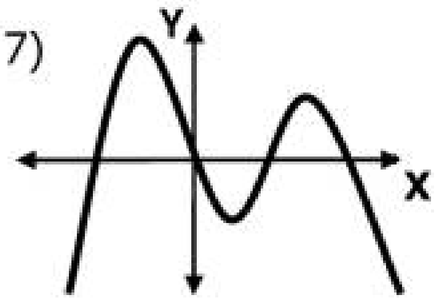
2)


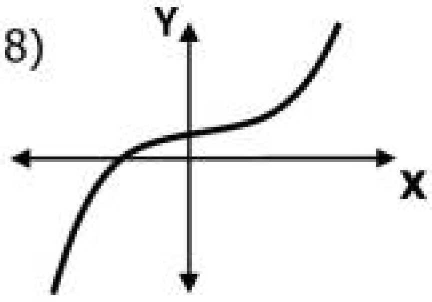
3)


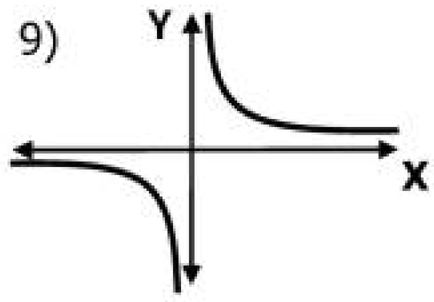
4)


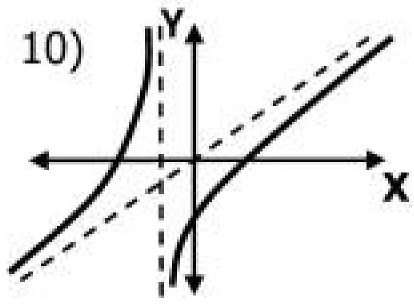
5)


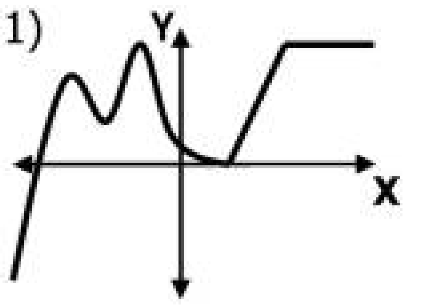
6)


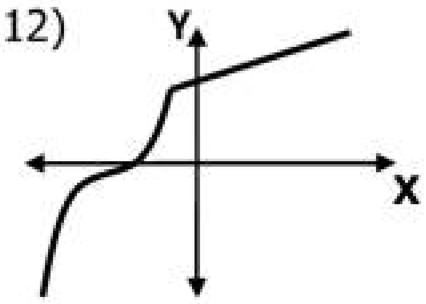
7)


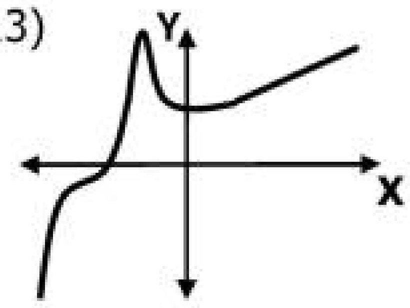
8)


9)


10)


11)


12)


13)


Responder Verdadero o Falso:

14) Una función es toda relación entre dos variables
15) Una función es una relación que le asigna como máximo una imagen a cada elemento de su Dominio.
16) Una función Inyectiva le asigna a cada elemento del dominio una imagen distinta.
17) Una función sobreyectiva le asigna a todos los elementos del dominio una imagen, que puede repetirse para dos elementos distintos del dominio.
18) Todas las funciones relacionan una variable independiente con una dependiente.
19) Una función biyectiva puede No ser Inyectiva para algún valor de X.

Decir cuál es el dominio de las siguientes funciones:

20) $f_{(x)} = \frac{2}{x+1}$

21) $f_{(x)} = \frac{x}{1-x}$

22) $f_{(x)} = \frac{x^2}{(1-x)\cdot(1+x)}$

23) $f_{(x)} = \frac{X+1}{X^2}$

24) $f_{(x)} = \sqrt{X} + 1$

25) $f_{(x)} = \frac{\sqrt{X}+1}{X}$

26) $f_{(x)} = \frac{X+1}{\sqrt{X+1}}$

27) $f_{(x)} = \frac{\sqrt{X}+1}{\sqrt{X+1}}$

28) $f_{(x)} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{X+1}}$

29) $f_{(x)} = \sqrt[4]{\sqrt{X}-1}$

30) $f_{(x)} = \frac{\sqrt{X}-1}{\sqrt{X+1}} + \sqrt{X-1} + \frac{1}{X-1}$

31) $f_{(x)} = \frac{\log(x)+\sqrt{X}}{\log(x)} + \frac{l}{x}$

32) $f_{(x)} = \sqrt{X^{12} + 7X^8 + 4X^2} - 2X^3 + X$

33) $f_{(x)} = -5$

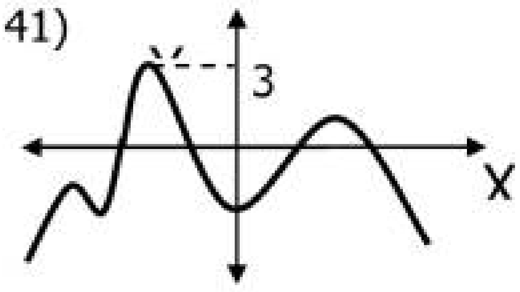
<u>Restringir el dominio para que las funciones sean Inyectivas:</u>

34) $f_{(x)} = X^2$ 35) $f_{(x)} = (X-1)^2$ 36) $f_{(x)} = |X+3|+1$ 37) $f_{(x)} \begin{cases} X+3 & si \;\; X < -2 \\ (X+1)^2 & si \;\; -2 \leq X \end{cases}$

<u>Restringir la imagen para que las funciones sean Sobreyectivas:</u>

38) $f_{(x)} = X^2$ 39) $f_{(x)} = X^2 + 3$ 40) $f_{(x)} = \dfrac{2}{X+3}$

41)



Definir, y escribir la fórmula, en cada uno de los siguientes casos, una función que represente la relación entre las variables de cada ejemplo:

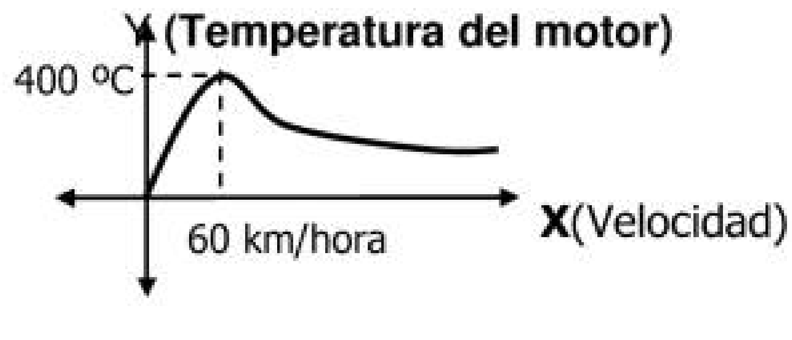
42) El volumen de un recipiente esférico se puede calcular elevando al radio de la esfera al cubo y luego multiplicando al resultado por la constante "Pi" que vale 3,14 y a su vez multiplicando este resultado por 4/3. Expresar al volumen de la esfera entonces como función de su radio.

43) En una imprenta nos dicen que para hacer volantes de un determinado tamaño nos cobran: $30 fijos más allá de la cantidad de volantes que se quieran hacer y a eso hay que sumarle un costo variable de $15 por cada 1000 volantes. Expresar el costo en función de la cantidad de volantes que se manden a hacer.

44) Un artesano hace adornos con forma de cubo, son cubos pequeños, rellenos con un líquido especial, forrados con un celofán semitransparente y decorado en sus aristas con unas cintas brillantes. El artesano tiene de costo $1,5 por cada centímetro cúbico de relleno que use, a su vez tiene un costo de $0,2 por cada centímetro cuadrado de celofán, y también tiene un costo de $0,5 por cada centímetro lineal de cinta brillante que usa. Además de esto, por cada cubo que fabrica tiene una ganancia fija de $2. Expresar el precio de venta de cada cubo en función del tamaño de la arista del cubo.

45) Un equipo de Fútbol gana un torneo y premian a los jugadores del plantel con un premio de $50.000. Los dirigentes del club dicen que se repartirá el premio en forma igualitaria entre todos los jugadores del plantel y que además los directivos del club vana sumarle a este premio otro premio más de $500 a cada jugador del plantel. Lo que no sabemos nosotros es exactamente cuántos jugadores están en ese plantel. Expresar entonces el valor del premio que le corresponde a cada jugador en función de la cantidad de jugadores del plantel.

El siguiente gráfico corresponde a una función que expresa la temperatura del bloque del motor de un auto en función de la velocidad a la que se mueve el auto.



46) ¿Puede ser que se obtengan dos valores iguales de temperatura del motor a dos velocidades distintas? ¿Si es así por que pasa esto?

47) ¿Cuál es el dominio de esta función? ¿Cuál es su imagen?

48) ¿Cuál es la temperatura máxima que puede alcanzar el motor? ¿Es sobreyectiva esta función? ¿Si fuera sobreyectiva que pasaría con la pregunta de la temperatura máxima?

49) Restringir dominio e imagen para que la función sea biyectiva.

50) <u>Una empresa que vende viajes de egresados a Bariloche tiene el siguiente plan de precios</u>:

- El costo administrativo es fijo y vale para el curso entero $1.200 en total, vayan la cantidad de alumnos que vayan (Esta cifra debe dividirse por la cantidad de alumnos que viajen)
- Por otro lado dicen que el valor de la estadía por alumno es de $400 (10 días)
- Por otro lado las excursiones valen en promedio $50 cada una por alumno.
- El valor del pasaje dicen que es $10 menor que las cuatro quintas partes del costo administrativo que se cobra por alumno.

Definir una función que exprese el costo por alumno de un viaje por esta empresa, en función de la cantidad de alumnos. (se contratan 2 excursiones) Calcular dicho valor si el curso tiene 20 alumnos y si tiene 30 alumnos.

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Estudio de Funciones
Nivel II

Número de Tema: **57**

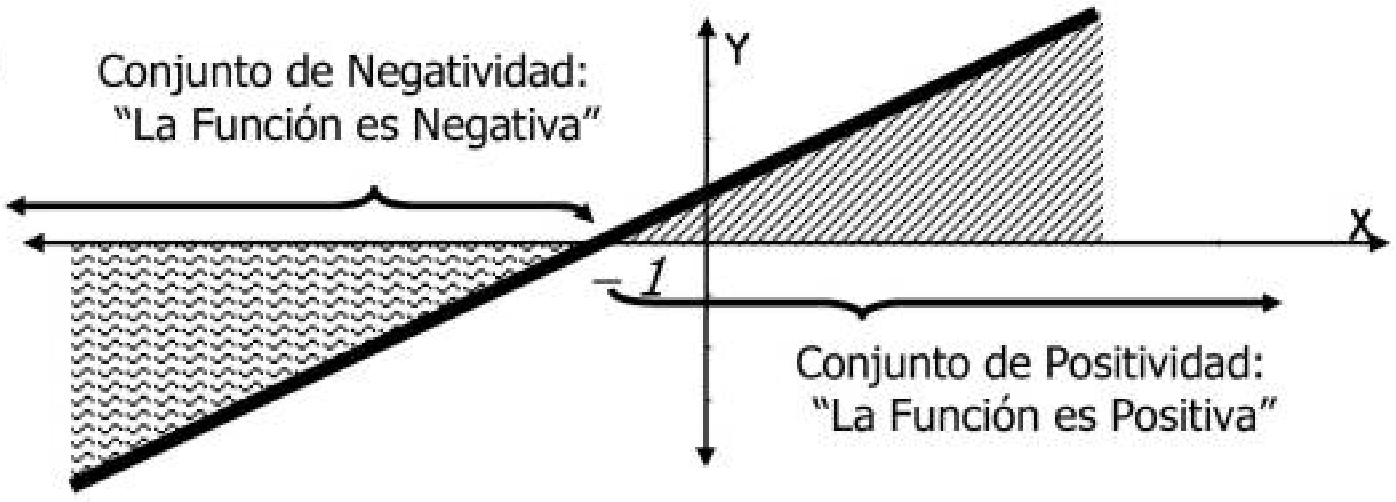
Área: **Matemática**

Intervalos de Positividad y Negatividad

- Los intervalos (de la variable independiente "X") en los que la función es ***positiva*** se llama: **"Conjunto o Intervalo de Positividad"** $C^{+} = \left\{ X/X \in \Re \quad \wedge \quad f_{(X)} > 0 \right\}$

- Los intervalos (de la variable independiente "X") en los que la función es ***negativa*** se llama: **"Conjunto o Intervalo de Negatividad"** $C^{-} = \left\{ X/X \in \Re \quad \wedge \quad f_{(X)} < 0 \right\}$

Ejemplos:



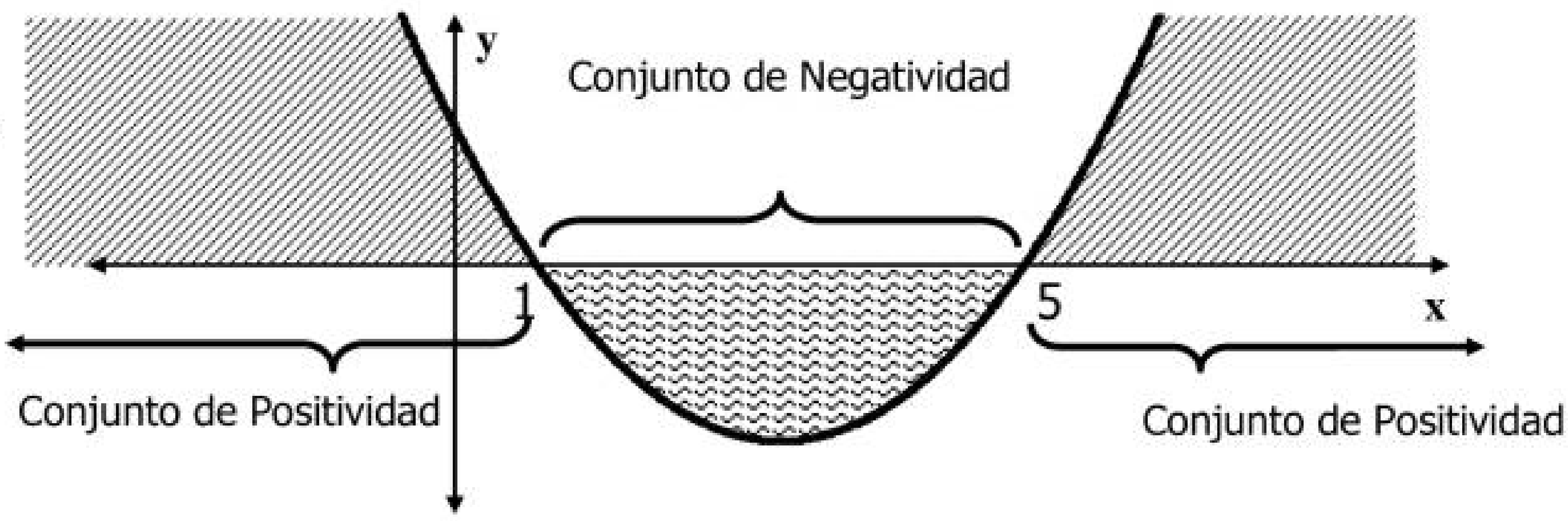
Positividad: $C^{+} = \left\{ X/X \in \Re \quad \wedge \quad X > -1 \right\} \Rightarrow C^{+} = (-1;\infty)$

Todos los reales mayores a –1 $\Rightarrow$ **intervalo que va desde –1 hasta infinito**

Negatividad: $C^{-} = \left\{ X/X \in \Re \quad \wedge \quad X < -1 \right\} \Rightarrow C^{-} = (-\infty;-1)$

Todos los reales menores a –1 $\Rightarrow$ **intervalo que va desde –infinito hasta –1**

Otro Ejemplo:



Positividad: $C^{+} = \left\{ X/X \in \Re \quad \wedge \quad X < 1 \quad \vee \quad X > 5 \right\} \Rightarrow C^{+} = (-\infty;1) \cup (5;\infty)$

"Y" **"O"** **"Unión"**

O sea que el conjunto de Positividad son todos los valores de "x" menores a 1 o mayores a 5.

Cuando se trata de conjuntos e intervalos, los signos " $\vee$ " significan la disyunción "o" y derivan en una unión de intervalos

Negatividad: $C^{-} = \left\{ X/X \in \Re \quad \wedge \quad 1 < X < 5 \right\} \Rightarrow C^{-} = (1;5)$

O sea que el conjunto de Negatividad son todos los valores Reales de "x" menores a 5 **Y** mayores a 1.

Raíces de las funciones: Y ¿Qué pasa en el 1 y en el 5? Bueno en esos puntos la función vale CERO. O sea que no es ni positiva ni negativa. Los puntos en los que la función vale CERO se llaman Raíces

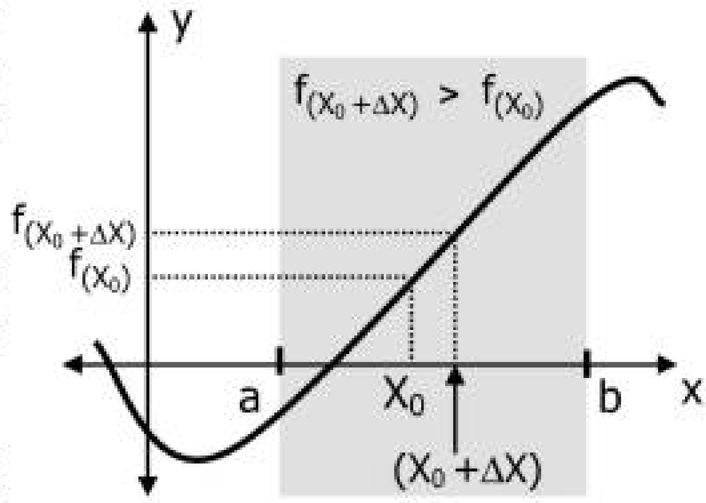
⇨ Raíces = { 1 ; 5 }

Conjuntos de Crecimiento y de Decrecimiento

El intervalo (de la variable "X") en los que la función "CRECE" se llama: **"Intervalo de Crecimiento"**

El intervalo (de la variable "X") en los que la función "DECRECE" se llama: **"Intervalo de Decrecimiento"**

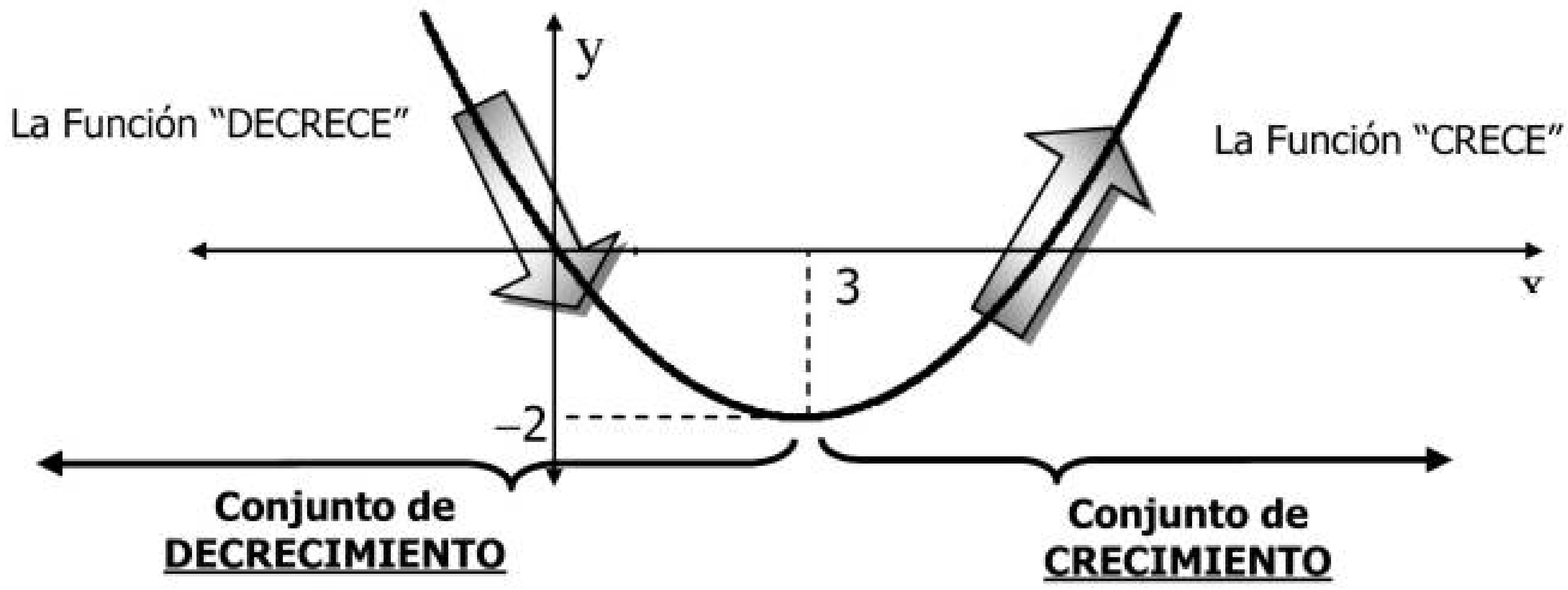
Para definir estrictamente un intervalo de crecimiento, y analizar estrictamente la condición de crecimiento de una función en un intervalo reducido, por ejemplo debemos partir de un punto $X = X_0$ y tomar un pequeño incremento positivo ΔX y ver que $f(X_0+\Delta X) > f(X_0)$.



Si esta condición se cumple $\forall\ X_0 \in (a\ ;\ b)$, entonces f(x) será creciente en el intervalo (a ; b). "Cabe aclarar que para que esto sea válido tiene que verificarse también que f(x) sea continua en el intervalo (a ; b)"

Por analogía a esta definición, la condición de decrecimiento sería que para todo X_0 perteneciente al intervalo (a;b) se debe cumplir que $f(X_0+\Delta X) < f(X_0)$. Siempre tomando incrementos positivos de ΔX, y siempre que dentro del intervalo (a ; b) la función sea continua.

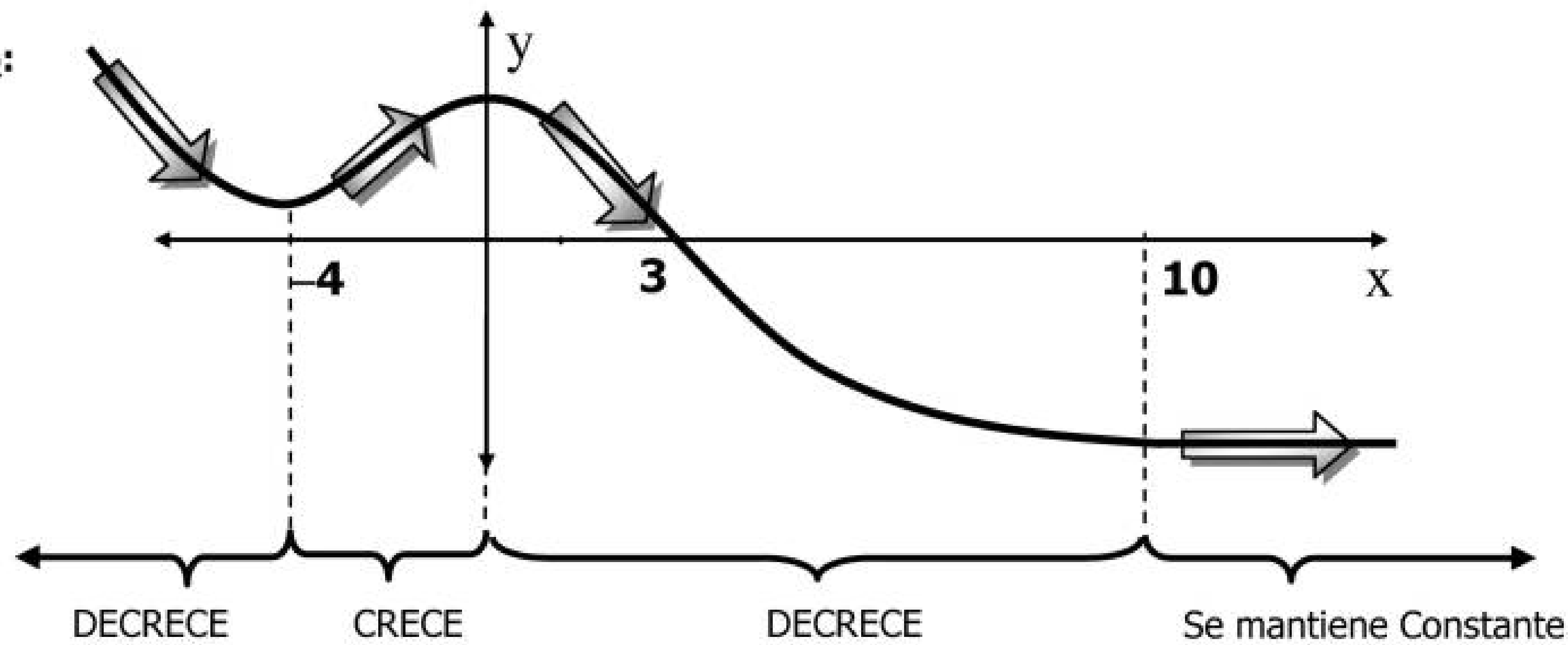
Ejemplo:



Intervalo de CRECIMIENTO $= \left\{ X/_X \in \Re \quad \wedge \quad X > 3 \right\} \Rightarrow \ = (3;+\infty)$

Intervalo de DECRECIMIENTO $= \left\{ X/_X \in \Re \ \wedge \ X < 3 \right\} \Rightarrow \ = (-\infty;3)$

Otro ejemplo**:**



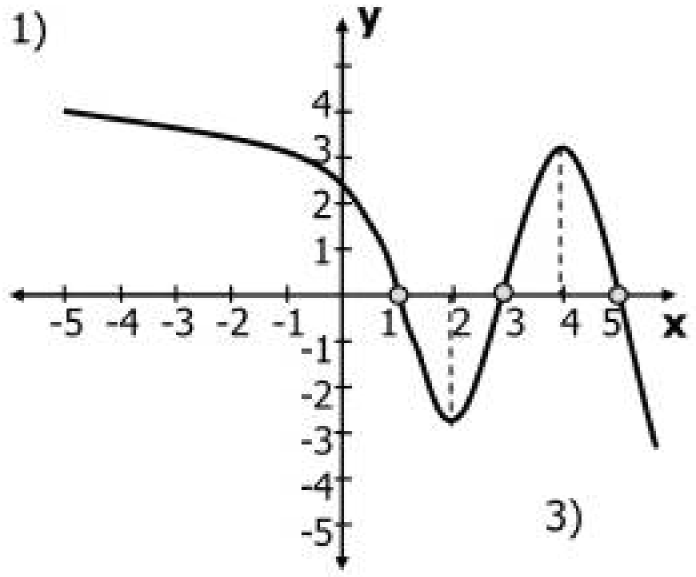
Intervalo de CRECIMIENTO $= \left\{ X/_X \in \Re \quad \wedge \quad -4 < X < 0 \right\} = (-4;0)$

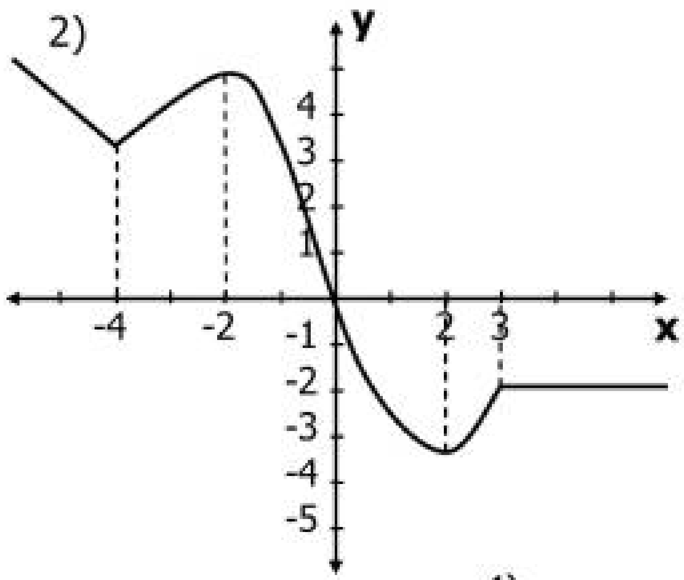
Intervalo de DECRECIMIENTO $= \left\{ X/_X \in \Re \ \wedge \ X < -4 \quad \vee \quad 0 < X < 10 \right\} = (-\infty;-4) \cup (0;10)$

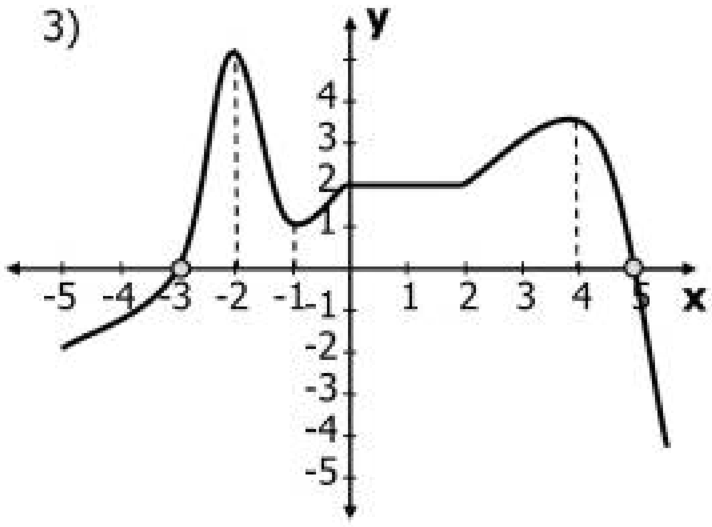
Intervalo en que la Función es Constante $= \left\{ X/_X \in \Re \quad \wedge \quad X > 10 \right\} = (10;+\infty)$

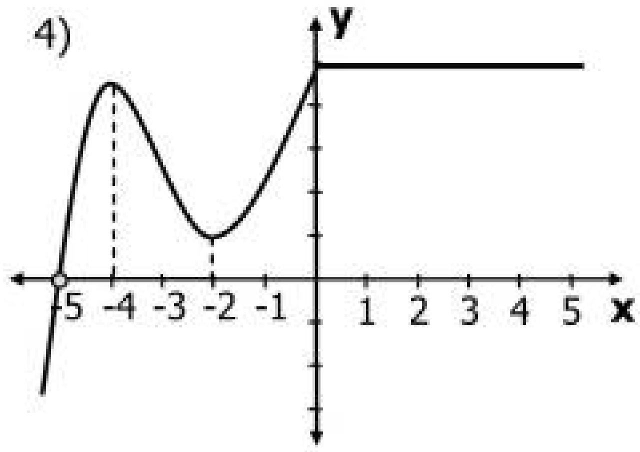
Dados los siguientes gráficos de funciones:

a) Clasificar.
b) Indicar el Dominio.
c) Escribir las raíces de la función.
d) Escribir los intervalos de positividad y negatividad.
e) Escribir intervalos donde la función crece, decrece y es cte.

1)


2)


3)


4)


Graficar las siguientes funciones y analizar los 5 ítems de los ejercicios anteriores:

5) $f(x) = X^2 + 1$

6) $f(x) = \frac{1}{3}(X-1)^2 - 3$

7) $f(x) = (X-3)\cdot(X+1)$

8) $f(x) = \frac{1}{2}X - 2$

9) $f(x) = \frac{1}{X+1} - 3$

10) $f(x)\begin{cases} X^2 & si\ \ X<0 \\ X & si\ \ X>0 \end{cases}$

11) $f(x)\begin{cases} 1 & \text{si } X<-1 \\ X^3+X^2+3X+4 & \text{si } -1\le X\le 1 \\ 3X+6 & \text{si } X>1 \end{cases}$

12) $f(x)\begin{cases} X^2-3 & \text{si } X<-3 \\ -2X & \text{si } -3\le X<0 \\ 0 & \text{si } X\ge 0 \end{cases}$

13) $f(x)\begin{cases} 3/X & \text{si } X\le -3 \\ X+2 & \text{si } -3<X\le -1 \\ \sqrt{X+5}-1 & \text{si } X>-1 \end{cases}$

14) $f(x)\begin{cases} X-3 & \text{si } X<0 \\ -2X^2+5X-3 & \text{si } 0\le X\le 1 \\ (X-1)^2 & \text{si } X>1 \end{cases}$

Hallar "k" para que la función sea creciente en el intervalo (– 2 ; ∞)

15) $f(x) = \frac{1}{2}X - k$

16) $f(x) = \left(\frac{1}{2}k + 2\right)X + 6$

17) $f(x) = (k-5)X + k^2 - 13$

Hallar "k" para que el conjunto de negatividad sea el intervalo (– 1 ; 3)

18) $f(x) = (X-k)\cdot(X+k-2)$

19) $f(x) = X^2 + (2-3k)X - 5k^2 + 2k$

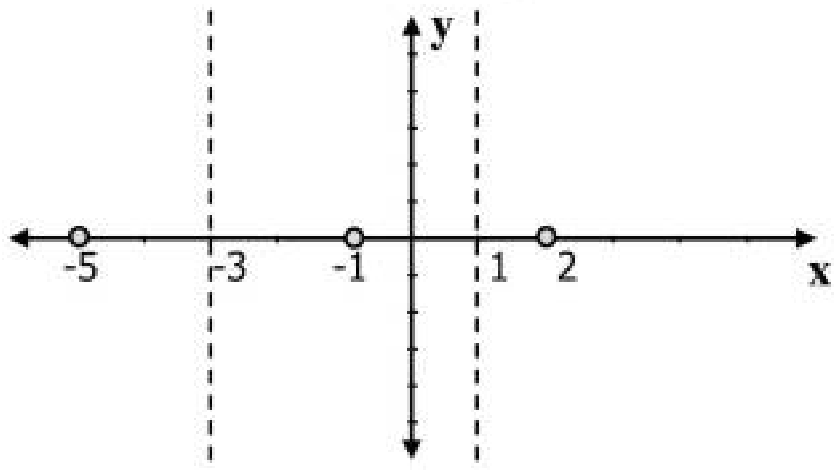
Graficar en el plano X-Y Una función cuyos intervalos de N^- , P^+, crecimiento y decrecimiento sean**:**

20) $P^+ = (-5;-1)\cup(2;\infty)$

$N^- = (-\infty;-5)\cup(-1;2)$

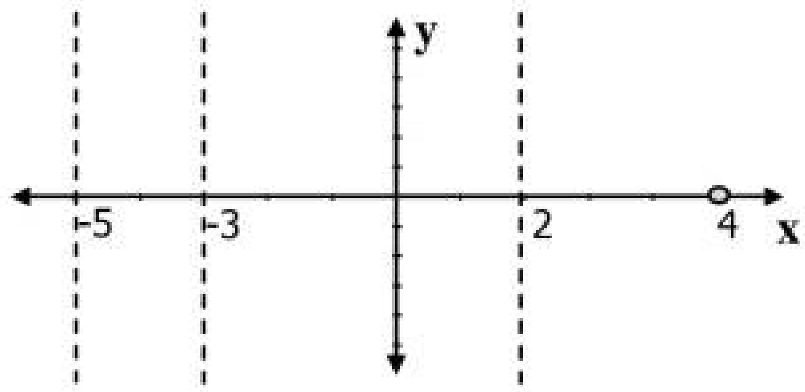
$Crec = (-\infty;-3)\cup(1;\infty)$

$Decrec = (-3;1)$



Graficar en el plano X-Y Una función cuyos intervalos de N^- , P^+, crecimiento y decrecimiento sean:

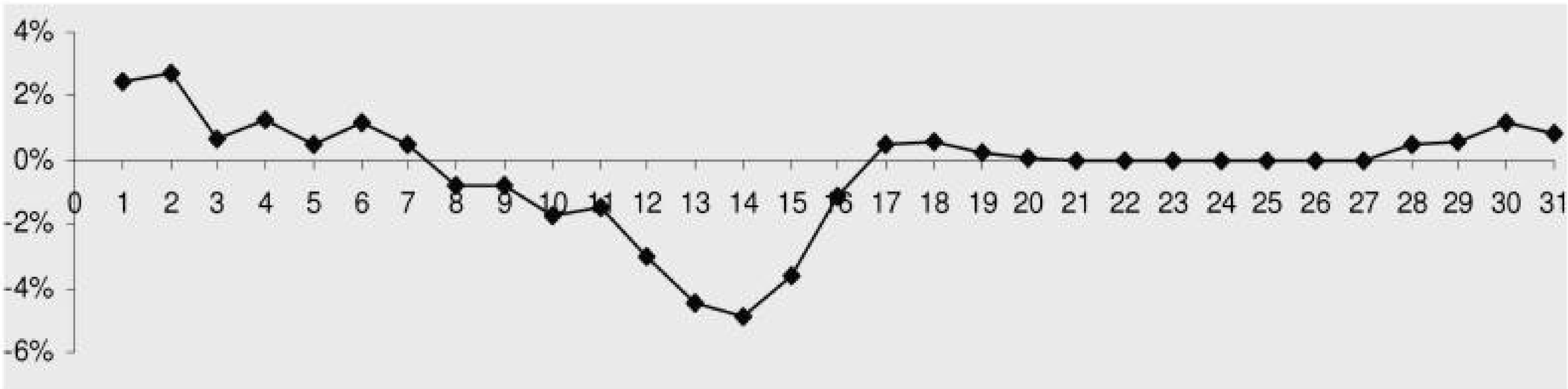
21)



$P^+ = (-\infty;4)$ $\quad$ $Crec = (-\infty;-5) \cup (-3;-2)$

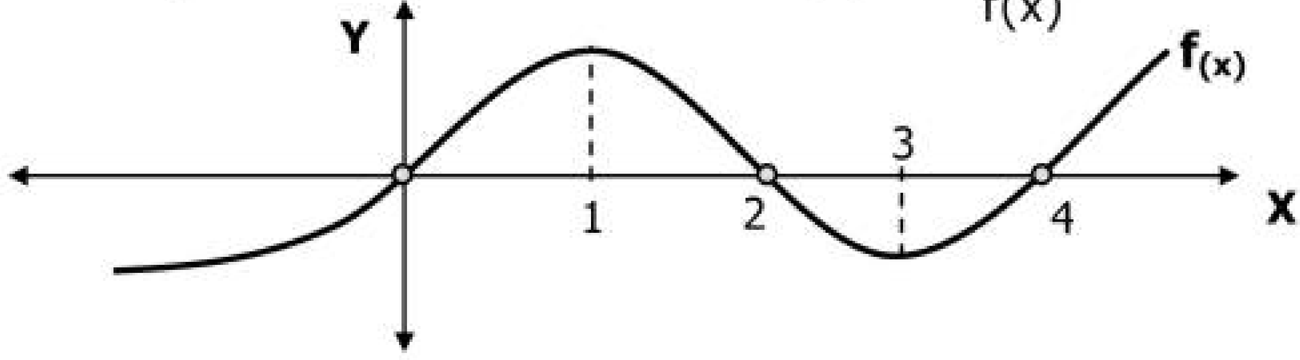
$N^- = (4;\infty)$ $\quad$ $Decrec = (-5;-3) \cup (2;\infty)$

22) Supongamos que en el siguiente gráfico, la función representa el porcentaje de incremento del precio de un determinado producto a lo largo del mes.



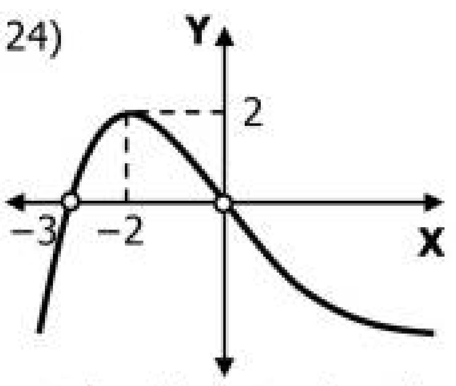
A) ¿Cuál es el intervalo de Negatividad?
B) ¿Qué significado tiene el intervalo de negatividad, con respecto al precio del producto?
C) ¿Qué significan, con respecto al precio del producto, las raíces de la función?
D) ¿Se puede decir a simple vista que el precio del producto en todo el mes (tomando el primer y último día del mes) bajó? ¿Por qué? (comparen el conjunto de negatividad con el de positividad)

23) Dada la función f(x) determinar el conjunto de todos los valores de x tal que la función sea **decreciente y que** $\frac{|f(x)|}{f(x)} = -1$



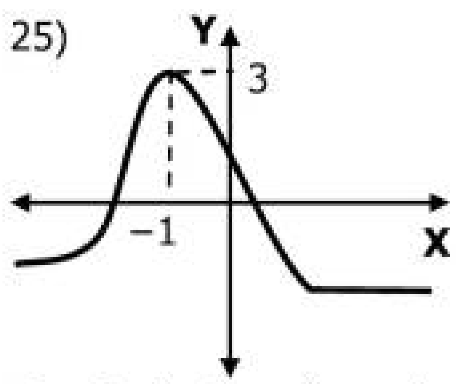
Hallar "k"

24)



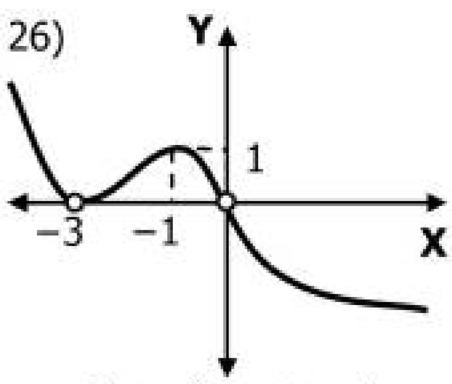
$P^+ = (k-4\ ;\ k-1)$

25)



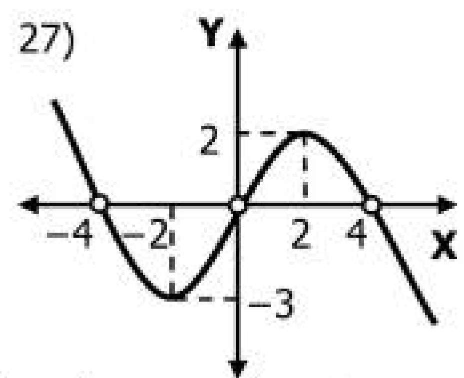
$\text{Crecimiento} = (-\infty; k+1)$

26)



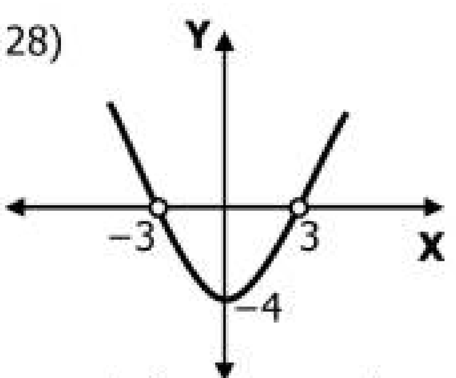
$N^- = (k-5;\infty)$

27)



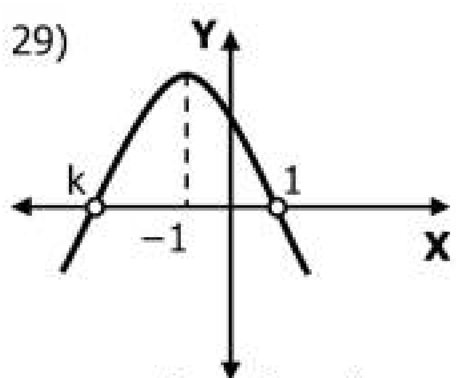
$P^+ = \left(-\infty;-k^2\right) \cup (k+2;4)$

28)



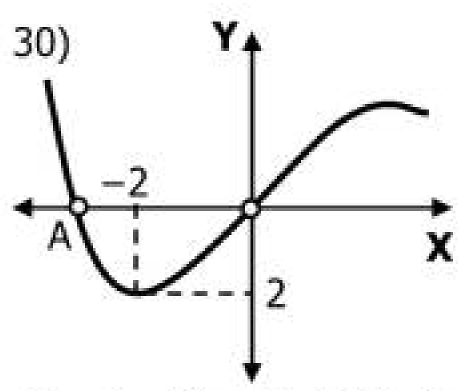
$N^- = \left(k^2-4; k+4\right)$

29)



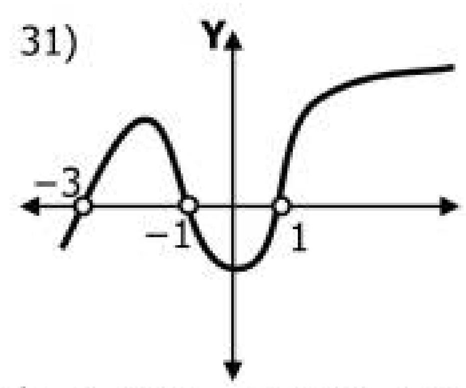
$P^+ = \left(k; k^2-8\right)$

30)



$p^+ = (-\infty;-3) \cup (k+A;\infty)$

31)



$P^+ = (-3\ ; A-4) \cup (k-A;\infty)$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Estudio de Funciones Nivel III

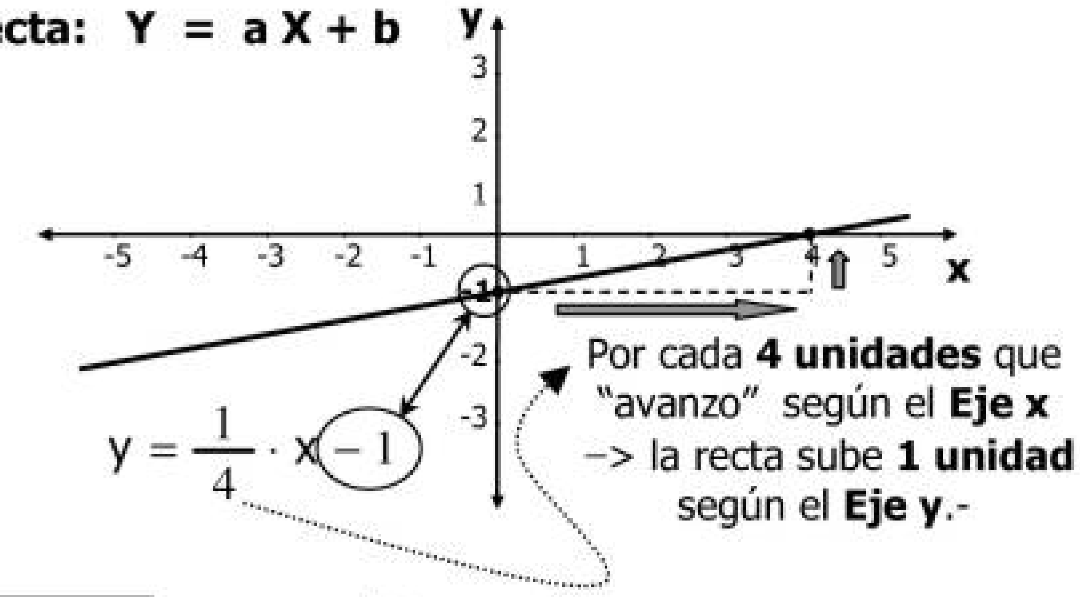
Número de Tema: **58**

Área: **Matemática**

Función Lineal, Repaso de Fórmulas: Recta: $Y = aX + b$

"b" es la ORDENADA AL ORIGEN: El punto donde la recta corta al eje Y

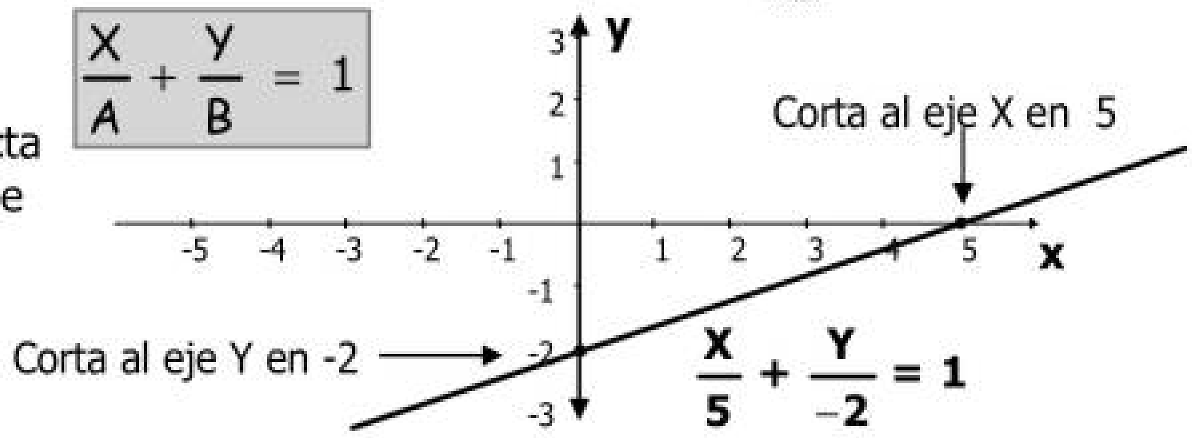
"a" es la PENDIENTE: El denominador es "lo que avanza X" y el numerador "lo que avanza Y", siempre partiendo desde la ordenada al origen.



Ecuación Segmentaria de la recta:

$$\frac{X}{A} + \frac{Y}{B} = 1$$

"A" y "B" son los valores en que la recta corta al eje X y al eje Y respectivamente

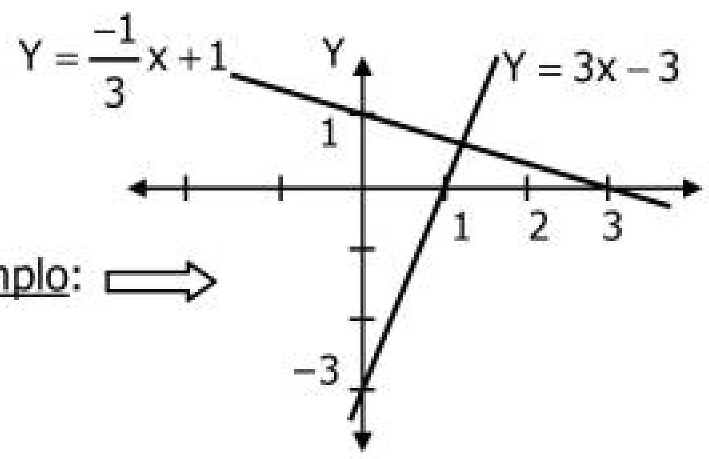


Rectas Perpendiculares: Dadas las rectas $\begin{cases} Y_1 = a_1 \cdot X + b_1 \\ Y_2 = a_2 \cdot X + b_2 \end{cases}$

"Para que sean perpendiculares las pendientes tienen que ser inversas y opuestas" $\Rightarrow$ $a_1 = -\frac{1}{a_2}$

Ambas pendientes al multiplicar una por la otra, deben dar por resultado -1. También se llama a esta relación como "recíproca".

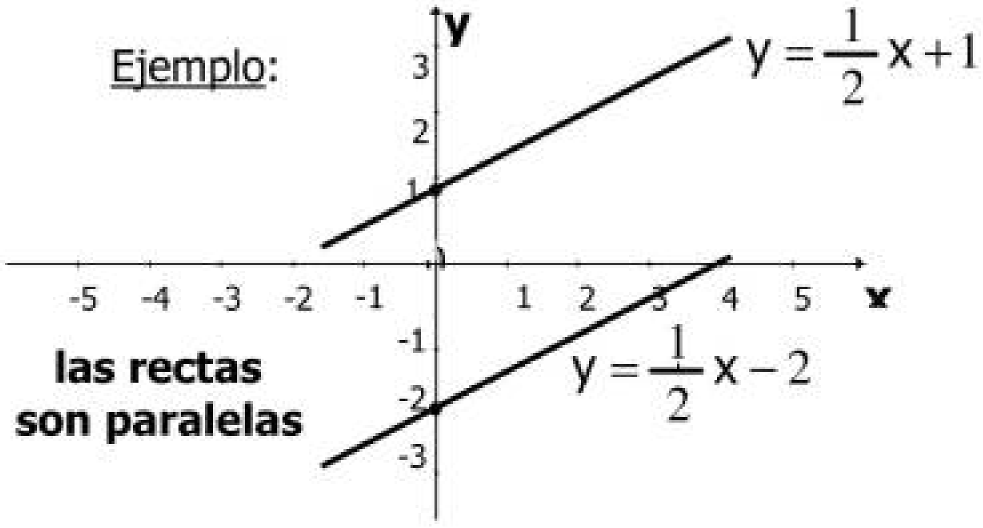
Ejemplo: $\Rightarrow$



Rectas Paralelas: Dadas las rectas $\begin{cases} Y_1 = a_1 \cdot X + b_1 \\ Y_2 = a_2 \cdot X + b_2 \end{cases}$

"Para que sean paralelas las pendientes deben ser iguales" $\Rightarrow$ $a_1 = a_2$

Ejemplo:

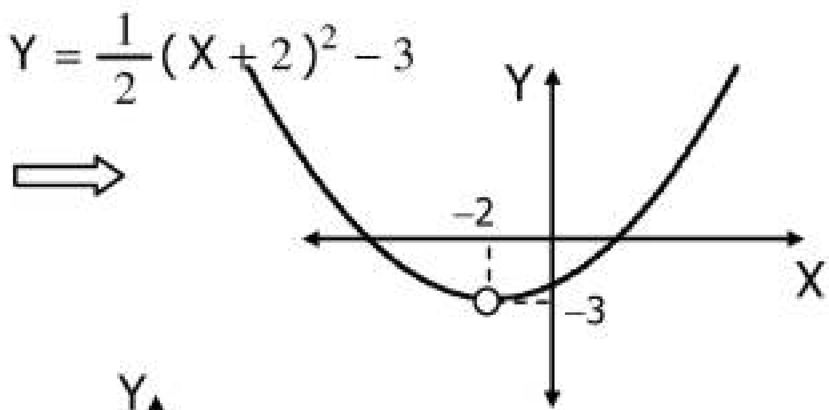


Parábolas, Repaso de Fórmulas:

- Forma Canónica: $Y = "a"\,(X - X_v)^2 + Y_v$

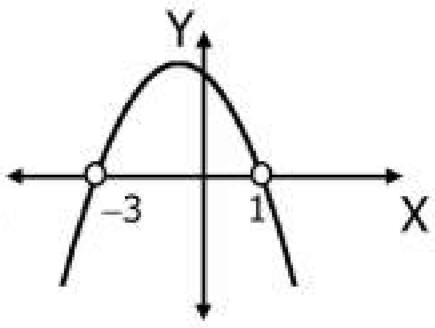
El valor de "a" hace que mientras más grande sea, mas "angosta" es la parábola, y mientras mas chica, más "ancha". A su vez si "a" es negativa, la parábola queda "mirando para abajo"

Ejemplo: $\Rightarrow$



- Forma Factorizada: $Y = "a"\,(X - X_1) \cdot (X - X_2)$

Ejemplo: $Y = -1\,(X - 1) \cdot (X + 3)$ $\Rightarrow$



- Forma Polinómica: $\Rightarrow$ $\mathbf{Y} = "a"\,\mathbf{X^2} + "b"\,\mathbf{X} + "c"$

Vértice: $X_V = \frac{-b}{2 \cdot a}$ $\quad Y_V = \frac{-b^2 + 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a}$

Raíces: $X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

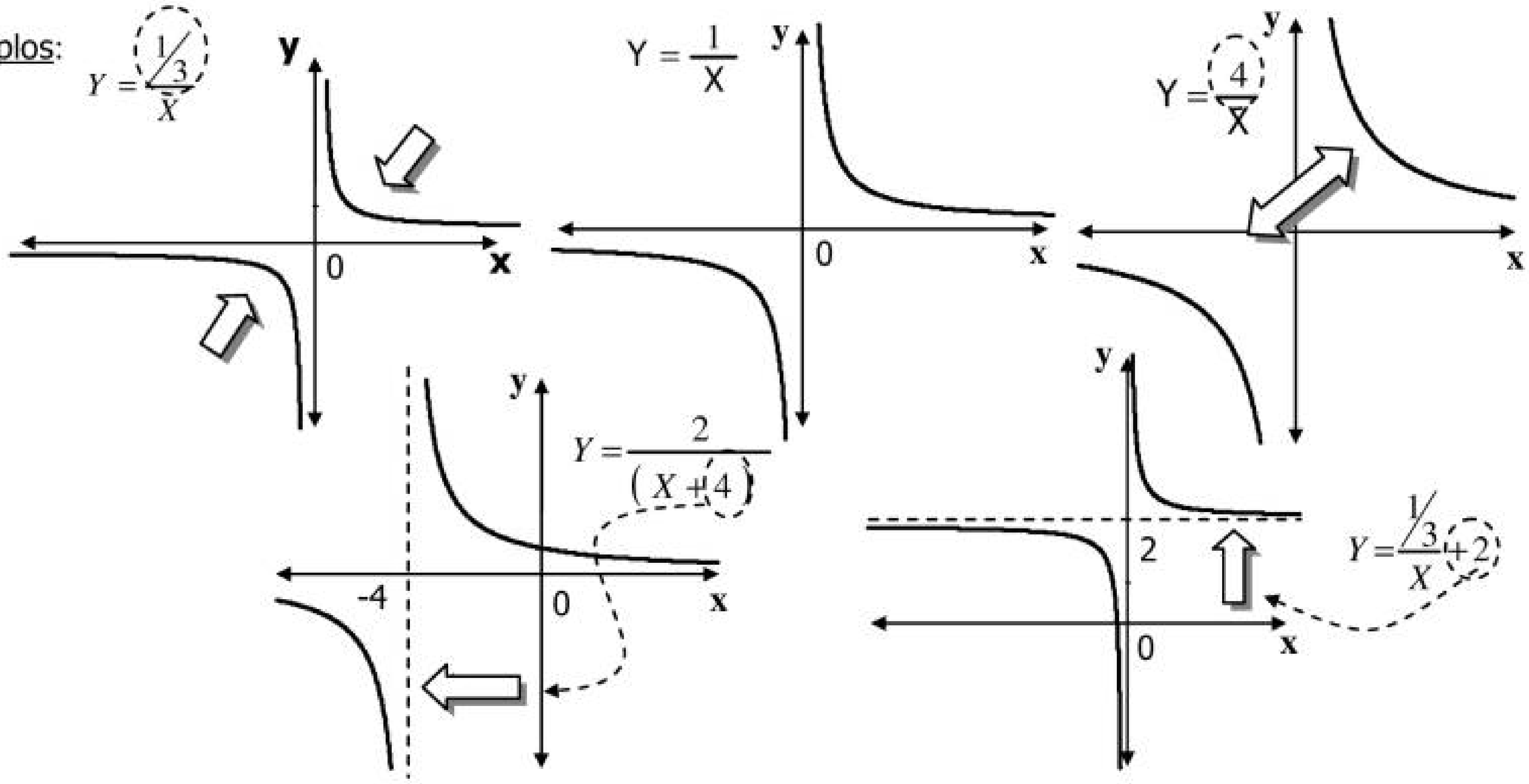
- **Las Hipérbolas (Funciones Holográficas):** Su Fórmula general es: $Y = \dfrac{a}{(x+b)} + c$

"a": Modifica su curvatura (mientras más grande sea "a" menor es su curvatura).

"b": Corre a la curva hacia la IZQUIERDA (si "b" es negativo, hacia la derecha).

"c": Corre a la curva hacia ARRIBA (si "b" es negativo, la corre hacia ABAJO).

Ejemplos:



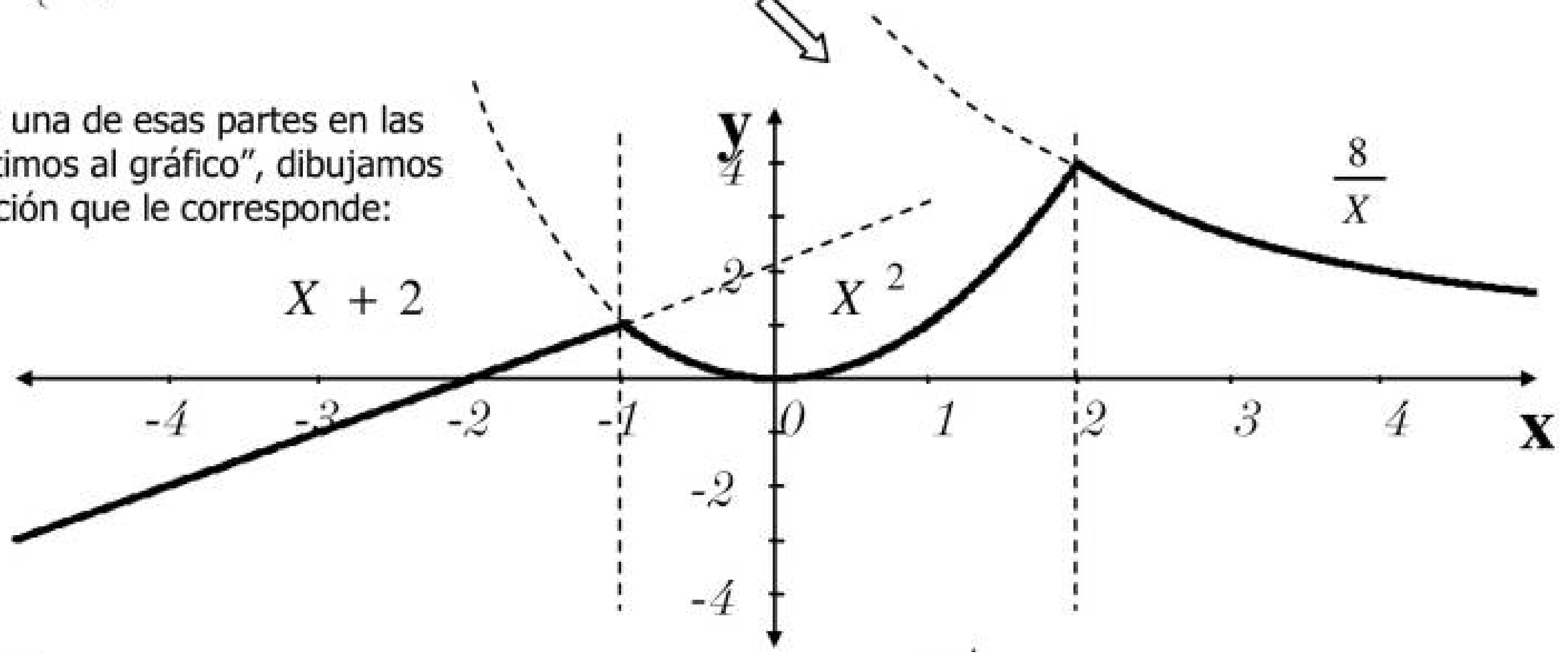
- **Funciones Partidas**: *Hay funciones para las cuales, la variable dependiente (Y) se calcula con diferentes fórmulas, según el intervalo del dominio en que la analicemos. Estas funciones se llaman "Funciones Partidas"*

Ejemplo:

$$Y = \begin{cases} x+2 & \text{Si } x < 1 \\ x^2 & \text{Si } 1 \le x \le 2 \\ 8/x & \text{Si } 2 < x \end{cases}$$

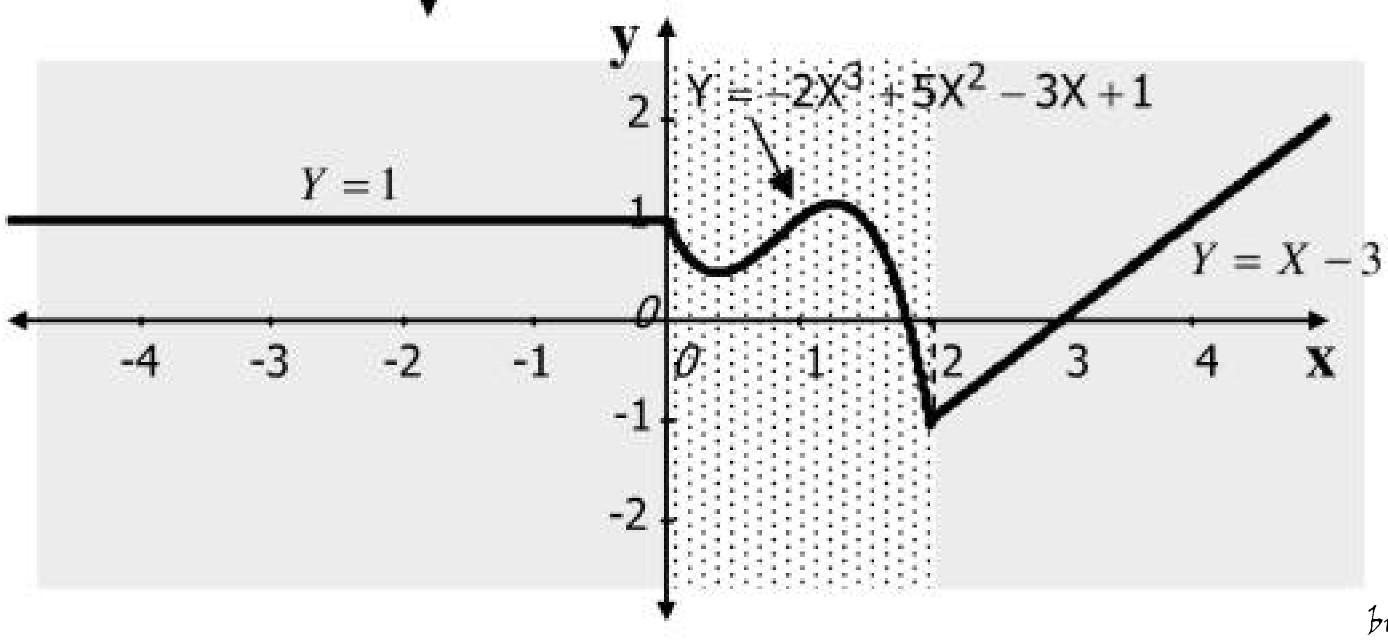
Para dibujar esta función, tengo que "partir al gráfico en tres partes"

En cada una de esas partes en las que "partimos al gráfico", dibujamos la función que le corresponde:



Otro ejemplo:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{Si } x < 0 \\ -2x^3 + 5x^2 - 3x + 1 & \text{Si } 0 \le x \le 2 \\ x - 3 & \text{Si } 2 < x \end{cases}$$



Responder Verdadero o Falso:

1) Las funciones que relacionan a dos magnitudes directamente proporcionales son "funciones lineales"

2) Todas las funciones lineales representan magnitudes directamente proporcionales.

3) Las magnitudes inversamente proporcionales son funciones lineales de pendiente negativa.

4) Las magnitudes inversamente proporcionales se representan mediante funciones homográficas o "Hipérbolas" del tipo 1/x.

5) Las funciones cuadráticas tienen siempre dos raíces.

6) Las funciones cuadráticas pueden tener dos raíces o ninguna, pero nunca pueden tener una sola raíz.

7) Las funciones cuadráticas pueden tener una o dos raíces, pero nunca ninguna.

8) Las funciones cuadráticas pueden tener una, dos raíces, o ninguna.

9) Las funciones partidas tienen varios dominios

10) Las funciones partidas pueden tener como máximo 3 partes.

11) El dominio de una función partida es siempre: Todos los Reales.

12) Las parábolas son mas angostas cuando la X^2 se multiplica por un número mayor a 1.

Graficar aproximadamente, sin usar tabla de valores, las siguientes funciones:

13) $Y = 2X - 2$

14) $Y = \frac{3}{4}X + 2$

15) $Y = -\frac{1}{2}X - 3$

16) $\frac{X}{2} - \frac{Y}{3} = 1$

17) $\frac{X}{3} + Y = 1$

18) $Y = X^2 + 1$

19) $Y = -X^2 - 1$

20) $Y = -(X+1)^2$

21) $Y = (X-2)^2 + 1$

22) $Y = 2X^2 + X - 3$

23) $Y = (X+3)\cdot(X-1)$

24) $Y = X^2 - 10X + 16$

25) $Y = (X-4)\cdot X$

26) $Y = \frac{1}{X} + 1$

27) $Y = \frac{1}{X+2} - 1$

28) $Y = \frac{1}{X-3} + 2$

29) $Y = \frac{1}{X+1}$

30) $Y = \frac{2}{X-1} - 1$

31) $Y = \frac{1}{X+1} + 4$

32) Graficar una función lineal, cuya raíz sea 2 y su abscisa al origen -1

33) Graficar una parábola cuyas raíces sean iguales y opuestas y su vértice sea el punto $(0;-1)$ ¿Cuántas parábolas se pueden graficar que cumplan con esa condición? ¿Por qué?

Graficar las siguientes funciones partidas:

34) $f(x) = \begin{cases} X & \text{si } X < 0 \\ X^2 & \text{si } X \geq 0 \end{cases}$

35) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } X < -1 \\ X+1 & \text{si } X > -1 \end{cases}$

36) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{X} & \text{si } X < -1 \\ X & \text{si } X \geq -1 \end{cases}$

37) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{X+1} & \text{si } X < 2 \\ -X+3 & \text{si } X \geq 2 \end{cases}$

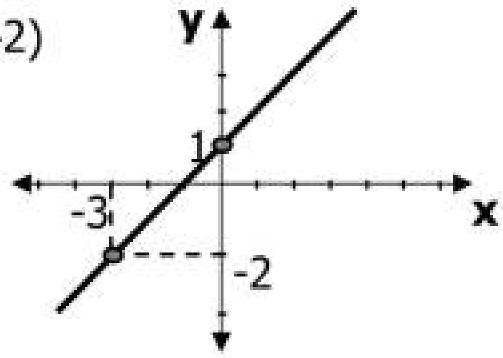
38) $f(x) \begin{cases} 1 & \text{si } X < -1 \\ X^3 + X^2 + 3X + 4 & \text{si } -1 \leq X \leq 1 \\ 3X+6 & \text{si } X > 1 \end{cases}$

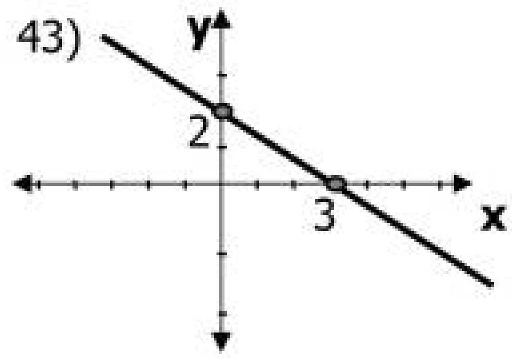
39) $f(x) \begin{cases} X^2 - 3 & \text{si } X < -3 \\ -2X & \text{si } -3 \leq X < 0 \\ 0 & \text{si } X \geq 0 \end{cases}$

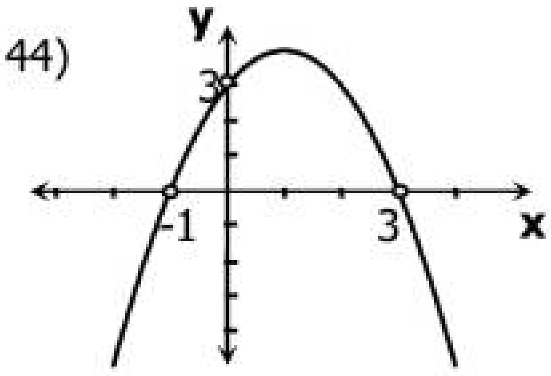
40) $f(x) \begin{cases} 3/X & \text{si } X \leq -3 \\ X+2 & \text{si } -3 < X \leq -1 \\ \sqrt{X+5} - 1 & \text{si } X > -1 \end{cases}$

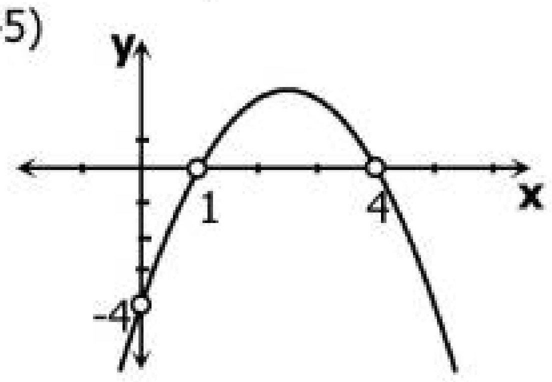
41) $f(x) \begin{cases} X-3 & \text{si } X < 0 \\ -2X^2 + 5X - 3 & \text{si } 0 \leq X \leq 1 \\ (X-1)^2 & \text{si } X > 1 \end{cases}$

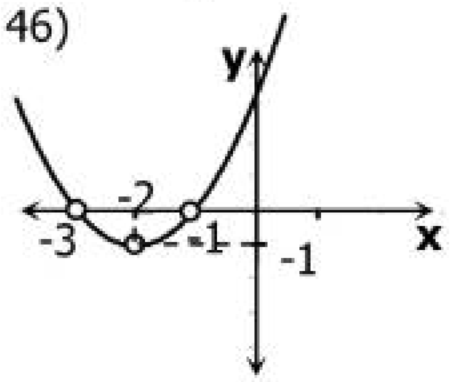
Dados los siguientes gráficos, escribir la ecuación de $f(x)$

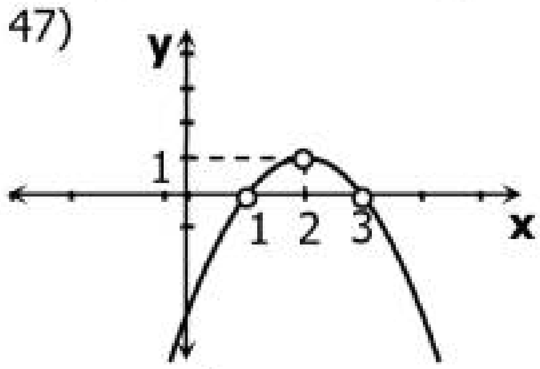
42)


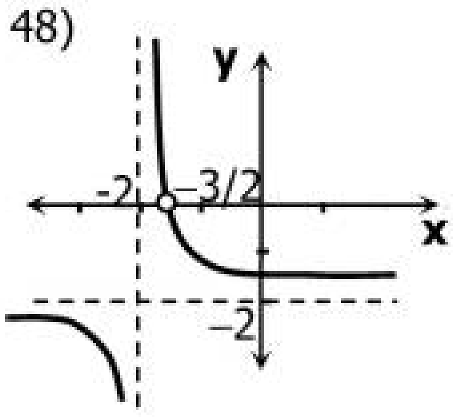
43)


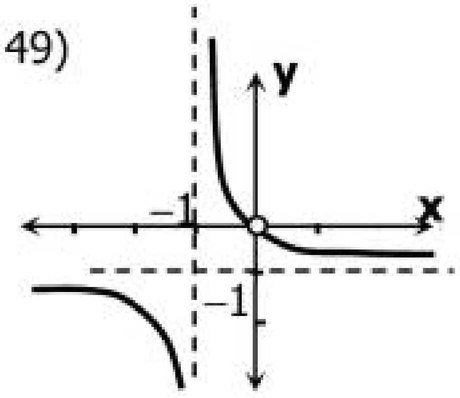
44)


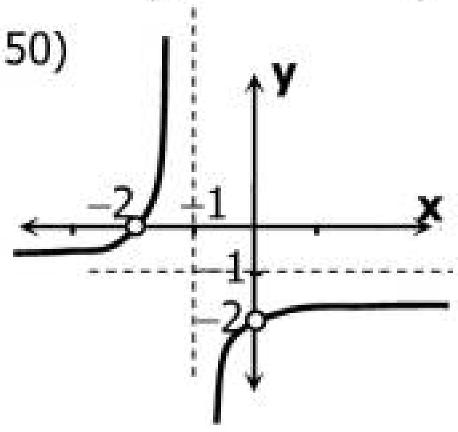
45)


46)


47)


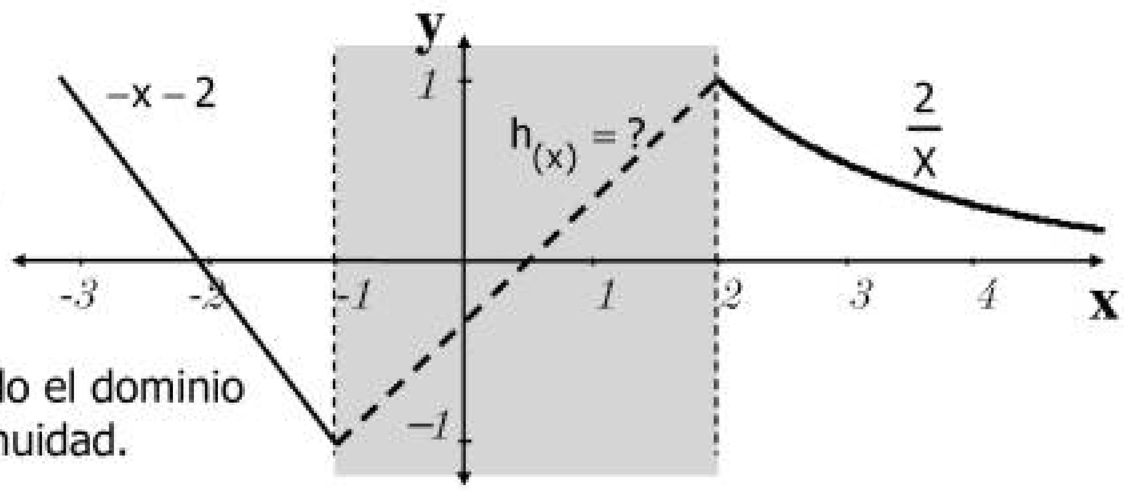
48)


49)


50)


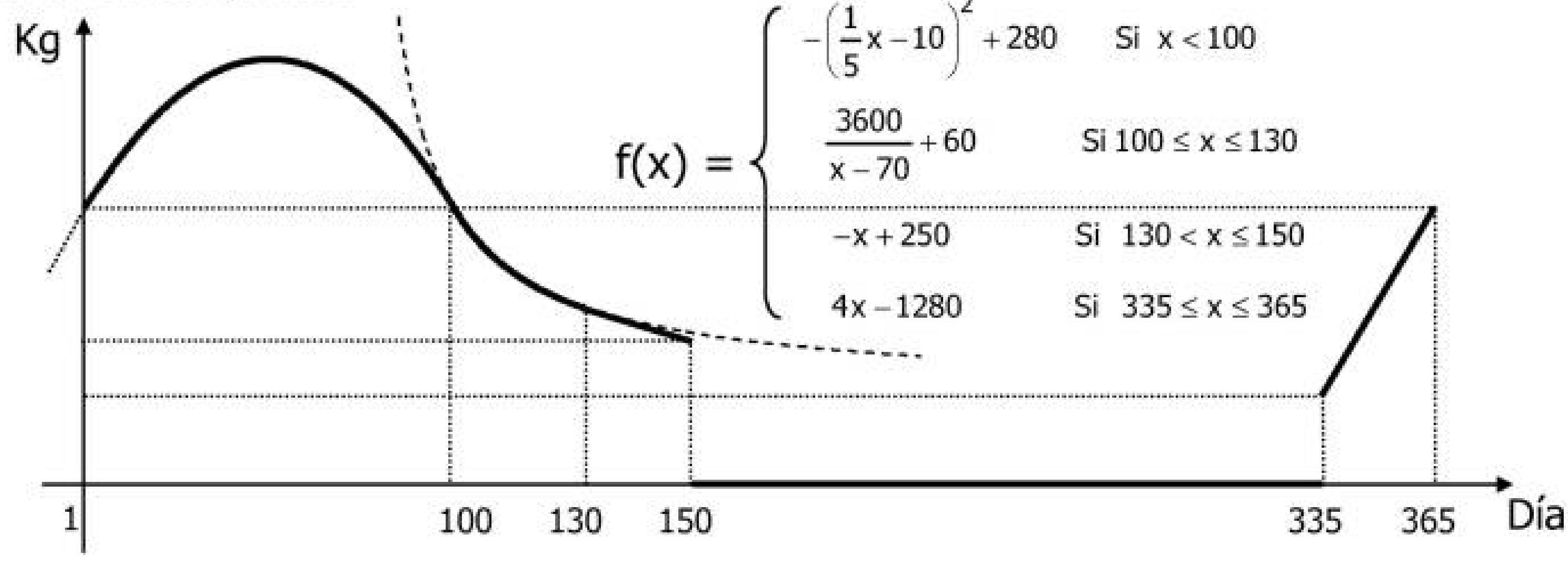
51) Dada f(x) por: $f(x)\begin{cases} -X-2 & \text{si } X<-1 \\ h(x) & \text{si } -1\le X\le 2 \\ 2/x & \text{si } X>2 \end{cases}$

Hallar la función lineal h(x) = mx + b
De modo tal que los extremos en los que está partido el dominio "se unan" o sea para que la función no pierda continuidad.



En una heladería buscaron una función f(x) que represente la cantidad de kilos de helado que vende en promedio una heladería en función del día del año. El día número 1 es el 1º de Enero y el día 365 es el 31 de diciembre. Desde el día 151 hasta el día 334 inclusive la heladería permanece cerrada. La función resultó ser la siguiente función partida:

$$f(x)=\begin{cases} -\left(\frac{1}{5}x-10\right)^2+280 & \text{Si } x<100 \\ \frac{3600}{x-70}+60 & \text{Si } 100\le x\le 130 \\ -x+250 & \text{Si } 130<x\le 150 \\ 4x-1280 & \text{Si } 335\le x\le 365 \end{cases}$$



52) ¿Dentro de qué conjunto numérico podríamos incluir al Dominio de esta función para que tenga sentido con la realidad o con el caso real que representa? ¿Por qué?
53) ¿Cuántos kilos de helado se venden el día 31 de diciembre? ¿y el 1º de enero?
54) ¿Cuántos kilos de helado se venden el día 20 de Abril?
55) ¿Cuántos kilos de helado se venden el día 20 de Mayo?
56) ¿Cuál es el día en que se vende mas helado en esta heladería?
57) ¿Cuántos kilos de helado se venden el día que cierra la heladería?
58) ¿Cuántos kilos de helado se venden el día que vuelve a abrir la heladería?

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Estudio de Funciones
Nivel IV

Número de Tema: **59**

Área: **Matemática**

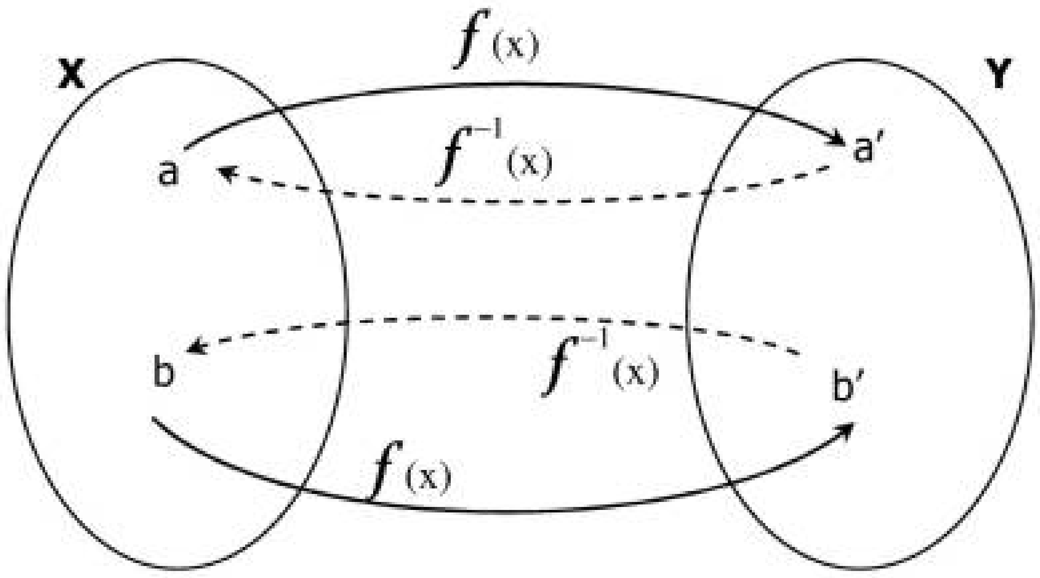
Funciones Inversas

Definición**:**

Si tenemos una función f(x) se verifica que

$$\boldsymbol{f(a) = a'} \quad \wedge \quad \boldsymbol{f^{-1}(a') = a}$$
$$\forall \, \mathbf{a} \; \in \mathbf{Dom\, f(x)} \wedge \; \forall \, \mathbf{a'} \; \in \mathbf{Im\, f(x)}$$
$$\Leftrightarrow \; \boldsymbol{f^{-1}(x)} \text{ es Función Inversa de } \boldsymbol{f(x)}$$

*la Función **f(x)** debe ser biyectiva*



*La "Inversa" de una función es OTRA función tal que: Si le aplico la "Función Inversa" $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ a un valor de la **Imagen** de cualquier punto del **Dominio** de la Función **f(x)**, obtengo por resultado, ese punto del Dominio.*

➢ **Procedimiento para hallar la función inversa:** Hay que seguir dos pasos:

1º Despejar X.
2º Cambiar "X" por "Y" y viceversa.

Ejemplo:
Vamos a hallar la función Inversa de $Y = \sqrt{X+1} - 2$

1º Paso –> Despejo

$$Y = \sqrt{X+1} - 2 \;\Longrightarrow\; Y + 2 = \sqrt{X+1} \;\Longrightarrow\; (Y+2)^2 = X+1 \;\Longrightarrow\; (Y+2)^2 - 1 = X$$

2º Paso –> Cambio "X" por "Y" y viceversa

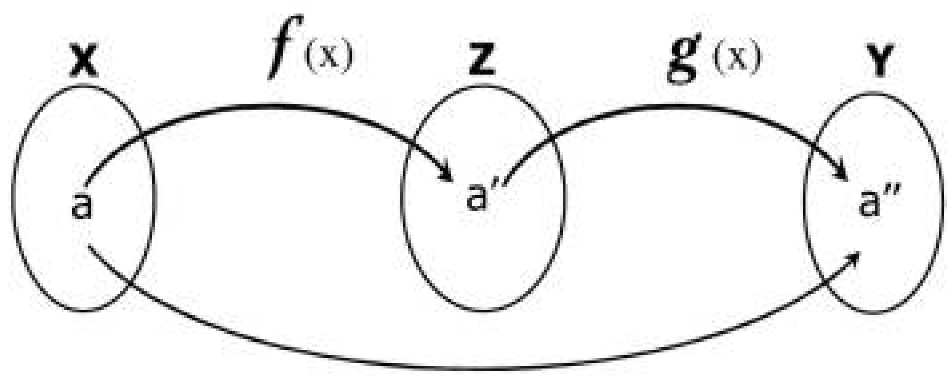
$$(Y+2)^2 - 1 = X \;\Longrightarrow\; (X+2)^2 - 1 = Y \;\Longrightarrow\; \boxed{f^{-1}(x) = (X+2)^2 - 1}$$

Funciones Compuestas

Dadas dos funciones f(x) y g(x) tales que

$$\boldsymbol{f(a) = a'} \quad \wedge \quad \boldsymbol{g(a') = a''} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{g_{(f(a))} = a''}$$
$$\forall \, \mathbf{a} \; \in \mathbf{Dom\, f(x)} \quad \wedge \quad \forall \, \mathbf{a'} \; \in \; \mathbf{Dom\, g(x)}$$
$$\boldsymbol{g_{(f(x))} = gof_{(x)}}$$

que es una función compuesta de f(x) y g(x)



$$\boldsymbol{g_{(f(x))} = gof_{(x)}}$$

Si a un elemento "a" del dominio de una función "f(x)" lo transformo en un elemento "a_2" del dominio de otra función "g(x)" que, a su vez, transforma a este elemento en un elemento "a_3": Se define función compuesta *g(f(x)) a la función que transforma el elemento "a" en el elemento "a_3"*

*Ojo, que **no es lo mismo g(f(x)) que f(g(x))** y esto lo podemos verificar muy rápidamente diciendo que no es lo mismo por ejemplo " sumarle 2 a un cierto número y luego multiplicarlo por 3, que primero multiplicarlo por 3 y luego sumarle 2"*

➢ **Procedimiento para componer funciones:** Hay que reemplazar la "x" de la segunda función por la primera función

Ejemplo: Dadas $\begin{cases} f(x) = X^2 + 2 \\ g(x) = 2X - 1 \end{cases}$ Hallar: $g(f(x))$

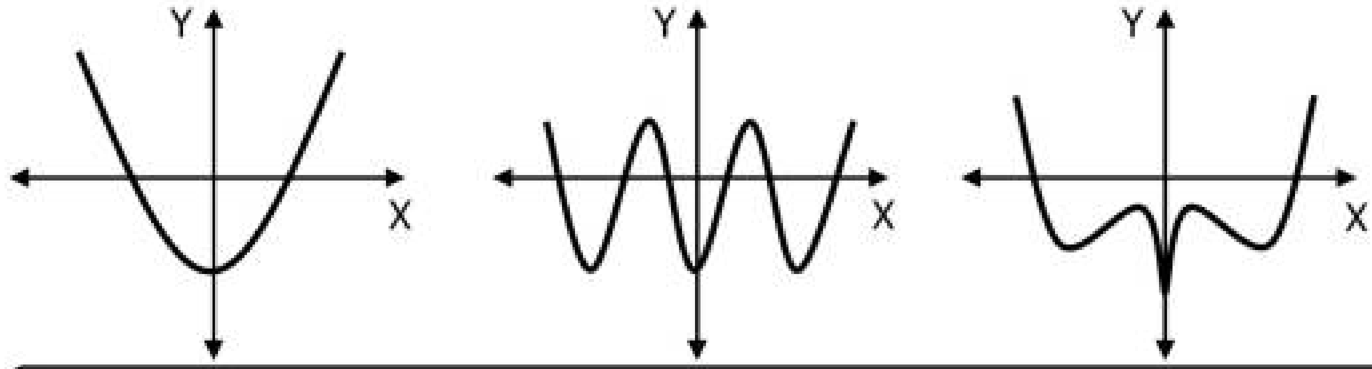
$$gof = g(f(x)) = 2\, f(X) - 1 = 2\,(x^2 + 2) - 1 \;\Longrightarrow\; g(f(x)) = 2\,(x^2 + 2) - 1$$

Tomo la función g(x) y en lugar de escribir "x" escribo f(x) en el lugar de "x"

Reemplazo f(x)

Función Par: ¿Qué es una Función Par? Es una Función **SIMÉTRICA** con respecto al **EJE Y**

Ejemplos de funciones pares:



Condición para que una función sea **PAR** ⇨ $f(x) = f(-x)$

Lo que en palabras significa que para valores positivos de X la función vale lo mismo que para los valores correspondientes con signo negativo. Por ejemplo la función vale lo mismo para X = 2 que para X = –2

Ejemplos de Funciones Pares:

Sea la función $f(x) = X^2 + 1$

⇨ $\boxed{f(x) = X^2 + 1}$

⇨ $f(-x) = (-X)^2 + 1$ ⇨ $\boxed{f(-x) = X^2 + 1}$

$f(x) = f(-x)$
⇩
$f(x)$ es PAR

Sea la función $f(x) = (|X| - 1)^3$

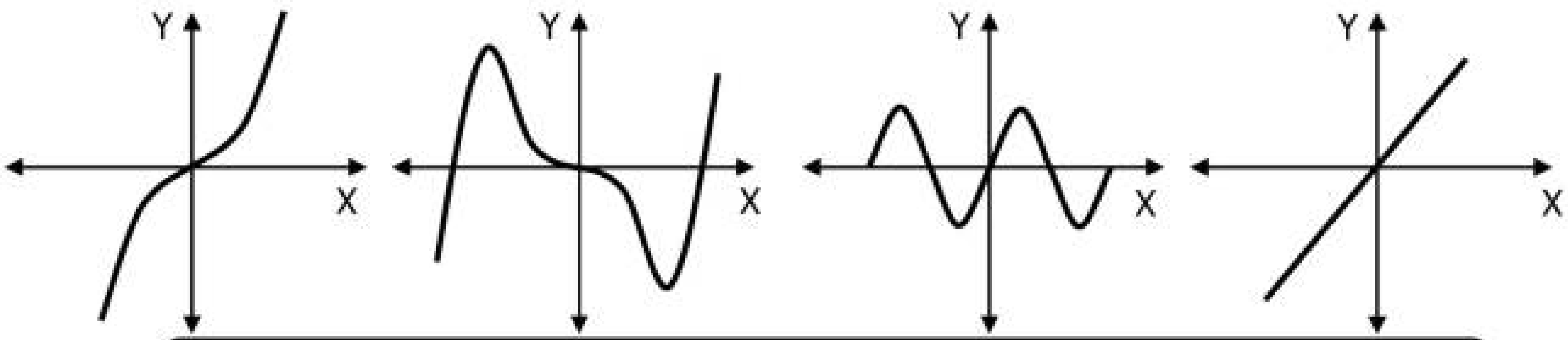
⇨ $f(x) = (|X| - 1)^3$ ⇨ $\boxed{f(x) = (|X| - 1)^3}$

⇨ $f(-x) = (|-X| - 1)^3$ ⇨ $\boxed{f(x) = (|X| - 1)^3}$

$f(x) = f(-x)$
⇩
$f(x)$ es PAR

Función Impar ¿Qué es una Función Impar? Es una Función **SIMÉTRICA** con respecto al **ORIGEN DE COORDENADAS**

Ejemplos de funciones Impares:



Condición para que una función sea **IMPAR** ⇨ $f(x) = -f(-x)$

O sea que para valores positivos de X la función toma el valor opuesto (en signo) que para los valores correspondientes con signo negativo. Por ejemplo la función para X = 2 vale lo mismo pero con signo contrario que para X = –2

Ejemplos de Funciones Impares:

Sea la función $f(x) = X^5 - 3X^3$

⇨ $\boxed{f(x) = X^5 - 3X^3}$

⇨ $f(-x) = (-X)^5 - 3(-X)^3$ ⇨ $\boxed{f(-x) = -X^5 + 3X^3}$

$f(x) = -f(-x)$
⇩
$f(x)$ es IMPAR

Sea la función $f(x) = 3X$

⇨ $\boxed{f(x) = 3X}$

⇨ $f(-x) = 3(-X)$ ⇨ $\boxed{f(-x) = -3X}$

$f(x) = -f(-x)$
⇩
$f(x)$ es IMPAR

by Dal-Or para TARINGA!

Dadas $f(x) = 2X - 2$ $\quad g(x) = X^2 + 1$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{X+3}$

Hallar:

1) $f^{-1}(x)$
2) $g^{-1}(x)$
3) $h^{-1}(x)$
4) $f \circ g(x)$
5) $g \circ f(x)$
6) $g \circ h(x)$
7) $h \circ g(x)$
8) $h \circ f(x)$
9) $f \circ h(x)$
10) $h^{-1} \circ g(x)$
11) $h \circ g^{-1}(x)$
12) $(h \circ g)^{-1}(x)$
13) $f^{-1} \circ g(x)$
14) $f \circ g^{-1}(x)$
15) $(f \circ g)^{-1}(x)$
16) $h \circ f^{-1}(x)$
17) $f^{-1}(2)$
18) $g^{-1}(5)$
19) $h^{-1}(-1)$
20) $f \circ g(-1)$
21) $g \circ f(0)$
22) $g \circ h(-4)$
23) $h \circ g(0)$
24) $h \circ f(0)$
25) $f \circ h(-1)$
26) $h^{-1} \circ g(0)$
27) $h \circ g^{-1}(5)$
28) $(h \circ g)^{-1}(1)$
29) $f^{-1} \circ g(-1)$
30) $f \circ g^{-1}(10)$
31) $(f \circ g)^{-1}(2)$
32) $h \circ f^{-1}(-10)$

33) Hallar $X \,/\, f \circ h^{-1}(x) = 0$
34) Hallar $X \,/\, g \circ f^{-1}(x) = 10$
35) Hallar $X \,/\, (g \circ f)^{-1}(x) = 1$
36) Hallar $X \,/\, g \circ f(x) = 17$
37) Hallar $X \,/\, g^{-1} \circ f^{-1}(x) = 3$
38) Hallar $X \,/\, f^{-1}(x) = -3$
39) Hallar $X \,/\, g^{-1}(x) = 0$
40) Hallar $X \,/\, h^{-1} \circ f^{-1}(x) = 0$
41) Hallar $X \,/\, h \circ g^{-1}(x) = 1$
42) Hallar $X \,/\, g \circ g^{-1}(x) = a$
43) Hallar "m" para que se cumpla: $g(m) = -6 + f^2(m)$
44) Hallar "m" para que se cumpla: $h(m) = f(m-1) - 2m$
45) Hallar "m" para que se cumpla: $h \circ f^{-1}(2m) = h(3m+5)$

Responder Verdadero o Falso:

46) Toda recta que pasa por el origen de coordenadas es una función impar.
47) Todas las rectas son funciones impares.
48) La función Y = a . Coseno (X) es par para cualquier valor de "a".
49) La función Y = a . Seno (X) es par cuando "a" es un valor negativo.
50) Toda función cúbica que pase por el origen de coordenadas es impar.
51) Una parábola cuyo vértice es el punto (0;0) es una función par.
52) La función $Y = |X|$ es par.
53) La función $Y = k \,.|X|$ es par sólo para valores de "k" positivos.
54) La función $Y = k \,.|X^2| - k$ es par sólo para valores de "k" negativos.
55) La función $Y = k \,.|X^2| - k$ no es par para ningún valor de "k".
56) Para cualquier función F(X), si $F(5) = -F(-5)$ la función es impar.
57) Para una función cuadrática F(X), si $F(5) = F(-5)$ la función es par.
58) La función $F(X) = x^2 + k$, es par para cualquier valor de "k"
59) La función $F(X) = (x + k)^2$, es par solo para "k=0"

Decir Cuáles de las siguientes funciones son pares, impares o ni pares ni impares:

60) $f(x) = \left|\frac{1}{2}X\right| + 1$
61) $f(x) = \left|\frac{1}{2}X + 1\right|$
62) $f(x) = \left|\frac{1}{2}X^2 - 1\right|$
63) $f(x) = \frac{1}{2}X$
64) $f(x) = \frac{1}{2}X + 1$
65) $f(x) = X^3 - 2X$
66) $f(x) = X^4 - X^2$
67) $f(x) = X^4 + X^2$
68) $f(x) = X^5 - 5X$
69) $f(x) = X^5 + X$
70) $f(x) = X^5 - X$
71) $f(x) = X^5 - X^3 - 1$
72) $f(x) = X^5 + X^3 - X$
73) $f(x) = X^5 - X^3 + X$
74) $f(x) = X^6 + X^4 - 1$
75) $f(x) = X^6 - X^4 + X^2$
76) $f(x) = \sqrt[3]{X^2} + 1$
77) $f(x) = \sqrt{X^2 + 1} - 1$
78) $f(x) = \operatorname{Sen}(3X + \pi)$
79) $f(x) = \operatorname{Cos}(2X - \pi/2)$
80) $f(x) = 2\operatorname{Tg}(X)$
81) $f(x) = \frac{2}{3}\operatorname{Sec}\left(\frac{1}{2}X - \frac{3}{2}\pi\right)$
82) $f(x) = \sqrt{|\operatorname{Sen}(X)|} - 1$
83) $f(x) = \sqrt[3]{3\left(\left|X^5 - 3X^3\right| + 1\right)^2 - 2\left|3X^3 + 1\right|}$

by Dal-0r para TARINGA!

Hallar el valor de "k" para que la función sea PAR:

84) $f(x) = (X+k)^2$

85) $f(x) = |X-k|+1$

86) $f(x) = (X+6-2k)^2$

87) $f(x) = (X+k-1)^2-2$

88) $f(x) = |2X-3K+9|-2$

89) $f(x) = \text{Cos}(X-k+\pi)+1$

90) $f(x) = \left(X+k^2-5k+6\right)^2$

91) $f(x) = \left|2X-K^2+8k+9\right|+k$

92) $f(x) = \text{Seno}\left(X-\frac{k\pi}{2}\right)+k$

Hallar el valor de "k" para que la función sea IMPAR:

93) $f(x) = X+k$

94) $f(x) = X-2-k$

95) $f(x) = (X+1+k)^3$

96) $f(x) = (X+k)^3$

97) $f(x) = kX-k^2+1$

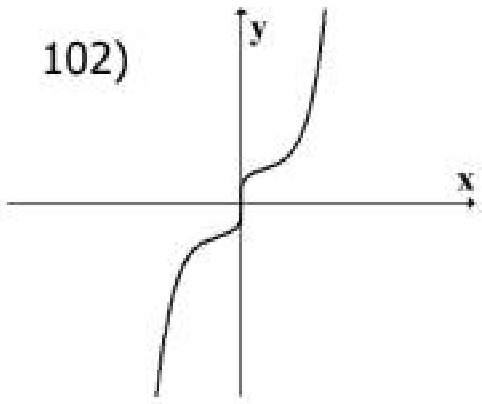
98) $f(x) = X^3-6KX^2+12k^2X-8k^3$

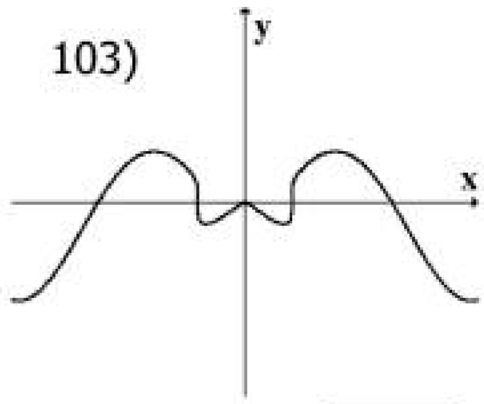
99) $f(x) = X^3+kX-X+k^3-3k^2+3k-1$

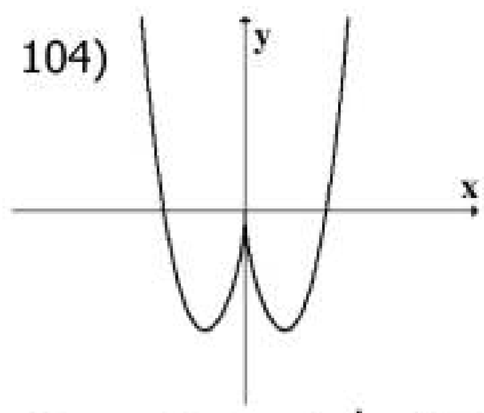
100) $f(x) = X^3+kX+k^2-2k+1$

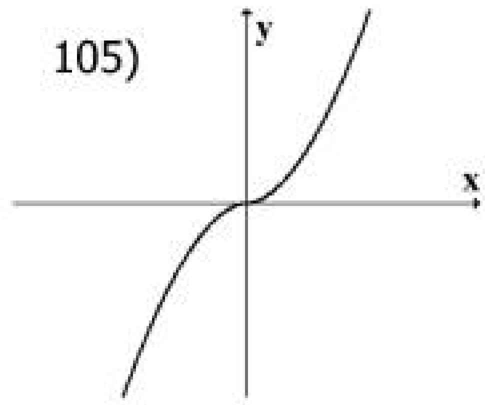
101) $f(x) = X^k$

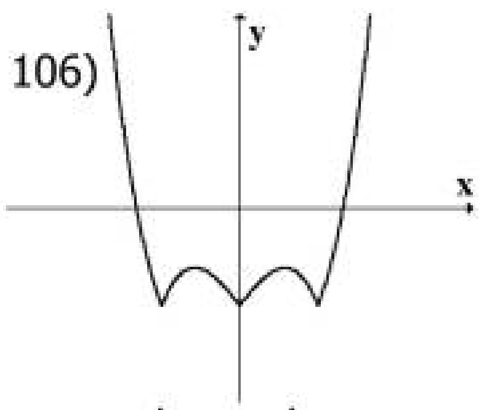
Decir cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones pares y cuáles corresponden a funciones impares.

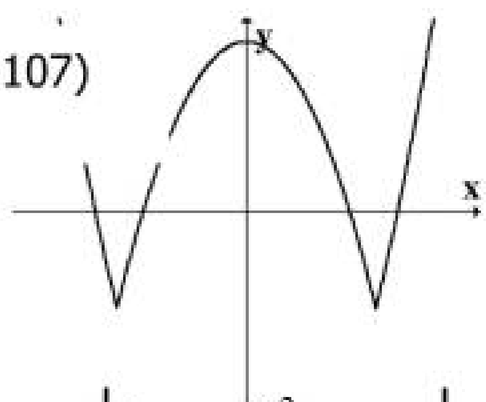
102)

$f(x) = \frac{1}{5}X^5 - \sqrt[5]{X}$

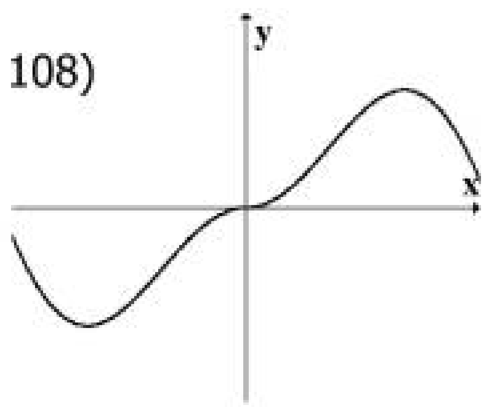
103)

$f(x) = \text{Seno}(X)\cdot\sqrt[5]{X^3-X}$

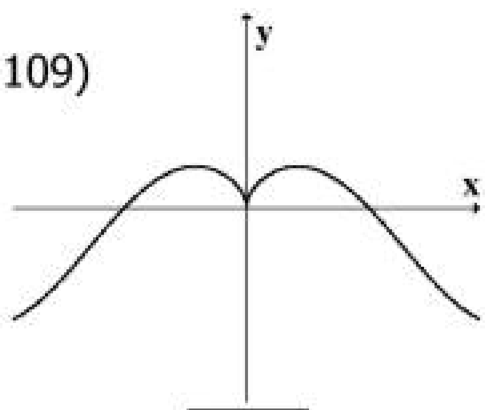
104)

$f(x) = \left|X^3+X\right| - \left|5\cdot\sqrt[5]{X^3}\right|$

105)

$f(x) = \frac{1}{10}X\cdot\sqrt[5]{X^4}$

106)

$f(x) = \left|X^3-X\right|-1$

107)

$f(x) = \left|\left(X-\frac{1}{2}\right)^3+X-3\right|-1$

108)

$f(x) = |X|\cdot\text{Seno}(X)$

109)

$f(x) = \sqrt{|X|}\cdot\text{Cos}(X)$

Dadas las funciones: $f(x) = 3X - A$ $\quad g(x) = (X+1)^2$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{X+B}$
Hallar "A" o "B" tal que:

110) $f^{-1}(2) = 1$
111) $f^{-1}(-1) = -1$
112) $h^{-1}(2) = 3$
113) $h^{-1}(-1) = -2$
114) $f^{-1}(0) = 2$
115) $f \circ g(0) = 3$
116) $f \circ g(1) = 5$
117) $f \circ g(-3) = 13$
118) $g \circ f(0) = 9$
119) $g \circ f(-2) = 4$
120) $g \circ h(0) = 1$
121) $g \circ h(-1) = 1$
122) $h \circ g(1) = 6$
123) $h \circ g(0) = -1$
124) $h \circ g(-2) = 1$
125) $h \circ g(-1) = -7$
126) $f^{-1} \circ g(0) = -4$
127) $f^{-1} \circ g(-2) = 0$
128) $f^{-1} \circ g(-3) = 3$
129) $g \circ f^{-1}(1) = 0$
130) $g \circ f^{-1}(-2) = 0$
131) $g \circ f^{-1}(-3) = 1$
132) $g \circ h^{-1}(-1) = 1$
133) $g \circ h^{-1}(-1) = 4$
134) $g \circ h^{-1}(2) = 0$
135) $h^{-1} \circ g(-2) = 7$
136) $h^{-1} \circ g(0) = -2$
137) $h^{-1} \circ g(-3) = 0$
138) $f \circ h(1-B) = 5$
139) $(f \circ h)^{-1}(3-A) = 6$
140) $h \circ f(A/3) = -4$
141) $(h \circ f)^{-1}(1/B) = 0$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Función Racional y Polinómica

Número de Tema: **60**

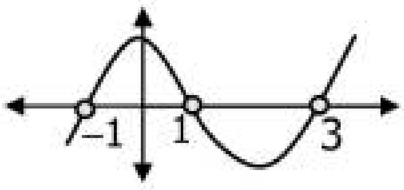
Área: **Matemática**

Funciones Polinómicas con raíces simples: Ya conocemos las funciones cuadráticas, estas son funciones polinómicas de segundo grado. Como sabemos una forma de escribir estas funciones cuadráticas, es la factorizada: Sea $f(x) = \alpha .(x - X_1) . (X - X_2)$ $\begin{cases} \alpha \text{ es simplemente un factor (Distinto de cero).} \\ X_1 \text{ y } X_2 \text{ son las raíces o donde la función carta al eje x.} \end{cases}$

Si a esta función la multiplicamos por más binomios, tenemos funciones polinómicas de grados mayores a 2.
Ejemplo: Sea $f(x) = \alpha .(x–X_1) . (X–X_2) . (X–X_3)$ $\Longrightarrow$ α es simplemente un factor. X_1 , X_2 y X_3 son las raíces.
En este caso f(x) es una función polinómica de grado 3.

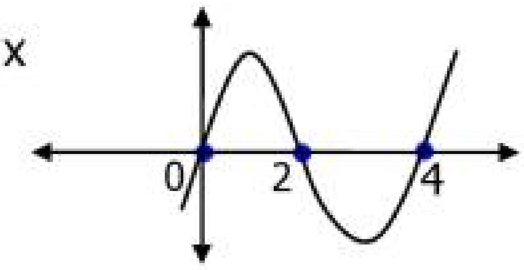
Ejemplos de funciones polinómicas con raíces simples:

$f(x) = (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$



$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$

Como vemos en este caso la función no la tenemos factoreada.



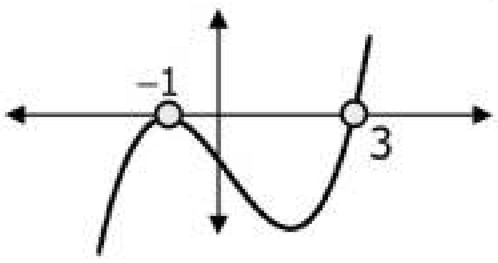
Importante: Una función polinómica de grado "n" tiene como máximo "n" raíces reales.

Funciones Polinómicas con raíces múltiples: Cuando factorizamos la función polinómica y nos encontramos con que alguno de los binomios está elevado a una potencia, entonces el número que hace cero a ese binomio es raíz múltiple. Si el binomio está elevado al cuadrado es una raíz doble, si está elevado al cubo es una raíz triple y así sucesivamente.

Ejemplos de funciones polinómicas con raíces múltiples:

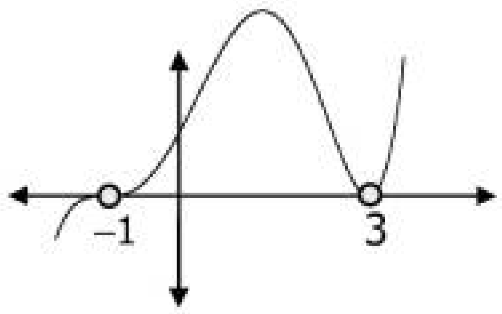
$f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-3)$

Aquí tenemos:
- Raíz doble en "x=–1"
- Raíz simple en "x=3"



$f(x) = (x+1)^3 \cdot (x-3)^2$

Aquí tenemos:
- Raíz triple en "x=–1"
- Raíz doble en "x=3"



Importante: Como podemos ver en los gráficos anteriores, las raíces múltiples pares, en el gráfico son tangentes al eje "x" es decir que de ambos lados de la raíz la función es del mismo signo o sea, es siempre positiva o siempre negativa.

En cambio en las raíces múltiples impares la función "atraviesa" al eje "x" o sea, a ambos lados de la raíz, la función tiene distinto signo. O sea, a ambos lados de la raíz múltiple impar la función pasa de ser positiva a negativa o viceversa.

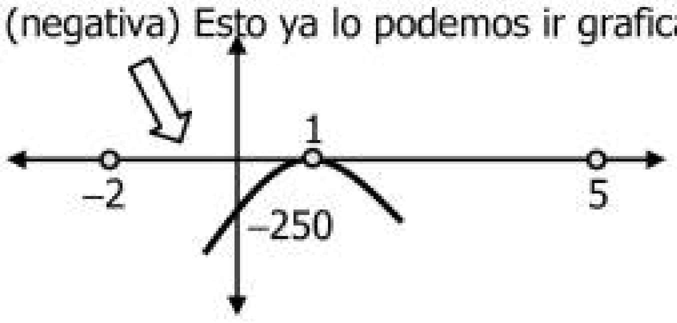
Gráficas aproximadas de funciones polinómicas: Estudiemos la construcción aproximada del gráfico "A partir de las raíces" Si tenemos la función factorizada, conocemos las raíces y el grado de multiplicidad de las mismas. Con ello y con algunas cuentas vamos a trazar la gráfica aproximada.

Ejemplo: $f(x) = (x+2)\cdot(x-1)^2\cdot(x-5)^3$

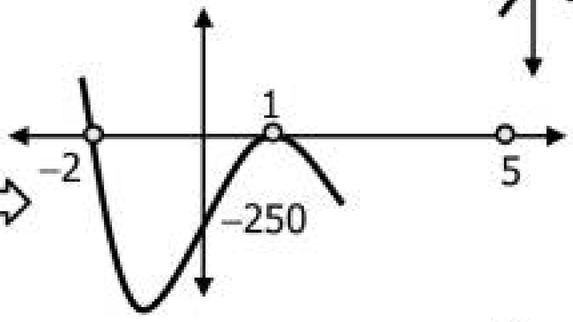
Para ello, probamos en x=0 (que es fácil de calcular)
$\Rightarrow f(0) = (0+2).(0–1)^2 . (0–5)^3 = 2 . 1 . (–125) \Rightarrow f(0)=–250$

En primer lugar veamos la raíz "del medio" x=1, es de grado de multiplicidad par, por lo tanto va a ser tangente al eje "x", la pregunta es si a ambos lados de esa raíz será positiva o negativa la función. $\Longrightarrow$

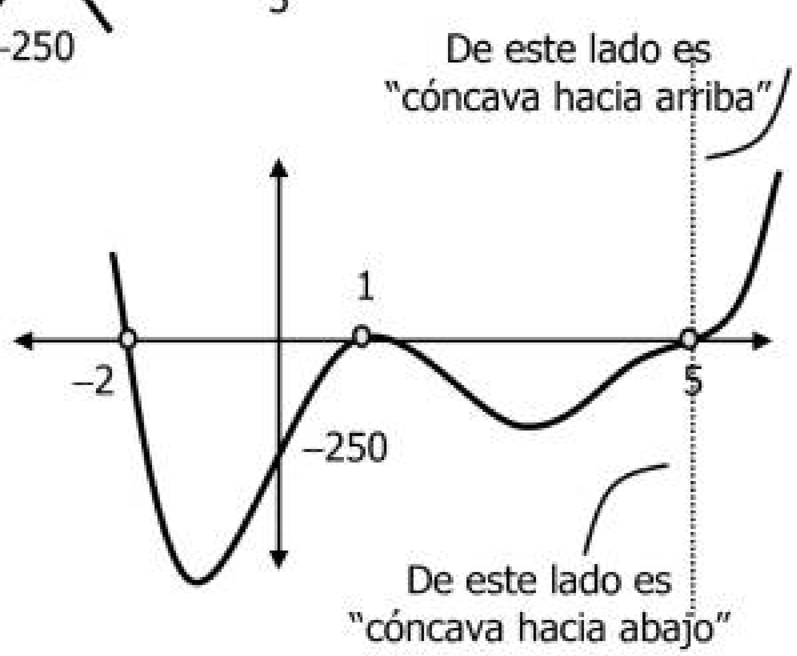
$\Rightarrow$ Como es raíz doble, a ambos lados de la raíz x=1 la función es del mismo signo (negativa) Esto ya lo podemos ir graficando



$\Longrightarrow$ Ahora podemos graficar la parte de la raíz simple. Para ello sabemos que en x= –2 (Donde hay una raíz simple) la función pasa de ser negativa a positiva o viceversa, entonces el gráfico aproximado sería: $\Longrightarrow$



$\Longrightarrow$ Por último resta graficar la parte de la raíz triple. Y en este punto hay que tener en cuenta que **en una raíz de grado de multiplicidad impar mayor a 1, la función presenta un cambio de concavidad**, es decir que de un lado de la raíz y del otro, apartede ser la función de distinto signo, también es de distinta concavidad. Lo graficamos aproximadamente entonces:



Nota: Para hacer el gráfico un poco más exacto habría que reemplazar "x" por valores intermedios entre las raíces en la función para tener otros puntos en el plano.

- **<u>Funciones Racionales - Dominio</u>**: El dominio de una función racional son todos los valores reales excepto los que hacen cero al denominador, para hallar el dominio de una función racional hay que igualar a cero el denominador y restringir los valores despejados, veámoslo de un ejemplo: $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3} + 1$

En este caso hay que igualar a cero la expresión "x–3"

$\Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow$ Tengo que restringir "x=3" del dominio ya que con ese valor el denominador es cero

$\Rightarrow \text{Dom } f(x) = \{ x/x \in \Re \wedge x \neq 3 \}$

- **<u>Asíntotas Verticales de las funciones Racionales</u>:** En los valores en los que el denominador se hace cero (pero el numerador no se hace cero), la función presentará una asíntota vertical.

Ejemplo: Hallar la/s asíntota/s vertical/es de la función: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$

$\Rightarrow$ Igualamos el denominador a cero $\Rightarrow x^2-1 = 0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$ o $x=-1$

Una vez que sabemos esto podemos suponer que en x=1 y en x=–1 hay asíntotas verticales, pero aún nos falta ver que pasa en esos puntos con el numerador. Si en alguno de los puntos el numerador también es cero, entonces en ese punto no habrá asíntota, ya que para que haya asíntota, debe ser cero sólo el denominador. Veamos entonces:

Para x = 1, el denominador ya sabemos que es cero. Y el Numerador es "x+1" por lo tanto en "x=1" vale 2 Entonces podemos afirmar que en x=1 hay una asíntota Vertical.

Para x=–1, el denominador ya sabemos que es cero. Y el Numerador es "x+1" por lo tanto en "x=–1" vale 0 Entonces en x=–1 no puede haber una asíntota Vertical.

En definitiva **la única asíntota Vertical de la función es x=1**

- **<u>Gráfica aproximada de las funciones racionales más simples</u>:** Las funciones racionales más simples de graficar son las que tienen 1 sola asíntota vertical. Son ellas las que estudiaremos a continuación:

Partimos de la fórmula general de las funciones racionales con una sola asíntota vertical: $f(x) = \dfrac{\alpha}{x-a} + b$
A veces debemos operar con las expresiones para llegar a esta forma general.

Cuando no tenemos que operar, el gráfico es simple, primero dibujamos las asíntotas que están dadas por:
$\Rightarrow x = a \Rightarrow$ Asíntota vertical
$\Rightarrow y = b \Rightarrow$ Asíntota horizontal

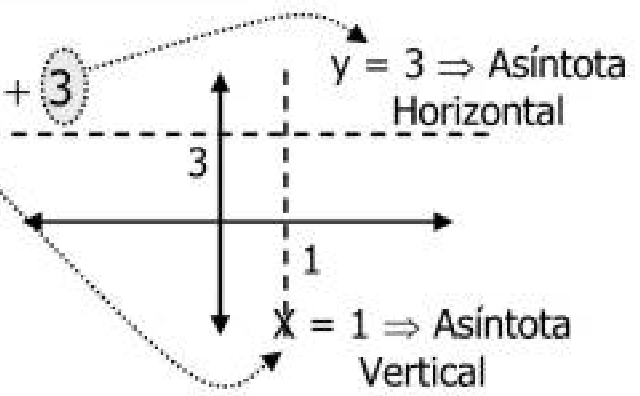
"α" es solo un factor de excentricidad que no es muy importante en la gráfica aproximada.

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{2}{x-1} + 3$

Luego buscamos una referencia para saber en que cuadrantes graficar la hipérbola

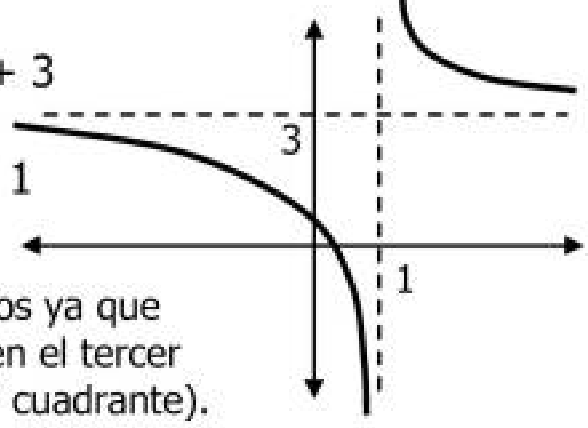
<u>Primero dibujamos las asíntotas</u>

$f(x) = \dfrac{2}{x-1} + 3$



$X = 0 \Rightarrow f(0) = 2 / (0-1) + 3$
$\Rightarrow f(0) = 2 / -1 + 3$
$\Rightarrow f(0) = -2 + 3 \Rightarrow f(0) = 1$

Con esta referencia sabemos ya que podemos dibujar la gráfica en el tercer cuadrante y su opuesto (El 1° cuadrante).



<u>Factorización de Funciones Racionales</u>: Cuando no tenemos esta forma general, podemos factorizar la función y simplificar para trazar el gráfico aproximado, pero cuidado con esto, ya que hay que hacer la salvedad de que lo que se simplifique no sea cero, y luego restringir el dominio. Ejemplo: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{(x+1)\cdot(x-1)} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \forall\, x \neq -1$$

Y podemos graficar esta función como si fuera f(x) = 1 / (x–1) Pero debemos saber que en x=–1 la función no está definida.

- **<u>Usando Ruffini para escribir la forma general</u>:**

En algunas funciones racionales podemos aplicar ruffini para poder escribirlas según la forma general.

Ejemplo $\Rightarrow f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1} \Longrightarrow$

$$\begin{array}{r|rr} & 2 & 3 \\ -1 & & -2 \\ \hline & 2 & 1 \end{array}$$

Cociente = 2
Resto = 1

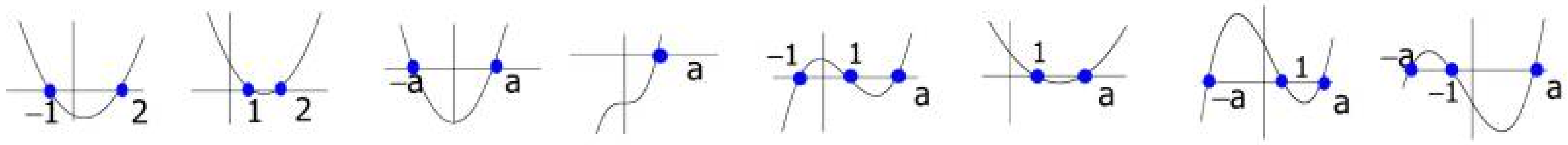
$\Longrightarrow f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1} \Rightarrow f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+1}$

✓ Ejercicios con Funciones Polinómicas:

Factorear los siguientes polinomios y Asociar cada uno de ellos a la función que le corresponda.

1) $P(x)=x^3-x^2-a^2x+a^2$ 3) $P(x)=x^2-x-2$ 5) $P(x)=x^3+x^2-a^2x-a^2$ 7) $P(x)=x^2-a^2$

2) $P(x)=x^3-x-ax^2+a$ 4) $P(x)=x^3-a^3$ 6) $P(x)=x^2-3x+2$ 8) $P(x)=x^2-ax-x+a$

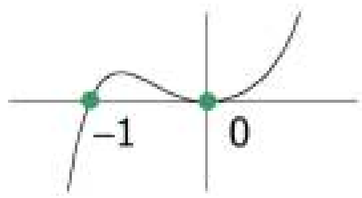


9) Para cada función, analizar: Dominio e Intervalos de Positividad y Negatividad
10) Indicar el grado de cada función.

11) Definir una función polinómica, de 3º grado cuyas raíces sean 2, 3 y –1. ¿Se pueden definir más funciones con estas raíces? Definan 2 funciones más con las mismas raíces, partiendo de la primera función.

12) Definir una función polinómica de tercer grado, con raíces simples, tal que, el intervalo de positividad de dicha función sea $(-2,0) \cup (4,\infty)$

Dado el siguiente gráfico (esquemático) de f(x). Encontrar una función que pueda corresponder a dicho gráfico y que cumpla con la condición:



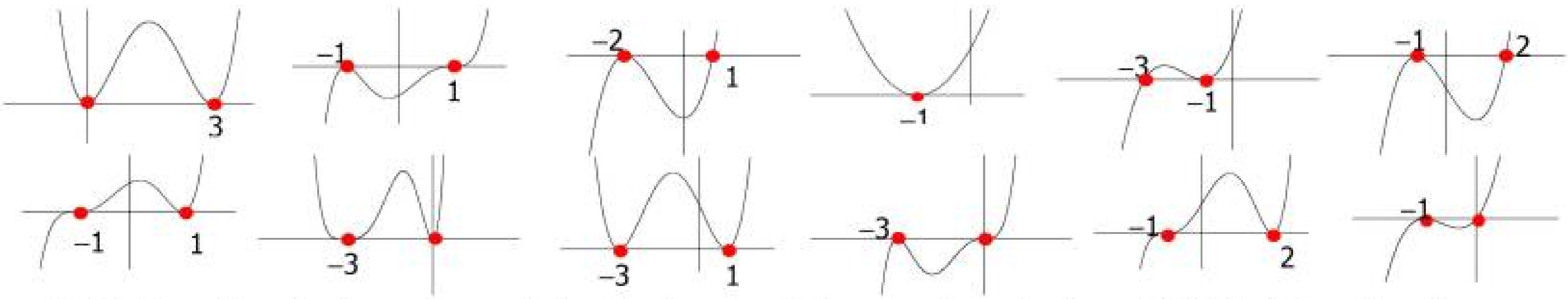
13) Que sea de grado 5.
14) Que sea de grado 7.

Asociar cada una de las siguientes funciones con el gráfico que la representa, en función a sus raíces:

15) $P(x)=(x-1)^2\cdot(x+3)^2$ 18) $P(x)=x^2\cdot(x+3)^4$ 21) $P(x)=(x+1)^2\cdot(x-1)^3$ 24) $P(x)=x^2+2x+1$

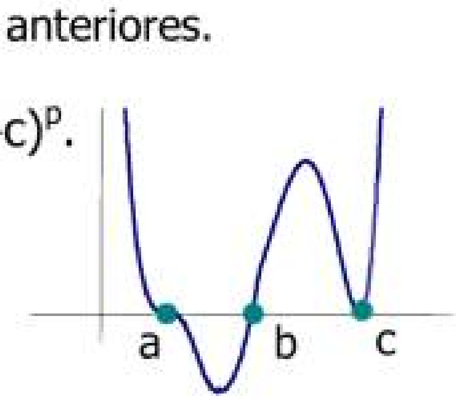
16) $P(x)=x^3\cdot(x+3)^2$ 19) $P(x)=(x+1)^3\cdot(x-2)^2$ 22) $P(x)=x^2\cdot(x-3)^2$ 25) $P(x)=(x-1)\cdot(x+2)^2$

17) $P(x)=(x+1)^2\cdot(x+3)$ 20) $P(x)=x\cdot(x+1)^2$ 23) $P(x)=(x-1)^2\cdot(x+1)^3$ 26) $P(x)=(x+1)^2\cdot(x-2)$



27) Indicar el grado de cada una de las funciones anteriores y el grado de multiplicidad de cada raíz.
28) Escribir Dominio e imagen de cada una de las funciones anteriores.
29) Escribir los intervalos de positividad y negatividad de cada una de las funciones anteriores.

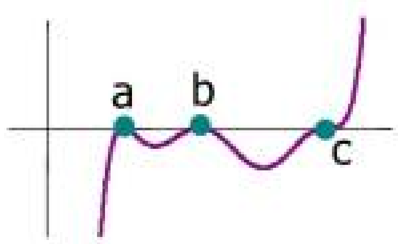
Dada la siguiente función polinómica, de la forma: $P(x)=(x-a)^m.\ (x-b)^n.\ (x-c)^p$.



30) ¿Cuánto vale "n"?
31) ¿Se puede afirmar que "m" es mayor a 2?
32) ¿Se puede afirmar que "m" tiene que ser si o sí distinto de "p"?
33) ¿Podría valer "m" cualquier número mayor a 2?
34) ¿Podría valer "m" cualquier número mayor a 2 que sea impar?
35) Definir P(x) con valores naturales para "a", "b", "c", "m", "n" y "p" tal que se corresponda con la gráfica

36) Sea, P(x) una función polinómica de la forma: $P(x)=(x-a)^m.\ (x-b)^n.\ (x-c)^p$

Definir P(x) con valores naturales para "a", "b", "c", "m", "n" y "p" tal que se corresponda aproximadamente con la gráfica



Responder Verdadero o Falso

37) Cualquier función polinómica tiene más de una raíz.
38) El dominio de las funciones polinómicas es siempre todos los reales.
39) Las funciones cuadráticas son funciones polinómicas.
40) Una función polinómica de 5 grado tiene que tener 5 raíces.

✓ Ejercicios con funciones Racionales:

Factorear, Hallar Dominio, ecuaciones de asíntotas y graficar en forma aproximada las funciones racionales:

41) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

42) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$

43) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+4}+1$

44) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}-1$

45) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

46) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^3+2x^2-5-6}$

47) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^3-3x^2+4}+2$

48) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

49) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+3}$

Identificar estas funciones con las gráficas de los ejercicios 61 al 71 (guiarse por las asíntotas verticales):

50) $f(x)=\dfrac{1}{x+a}+1$

51) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

52) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-ax+a}$

53) $f(x)=\dfrac{1}{x-a}+1$

54) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x+ax-a}$

55) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-x}$

56) $f(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}$

57) $f(x)=\dfrac{x+a}{x+1}$

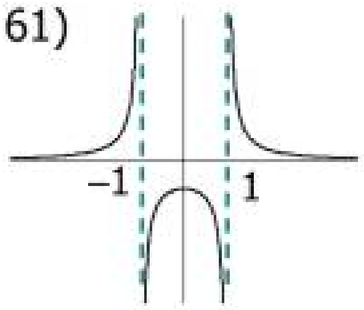
58) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-a^2}$

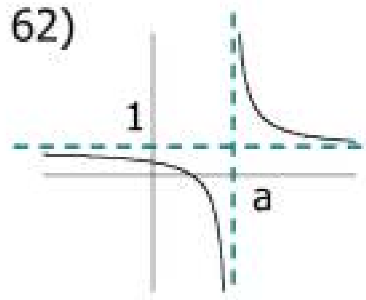
59) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+ax}$

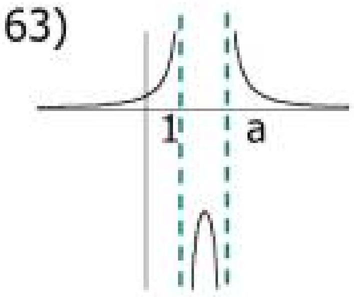
60) $f(x)=\dfrac{1}{(x-a)\cdot x}$

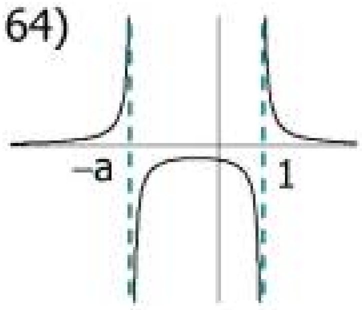
Indicar para cada una de las siguientes funciones:

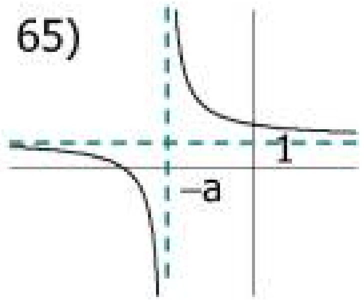
- Las ecuaciones de las asíntotas.
- El dominio y el codominio.
- El intervalo de positividad y negatividad.
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

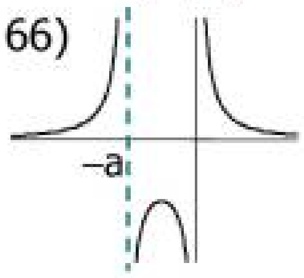
61)


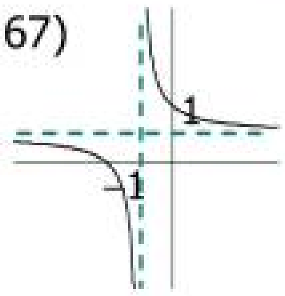
62)


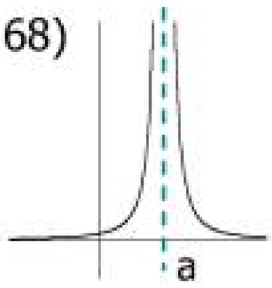
63)


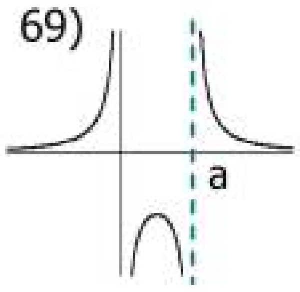
64)


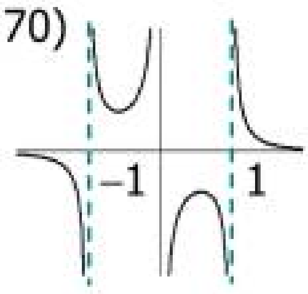
65)


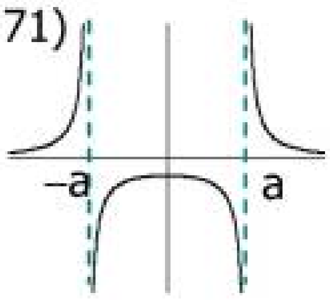
66)


67)


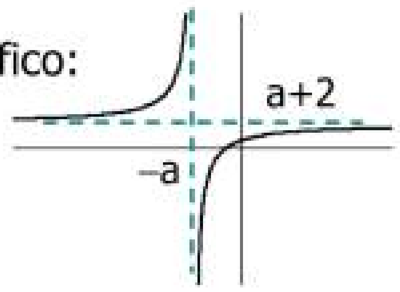
68)


69)


70)


71)


72) Dada la función racional: $f(x)=\dfrac{k\ x+1}{x+1}$ Hallar "k" para que f(x) corresponda al gráfico:



Dadas las siguientes funciones racionales, utilizar ruffini para expresarlas en forma general y graficarlas aproximadamente:

73) $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+1}$

74) $f(x)=\dfrac{5x-1}{x+2}$

75) $f(x)=\dfrac{4x-3}{x+6}$

76) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$

77) $f(x)=\dfrac{2x+1}{2x-1}$

Responder Verdadero o Falso:

78) El dominio de las funciones racionales es siempre todos los reales.

79) Las funciones racionales siempre tienen una sola asíntota vertical.

80) Para que un valor de x se corresponda con una asíntota vertical de una función racional debe hacer cero al denominador y al numerador.

81) Para que un valor de x se corresponda con una asíntota vertical de una función racional debe hacer cero al denominador y debe hacer al numerador cualquier valor distinto de cero.

82) El dominio de las funciones racionales nunca puede ser todo el conjunto de los números reales.

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Números Complejos I

Número de Tema: **61**

Área: **Matemática**

☆ **<u>NUMEROS COMPLEJOS</u>** Son expresiones (**a + bi**), donde **a** y **b** son números Reales.

El número **a** se llama parte Real. El Término **b i** se llama parte Imaginaria.

5 + 3i ⟹ 5 es la parte Real, 3 la parte Imaginaria.

−7 + 4i ⟹ −7 es la parte Real, 4 la parte Imaginaria.

−1 − i ⟹ −1 es la parte Real, −1 la parte Imaginaria.

☆ **<u>Casos especiales</u>**

- Los Complejos que tienen la parte Imaginaria nula: **Si b = 0, el Número Complejo se reduce a un número Real**, ya que: **a + 0i = a**
- **Si a=0**, el Número Complejo se reduce a: 0a + bi = bi ; es **un Número Imaginario puro**.
- Si a=0 y b=0, resulta el Número Complejo 0 + 0i, que es el Número Complejo cero, y se escribe 0.

☆ **<u>Los Reales son un subconjunto de los Complejos</u>:** Todo Real puede considerarse como Número Complejo con parte Imaginaria cero: **a = a + 0 i**

Al conjunto de los Números Complejos lo denotaremos C. O sea que el conjunto de los Números Reales es un subconjunto (está incluido dentro) de los Complejos: $\mathrm{IR} \subset \mathrm{C}$

☆ <u>El Conjugado de un Número Complejo</u>

Se llama Conjugado de z = a + bi al Número Complejo definido por ⟹ $\bar{Z} = a - bi$

O sea que el Conjugado de Z = (3 + 2i) Es (3 − 2i) (Se cambia sólo el signo de la parte Imaginaria)

☆ **<u>La Unidad Imaginaria: i</u>** Llamamos **Unidad Imaginaria** de un Número Complejo al número $\sqrt{-1}$ que se representa con la letra: **i**

De esta manera, tenemos que $\boxed{i = \sqrt{-1}}$ ⟹ $\boxed{i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1}$

Con la Unidad Imaginaria **i** se pueden realizar **operaciones** (suma, resta, multiplicación, etc.) "**como si fuera la X de los polinomios**", con una particularidad especial: $\mathbf{i^2 = -1}$

☆ <u>Ejemplos de operaciones con la Unidad Imaginaria i</u>

- **Suma:** 2i − 5i + 8i = (2 − 5 + 8) i = 5 i
- **Producto:** 2.(3i) = 6i
- **Propiedad distributiva** de la potencia respecto al producto: $(2i)^2 = 2^2 \,.\, i^2 = 4 \,.\, (-1) = -4$

☆ **Potencias:**

$i^0 = 1$ (Como cualquier número elevado a la cero)

$i^2 = -1$ (ya los sabíamos por la definición de la unidad imaginaria)

$i^3 = i \,.\, i \,.\, i = i^2 \,.\, i = (-1) \,.\, i = -1i$

$i^4 = i \,.\, i \,.\, i \,.\, i = i^2 \,.\, i^2 = (-1) \,.\, (-1) = 1$

☆ **Regla para elevar (i) a cualquier potencia** ⟹ Hay que **dividir la potencia de i por 4**, y luego elevamos la **i al resto de la división:**

Ejemplo: $i^{322} = i^{\text{resto de la división}} = i^{\boxed{2}} = -1$

Siempre hay que dividir por 4. Y queda siempre i elevada a lo que nos dio el resto de la división.

$$\begin{array}{r|l} 322 & 4 \\ \hline 02 & 80 \\ \boxed{2} & \end{array}$$

by Dal-Or para TARINGA!

☆ ***Suma y Resta de Números Complejos*** Para sumar dos Números Complejos tenemos que sumar por separado las partes Reales y las partes Imaginarias.

Si queremos sumar los Números Complejos 3 - 2i y 5 + 6i:
(3 - 2i) + (5 + 6i) = (3 + 5) + (- 2i + 6i) = 8 + 4i

$$\overbrace{3}^{3+5=8} \; \boxed{-\,2i} \quad 5 \; \boxed{+\,6i} \; = \; 8 \; \underbrace{\boxed{+\,4i}}_{-2+6=4}$$

⇨ Sumamos por separado las partes Reales y las partes Imaginarias

Análogamente procederemos para restar el Número Complejo con otro. Es decir, restamos por un lado las partes Reales, y por el otro lado las imaginarias. Con lo que nos da cada resta armamos la respuesta.

Ejemplo: **(4 – 7i) – (6 – 5i)** =
(4–7i) – (6–5i) = (4–6) +(–7i–(–5i)) = –2 – 2i ⇨

$$\overbrace{4}^{4-6=-2} \; \boxed{-\,7i} \; - \; 6 \; \boxed{-\,5i} \; = \; -2 \; \underbrace{\boxed{-\,2i}}_{-7-(-5)=-2}$$

☆ **Fórmula para la Suma y Resta de dos Números Complejos**:

Suma ⇨ **(a + b i) + (c + d i) = (a + c) + (b + d) i**

Resta ⇨ **(a + b i) - (c + d i) = (a - c) + (b - d) i**

☆ **<u>Multiplicación</u>**: Para multiplicar Complejos, se **aplica la propiedad distributiva** como si se tratara de números Reales o expresiones algebraicas; debe tenerse en cuenta que $i^2 = -1$

(3 + 4 i) · (2 – 5 i) =
3.2 + 3.(–5i) + 4i.2 + 4i.(–5i) =
6 – 15i + 8i –20 i^2 =
6 – 15i + 8i – 20.(–1) =
6 – 15i + 8i + 20 =
(6 + 20) + (–15i + 8I) = **26 – 7 i**

3 + 4 i . 2 – 5 i =

☆ **Fórmula para multiplicar Números Complejos:** $\boxed{(a + b\,i) . (c + d\,i) = (a.c - b.d) + (a.d + b.c)\,i}$

Aplicando esta fórmula al ejemplo anterior nos queda:
(3 + 4 i) · (2 – 5 i) = [3 · 2 – 4 · (– 5)] + [3 · (– 5) + 4 · 2] i = 26 – 7 i

Obviamente que nos da lo mismo que antes, porque es la misma cuenta. <u>Siempre hay varias maneras de llegar al mismo resultado</u>. Yo recomiendo que en lugar de memorizarse esa fórmula hagan "la distributiva".

Importante: **El producto de un Número Complejo por su Conjugado, es un número Real:**
Ese número Real es la suma de los cuadrados de las partes Real e imaginaria del Número Complejo.

Fórmula para multiplicar un Número Complejo por su Conjugado ⇨ $\boxed{(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2}$
Ejemplo: (2 +3 i) · (2 –3 i) = 4– 9. i^2 = 4 – 9. (-1) = 4 + 9 = 13

☆ **<u>División de Números Complejos</u>**: Para dividir un Número Complejo por otro Número Complejo, **vamos a multiplicar al numerador y al denominador del cociente por el Conjugado del denominador**. (O sea multiplicamos "al de arriba" y "al de abajo" por el Conjugado "del de abajo")

Ejemplo:

$$\frac{-5+3i}{2-3i} = \frac{-5+3i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{-10-5i+6i+3i^2}{2^2+1^2} = \frac{-13+1i}{5} = -\frac{13}{5} + \frac{1}{5}i$$

Como dijimos, multiplicamos al numerador (el de arriba) y al denominador (el de abajo) por el Conjugado del denominador (el de abajo)

De esta manera (Aplicando la propiedad que vimos antes para multiplicar un número por su Conjugado), nos queda abajo un número Real (5), el cual distribuimos fácilmente y resolvemos la división.

Entonces transformamos la división en una multiplicación.
Es siempre igual, multiplico por el Conjugado del denominador, hago la distributiva arriba (abajo puedo aplicar la propiedad de la multiplicación de un Número Complejo por su Conjugado) y por último distribuyo el número Real que me quedó abajo y llego al resultado de la división. Muchas veces el resultado queda con números fraccionarios por el último paso que dijimos. A veces no quedan números fraccionarios porque estos números de los denominadores se pueden simplificar con los de los numeradores.

✰ ***Inverso Multiplicativo de un Número Complejo:*** El Inverso Multiplicativo de un Número Complejo es otro Número Complejo, tal que cuando multiplico a ambos me da por resultado 1.

El Inverso del Número Complejo (a + bi) es: $\boxed{\dfrac{a - b.i}{a^2 + b^2}}$

Ejemplo:

El Inverso de $4 - 2i$ es $\dfrac{4-(-2i)}{+4^2+(-2)^2} = \dfrac{4+2i}{16+4} = \dfrac{4+2i}{20} = \dfrac{4}{20} + \dfrac{2}{20}i = \boxed{\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10}i}$

Ahora verifiquemos que: $(4-2i).\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10}i\right) = 1$

$$(4-2i).\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i\right) = \frac{4}{5}+\frac{4}{10}i-\frac{2}{5}i-\frac{2}{10}i^2 = \frac{4}{5}+\frac{2}{5}i-\frac{2}{5}i-\frac{1}{5}.(-1) = \frac{4}{5}+\frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Nota: Otra manera de Realizar la división de dos Números Complejos es:
En vez de dividir un Número Complejo "X" por otro Número Complejo "Y", multiplico al Número Complejo "X" por el Inverso multiplicativo de "Y".

En números Reales sería lo mismo que si dijera: En vez de dividir por 5 multiplico por $\dfrac{1}{5}$

✰ **Potenciación**

Ya conocen la fórmula para elevar un Binomio al Cuadrado:
- $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$

Quizá conozcan la fórmula para elevar un Binomio al Cubo:
- $(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$

Pero sería raro conozcan la fórmula para elevar un Binomio a la Cuarta:
- $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

También hay fórmulas para elevar un Binomio a la Quinta, a la Sexta, etc. No se preocupen, porque no hay que aprendérselas de memoria, podemos deducirlas "haciendo las distributivas a mano" planteando sucesivas multiplicaciones de un binomio. También hay una manera de deducir estas fórmulas usando la pirámide de pascal:

Observen esta pirámide de números:

1	
1 1	
1 2 1	---------------- Potencia: 2
1 3 3 1	-------------- Potencia: 3
1 4 6 4 1	----------- Potencia: 4
1 5 10 10 5 1	-------- Potencia: 5
1 6 15 20 15 6 1	------ Potencia: 6
1 7 21 35 35 21 7 1	--- Potencia: 7

<u>¿Cómo se arma la pirámide</u>? Las diagonales externas de la pirámide se completan con "1", los casilleros internos se completan cada uno con la suma de los dos casilleros que tiene "encima"

Los números de cada fila son los Coeficientes de la Potencia de un Binomio. (Los coeficientes son los números que multiplican a cada término del polinomio que equivale al Binomio elevado a la potencia dada).

1. La fila de arriba de todo tiene los coeficientes de un Binomio elevado a la cero
2. La que le sigue, de un Binomio elevado a la uno.
3. La otra, los de un Binomio elevado a la 2 o al cuadrado.
4. La otra a la tres o al cubo.
5. Y así sucesivamente...

Y ¿Cómo se completa la potencia del Binomio? Las letras a y b se elevan de la siguiente forma:

Empieza sólo la letra **a** elevada a la potencia que tengo que elevar el binomio multiplicada por **b** elevada a la cero, y luego para cada término va diminuyendo de a 1 la potencia de **a** y va aumentando de a 1 la potencia de **b**, hasta que queda **b** elevada a la misma potencia que tengo que elevar el binomio. Los coeficientes son los números que multiplican a cada término.

- Usando esta pirámide para deducir la fórmula de $(a + b)^6$, me quedaría:

$$\boxed{(a+b)^6 = \mathbf{1}a^6 + \mathbf{6}a^5b^1 + \mathbf{15}a^4b^2 + \mathbf{20}a^3b^3 + \mathbf{15}a^2b^4 + \mathbf{6}a^1b^5 + \mathbf{1}b^6}$$

Todas esas fórmulas se usan para calcular la potencia de un Número Complejo:

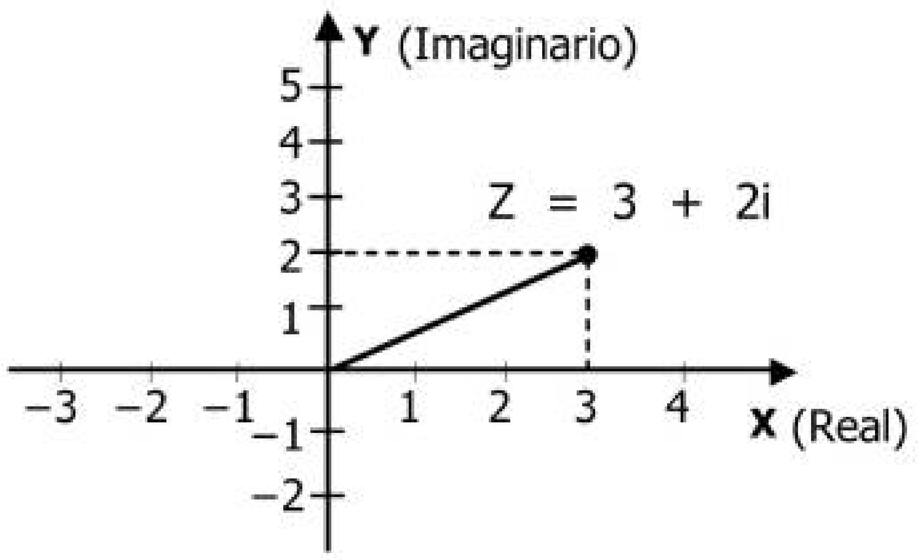
- $(a + bi)^2 = a^2 + 2.a.b.i + (bi)^2$
- $(a + bi)^3 = a^3 + 3.a^2.bi + 3.(bi)^2.a + (bi)^3$
- $(a + bi)^4 = a^4 + 4a^3bi + 6a^2(bi)^2 + 4a(bi)^3 + (bi)^4$

> Ojo, siempre hay que ver como quedan al final los términos con i^2, i^3, i^4, etc.

Ejemplo: $(1 - 2i)^4$

$(1 - 2i)^4 = (1)^4 + 4.(1)^3.(-2i)^1 + 6.(1)^2.(-2i)^2 + 4.(1)^1.(-2i)^3 + (-2i)^4 =$
$(1 - 2i)^4 = 1 + 4 . 1 . (-2i) + 6 . 1 . 4i^2 + 4 . 1 . (-8i^3) + 16i^4$
$(1 - 2i)^4 = 1 - 8i + 24i^2 - 32i^3 + 16i^4$
$(1 - 2i)^4 = 1 - 8i + 24 . (-1) - 32. (-i) + 16.(1)$
$(1 - 2i)^4 = 1 - 8i - 24 + 32i + 16$ $\mathbf{= -7 + 24i}$

☆ Representación gráfica de un Número Complejo



En el eje de abscisas (el de las X), se representa la componente Real y en el eje de ordenadas (el de las Y), se representa la imaginaria:

> El punto (a, b) determina con el origen de coordenadas un vector, al que llamaremos **Vector Posición** del Número Complejo a + bi

---

☆ MODULO Y ARGUMENTO

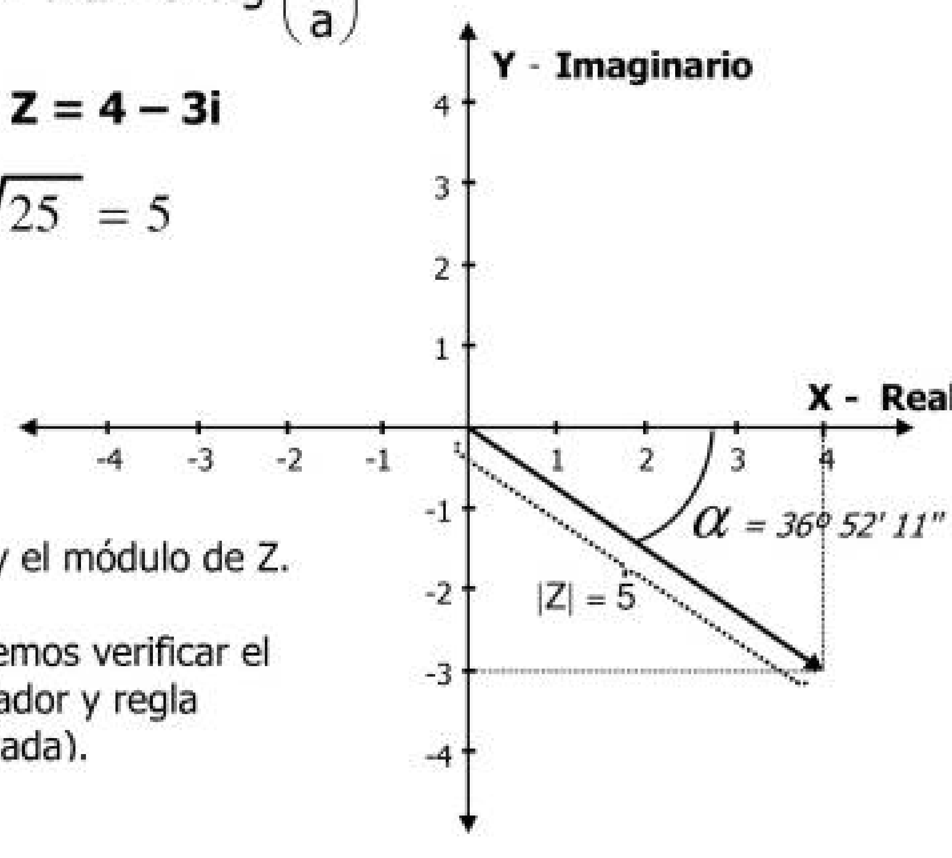
El Módulo de un Número Complejo z = a + bi es la longitud del Vector Posición.
El Módulo Se designa entre barras y se calcula con el Teorema de Pitágoras: $Z = a + bi \Rightarrow |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

El **Argumento (α)** de un Complejo z = a + bi, es el ángulo que forma el semieje positivo de X con el Vector Posición de Z. Se calcula mediante la expresión: $Z = a + bi \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$

Ejemplo: Calculamos el Módulo y el Argumento de Z = 4 – 3i

$$Z = 4 - 3i \Rightarrow |Z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$Z = 4 - 3i \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right) = -36°52'11''$$



Y acá lo vemos todo graficado. Podemos ver el argumento y el módulo de Z.

Nota. Si hacemos el dibujo a escala 1 unidad = 1 cm, podemos verificar el valor del argumento y módulo midiendo con transportador y regla respectivamente (obviamente en forma aproximada).

Realizarlas siguientes operaciones en C:

1) $(2+2i)+(2+5i)$
2) $(-4+3i)+(3-2i)$
3) $(-3-2i)+(-1-1i)$
4) $\left(\frac{1}{3}+1i\right)+\left(-1-\frac{1}{4}i\right)$
5) $\left(-\frac{1}{8}+\frac{5}{6}i\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}i\right)$
6) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}i\right)+\left(-\frac{5}{8}-\frac{3}{10}i\right)$
7) $(-1-2i)+\left(\frac{4}{5}-i\right)$
8) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i\right)$
9) $\left(1+\frac{4}{5}i\right)+\left(-1+\frac{1}{10}i\right)$
10) $(4-3i)+(-4+3i)$

11) $(2+2i)-(2+5i)$
12) $(-4+3i)-(3-2i)$
13) $(-3-2i)-(-1-1i)$
14) $\left(\frac{1}{3}+1i\right)-\left(1-\frac{1}{4}i\right)$
15) $\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}i\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}i\right)$
16) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}i\right)-\left(-\frac{5}{8}-\frac{3}{10}i\right)$
17) $(-1-2i)-\left(-\frac{1}{5}-i\right)$
18) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i\right)$
19) $\left(1+\frac{4}{5}i\right)-\left(-1+\frac{4}{5}i\right)$
20) $(4-3i)-(4-3i)$

21) $(2+2i).2$
22) $(-4+3i).3$
23) $(-3-2i).(-1)$
24) $\left(\frac{1}{3}+1i\right).\left(-\frac{1}{4}i\right)$
25) $\left(3-\frac{1}{3}i\right).(-2i)$
26) $\left(\frac{3}{4}+2i\right).\left(-\frac{1}{2}i\right)$
27) $(5-5i).\left(\frac{4}{5}-i\right)$
28) $\left(2-\frac{1}{2}i\right).(-6+4i)$
29) $(1-2i).(-1+5i)$
30) $(-1-i).(-1+i)$

31) $(1+2i).(1-2i)$
32) $(-3-2i).(-1-i)$
33) $(2+i).\left(1-\frac{1}{2}i\right)$
34) $(-2+2i).\left(\frac{1}{2}-i\right)$
35) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i\right).(2-5i)$
36) $(-1-2i).(2-1i)$
37) $\left(-\frac{1}{3}-3i\right).(6+3i)$
38) $\left(1+\frac{4}{5}i\right).(-10+5i)$
39) $(7-3i).(-1-3i)$
40) $(1+2i).(1-2i)$

Dados los números complejos: $Z_1=2+3i$ $Z_2=-1+5i$ $Z_3=5-2i$ $Z_4=4-3i$ $Z_5=-2-I$ **Hallar:**

41) $(2Z_1+Z_2)$
42) (Z_3+3Z_4)
43) $(-3Z_1-4Z_5)$
44) $(5Z_4-3Z_1)$
45) $(-5Z_1 . 2Z_1)$
46) $(-2Z_3 . -2Z_5)$

47) $(4Z_2 . -3Z_2)$
48) $(2Z_1+3Z_2) . Z_3$
49) $(-2Z_2-3Z_5+4Z_4).Z_1$
50) $(Z_3-4Z_5+5Z_3) . Z_2$
51) $(Z_3-2Z_5+4Z_4) . Z_4$
52) $(Z_2-4Z_1-3Z_5) . Z_5$

53) $-Z_5 . 2Z_1 .(-5) . Z_1$
54) $(-Z_4 . 2Z_1).(-Z_5)$
55) $(-9Z_2-4Z_5.3Z_1)-11Z_1$
56) $2Z_3+(3Z_4-2Z_3).Z_5$
57) $19Z_1-(3Z_5 .4Z_5)-Z_1$
58) $[(Z_3+Z_5)-8Z_1] .Z_1$

59) $[Z_4-(Z_5+4Z_2)]+Z_2$
60) $[(Z_5-2Z_5). Z_3]-Z_4$

Dados los números complejos: $Z_1=4-i$ $Z_2=3+i$ $Z_3=-3+2i$ $Z_4=-1-2i$ $Z_5=1+3i$ **Hallar**:

61) $Z_1.\overline{Z_1}+Z_2.\overline{Z_2}-Z_3.\overline{Z_3}$
62) $Z_5.\overline{Z_5}-Z_4.\overline{Z_4}+Z_1.\overline{Z_1}$
63) $Z_1.\overline{Z_1}-\left(Z_5.\overline{Z_5}+Z_3.\overline{Z_3}\right)$
64) $Z_1+\overline{Z_2}+\left(Z_2.\overline{Z_2}\right)-Z_4.\overline{Z_4}$

65) $\overline{Z_1+Z_2}+\left(Z_3.\overline{Z_3}\right)-Z_4.\overline{Z_4}$
66) $\overline{Z_1+Z_2+Z_3}+Z_1.\overline{Z_1}$
67) $Z_5+\overline{Z_1}-\left(Z_2.\overline{Z_2}\right)\div\left(Z_5.\overline{Z_5}\right)$
68) $\left(Z_3-\overline{Z_4}\right)+\left(Z_2+\overline{Z_2}\right)-\left(Z_4-\overline{Z_4}\right)$

69) $\overline{Z_1-Z_5}+\left(Z_2-\overline{Z_3}\right)-\overline{Z_4+Z_5}$
70) $\overline{Z_1+\left(Z_2-Z_5\right)}-Z_4-\overline{Z_1}$

Realizar las siguientes divisiones:

71) $\frac{1+i}{i}$
72) $\frac{-3+5i}{1+i}$
73) $\frac{-2-i}{1-2i}$
74) $\frac{6+4i}{1+i}$

75) $\frac{20+10i}{4-3i}$
76) $\frac{4}{2+2i}$
77) $\frac{5+15i}{1-3i}$
78) $\frac{10}{1+3i}$

79) $\frac{3-i}{-1+i}$
80) $\frac{7+3i}{i}$
81) $\frac{6+8i}{2i}$
82) $\frac{13+26i}{-3+2i}$

83) $\frac{10-5i}{1/2+i}$
84) $\left(\frac{41}{4}-\frac{41}{5}i\right)\div\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}i\right)$
85) $(1+2i)\div\left(-\frac{2}{5}-\frac{3}{10}i\right)$
86) $(1+2i)\div\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)$

87) $\left(\frac{13}{6}-\frac{13}{6}i\right)\div\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)$
88) $\left(-\frac{17}{5}-\frac{17}{15}i\right)\div\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}i\right)$
89) $\left(37-\frac{37}{3}i\right)\div\left(2+\frac{1}{3}i\right)$
90) $\left(\frac{5}{4}-5i\right)\div\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i\right)$

Dados los números complejos: $Z_1=(2-i)$ $Z_2=(2+i)$ $Z_3=(-1+2i)$ $Z_4=(1-2i)$ $Z_5=(2+3i)$ **Hallar:**

91) $(Z_1+2Z_5+7i)\div(\overline{Z_1-Z_3})$

92) $(Z_1\div\overline{Z_4})\cdot(5Z_5\div Z_2)$

93) $5.(Z_5\div Z_4)\div(\overline{Z_1}\div Z_3)$

94) $-4Z_4\div(Z_5-i)+Z_1$

95) $\{2Z_5\div(Z_1-1)\}\cdot Z_4-3Z_5$

96) $[(Z_2+Z_5)\div(Z_1+Z_3)+3i]\cdot(Z_4\div Z_2)$

97) $[(13Z_2\div Z_5)-3Z_4]\div(Z_3-1)$

98) $(Z_5+i)\div(Z_1-1)-Z_3+1$

99) $(Z_5\cdot Z_3+10)\div Z_2+(Z_1\div\overline{Z_2})$

100) $\left[\dfrac{\overline{Z_4}}{Z_2-1}\right]\div\left[\dfrac{\overline{Z_2}}{Z_5-Z_4-6i}\right]+Z_3$

Hallar el inverso:

101) $-2+i$
102) $1-i$
103) $1-2i$
104) $4-3i$
105) $-2+2i$
106) $3-3i$
107) $1-3i$
108) $6+2i$
109) $-1+i$
110) $-4-8i$
111) $7-7i$
112) $7+i$
113) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$
114) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$
115) $-\frac{2}{5}-\frac{3}{10}i$
116) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$
117) $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}i$
118) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$
119) $-3+6i$
120) $-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$

Hallar el valor de Z en las siguientes ecuaciones:

121) $\dfrac{2Z+(3+2i)\cdot(4-i)+4i}{2-i}=7+6i$

122) $(3-2i)\cdot Z+\dfrac{4+7i}{-2i^{18}-i}=\dfrac{41}{5}+\dfrac{13}{5}i$

123) $\dfrac{(2-i)\cdot(Z+4i)}{-3+i}+\dfrac{1}{2}i=-\dfrac{11}{2}+3i^{55}$

124) $Z-2-\left[(3-2i)(4+i)-\dfrac{40+5i}{4+3i}-6\right]=-3+2i$

125) $\dfrac{Z-(3+2i)\cdot(5-i)}{3+2i^{465}}=(4-2i)\cdot(3+i)-(19-i)$

126) $\left[\dfrac{Z-2i}{2+i}-(3+2i)\right]\cdot(1+i)(4-2i)=-2i^{92}-34i^{25}$

127) $\left[\dfrac{(3Z-5i)\cdot(4+3i)+2-11i}{4+3i}\right]=7i^{39}-11i^{30}$

128) $\left[\dfrac{(5+3i)\cdot(11+5i-Z)+(1+i)}{2+i}\right]=\overline{(2+i)\cdot(2-4i)}$

129) $\dfrac{13+Z\cdot(4-5i)}{18-6i}=(3-2i)\cdot(1-i)-7i^{99}$

130) $\dfrac{-3+2i+Z\cdot(2+5i)}{7+i}+2i=(4+i)\cdot(2+i)$

131) $\left[3i+2Z-\dfrac{7+4i}{2-i}\right]\cdot(3+4i)=10(-1+2i)$

132) $\left[\dfrac{-25+3Z}{1+17i}\right]\cdot(1+i)\cdot(1-i)=-1-i$

133) $\dfrac{(3-5i)\cdot(Z-6)-(30+10i)}{3+3i}=1$

134) $\dfrac{(2+i)\cdot(Z-3i)}{-6-8i}-60i=(14-9i)\cdot(2-3i)$

135) $\dfrac{(Z+9i)}{-3+5i}+3i=(7+2i)\cdot(12-3i)-89$

136) $[Z\cdot(4-5i)-50]\cdot\left(\dfrac{7+13i}{2-2i}\right)=\dfrac{-168-94i}{2+6i}$

137) $(Z+8)\cdot\dfrac{183i}{1-i}=(-27+108i)\cdot\dfrac{(14-5i)}{9-9i}$

138) $\dfrac{(5-2i)\cdot(Z-3i)-5+31i}{5-2i}=7+2i$

139) $\dfrac{6Z-(5+3i)\cdot(4-7i)}{7+7i}=\dfrac{31+53i}{3+7i}$

140) $\left(\dfrac{Z}{-1-3i}+6i\right)\cdot(5-3i)=13+33i$

Realizar las siguientes Potencias:

141) $(2+3i)^2$
142) $(4-i)^2$
143) $(5-i)^2$
144) $(4-3i)^2$
145) $(-1+2i)^2$
146) $(1+i)^2$
147) $(1-i)^2$
148) $(5+2i)^2$
149) $(3-3i)^2$
150) $(1+4i)^2$
151) $(3+i)^2$
152) $(-3+2i)^2$
153) $(2-3i)^2$
154) $(-2-i)^2$
155) $(-4+4i)^2$
156) $(-1+2i)^3$
157) $(1+i)^3$
158) $(-1-i)^3$
159) $(2+i)^3$
160) $(-1+3i)^3$
161) $(-3-i)^3$
162) $(2-4i)^3$
163) $(-1-4i)^3$
164) $(-3+2i)^3$
165) $(2-3i)^3$
166) $(-2-2i)^3$
167) $(-2+3i)^3$
168) $(4-i)^3$
169) $(-4-2i)^3$
170) $(2-2i)^3$
171) $(1+i)^4$
172) $(1-i)^4$
173) $(1+2i)^4$
174) $(3+i)^4$
175) $(2-i)^4$
176) $(1-i)^5$
177) $(2+i)^5$
178) $(1+2i)^5$
179) $(1-i)^6$
180) $(2-i)^6$

Hallar el valor de "Z" en las siguientes ecuaciones:

181) $\dfrac{(\mathbf{Z}+5i)-(3\mathbf{Z}+4i)-(47-9\mathbf{Z})}{-4+2i}=6+i$

182) $2\mathbf{Z}\cdot(4-3i)-\dfrac{(5+11i)+\mathbf{Z}}{3-i}=4\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\cdot(1+7i)-72i$

183) $\mathbf{Z}\cdot\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{6}i\right)-\dfrac{\mathbf{Z}\cdot(10-5i)}{6+18i}=2+i$

184) $\dfrac{[\mathbf{Z}\cdot(-2+4i)-(3\mathbf{Z}i-4)]\cdot(4+2i)}{1+2i}=\mathbf{Z}\cdot(2+7i)-25$

185) $\mathbf{Z}\cdot(3+i)-(\mathbf{Z}+7i)=\dfrac{(5\mathbf{Z}+15)}{-1+3i}-(6-10i)$

186) $\mathbf{Z}\cdot(3+2i)+\dfrac{\mathbf{Z}\cdot(5+5i)}{-4+2i}=\mathbf{Z}\cdot(3-2i)+13$

187) $\dfrac{1}{3}\mathbf{Z}\cdot(7-5i)-\dfrac{10\mathbf{Z}}{6+2i}=2\mathbf{Z}+7$

188) $\dfrac{[3\mathbf{Z}\cdot(3-2i)-2\mathbf{Z}\cdot(4-5i)-2i]}{2+i}=-\mathbf{Z}\cdot(5+4i)+48$

189) $\mathbf{Z}\cdot(3-2i)-\mathbf{Z}\cdot(2+i)=\dfrac{7\mathbf{Z}-(2+5i)}{4+3i}+(11-13\,i)$

190) $[(\mathbf{Z}+5)\cdot(3-7i)-8]\cdot(4-i)=\dfrac{\mathbf{Z}\cdot(6+10i)}{-4-i}-(6+24\,i)$

191) $\dfrac{(\mathbf{Z}+5i)-(3Z+4i)-(47-9\mathbf{Z})}{-4+2i}=6+i$

192) $\left[\dfrac{(4+2i)\cdot(\mathbf{Z}-1)}{-3+3i}+\mathbf{Z}+5i\right]\cdot(2-5i)=4\mathbf{Z}-11\,i$

193) $\mathbf{Z}-(3+4i)\cdot(\mathbf{Z}-2i)=\dfrac{(\mathbf{Z}+3i)\cdot(-2-4i)}{3-3i}+2i$

194) $\dfrac{\mathbf{Z}\cdot(2-5i)+\mathbf{Z}\cdot(-1+6i)}{9-5i}+3i=\dfrac{1}{2}\cdot(\mathbf{Z}+13\,i)$

195) $\dfrac{\mathbf{Z}\cdot(5-3i)}{8-2i}+\dfrac{2\mathbf{Z}+4i}{3-i}=(\mathbf{Z}-4)\cdot(1+2i)+11$

196) $\dfrac{-\frac{1}{5}\mathbf{Z}\cdot(2+6i)+6i}{4-2i}+\dfrac{\mathbf{Z}-5i}{-2+i}=2+2i$

197) $\dfrac{\mathbf{Z}\cdot(3+4i)}{-2+3i}-(\mathbf{Z}+3)=4-\mathbf{Z}$

198) $\mathbf{Z}\cdot(2+3i)-(6+14\,i)=\dfrac{(i-4)\cdot\mathbf{Z}-i}{17+i}$

199) $\dfrac{\mathbf{Z}-(8+5i)}{-5+2i}+(\mathbf{Z}-4i)=\dfrac{-5i\cdot\mathbf{Z}+2-i}{4-7\,i}$

200) $\dfrac{8\mathbf{Z}}{3+3i}+15i=\dfrac{2\mathbf{Z}\cdot(4-3i)}{4+2i}-6\mathbf{Z}+40$

Hallar el valor de Z en las siguientes ecuaciones (Para resolver estas ecuaciones es necesario remplazar las Z por (a + bi) y a los conjugados de Z por (a - bi), y luego hay que armar dos ecuaciones para hallar a y b por separado, por lo tanto recomiendo repasar sistemas de ecuaciones)

201) $9\cdot(\mathbf{Z}+3i)-2\overline{\mathbf{Z}}\cdot(4-i)=1-i$

202) $\left(3\mathbf{Z}-2\overline{\mathbf{Z}}\right)\cdot(3-5i)=59+15\,i$

203) $\left[3\cdot(\mathbf{Z}+i)-4\overline{\mathbf{Z}}+i\right]\cdot(2+3i)=47-40\,i$

204) $\dfrac{5\mathbf{Z}-3\overline{\mathbf{Z}}+4}{8+4i}=\overline{\mathbf{Z}}+5i$

205) $\mathbf{Z}\cdot(2+3i)-\overline{\mathbf{Z}}\cdot(4+2i)=\mathbf{Z}-(5+5i)$

206) $\dfrac{\overline{\mathbf{Z}}+(2+3i)^2+\mathbf{Z}}{3+3i}=\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}i$

207) $(\mathbf{Z}+6i)-\left(2\overline{\mathbf{Z}}-8i\right)+5i=-4+4i$

208) $5.\mathbf{Z}-\dfrac{3\overline{\mathbf{Z}}\cdot(2+i)}{2+i}=6+32i$

209) $3\mathbf{Z}+\overline{\mathbf{Z}}\cdot(2+5i)=9\overline{\mathbf{Z}}-26$

210) $(3\mathbf{Z}-1)-\left(\overline{\mathbf{Z}}+i\right)\cdot(2-3i)=-19+7\,i$

211) $\left[\overline{\mathbf{Z}}+2\cdot(\mathbf{Z}-6)\right]\cdot(3+5i)=71+39\,i$

212) $\left[2\mathbf{Z}-3\cdot\left(\overline{\mathbf{Z}}-1\right)+5i\right]\cdot(7-3i)=30+70i$

213) $5+6i=\dfrac{\overline{\mathbf{Z}}}{4-6i}+\mathbf{Z}$

214) $\dfrac{\overline{\mathbf{Z}}}{3+2i}+\mathbf{Z}=4-2i$

215) $\mathbf{Z}\cdot(2-3i)-\overline{\mathbf{Z}}\cdot(4+i)=4+22\,i$

216) $-\mathbf{Z}\cdot(3-2i)+\left(\overline{\mathbf{Z}}+3i\right)\cdot(4-i)=2+3i$

217) $4\cdot(\mathbf{Z}+11\,i)-\left(\overline{\mathbf{Z}}-5i\right)\cdot(3+2i)=8+5i$

218) $(3\mathbf{Z}+2i)-\overline{\mathbf{Z}}(1-3i)=7\mathbf{Z}-(6+2i)$

219) $\dfrac{1}{2}\mathbf{Z}\cdot(4+3i)-\dfrac{\overline{\mathbf{Z}}}{4+3i}=-27\,i^2$

220) $\mathbf{Z}-3\overline{\mathbf{Z}}+17=\dfrac{1}{2}\overline{\mathbf{Z}}\cdot(1-i)+8i$

Hallar el valor de Z en las siguientes ecuaciones

(Para resolver estas ecuaciones hay que saber muy bien la fórmula de una ecuación cuadrática.)

221) $Z^2 - 6Z + 13 = 0$

222) $Z^2 - 4Z + 29 = 0$

223) $Z^2 - 4Z + 13 = 0$

224) $Z^2 - 2Z + 50 = 0$

225) $Z^2 - 4Zi = 29$

226) $Z^2 - 2Zi = 10$

227) $Z^2 - 10Zi = 61$

228) $3\,i \cdot Z^2 + 12Z = 39i$

229) $2i \cdot Z^2 + 8Z = 58i$

230) $i \cdot Z^2 - 14i \cdot Z = -58i$

231) $Z^2 + Z\overline{Z} = 128 + 80i$

232) $Z^2 + Z\overline{Z} = 18 + 6i$

233) $Z\overline{Z} - Z^2 = 50 + 30\,i$

234) $Z\overline{Z} - Z^2 = 2 - 12i$

235) $Z^2 - \left(Z + \overline{Z}\right)^2 = -64 + 96i$

236) $Z + 4Z\overline{Z} + (Z - \overline{Z})^2 = 39 + 3i$

237) $Z^2 + \left(\overline{Z}\right)^2 - (Z - \overline{Z})^2 \div 2 + Z = 21 + 5i$

238) $Z^2 - \left(\overline{Z}\right)^2 + (Z + \overline{Z})^2 = 36 - 84\,i$

239) $2Z\overline{Z} - \left[Z^2 + (\overline{Z})^2\right] + Z \cdot (1 + i) = 65 + 9i$

240) $Z \cdot (2 + 2i) - Z + \overline{Z} + Z^2 - \left(\overline{Z}\right)^2 = 4 - 2i$

241) $4\left(\overline{Z}\right)^2 - \left(Z + \overline{Z}\right)^2 + Z = 5 - 7i$

Ecuaciones para valientes (Advertencia: Son muy difíciles)

242) $Z \cdot (3 + 2i) + \overline{Z} + (Z + \overline{Z})^2 = 52 + 2i$

243) $\left(Z + \overline{Z}\right)^2 - \left(Z - \overline{Z}\right)^2 + Z = 162 + 6i$

244) $Z \cdot (4 - 2i) - 2 \cdot (Z + \overline{Z}) - (Z - \overline{Z})^2 = 6 + 8i$

245) $\left[Z \cdot (1 + 2i) - \overline{Z}\right]^2 + \left(Z + \overline{Z}\right)^2 = -16 - 48i$

246) $Z \cdot \overline{Z} - \overline{Z} - Zi + \overline{Z}\,i = 105 - 35\,i$

247) $\dfrac{Z^{-1} \cdot \left[Z^2 + \left(\overline{Z}\right)^2 - \left(Z - \overline{Z}\right)^2\right]}{2} + Z^2 - \dfrac{(Z - \overline{Z})^2}{4} = 12 + 28\,i$

248) $\left(Z - \overline{Z}\right) \div \left(Z + \overline{Z}\right) \cdot \left[Z^2 - (\overline{Z})^2\right] - 4Z^2 + Z = -3 + 9i$

249) $\dfrac{2\overline{Z} + Z + Z^2 - \overline{Z}}{3Z + 4\overline{Z} - 8 + 11\,i} = 1$

250) $\dfrac{Z^2 + \left(\overline{Z}\right)^2}{Z \cdot \overline{Z}} + Z^{-1} \cdot \left(Z - \overline{Z}\right) = \dfrac{2(Z + 6 + 3i)}{\left[Z^2 + \left(\overline{Z}\right)^2\right] - \left(Z - \overline{Z}\right)^2}$

Hallar el módulo y el argumento y Graficar:

251) Z = 3/2 + 2 i

252) Z = 5/3 + 4 i

253) Z = –7/4 + 6 i

254) Z = 7/3 – 8 i

255) Z = –5/4 – 3 i

256) Z = 5/2 + 6 i

257) Z = –1 + 4/3 i

258) Z = –12/5 – i

259) Z = 5/12 + i

260) Z = 5/6 – 2 i

261) Z = 1 – 24/7 i

262) Z = 7/12 + 2 i

263) Z = –4 – 15/2 i

264) Z = –2 + 15/4 i

265) Z = 1 – 15/8 i

266) Z = –8/3 + 5 i

267) Z = 8/5 + 3 i

268) Z = 8/15 – i

269) Z = 1/2 + 15/16 i

270) Z = i

Ejercicios para pensar

271) Si multiplico a un número complejo por un número real K obtengo otro número complejo.
a) ¿Cambia el módulo del número complejo inicial con respecto al que obtuve como resultado de la multiplicación? ,Si cambia ¿Qué relación hay entre los módulos?
b)¿Cambia el argumento del número complejo inicial con respecto al que obtuve como resultado de la multiplicación?

272) Averiguar que número complejo verifica que la suma entre el duplo de dicho número y el cuadrado de su conjugado da por resultado cero. (ojo hay tres resultados, es difícil despejar hay que saber factorear y saber muy bien sistemas de ecuaciones y ecuaciones cuadráticas).

273) Demostrar que para cualquier número complejo Z, se verifica que elevando al cuadrado el conjugado de dicho número complejo, obtengo el mismo resultado que si calculo el conjugado del cuadrado del número complejo en cuestión. (Plantear una igualdad y deducir que siempre se verifica).

274) Dado un número complejo Z = (a + b . i) , elaborar una fórmula para calcular Z^{-2} en función de a y b. Parece fácil, hay que elevar al cuadrado el inverso de Z ó calcular el inverso del cuadrado de Z. Pero hay que hacerlo con letras ya que es para cualquier Z (a + bi) , pero tengan cuidado porque queda una expresión larga, y hay que aplicar "algún método de factoreo" para acortar la expresión...)

275) ¿Se verifica la siguiente igualdad? $Z^{-1} = \dfrac{2 \cdot \overline{Z}}{Z^2 + \left(\overline{Z}\right)^2 - \left(Z - \overline{Z}\right)^2}$

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Números Complejos II

Número de Tema: **62**

Área: **Matemática**

✫ Formas de representar un Número Complejo

Cuando un Complejo en **forma binómica**: a + b i lo representamos mediante sus componentes: (a , b), decimos que está expresado en **Forma Cartesiana, o en Forma Vectorial**.

Ejemplo: **Forma Binómica** ⟹ $Z = 2 + 3\,i$ **Forma Vectorial** ⟹ $Z = (2\,;3)$

✫ **Forma Polar y Trigonométrica**: Hasta ahora veníamos representando a los Números Complejos en función de sus componentes (Real e imaginaria). Para escribir un Número Complejo en la Forma Polar o en Forma Trigonométrica, vamos a tener que saber el Módulo y el Argumento del Número Complejo.

O sea que cuando quiera pasar un Número Complejo de la forma Cartesiana o Binómica a la Forma Polar o a la Trigonométrica primero tengo que calcular el Módulo y el Argumento.

✫ **Forma Polar** ⟹ $\boxed{Z = |Z|_{\alpha}}$

Esta es la fórmula general de un Número Complejo en Forma POLAR.

|Z| Representa al Módulo.
α Representa al Argumento.

Ejemplo: $\mathbf{Z = 4_{45^\circ}}$ es un Número Complejo cuyo Módulo vale 4 y su Argumento 45°

✫ **Forma Trigonométrica** ⟹ $\boxed{Z = |Z| \,.\, [\, \text{Cos}(\alpha) + i\,.\,\text{Sen}(\alpha)\,]}$

Fórmula general de un Número Complejo en Forma TRIGONOMÉTRICA
|Z| Representa al Módulo α Representa al Argumento

Ejemplo: Z = 4 (Cos 45° + i . Sen 45°) es un Complejo cuyo módulo es 4 y su argumento 45°

✫ Operaciones de Números Complejos en Forma Polar

- Para operaciones de suma y resta de Complejos, nos conviene usar la Forma Binómica, y olvidarnos que existe la Forma Polar, ya que realizar estas operaciones en forma polar es muy engorroso.
- Pero para el Producto, la División, la Potenciación, la Radicación, el Conjugado y el Inverso, es mas simple usar la forma polar.

✫ FORMA POLAR: Producto

El producto de dos Números Complejos es otro Número Complejo cuyo Módulo es el producto de los Módulos, y cuyo Argumento es la suma de los Argumentos:

$$\boxed{|Z|_{\alpha} \cdot |Z'|_{\beta} = (\,|Z| \,.\, |Z'|\,)_{\alpha+\beta}}$$

Ejemplo: $3_{45^\circ} \,.\, 2_{30^\circ} = (\,2 \,.\, 3\,)_{45^\circ+30^\circ} = 6_{75^\circ}$

✫ FORMA POLAR: División

Más Fácil imposible: Para dividir dos Números Complejos, **se dividen los Módulos y se restan los Argumentos**:

$$\boxed{|Z|_{\alpha} : |Z'|_{\beta} = (\,|Z| : |Z'|\,)_{\alpha-\beta}}$$

$$\boxed{\frac{|Z|\,\alpha}{|Z'|\,\beta} = \frac{|Z|}{|Z'|}(\alpha-\beta)}$$

Ejemplos: $\dfrac{16_{35^\circ}}{2_{9^\circ}} = 8_{26^\circ}$ $\dfrac{25_{113^\circ}}{5_{29^\circ}} = 5_{84^\circ}$

✫ FORMA POLAR: Potencia

Para calcular una potencia "N" de un Complejo en Forma Polar, elevamos el Módulo a la potencia "N", y multiplicamos el Argumento por "N".

$$\boxed{(\,|Z|_{\alpha}\,)^{N} = |Z|^{N}_{(\alpha.N)}}$$

Ejemplo: $(\,2_{20^\circ}\,)^4 = 2^4_{(20^\circ.\,4)} = 16_{80^\circ}$

☆ FORMA POLAR: Conjugado e Inverso Multiplicativo

El **Conjugado** en Forma Polar tiene el mismo Módulo, pero Argumento opuesto (Con signo contrario).

Se designa como: $\overline{Z}$ $\Longrightarrow$ $Z = |Z|_{\alpha} \Rightarrow \overline{Z} = |Z|_{(-\alpha)}$

El **Inverso Multiplicativo** de un Complejo tiene por Módulo el Inverso del Módulo (o sea que si el módulo es 3 el módulo de su inverso será 1/3), y por Argumento el opuesto (Cambiar el signo).

Se designa como Z^{-1} $\Longrightarrow$ $Z = |Z|_{\alpha} \Rightarrow Z^{-1} = \left(\frac{1}{|Z|}\right)_{(-\alpha)}$

Ejemplo: Hallar el Conjugado y el Inverso de $\mathbf{Z = 4_{25°}}$
(Usando estas fórmulas, ni siquiera necesito hacer una cuenta auxiliar).

$$\begin{cases} \text{Conjugado} \Longrightarrow \overline{Z} = 4_{-25°} \\ \text{Inverso} \Longrightarrow Z^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)_{-25°} \end{cases}$$

☆ **Pasaje de FORMA POLAR a BINÓMICA**: La manera más simple de llegar a la forma binómica es escribir primero la forma trigonométrica, y luego hacer las cuentas y la distributiva del módulo de Z.

Pasar a forma binómica: $\mathbf{Z = 3_{30°}}$ $\Longrightarrow$ $3_{30°} = 3\ (\text{Cos } 30° + i \,.\, \text{Sen } 30°) = \mathbf{2{,}59 + 1{,}5\, i}$

☆ **Cálculo de Raíces de un Número Complejo**: Si calculo la raíz cuadrada de un Número Complejo, voy a obtener dos resultados diferentes, Si calculo la raíz cúbica de un Número Complejo, voy a obtener tres resultados diferentes, si calculo la raíz cuarta voy a obtener 4 resultados diferentes y así sucesivamente.

La raíz enésima (de índice "N") de un Número Complejo admite "N" Números Complejos como resultado.

Para calcular las "N" raíces enésimas de un Número Complejo vamos a seguir 3 pasos. Ejemplo: $\sqrt[4]{16_{40°}}$

Paso 1: Calculamos la primera Raíz

El Módulo de la primera raíz lo calculo haciendo la raíz de índice "N" del Módulo del Número Complejo en cuestión: $\sqrt[N]{|Z|_{\alpha}} = |Z'|_{\alpha'} \Rightarrow \sqrt[N]{|Z|} = |Z'|$

El Argumento de la primera raíz lo calculo dividiendo por "N" al Argumento del Número Complejo en cuestión: $\sqrt[N]{|Z|_{\alpha}} = |Z'|_{\alpha'} \Rightarrow \alpha' = \frac{\alpha}{N}$

En nuestro ejemplo: $|Z'| = \sqrt[4]{|Z|} = \sqrt[4]{16} = 2$ y $\alpha' = \frac{\alpha}{4} = \frac{40°}{4} = 10°$

Con lo cual la primera raíz es: $\mathbf{2_{10°}}$

Paso 2: Calculamos el Angulo entre las Raíces (Todas las raíces están separadas por un ángulo " λ ", que es la enésima parte de 360°. Para calcularlo divido a 360° por "N")

$$\boxed{\lambda = \frac{360°}{N}}$$

En nuestro ejemplo: $\lambda = \frac{360°}{4} = 90°$

Paso 3: Calculamos las Raíces que faltan: Ahora lo que hay que hacer es ir sumándole al Argumento de la primera raíz, el valor que calculé de λ , tantas veces como raíces me falten. El Módulo es siempre el mismo. Vamos a verlo directamente del ejemplo:

En nuestro ejemplo la primera raíz era: $\mathbf{2_{10°}}$
Y el ángulo entre las raíces era: $\mathbf{\lambda = 90°}$

Entonces las cuatro raíces de $\sqrt[4]{16_{40°}}$ son: $\mathbf{2_{10°}}$ $\mathbf{2_{100°}}$ $\mathbf{2_{190°}}$ $\mathbf{2_{280°}}$

☆ **Representación Gráfica de las Raíces Enésimas:** Si graficamos las raíces enésimas de un Número Complejo, vamos a ver que son los radios de una circunferencia (el valor numérico del radio es el Módulo de las Raíces), y vamos a notar que mientras más grande sea el índice de la Raíz Enésima (o mientras más Raíces haya) más "juntos" van a quedar estos radios en el gráfico.

Escribir los siguientes números complejos en la forma polar y trigonométrica:

1) $Z = i$

2) $Z = 4$

3) $Z = -2$

4) $Z = -3i$

5) $Z = \sqrt{3} + i$

6) $Z = 1 - \sqrt{3}\ i$

7) $Z = \sqrt{2} + \sqrt{2}\ i$

8) $Z = -\sqrt{8} + \sqrt{8}\ i$

9) $Z = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\ i$

10) $Z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\ i$

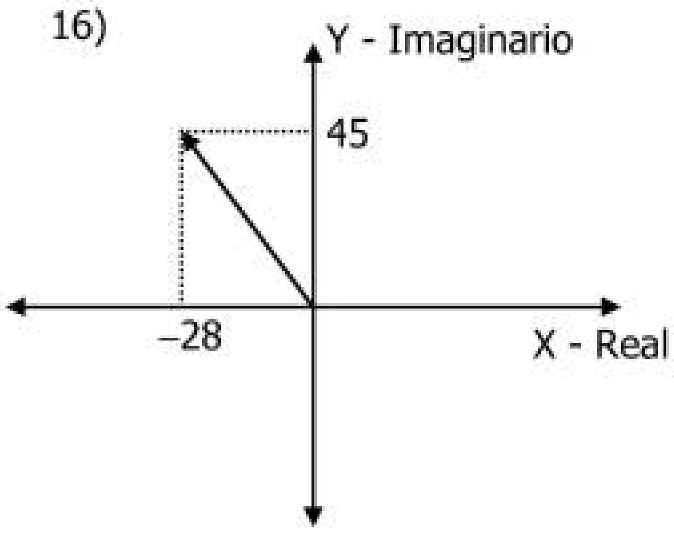
11) $Z = 3 - 4i$

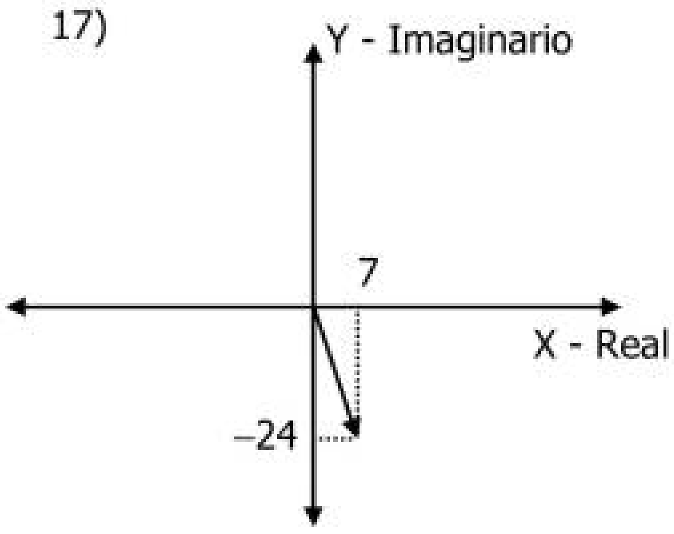
12) $Z = 84 + 13\ i$

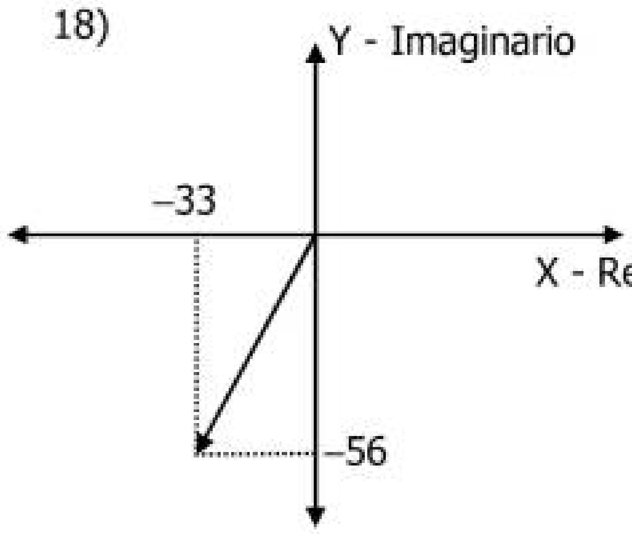
13) $Z = -5 - 12\ i$

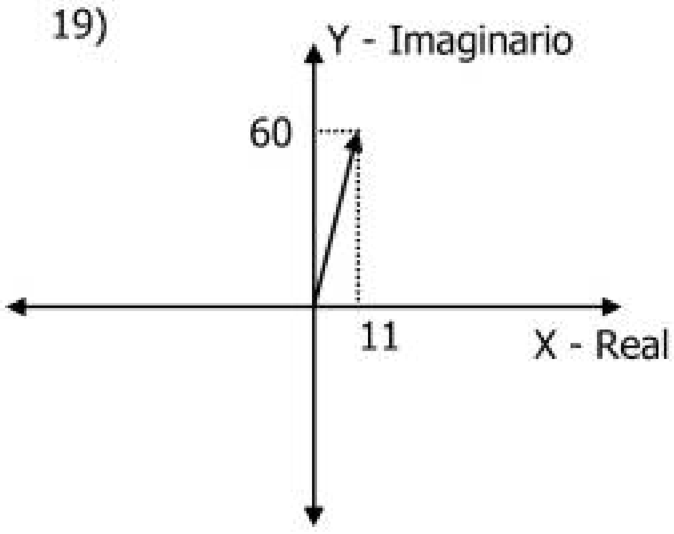
14) $Z = 40 + 9\ i$

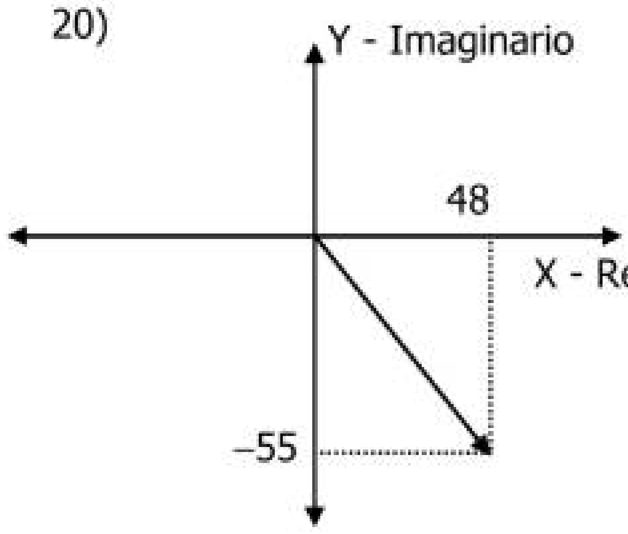
15) $Z = 12 - 35\ i$

16)


17)


18)


19)


20)


Realizar las siguientes operaciones de números complejos en forma polar:
Expresar el resultado en forma polar y binómica

21) $4_{60°} \cdot 2_{30°}$

22) $4_{30°} \cdot 2_{10°}$

23) $1_{60°} \cdot 1_{30°}$

24) $3_{120°} \cdot 5_{230°}$

25) $1_{260°} \cdot 2_{310°}$

26) $4_{-60°} \div 1_{35°}$

27) $21_{90°} \div 3_{45°}$

28) $16_{-30°} \div 2_{-30°}$

29) $2 \cdot \left(1_{-90°} \cdot 2_{90°}\right)$

30) $\left(2_{-60°} \cdot 2_{60°}\right) \div 2$

31) $\left(\dfrac{2}{3}\right)_{90°} \cdot 3_{45°}$

32) $4_{30°} \div \left(\dfrac{1}{2}\right)_{35°}$

33) $15_{-30°} \cdot 2_{60°} \div 3_{20}$

34) $4_{90°} \cdot 2_{-60°} \cdot 3_{-30}$

35) $5_{350°} \div 2_{20°} \cdot 4_{180}$

<u>Realizar las siguientes operaciones de números complejos en forma polar</u>:

36) $\left(6_{60°}\right)^2 \div \left(2_{30°}\right)^2$

37) $6.\left(2_{30°}\right)^3 \div \left(3_{30°}\right)^2 \cdot 3_{60°}$

38) $\left(10_{80°}\right)^2 \div \left(2_{65°}\right)^2$

39) $\left(7_{250°}\right)^2 \cdot \left(2_{130°}\right)^3 \div 56_{80°}$

40) $\left(8_{70°}\right)^2 \cdot 324_{-20°} \div \left(12_{30°}\right)^4$

41) $\left[\left(4_{60°}\right)^2 \div \left(2_{30°}\right)^3\right]^2$

42) $\left(2_{-30°} \div 2_{50°}\right)^3 \cdot \left(4_{130°} \div 2_{20°}\right)^2$

43) $\left(4_{30°} \div 2_{20°}\right)^3 \div \left(10_{20°} \div 5_{10°}\right)^2$

44) $\left(2_{-30°}\right)^2 \cdot \left(2_{50°} \div 2_{50°}\right)^9$

45) $\left[\left(15_{20°} \div \left(\dfrac{15}{2}\right)_{5°}\right)^2\right]^3$

46) $\left(12_{-30°} \div \left(2_{50°}\right)^3\right)^2 \cdot \left(2_{60°} \div 3_{50°}\right)^2$

47) $\left(81_{60°} \div \left(3_{50°}\right)^3\right)^2 \cdot \left(18_{60°} \div 6_{30°}\right)^2$

48) $\left(\left(100_{80°} \div \left(5_{50°}\right)^2\right)^3 \cdot 2_{90}\right)^2$

49) $\left(80_{180°} \div \left(2_{-50°}\right)^3\right)^2 \div \left(5_{15}\right)^2$

50) $\left(36_{-30°} \div \left(3_{-30°}\right)^3 \cdot \left(3_{65°} \div 2_{50°}\right)^2\right)^2$

Dados los números complejos: $W = 4_{30°}$ $Q = 3_{60°}$ $Z = 2_{-50}$

Hallar:

51) $\overline{W}\cdot Z^{-1}$

52) $\overline{W}\cdot W^{-1}$

53) $2\cdot\overline{Q}\cdot Z^{-1}$

54) $3\cdot\overline{Z}\cdot Q^{-1}$

55) $\overline{W}\div Q^{-1}$

56) $W\cdot\overline{Z}\div Z^{-1}$

57) $\overline{Q}\cdot\overline{Z}\cdot Z^{-1}$

58) $\overline{Q}\div Z^{-1}\cdot\overline{W}$

59) $\overline{Z}\cdot Q\cdot Z^{-1}\div W^{-1}$

60) $\left(Z\cdot\overline{Q}\div Z^{-1}\right)\div\overline{W}$

61) $W^{-1}\cdot\overline{Q}\div Z^{-2}$

62) $W^{-2}\div Z^{-4}$

63) $Q^{-1}\cdot Z^{2}\cdot\overline{Q}$

64) $Z^{-2}\cdot Q^{2}\cdot\overline{W}$

65) $\left(\overline{Q}\cdot Z^{-1}\right)^{2}\cdot W$

66) $\left(W^{2}\cdot Z^{-3}\right)^{2}$

67) $\left(Z^{-1}\cdot\overline{Q}\right)^{-1}\cdot 3\overline{Z}$

68) $\left(\overline{W}\div Z^{2}\right)^{-1}\cdot\overline{Q}$

69) $\left(W^{-1}\div Q^{-2}\right)^{2}\div Z^{-4}$

70) $\left(W\cdot Z^{-2}\right)^{-1}\cdot\overline{Z}$

71) $\left(\overline{W}\cdot Q^{-2}\right)^{-1}\div Z^{-3}$

72) $\left(Z^{3}\cdot W^{-2}\right)^{-2}\cdot W^{-1}$

73) $3Q^{-1}\div\left(\overline{W}\cdot W^{-1}\right)^{-3}$

74) $\left(\overline{Z}\cdot Z^{-1}\right)^{-2}\cdot Q^{2}$

75) $8Z^{-2}\div\left(\overline{Q}\cdot Q^{-1}\right)^{-3}$

76) $\left(\overline{Z}\cdot Q^{2}\right)^{-1}\div\left(W^{-1}\div\overline{Q}\right)^{2}$

77) $\left(\overline{W}\cdot Z^{-2}\right)^{-1}\div\left(Q^{-1}\cdot 2\overline{Q}\right)^{-2}$

78) $\left(\overline{Q}\cdot Z^{-1}\right)^{2}\div\left(Q^{2}\div W^{2}\right)$

79) $\overline{Q}\cdot\left(\overline{W}\div Z\right)^{-1}\div\left(Z^{3}\div\overline{W}\right)^{-1}$

80) $\overline{W}\div\left(\overline{Q}\div Z^{-2}\right)^{2}\div\left(Q^{2}\cdot Z^{3}\right)^{-1}$

Calcular las siguientes raíces:

81) $\sqrt{4_{60°}}$

82) $\sqrt{9_{20°}}$

83) $\sqrt{100_{-40°}}$

84) $\sqrt{12_{45°}\cdot 3_{5°}}$

85) $\sqrt{18_{15°}\cdot 8_{25°}}$

86) $\sqrt{98_{55°}\div 2_{-5°}}$

87) $\sqrt[3]{8_{45°}}$

88) $\sqrt[3]{1_{60°}}$

89) $\sqrt[3]{1000_{-30°}}$

90) $\sqrt[3]{216_{-90°}}$

91) $\sqrt[3]{75_{-10°}\cdot 45_{40°}}$

92) $\sqrt[3]{184_{200°}\div 23_{-10°}}$

93) $\sqrt[3]{459_{160°}\div 17_{40°}}$

94) $\sqrt[3]{832_{60°}\div 13_{-30°}}$

95) $\sqrt[4]{16_{80°}}$

96) $\sqrt[4]{1_{28°}}$

97) $\sqrt[5]{1_{-30°}}$

98) $\sqrt[5]{1701_{39°}\div 7_{19°}}$

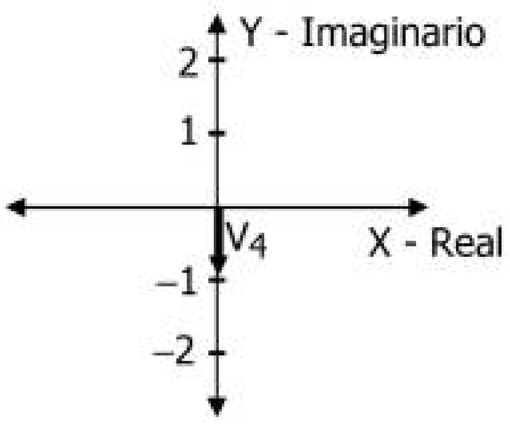
99) $\sqrt[6]{1_{180°}}$

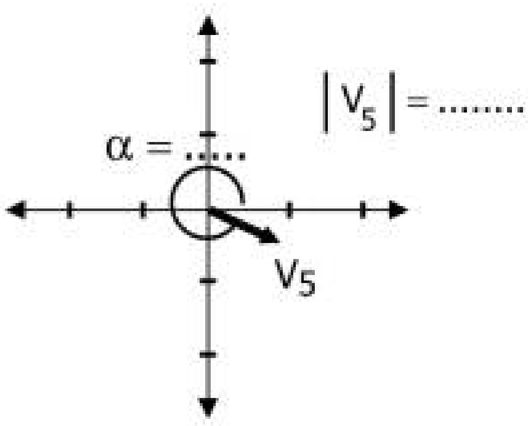
100) $\sqrt[6]{5^{6}{}_{60°}}$

Ejercicios para pensar:

101) ¿Qué ángulo forman el conjugado de un número complejo con el inverso del mismo número?

102) Sean V_1, V_2, V_3, V_4 y V_5, las cinco raíces quintas de un Número complejo "V". Y si se sabe a su vez que $V = Z + 2\,i$ Hallar "**Z**" y completar las definiciones de V_2, V_3, V_4 y V_5.





$V_1 = \mathrm{Cos}(54°) + i\cdot\mathrm{Sen}(54°)$

$V_2 = \left|V_2\right|_{(126°)}$

$V_3 = 1_{(\alpha)}$

by Dal-0r para TARINGA!

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Polinomios

Número de Tema: **63**

Área: **Matemática**

☆ **Monomios:** Un monomio es una "expresión algebraica entera" que consta de 1 solo término, justamente por eso se las llaman monomios (mono="uno", nomio="término").

Ejemplos de monomios: ★ $\mathbf{X^2}$ ★ **6** ★ $\mathbf{-3m^3n}$

- **Suma y resta de monomios:** Sólo puedo sumar o restar monomios en los que coincida la variable (que suele ser la letra "x" pero bien podría usarse cualquier letra) y el exponente de la variable.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 4\,X^5 \\ 5\,X^5 \end{array} \\ \hline 9\,X^5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} - \begin{array}{r} 7\,X^3 \\ 3\,X^3 \end{array} \\ \hline 4\,X^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} + \begin{array}{r} 2\,a^5 \\ 3\,m^5 \end{array} \\ 2\,a^5 + 3\,m^5 \end{array} \longrightarrow$$

En este caso no puedo sumar ambos monomios ya que tienen distinta variable

- **Producto de monomios:** Para multiplicar dos monomios tengo que seguir tres pasos básicos:
  1. Tengo que multiplicar los signos de los monomios (ya saben, si los signos son iguales el resultado es positivo y si los signos son distintos el resultado es negativo).
  2. Una vez que ya sé el signo, tengo que multiplicar los números.
  3. Por último multiplicamos las variables, para lo cual tenemos que aplicar la propiedad del producto de potencias de igual base, que dice que si multiplico dos potencias de exponentes distintos, el resultado es una potencia cuyo exponente es la suma de los exponentes que teníamos.

Ejemplo: $\mathbf{4\,X^3\,.\,(-3\,X^4)\;=\;-12\,X^7}$

☆ EL Signo: Positivo por Negativo = Negativo
☆ EL número: 4 . 3 = 12
☆ Las Variables: $X^3\,.\,X^4$ es X^7 -> se suman los exponentes (4+3=7)

- **División de monomios:** Es similar al producto.
  1. La regla de los signos es la misma.
  2. Los números en lugar de multiplicarse se dividen.
  3. Las Variables siguen la propiedad de la división de potencias de igual base, que dice que en lugar de sumar los exponentes como en el producto ahora los tengo que restar.

Ejemplo: $\dfrac{9\,X^8}{3\,X^6} = 3\,X^2$

☆ EL Signo: Positivo por Positivo = Positivo
☆ EL número: $9 \div 3 = 3$
☆ Las Variables: $X^8 \div X^6$ es X^2 porque se restan los exponentes (8–6=2)

☆ **Polinomios:** Son sumatorias indefinidas de al menos un monomio. Como si fueran "Cadenas de Monomios", o sea, monomios sumados y restados entre sí. Como mínimo un polinomio debe tener un monomio y no hay un máximo es decir que podría tener un polinomio de 3 monomios o 3 términos, y también podría tener uno de 25 términos o más..

Ejemplo: $P(X) = 4X^4 - 3X^2 + 2X - 5$ → Este es un polinomio de 4 términos.

☆ **Cantidad de términos de un polinomio**:

$P(X) = 4X^4 - 3X^2 + 2X - 5$ ⟹ P(X) es un **polinomio** y como tiene **4 monomios** se lo llama **cuatrinomio**.

$Q(X) = X + 3$ ⟹ Q(X) es otro **polinomio**, pero como tiene **2** términos o monomios, se lo llama **binomio**.

De la misma manera, si el **polinomio** tuviera tres términos, se lo llama **trinomio**, etc.

☆ **Grado de un polinomio y polinomios incompletos:** El **grado** de un **polinomio** de una variable es el exponente más alto al que está elevado la variable. Un **polinomio** está incompleto cuando no están todos los exponentes desde 0 hasta el más alto (cuando faltan uno o más **monomios** para que esté completo).

Ejemplos:

$P(X) = 4X^3 - 5X^2 + 4X + 3$ → P(X) es un polinomio de **grado 3 y es Polinomio Completo.**

$R(X) = X^3 + 2X + 3$ → R(X) es un polinomio de **grado 3 y está Incompleto** (le falta el monomio de X^2).

$Q(X) = X^7 - 5$ → Q(X) es un polinomio de **grado 7 y está Incompleto** (le faltan muchos monomios).

$S(X) = X - 5$ → S(X) es un polinomio de **grado 1 y es Polinomio Completo.**

Coeficientes de un polinomio:

Veamos cuáles son los coeficientes de
$P(X) = 4X^3 - 5X^2 + 4X + 3$

$$P(X) = \boxed{4}X^3 \quad \boxed{-5}X^2 + \boxed{4}X + \boxed{3}$$

Coeficientes

En particular se llama coeficiente principal al coeficiente del término de mayor exponente y se llama término independiente al coeficiente que corresponde al exponente "Cero", es decir el número que está "suelto" (en nuestro ejemplo el 3).

Coeficiente Principal

$$P(X) = \boxed{4}X^3 - 5X^2 + 4X + \boxed{3}$$

Término Independiente

- **Suma de polinomios:**
  - *Para sumar dos **polinomios** tengo que escribirlos ordenados (desde el mayor exponente hasta el menor) y completos (los **monomios** que falten los completo con 0) y luego tengo que sumar por separado los **monomios** de ambos **polinomios** que tengan el mismo exponente.*

☆ Ejemplo: Calcular P(X) + Q(X)

$P(X) = 5X^3 + 3X^4 + 3X^2 + 1$
$Q(X) = X^3 + 3X + 4X^2 + 6$

Primero los escribo ordenados y completos:

$$\begin{array}{llcccccccccc}
\mathbf{P(X)} & = & \mathbf{3X^4} & + & \mathbf{5X^3} & + & \mathbf{3X^2} & + & \mathbf{0X} & + & \mathbf{1} \\
\mathbf{Q(X)} & = & & & \mathbf{1X^3} & + & \mathbf{4X^2} & + & \mathbf{3X} & + & \mathbf{6} \\
\hline
& & \mathbf{3X^4} & + & \mathbf{6X^3} & + & \mathbf{7X^2} & + & \mathbf{3X} & + & \mathbf{7}
\end{array}$$

Como falta el monomio de la X lo completé con 0

Sumamos los monomios por separado
Por ejemplo, $5X^3 + 1X^3 = 6X^3$

Finalmente: $P(X) + Q(X) = 3X^4 + 6X^3 + 7X^2 + 3X + 7$

☆ **<u>Resta de polinomios</u>:**

- *En la resta hay que proceder de la misma manera, con la diferencia que hay que restar los **monomios** por separado, en lugar de sumar.*

Ejemplo: Calcular P(X) - Q(X) (P(X) y Q(X) son los mismos que en el ejemplo anterior)

Primero los escribo ordenados y completos:

$$\begin{array}{lllcccccccccc}
& P(X) & = & 3X^4 & + & 5X^3 & + & 3X^2 & + & 0X & + & 1 \\
- & Q(X) & = & & & 1X^3 & + & 4X^2 & + & 3X & + & 6 \\
\hline
& & & 3X^4 & + & 4X^3 & - & 1X^2 & - & 3X & - & 5
\end{array}$$

(restamos los monomios por separado)

Finalmente: $P(X) - Q(X) = 3X^4 + 4X^3 - 1X^2 - 3X - 5$

☆ ¿Que pasa con los grados de los polinomios cuando los sumo o los resto?

- *En primer lugar, vale aclarar que **se pueden sumar o restar polinomios de grados diferentes** y en segundo **lugar el grado del resultado es el grado del polinomio de mayor grado**, es decir que si por ejemplo, sumo o resto un polinomio de grado 5 con otro de grado 3, el resultado será un polinomio de grado 5* (Salvo que ambos polinomios sean del mismo grado y tengan el mismo coeficiente principal y en la suma o resta se anulen los términos que le dan el grado a los polinomios, con lo cual el grado en la suma o resta será menor al grado de lo polinomios sumados o restados)

☆ **Producto de polinomios:** Para multiplicar **polinomios**, el proceso es similar al de multiplicar números de varias cifras, sólo que en el caso de los **polinomios**, en lugar de trabajar con cifras, trabajamos con **monomios**.

☆ Ejemplo: Calcular P(X) . Q(X) Siendo: $P(X) = 5X^3 + 3X^4 + 3X^2 + 1$ y $Q(X)\ \ 4X^2 + 6$

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 3X^4 & +5X^3 & +3X^2 & +0X & +1 \\
 & & & & \cdot & 4X^2 & +6 \\
\hline
12X^6 & +20X^5 & +12X^4 & +0X^3 & +4X^2 & & \\
+ & & 18X^4 & +30X^3 & +18X^2 & +0X & +6 \\
\hline
12X^6 & +20X^5 & +30X^4 & +30X^3 & +22X^2 & +0X & +6
\end{array}
$$

Primero se multiplica cada monomio de P(X) por $4X^2$

Luego multiplicamos cada monomio de P(X) por **6**

Por último sumamos los monomios y llegamos al resultado final.

Otro Ejemplo

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & -2X^4 & +4X^3 & -3X^2 & +2X & -2 \\
 & & & \cdot & X & +3 \\
\hline
-2X^5 & +4X^4 & -3X^3 & +2X^2 & -2X & \\
+ & -6X^4 & +12X^3 & -9X^2 & +6X & -6 \\
\hline
-2X^5 & -2X^4 & +9X^3 & -7X^3 & +4X & -6
\end{array}
$$

Fíjense que acomodo cada monomio debajo del monomio correspondiente de la fila anterior. (por ejemplo el que me da X^4 lo ubico debajo del que tenga X^4 en la otra fila)

☆ ¿Que pasa con los grados de los polinomios cuando los multiplico? Con el producto también se cumple que se pueden multiplicar polinomios de grados diferentes y **el grado del resultado de la multiplicación es LA SUMA DE LOS GRADOS DE LOS POLINOMIOS MULTIPLICADOS**. Ejemplo: Si multiplico un polinomio de grado 5 por otro de grado 6, el resultado va a ser un polinomio de grado 11. Con la división, en cambio, como es la operación inversa al producto, cuando divido dos polinomios**, el grado de la división es la resta de los grados de los polinomios divididos.**

☆ **División de polinomios:** Vamos a ver como se hace la división de polinomios directamente de un ejemplo. Supongamos que tenemos que hacer la división: $(12X^3 - 5X^2 + 14X + 9) \div (4X + 1)$

Busco el 1° término del cociente para que multiplicado por **4X** me dé $\mathbf{12X^3}$ ⇨ Multiplico este término por el divisor. ⇨ Restamos:

$$
\begin{array}{l|l}
12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
\hline
 & 3X^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & \boxed{4X + 1} \\
12X^3 + 3X^2 & \boxed{3X^2}\ \text{Por}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
-\ 12X^3 + 3X^2 & 3X^2 \\
\hline
\cancel{0X^3} - 8X^2 + 14X + 9 &
\end{array}
$$

Busco el 2° término del cociente para que multiplicado por **4X** me dé $\mathbf{8X^2}$ ⇨ Multiplico este término por el divisor. ⇨ Restamos:

$$
\begin{array}{l|l}
12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
-\ 12X^3 + 3X^2 & 3X^2\ -2x \\
\hline
\cancel{0X^3} - 8X^2 + 14X + 9 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & \boxed{4X + 1} \\
-\ 12X^3 + 3X^2 & 3X^2\ \boxed{-2x}\ \text{Por} \\
\hline
0X^3 - 8X^2 + 14X + 9 & \\
-8X^2 - 2X &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
-\ 12X^3 + 3X^2 & 3X^2\ -2x \\
\hline
0X^3 - 8X^2 + 14X + 9 & \\
-8X^2 - 2X & \\
\hline
\cancel{0X^2} + 16X + 9 &
\end{array}
$$

Busco el 2° término del cociente para que multiplicado por **4X** me dé **16X** ⇨ Multiplico este término por el divisor. ⇨ Restamos:

$$
\begin{array}{l|l}
12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
12X^3 + 3X^2 & 3X^2\ -2x\ +4 \\
\hline
0X^3 - 8X^2 + 14X + 9 & \\
-8X^2 - 2X & \\
\hline
16X + 9 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & \boxed{4X + 1} \\
12X^3 + 3X^2 & 3X^2\ -2x\ \boxed{+4}\ \text{Por} \\
\hline
0X^3 - 8X^2 + 14X + 9 & \\
-8X^2 - 2X & \\
\hline
16X + 9 & \\
16X + 4 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
12X^3 + 3X^2 & 3X^2\ -2x + 4 \\
\hline
0X^3 - 8X^2 + 14X + 9 & \\
-8X^2 - 2X & \\
\hline
+16X + 9 & \\
-\ 16X + 4 & \\
\hline
5 &
\end{array}
$$

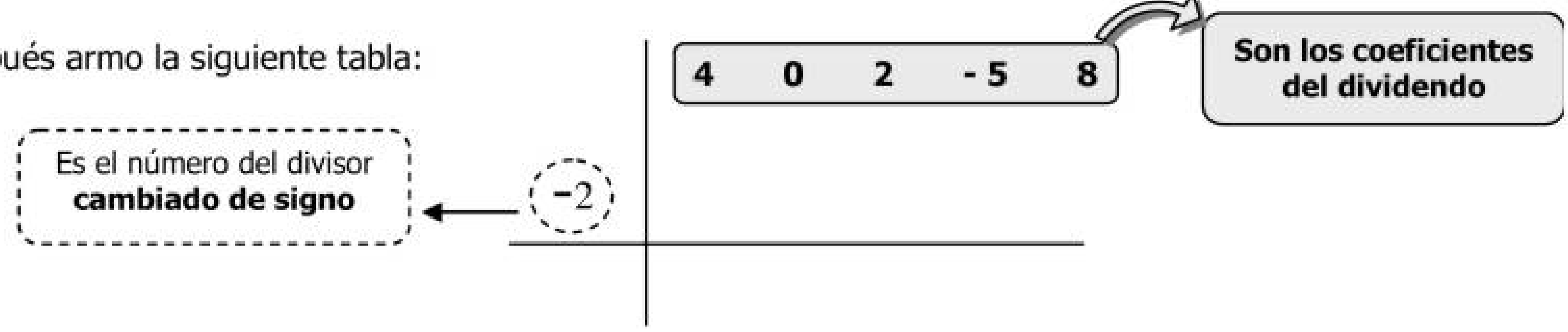
El resultado de la división es: $3x^2$–2+4. Y el Resto 5

✰ **Regla de Ruffini:** Es un método muy simple y rápido para hacer ciertas divisiones de polinomios. Puedo aplicar Ruffini cuando el divisor es $X \pm$ "A" ("A" puede ser cualquier número Real).

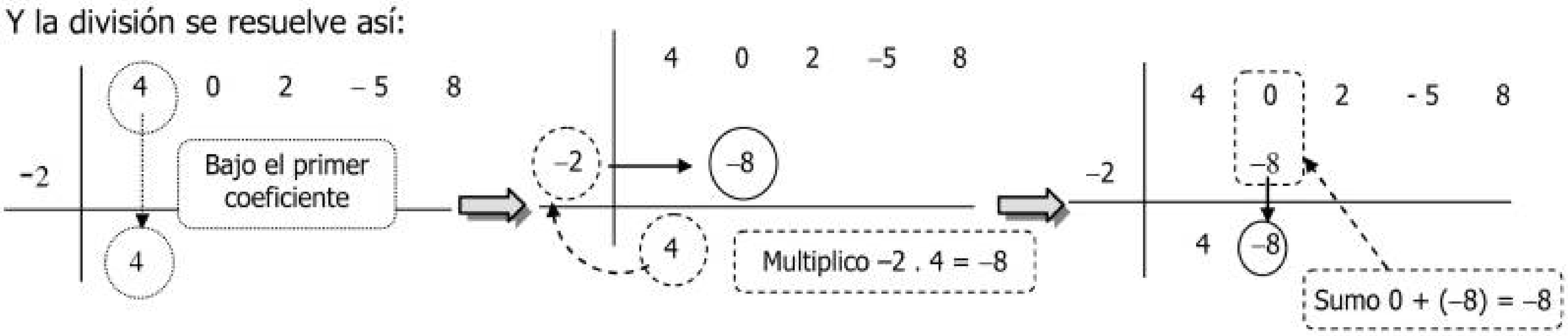
Veamos un ejemplo: $\mathbf{(4X^4 + 2X^2 - 5X + 8) \div (X + 2)}$

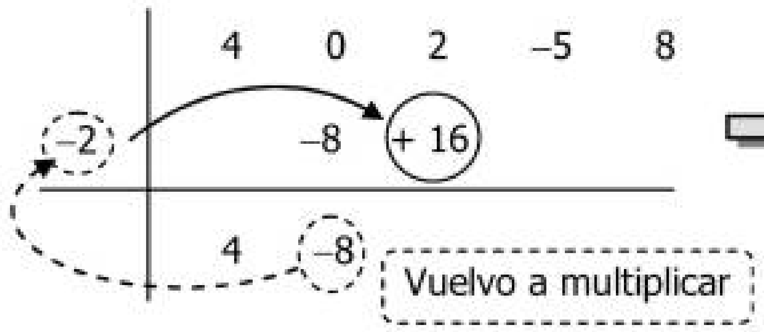
Primero tenemos que escribir el dividendo completo y ordenado $4X^4 + 0X^3 + 2X^2 - 5X + 8$
(Fíjense que como faltaba el término de X^3 lo completé poniendo $0X^3$)

Después armo la siguiente tabla:

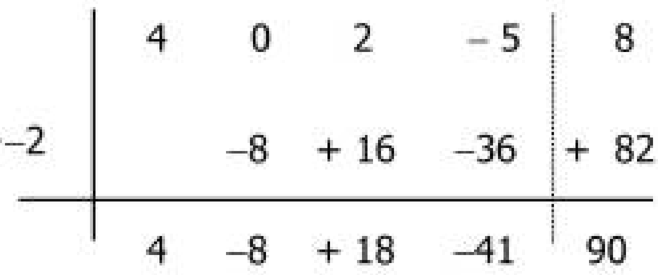


Y la división se resuelve así:

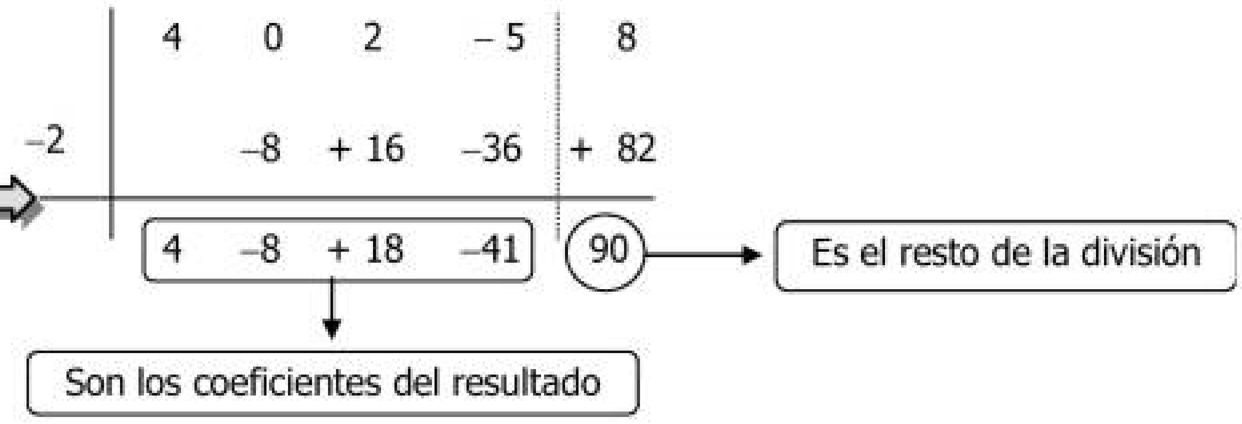




Y de esta manera repito los pasos anteriores hasta terminar:



Ahora nos queda ver cuál es el resultado de la división y cual es el resto:



Entonces: $(4X^4 + 2X^2 - 5X + 8) \div (X + 2) = 4X^3 - 8X^2 + 18X - 41$ (Y de resto 90)

Fíjense que para armar el resultado de la división, escribimos los términos uno por uno.
El primer coeficiente que tenemos es un 4, y como dividimos un polinomio de grado 4 por uno de grado 1, el resultado es un polinomio de grado 3 (o sea que se restan los grados). Entonces el primer coeficiente que tenemos, que es un 4, corresponde al término de X^3 y el segundo coeficiente que tenemos (–8), corresponde al término de X^2. De la misma manera, el 18 corresponde al término de X, y el –41 es el término independiente.

✰ **Teorema del Resto:** El Teorema del Resto sirve para calcular el resto de una división sin hacer la división. Y si ya hicimos la división, nos sirve para verificar si la hicimos bien. Lo único que hay que hacer es **reemplazar las X del dividendo por el "número del divisor" cambiado de signo,** y hacer la cuenta.

En el ejemplo anterior teníamos la cuenta: $\boxed{4X^4 + 2X^2 - 5X + 8} \div (X + 2)$

Este es el dividendo y hay que remplazar todas las X por **–2**

Reemplazando nos queda:

$4.(-2)^4 + 2.(-2)^2 - 5.(-2) + 8 = 2.16 + 2.4 + 10 + 8 = 64 + 8 + 8 + 10 + 8 = \mathbf{90}$

Finalmente 90 es el Resto de la división, y como ven, nos da lo mismo que cuando hicimos la división por Ruffini.

Realizar las siguientes operaciones con monomios:

1) $3X^3 - 4X^3$

2) $5X^5 + 4X^5$

3) $4m^2 - 3m^2 + 5m^2$

4) $2n^3 - 7n^3 + 3n^3$

5) $2n^4 - n^4 + 5n^4$

6) $(2n) \cdot (-3n^3)$

7) $2X \cdot (-1X^4)$

8) $(-4X^3) \cdot (-3X^2)$

9) $(-1m^3) \cdot 8m$

10) $(-5m^3) \cdot (-8m^3)$

11) $\left(\frac{3}{2}X^3\right)\cdot\left(-\frac{8}{3}X^2\right)$

12) $\left(-\frac{1}{2}m^5\right)\cdot(-4m)$

13) $-3X\cdot\left(\frac{5}{3}X\right)$

14) $(-\frac{1}{2}m^3)\cdot(2X^3)$

15) $\left(-\frac{1}{2}Y^5\right)\div\left(-\frac{1}{8}Y^3\right)$

16) $(50X^4)\div\left(-\frac{5}{2}X^3\right)$

17) $\left(-\frac{9}{5}X\right)\div\frac{3}{10}X$

18) $\left(-\frac{18}{5}n^3\right)\div\left(-\frac{9}{10}n^2\right)$

19) $(40X^7)\div\left(-\frac{8}{3}X^7\right)$

20) $\frac{3}{2}m^4\div\frac{1}{2}m^3$

Realizar las siguientes sumas y retas de polinomios:

21) $(4X^4 + 3X^3 + 2X^2 - X + 1) + (5X^2 - 2X + 3)$

22) $(-X^4 + 5X^2 - 3X - 1) - (5X^4 + 3X^3 - X^2 - 2X + 3)$

23) $(-3X^4 - 4X^3 - 1) + (-X^4 + 4X^3 + 2X^2 + X + 1)$

24) $(4X^2 + 6X + 3) - (5X^4 - 5X^2 + 4X - 3)$

25) $(X^5 + 3X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 3X + 4) - (-X^5 + 3X + 4)$

26) $(2X^5 - 2X^4 + X^3 - 4X^2 + 4) + (-3X^5 + 3X^4 - 2X^3 + 5X^2 + 3X - 5)$

27) $(7X^5 + 8X^4 - 6X^3 + 2X^2 - 3) - (-6X^5 - 7X^4 + 7X^3 - X^2 + X + 4)$

28) $(2X^5 - 4X^4 - X^3 - 3X^2 + 2) + (-2X^5 + 3X^4 + X^3 + 3X^2 + X - 2)$

29) $(X^3 - 5X^2 + 2X - 3) - (2X^3 + 5X^2 - 2X - 3)$

30) $(5X^5 + 3X^4 - 2X^3 - 7X^2 - 6) + (-5X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 4X + 2)$

31) $(X^2 + 2XY + Y^2) + (X^2 - Y^2)$

32) $(a^2 + ab^2 + a^2b) - (b^2 + a^2b + ab^2)$

33) $(2ac + 2ab - bc) - (3ab - 2bc)$

34) $(4X^5 + 3X^4Y + 2Y^5) - (3X^5 - Y^5) - (2X^4Y - 1 + X^5)$

35) $(2m^3 - 3n^3) + (4m^2n - 6mn^2) - (m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3)$

36) $(a^3 + b^2 + ab + b + a^2) + (b^3 - a^2 + ab + a - b^2) - (a + 2ab + b)$

37) $(2abc + ab - bc) - (ab - bc + abc) + (ab^2 - abc + a^2b)$

38) $(a^2X + b^2Y - aX^2 - bY^2 + a^2 + b^2) - (a^2X + a^2 - bY^2 - aX^2 + bY)$

Realizar los siguientes productos de polinomios:

39) $(X^3 + X^2 - 6) . (X^2 + X + 1)$

40) $(3X^3 + 2X^2 + 2X + 7) . (2X^2 + X + 1)$

41) $(2X^3 - X^2 + X - 4) . (X^3 - X^2 + 2X + 5)$

42) $(-2X^4+3X^3 +2X^2 +6X-2) . (-2X^3-2X^2-5X-1)$

43) $(4X^4 - 4X^3 +3X^2 +4X +5) . (X^3-2X^2 -5X -1)$

44) $(5X^4 +X^3 +2X^2 -X -4) . (X^3 +3X^2 +7X +2)$

45) $(-X^4 +2X^3 +X^2 +2X +2) . (X^3 +4X^2 +X +3)$

46) $(X^4 + 3X^3 -4X^2 -X +2) . (X^4+X^3 +2X^2 +X -1)$

47) $(2X^5 + 2X^4 + X^3 - 3X^2 -X) . (X^3 -X^2 +1)$

48) $(3X^5 - 4X^2 - X) . (2X^4 + X^3 - X^2 +X +1)$

49) $(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) . (a - b)$

50) $(2X^2 - XY + Y^2) . (X + Y)$

51) $(2X^2 + XY + Y^2) . (X - Y)$

52) $(m^3+m^2n +mn^2 +n^3) . (m^2 -2mn +n^2)$

53) $(m^3n - m^2n^2 + mn^3) . (mn^3 +n^4)$

54) $(a^2 - ab + b^2) . (a +b)$

55) $(8a^3+ 4a^2b +2ab^2 + b^3).(2a -b)$

Calcular el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

56) $\left(X^3 + X^2 - 14X + 6\right) \div (X - 3)$

57) $\left(6X^3 - 2X^2 + 9X + \frac{1}{2}\right) \div \left(3X^2 - 2X + 2\right)$

58) $\left(8X^9 + 12X^6 + 6X^3 + 2\right) \div \left(4X^6 + 4X^3 + 1\right)$

59) $\left(X^3 + X + 10\right) \div \left(X^2 - 2X + 4\right)$

60) $\left(6X^4 - 10X^3 + \frac{23}{2}X^2 - 14X\right) \div (2X - 3)$

61) $\left(12X^5 + X^3 - \frac{5}{3}\right) \div \left(6X^2 - 3X + 5\right)$

62) $\left(7X^3 + 6X^2 + 21X + 20\right) \div \left(X^2 + 3\right)$

63) $\left(\frac{1}{6}X^4 - \frac{19}{6}X^3 + 11X^2 + \frac{71}{2}X + 40\right) \div \left(\frac{1}{3}X^3 - 3X^2 - 8X - 9\right)$

64) $\left(\frac{1}{4}X^4 - \frac{2}{5}X^2Y + \frac{4}{25}Y^2\right) \div \left(\frac{1}{2}X^2 - \frac{2}{5}Y\right)$

65) $\left(\frac{1}{8}X^9 - \frac{3}{4}X^6Y^2 + \frac{3}{2}X^3Y^4\right) \div \left(\frac{1}{2}X^3 - Y^2\right)$

66) $\left(\frac{3}{5}m^3 - m^2n + \frac{17}{20}mn^2 - \frac{1}{4}n^3\right) \div \left(m - \frac{1}{2}n\right)$

67) $\left(-a^4 + \frac{19}{10}a^3b - \frac{4}{5}a^2b^2\right) \div \left(\frac{1}{2}a^3 - a^2b + \frac{1}{2}ab^2\right)$

68) $\left(m^3 + n^3\right) \div (m + n)$

69) $\left(a^4 + m^3 - m^4\right) \div \left(a^3 + a^2m + am^2 + m^3\right)$

70) $\left(p^3 - 3p^2q + 3pq^2\right) \div \left(p^2 - 2pq + q^2\right)$

Resolver las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini:

71) $\left(3X^3 + 2X^2 - 19X + 7\right) \div (X + 3)$

72) $\left(5X^3 - 17X^2 - 13X + 7\right) \div (X - 4)$

73) $\left(\frac{1}{3}X^3 - 13\right) \div (X - 3)$

74) $\left(\frac{1}{5}X^3 + \frac{1}{2}X^2 - 37\right) \div (X - 5)$

75) $\left(4X^4 + \frac{1}{2}X\right) \div \left(X + \frac{1}{2}\right)$

76) $\left(12X^4 + 11X^3 + 10X^2 + X + 5\right) \div \left(X - \frac{1}{3}\right)$

77) $\left(4X^5 + 8X^4 - 11X^3 - \frac{47}{2}X^2 - 3X\right) \div (X + 2)$

78) $\left(X^5 + 35\right) \div (X + 2)$

79) $\left(X^3 + Y^3\right) \div (X + Y)$

80) $\left(X^4 - 16Y^4\right) \div (X - 2Y)$

Decir en cuáles de las siguientes divisiones se puede aplicar la regla de ruffini y justificar:

81) $\left(\sqrt{3}\,X^2+3X\right)\div\left(X+\sqrt{2}\right)$

83) $\left(X^2-\frac{1}{3}\right)^2\div\left(X+\frac{4}{5}\sqrt{3}\right)$

82) $\left(X^2+\frac{3}{5}X-\frac{1}{3}\right)\div\left(\sqrt{X}+1\right)$

84) $\left(\frac{1}{3}X\right)\div(X-2)$

Dado el polinomio P(x) = 4 Q(x) – 3 R(x) –18

Datos: $Q_{(x)}=3x^2+2$ $\quad R_{(x)}=2x^2+5x-7$

85) Hallar $P_{(2)}$

Calcular el resto de las siguientes divisiones aplicando el teorema del resto:

86) $\left(9X^2-6X-5\right)\div(X-1)$

87) $\left(2X^3-3\right)\div(X+1)$

88) $\left(X^3-23X-28\right)\div(X+4)$

89) $\left(8X^4+\frac{3}{10}X^2-X+\frac{7}{10}\right)\div\left(X+\frac{1}{4}\right)$

90) $\left(X^6-\frac{7}{2}X^5-\frac{3}{2}X+\frac{1}{8}\right)\div\left(X+\frac{1}{2}\right)$

91) $\left(-X^2-3X-\frac{69}{25}\right)\div\left(X+\frac{4}{5}\right)$

92) $\left(\frac{1}{3}X^4-3X+1\right)\div(X-3)$

93) $\left(X^4-\frac{1}{3}X^3-\frac{19}{16}\right)\div\left(X+\frac{3}{2}\right)$

94) $\left(-\frac{1}{6}X^3+2X^2-106\right)\div(X+6)$

Hallar él o los valores de *K* para que las divisiones sean exactas: *(Usar teorema del resto)*

95) $\left(5X^3-\mathbf{K}\cdot X^2-4X-96\right)\div(X-3)$

96) $\left(12X^4-\mathbf{K}\cdot X^2+2X-168\right)\div(X+2)$

97) $\left(\frac{1}{2}X^4+2\mathbf{K}\cdot X^2+\frac{\mathbf{K}}{5}X+\frac{4\mathbf{K}}{5}\right)\div(X+4)$

98) $\left(\frac{3}{5}X^5-\mathbf{K}\cdot X^2-\frac{17}{5}\right)\div(X+1)$

99) $\left(X^3-\mathbf{K}\cdot X-28\right)\div(X+4)$

100) $\left[2X^4-(\mathbf{K}+5)X^3+(\mathbf{K}-1)X^2+7X-12\right]\div(X-4)$

101) $\left(2X^2-9X+\frac{43}{25}\right)\div\left(X-\frac{1}{\mathbf{K}}\right)$

102) $\left(5X^2-2X-51\right)\div(X+\mathbf{K})$

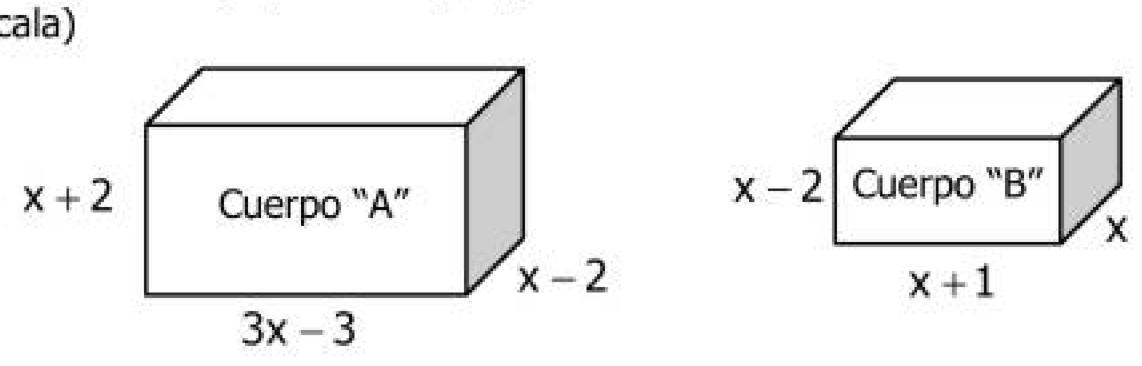
103) $\left(9X^2-6X-\mathbf{K}-2\right)\div(X-\mathbf{K})$

Ejercicio Integrador para pensar:

Dados los siguientes cuerpos. Una empresa que exporta bloques de cemento se pregunta cuántas veces más volumen tiene el Cuerpo "A" que el "Cuerpo "B" porque como son macizos, la cantidad de veces mayor que es un cuerpo del otro, será la misma que la relación de pesos de los mismos y les interesa saber ese dato para evaluar costos de transporte. El problema es que no están definidas aún las medidas de diseño, por lo que tienen solo para hacer este cálculo, las medidas en función de una variable "x". ¿Te animás a dar un rango para esta pregunta?
(Nota: El gráfico es un simple croquis y no está a escala)

Otro Dato: **X>2** Opciones:

a) Hasta el doble
b) Entre el doble y el triple
c) Entre el triple y el cuádruple
d) Mas del cuádruple



Dados: **P(x) un polinomio de grado 5, Q(x) un polinomio de grado 3 y R(x) otro de grado "2"** no nulos Hallar el grado del polinomio resultante de las siguientes operaciones:

105) $P(x) + Q(x) + R(x)$

106) $P(x) + Q(x) - R(x)$

107) $P(x) \,.\, Q(x)$

108) $Q(x) : R(x)$

109) $P^2(x)$

110) $P^3(x) : Q^2(x)$

111) $R^4(x) + Q^3(x)$

112) $Q(x) \,.\, R^2(x) + P(x)$

113) $[Q^4(x) : R^5(x) + P(x)] : R^2(x)$

114) $[Q^3(x) \,.\, P^3(x) - P^3(x)] : P^2(x)$

115) $[Q^4(x) + Q^5(x) \,.\, Q(x)] - Q(x)$

116) $[R^4(x) - R^4(x) : R(x)] \,.\, R(x)$

Sean P(x) y Q(x) dos polinomios cuya división está representada por las siguientes tablas (mediante el método de Ruffini) hallar P(x) de dos maneras diferentes y corroborar los resultados. Q(X) es un binomio de la forma $Q(X) = X \pm a$

117)

	□	□	□	□
2				
	4	−3	2	5

118)

	□	□	□	□
−1				
	1	−1	1	0

119)

	□	□	□	□
3				
	2	1	−3	0

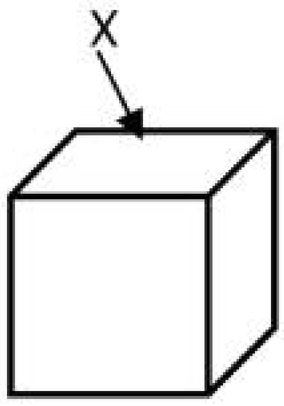
120)

	□	□	□	□
−5				
	1	−4	21	−105

Nota: Una manera de hallar P(x) es completar la tabla siguiendo la lógica, es decir haciendo una reconstrucción de P(x) con los valores volcados en la tabla con la tabla misma. Otra manera diferente es realizar un producto de Q(X) y el cociente de la división y luego sumarle el resto.

Ejercicios de Aplicación:

Una empresa fabrica bloques cúbicos macizos para la construcción.
El costo del material de relleno es de \$12 el metro cúbico. Tiene un costo de pintado de todas sus caras, el costo de este proceso es de \$2,5 por metro cuadrado de pintura. Por otro lado las aristas del cubo deben ir pulidas para evitar que se quiebren estas aristas ya que son los sectores más frágiles del cubo, este proceso de pulido les agrega un costo de \$1,5 por metro lineal de arista. Por último sin importar el tamaño del cubo la empresa le agrega un costo fijo en materiales y herramientas de \$4 por cada cubo que fabrica.



121) Expresar el costo de cada cubo como un polinomio en función de la medida del lado del cubo.

122) Escribir el polinomio que represente el costo de relleno y el costo fijo de cada cubo en función del lado.

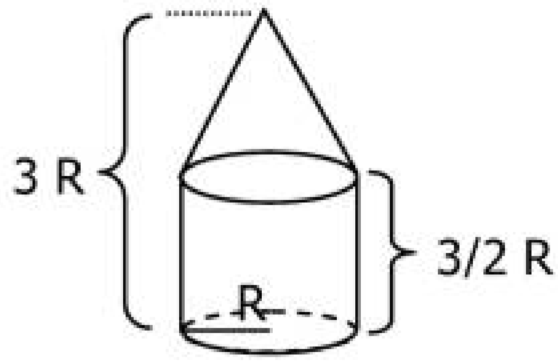
123) Escribir el polinomio que represente el costo de cada cubo, en función de la medida del lado del cubo, teniendo en cuenta que el costo del metro cúbico de relleno desminuye en un 25%.

124) Escribir el polinomio que represente el costo de cada cubo teniendo en cuenta que tanto el costo del metro cuadrado de pintura como el metro lineal de pulido de aristas aumentan en un 40% en función del lado del cubo.

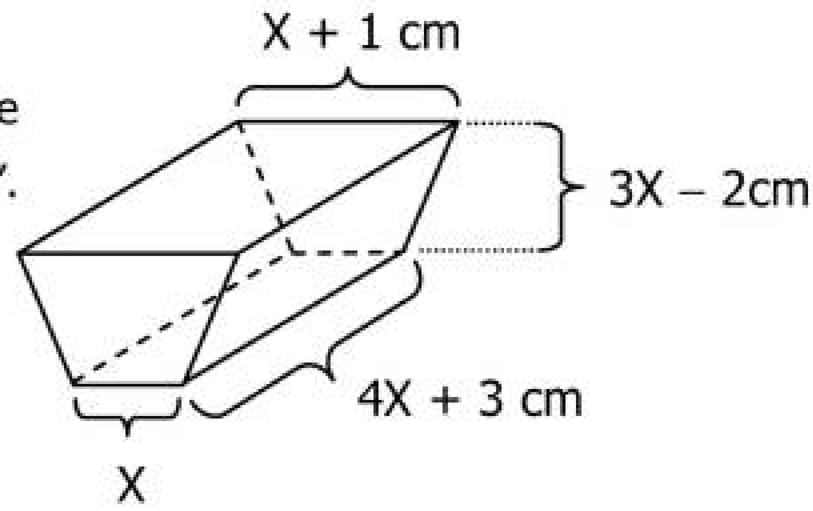
125) Escribir el polinomio que represente el costo de fabricar cubos en función de la medida del lado del cubo suponiendo que todos sus costos se reducen a su tercera parte.

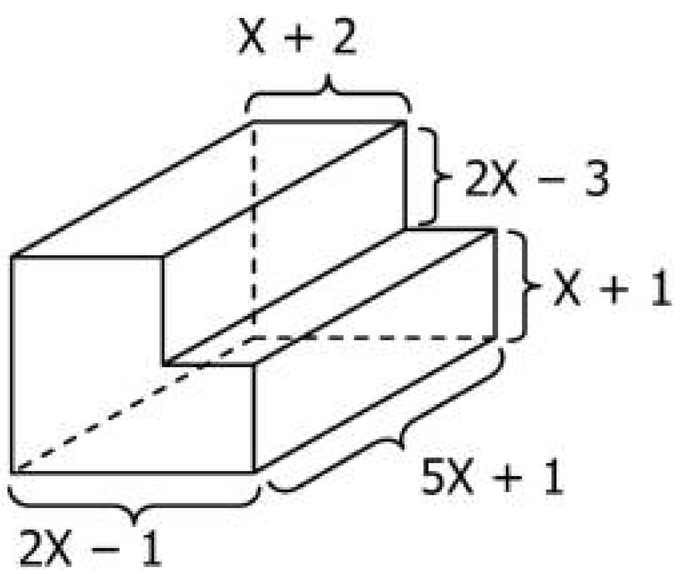
by Dal-Or para TARINGA!

126) Dado el siguiente cuerpo. Escribir el polinomio que represente su volumen en función del radio del cilindro.



127) Dado el siguiente cuerpo. Escribir el polinomio que represente su volumen en función de la medida indicada como "x". El cuerpo es un paralelepípedo y su base es un trapecio isósceles.





128) Expresar el polinomio P(x) que represente el volumen del cuerpo.

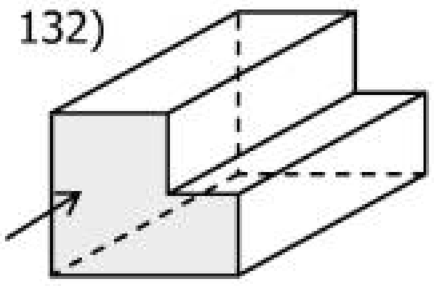
129) ¿Puede valer "x" 1 cm? ¿Por qué?

130) ¿Puede valer "x" 2 cm? ¿Por qué?

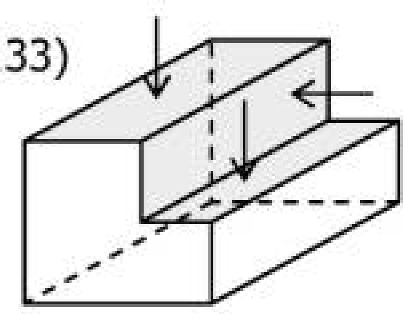
131) Calcular cuantas veces ocupa este cuerpo el volumen de un cubo de Arista "X"

Hallar el polinomio que represente el área de las caras sombreadas en cada caso.
Las medidas de cada lado son las mismas que en el ejercicio anterior.

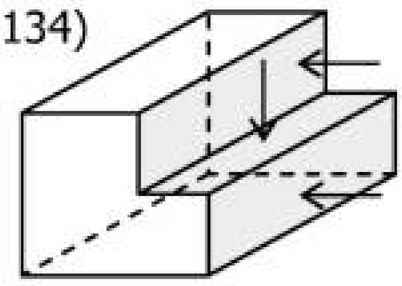
132)



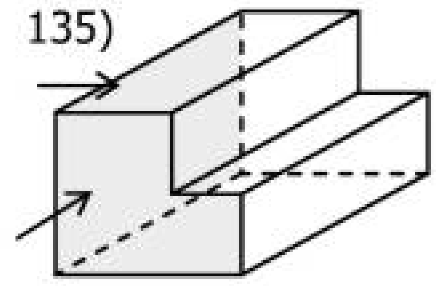
133)



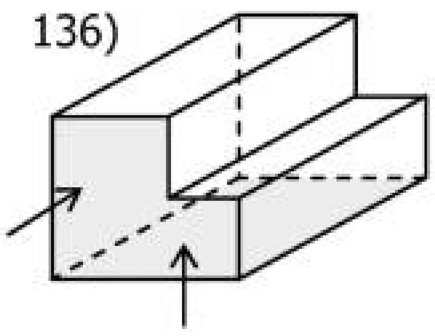
134)



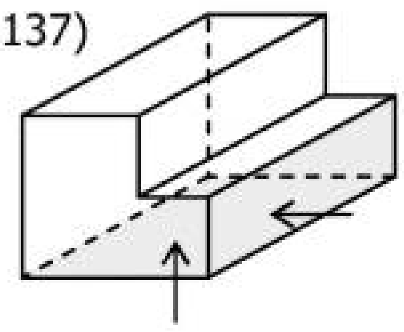
135)



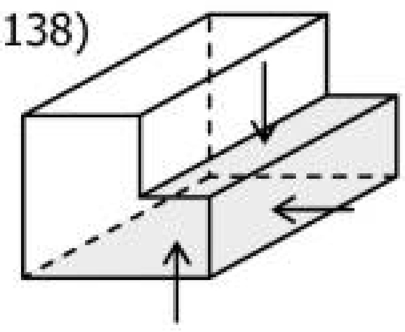
136)

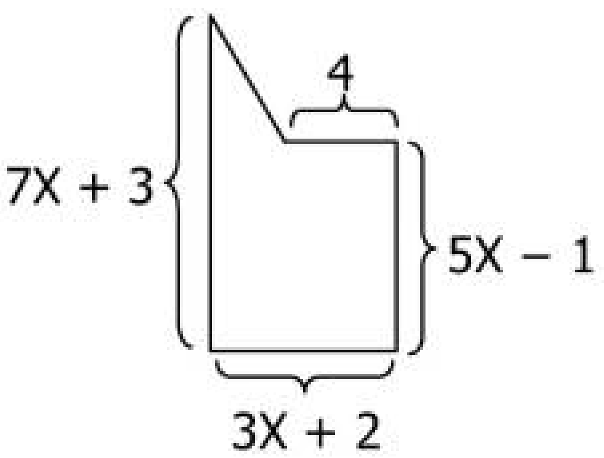


137)



138)





139) Expresar el polinomio P(x) que represente el área de la figura.

140) ¿Cuánto tiene que valer "X" para que el área de la figura sea igual a 3179 cm^2?

141) ¿Cuánto debe valer "X" para que el área de la figura sea exactamente el doble del área de un cuadrado de lado: L=3X ?

142) Si tengo un cubo de arista: A=6x−4 , para cualquiera valor de x mayor a 2 ¿Cuántas veces mas grande es que un cuerpo de volumen: $V_{(x)} = 27X^3 - 54X^2 + 36X - 8$?

Repaso: Les recuerdo las fórmulas de cuadrado y cubo de un binomio:

- **Cuadrado de un Binomio**: Observemos que pasa cuando multiplicamos un "Binomio" por sí mismo. Multiplicar a un binomio por sí mismo es elevarlo al cuadrado. Veamos:

$$(a+b)^2 = (a+b)\,.\,(a+b) = a\,.\,a + a\,.\,b + b\,.\,a + b\,.\,b\,b = a^2 + ab + ba + b^2 \Rightarrow a^2 + ab + ab + b^2$$

$$\Rightarrow \quad (a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Y esta es la fórmula general que usaremos cuando queramos elevar un binomio al cuadrado.

Ejemplo: Calculemos: $$(2x+5)^2 = \underbrace{(2x)^2}_{\text{Este es el cuadrado del primer término}} + \underbrace{2\,.\,(2x)\,.\,(5)}_{\text{Este es el doble del primer término por el segundo}} + \underbrace{(5)^2}_{\text{Este es el cuadrado del Segundo término}} = 4x^2 + 20x + 25$$

- **Cubo de un Binomio**: ¿Qué pasa cuando multiplicamos un "Binomio" por sí mismo y lo volvemos a multiplicar por sí mismo otra vez? Multiplicar a un binomio por sí mismo dos veces es elevarlo al cubo:

$$\Rightarrow \quad \boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Esta es la fórmula general que usaremos cuando queramos elevar un binomio al cubo.

Ejemplo: Calculemos: $$(x-2)^3 = \underbrace{(x)^3}_{\text{Este es el cubo del primer término}} + \underbrace{3\,.\,(x)^2\,.\,(-2)}_{\text{El triple del primer término al cuadrado por el segundo}} + \underbrace{3\,.\,(x)\,.\,(-2)^2}_{\text{El triple del primer término por el segundo al cuadrado}} + \underbrace{(-2)^3}_{\text{Este es el cubo del Segundo término}} = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Ahora sí, volvemos a los ejercicios:

Dados los siguientes binomios, realizar el cálculo pedido en cada caso:

$P(x) = 2x+1 \qquad Q(x) = x-2 \qquad R(x) = x+3 \qquad S(x) = 3x-1$

143) $\dfrac{P(x)+Q(x)}{S(x)} =$

144) $P^2(x) - 4\cdot Q(x)\cdot R(x) =$

145) $\dfrac{R^2(x) - Q(x)\cdot R(x)}{5} =$

146) $\dfrac{2\cdot Q^2(x) + R(x)\cdot S(x)}{5} =$

147) $3\cdot Q^2(x) - R(x)\cdot S(x) - 10\cdot P(x) =$

148) $S^2(x) - 2\cdot P(x)\cdot Q(x) - 2\cdot Q^2(x) - R(x)\cdot S(x) =$

149) $\dfrac{Q^3(x) - R^3(x) + 5\cdot R(x)\cdot S(x)}{Q(x)} =$

150) $\dfrac{P^3(x) - 8\cdot Q(x)\cdot R(x) - 2\cdot P(x)\cdot R(x) - 23}{-7\cdot P(x)} =$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Factoreo

Número de Tema: **64**

Área: **Matemática**

<u>¿Qué significa factorizar?</u> Factorizar un polinomio significa expresar al polinomio como **<u>el producto</u>** de dos o varios monomios, binomios, trinomios, etc.

Antes de empezar a estudiar cómo se factorizan los polinomios repasemos como se factorizan los Números Naturales:
Supongamos que queremos factorizar el número 24:

Lo que hay que hacer es ir dividiendo al número que queremos factorizar por números primos (en este caso, divisores de 24).

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

<u>Luego escribimos</u>:

$24 = 2^3 \, . \, 3$

En realidad lo que hicimos fue escribir 24 como un producto de "divisores". Cuando factorizamos un polinomio lo que hacemos es escribirlo como el producto de polinomios "divisores"

¿Cómo se factoriza un polinomio? <u>Hay seis maneras básicas de factorizar un polinomio</u> y vamos a ver las 6 por separado. Para empezar veamos como llamaremos a cada manera de factorizar un polinomio:

- 1° Caso: Factor Común.
- 2° Caso: Factor Común en Grupos.
- 3° Caso: Trinomio Cuadrado Perfecto (Cuadrado de un Binomio).
- 4° Caso: Cuatrinomio Cubo Perfecto (Cubo de un Binomio).
- 5° Caso: Diferencia de Cuadrados.
- 6° Caso: Suma y Resta de Potencia de Igual Exponente (Gauss).

<u>1° Caso de Factoreo</u>: <u>Factor Común</u>: Para factorizar un polinomio usando el "1° Caso – Factor Común", tiene que haber "algo" en común en todos los términos del polinomio. Este "algo" en común puede ser un número o una Variable.

Veamos un ejemplo: Vamos a factorizar P(X)

$P(X) = 16X^3 + 8X^2 - 2X + 4 \longrightarrow$ Como vemos todos los términos del polinomio tienen un número que es múltiplo de 2

$P(X) = 2 \, . \, (8X^3 + 4X^2 - 1X + 2)$

Y quedo el polinomio factorizado.

Entonces extraemos el 2 como "Factor común" y dividimos a todos los números del polinomio por 2

Veamos otro ejemplo: Vamos a factorizar Q(X)

$Q(X) = 6X^4 + 5X^5 - 2X^6 \longrightarrow$ Todos los términos del polinomio tienen en común la letra X

$Q(X) = X^4 \, . \, (6 + 5X^1 - 2X^2)$

Y tenemos el polinomio factorizado

El menor exponente de la X es un 4. Entonces extraemos como "Factor común" X^4 y luego dividimos a todos los términos del polinomio por X^4

<u>2° Caso de Factoreo</u>: Factor Común en Grupos En primer lugar, si queremos factorizar un polinomio por este método, tenemos que tener en cuenta que el polinomio debe tener un número compuesto de términos (4, 6, 8, 9, 10, 12 términos, etc para poder separarlo en grupos). El método es similar al 1° Caso, en verdad es como separar el polinomio en dos partes y luego aplicar en cada una de esas partes el 1° Caso.

Debemos "partir" el polinomio en dos partes, porque en la primera parte va a haber "algo" en común, y lo mismo en la segunda. Lo que se busca es que lo que queda "dentro del paréntesis" en cada una de las partes, sea lo mismo, para luego unir esas dos partes que quedaban del polinomio, mediante otro Factor Común (1° Caso).

Ejemplo: Factorizamos por el 2° Caso: $P(X) = 25XY - 10X^3 + 15Y - 6X^2$

<u>1° Parte</u>: los términos tienen en común la letra X. Además los números son múltiplos de 5

<u>2° Parte</u>: los números de ambos términos son múltiplos de 3

$$P(X) = \overbrace{25XY - 10X^3} + \overbrace{15Y - 6X^2}$$

Luego aplicamos para cada parte el **1° Caso** por separado. En la primera parte sacamos Factor Común **5X**, y en la segunda parte sacamos Factor Común **3**

$$P(X) = 5X \cdot \overbrace{(5Y - 2X^2)} + 3 \cdot \overbrace{(5Y - 2X^2)}$$

Por último hay que "unir" estas dos partes y para ello volvemos a sacar otro Factor Común. Ahora el polinomio quedó dividido en 2 términos y los dos tienen en común "lo de adentro del paréntesis" (que es igual), por lo tanto extraemos como Factor Común $(5Y - 2X^2)$

$$P(X) = (5Y - 2X^2) \cdot (5X + 3)$$

Otro Ejemplo: $Q(x) = 2mx + 2my + 6m + nx + ny + 3n$

$$Q(X) = 2m(x + y + 3) + n(x + y + 3)$$
$$Q(X) = (x + y + 3) \cdot (2m + n)$$

- **<u>3° Caso de Factoreo</u>: Trinomio Cuadrado Perfecto** En primer lugar, vamos a recordar la formulita del Cuadrado de un Binomio:

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Lo que tenemos que hacer para factorizar un polinomio por este método**, es asegurar que un polinomio de 3 términos sea equivalente a un binomio elevado al cuadrado**, y luego escribir el polinomio como un **Binomio al Cuadrado**.

Obviamente, para poder aplicar este caso, el polinomio debe tener tres términos (ni más ni menos). Pero no cualquier polinomio de tres términos es el Cuadrado de un Binomio. Mas allá de tener tres términos, tenemos que ver que dos de esos términos sean el cuadrado de "algo", y también tenemos que verificar que el otro término que queda sea el duplo del producto de esos "algo". Veamos esto en un ejemplo:

Supongamos que tenemos que factorizar el polinomio $P(X) = 9X^2 + 30X + 25$
Primero sospechamos que es el cuadrado de un binomio porque el polinomio tiene 3 términos

$$P(X) = 9X^2 + 30X + 25$$

Este término es el cuadrado de **3X** ya que $(3X)^2 = 9X^2$

Y este término, es el cuadrado de **5** ya que $5^2 = 25$

✓ Ya verificamos que dos de los tres términos corresponden al Cuadrado de un Binomio.

Ahora volvamos a ver la fórmula: $(a+b)^2 = a^2 + \mathbf{2ab} + b^2$

Ahora falta verificar el otro término:

Para que sea el Cuadrado de un Binomio "**2 . 3 X .5**" debe ser igual a **30X**, y como vemos, si multiplicamos **2 . 3X . 5**, nos da efectivamente **30X**, por lo tanto podemos afirmar que el polinomio es el Cuadrado de un Binomio.

Por último decimos que: $P(X) = 9X^2 + 30X + 25 = (3X + 5)^2$
Y nos quedó el polinomio factorizado.

- **<u>4° Caso de Factoreo</u>: Cuatrinomio Cubo Perfecto – Cubo de un Binomio** En primer lugar, vamos a recordar la formulita del Cubo de un Binomio:

$$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Lo que tenemos que hacer para factorizar un polinomio por este método **es asegurar que un polinomio de 4 términos sea equivalente a un Binomio elevado al Cubo**. La manera de factorizar el polinomio es similar a la usada en el caso anterior. Mas allá que para aplicar este método "tenemos que tener" un polinomio de 4 términos, dos de ellos tienen que equivaler a "algo elevado al cubo" . Luego debemos verificar si los otros dos términos restantes coinciden con los de la fórmula del Cubo de un Binomio.

Ejemplo: $8X^3 + 36X^2 + 54X + 27$

Como vemos, ya encontramos dos términos que son el cubo de "algo"... Ahora hay que verificar si coinciden los otros dos términos de la fórmula, para afirmar que es el Cubo de un Binomio.

$$8X^3 + 36X^2 + 54X + 27$$

$$(2X)^3 \qquad\qquad (3)^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Para verificar esos dos términos vamos a desarrollar el Cubo del Binomio.

$$(2X+3)^3 = (2X)^3 + 3\,.\,(2X)^2\,.\,3 + 3\,.\,(2X)\,.\,3^2 + 3^3$$

$$(2X+3)^3 = 8X^3 + 3\,.\,4X^2\,.\,3 + 3\,.\,2X\,.\,9 + 27$$

$$(2X+3)^3 = 8X^3 + 36X^2 + 54X + 27$$

Como se verifican ambos términos, podemos asegurar que el polinomio es el Cubo de un Binomio.

Por último escribimos el polinomio como $(2X+3)^3$ y ya está factorizado.

Nota: Para factorear un polinomio por este caso, debemos asegurarnos de que efectivamente el cuatrinomio le corresponda al desarrollo del cubo de un binomio, y para ello, mas allá de verificarse que dos términos sean el cubo de cada término del binomio, también se deben verificar los términos "$3a^2b$" y "$3ab^2$"

5° Caso de Factoreo: Diferencia de Cuadrados Este es el caso más fácil de reconocer, porque para factorizar un polinomio por este método, el polinomio debe tener sólo dos términos, y cada uno de ellos debe ser el cuadrado de "algo". Además deben estar separados por un "**signo menos**".

Otra vez vamos a empezar viendo una fórmula: $\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\,.\,(a-b)}$

Lo que vamos a hacer para factorizar un polinomio por el método de Diferencia de Cuadrados, es escribir el polinomio como la suma de "las bases" multiplicado por la resta de las mismas (en el ejemplo anterior, las bases son **a** y **b**).

Veamos un ejemplo: Vamos a factorizar $X^2 - 4$

Es el cuadrado de 2

Es el cuadrado de X

Entonces podemos escribir el polinomio $X^2 - 4$ como $(X+2)\,.\,(X-2)$ ... y listo!

Otro ejemplo: $P(X) = 9X^6 - 1$

Es el cuadrado de 1

Es el cuadrado de $3X^3$

Entonces escribimos el polinomio factorizado

$$P(X) = (3X^3 + 1)\,.\,(3X^3 - 1)$$

<u>6° Caso de Factoreo</u>: Suma o Resta de Potencias de Igual Exponente. Para factorizar un polinomio por este método, dicho polinomio debe constar de dos términos sumados o restados, elevados a la misma potencia.

Por lo tanto el polinomio debe ser de la forma: $P(X) = X^k \pm b^k$

Lo que vamos a hacer para factorizar un polinomio de estos, es dividirlo usando el Método de Ruffini. Ahora la pregunta es ¿Por qué binomio lo dividimos?
Para contestar esto, vamos a ver el siguiente esquema:

Cuando **k** es un número impar
- Si el signo es un MENOS dividimos al polinomio por **X – b**
- Si el signo es un MAS dividimos al polinomio por **X + b**

Cuando **k** es par
- Si el signo es un MENOS podemos dividir al polinomio por **(X – b)** o por **(X + b)**
- Si el signo es un MAS <u>no podemos dividir al polinomio por nada</u>.

<u>Por ejemplo</u>:

$P(X) = X^5 + 2^5$ En este caso el exponente es impar, y el signo es un MAS.
Entonces siguiendo el esquema vemos que podemos dividir al polinomio por $(X + 2)$.

$Q(X) = X^3 - Y^3$ En este caso el exponente es impar, y el signo es un MENOS.
Entonces siguiendo el esquema vemos que podemos dividir al polinomio por $(X - Y)$.

$R(X) = X^6 + Y^6$ En este caso el exponente es par, y el signo es un MAS.
Entonces siguiendo el esquema vemos que no podemos factorizar el polinomio.

$S(X) = X^8 - Y^8$ En este caso el exponente es par, y el signo es un MENOS.
Siguiendo el esquema vemos que podemos dividir al polinomio por $(X - Y)$ o $(X + Y)$.

Bueno, ahora vamos a hacer un ejemplo completo: Vamos a factorizar $P(X) = X^3 - 8$

Fíjense que podemos escribir este polinomio como: $P(X) = X^3 - 2^3$
Y como el exponente es impar y el signo es un MENOS vamos a dividirlo por **X – 2**

Para dividir por Ruffini, tenemos que escribir el polinomio completo:
$P(X) = 1X^3 + 0X^2 + 0X - 8$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

El resto de la división siempre tiene que dar cero, si no da cero hicimos algo mal...

El resultado de la división es $X^2 + 2X + 4$

Como dividimos al polinomio por $(X–2)$ decimos que el polinomio es igual al producto de lo que dio la división por $(X–2)$.
Entonces, para finalizar, escribimos al polinomio factorizado: $P(X) = (X - 2) \cdot (X^2 + 2X + 4)$

Advertencia: No se olviden que **1** elevado a cualquier potencia da por resultado **1**.
Este consejo es particularmente útil cuando aparece un polinomio como: $P(X) = X^7 - 1$
Al principio no parece que se pueda factorizar por el **6° Caso**, pero si lo miramos bien nos vamos a dar cuenta que $P(X) = X^7 - 1$ es lo mismo que $P(X) = X^7 - 1^7$, y ahora sí no cabe duda que lo tenemos que factorizar utilizando el **6° Caso**.

Factorear utilizando el primer caso de factoreo: Factor común.

Ejercicios con una variable:

1) $24x^3 + 16x^2 - 4x^4$

2) $25x^4 + 10x^3 - 5x^2$

3) $8x^3 - 5x^2$

4) $12x^3 + 6x^2 - 3x$

5) $3y^3 + 6y^2 - 12y + 9$

6) $5a^4 - 10a + 15a^3 + 20a^2$

7) $10x^3 + 15x^2$

8) $6x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x$

9) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

Ejercicios con 2 variables:

10) $\frac{5}{2}p^5q^4 + \frac{10}{3}p^4q^5 + \frac{25}{6}p^3q^6$

11) $6m^4n - \frac{3}{2}m^3n^2 - 9m^2n^3 + 3mn^4$

12) $5X^3Y + 10X^2Y^2 + \frac{5}{2}XY^3$

13) $\frac{2}{3}X^5Y^3 + \frac{4}{15}X^3Y^2 + \frac{8}{9}X^2Y^3$

14) $6a^5b^4 + 9a^4b^3 + 15a^3b^5 + 12a^4b^4$

15) $\frac{28}{15}m^5n + \frac{7}{15}m^3n^2$

Factorear las siguientes expresiones por el 2° caso: Factor común en grupos:

Ejercicios con una variable:

16) $2x^3 - 6x + x^2 - 3$

17) $3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$

18) $2x^5 + 2x^3 + x^4 + x^2$

19) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x + 3x^2 + 3$

20) $\frac{2}{3}x^5 + \frac{2}{3}x^4 + x^2 + x$

21) $10x^3 - 4x + 15x^2 - 6$

22) $3x^3 + 2x^2 + 12x + 8$

23) $5x^3 - 6x^2 + 10x - 12$

24) $7x^3 + 3x^2 + 28x + 12$

25) $12x^3 + 18x^2 + 10x + 15$

Ejercicios con 2 variables:

26) $9ax^2 + 15a + 6a - 3ax^2 - 5x - 2x$

27) $3x^5 + \frac{1}{3}x^3y^2 - x^4y - 6x^2y^3 - \frac{2}{3}y^5 + 2xy^4$

28) $6xy + 4x + 15y + 10$

29) $6x^2y^2 + 2x^3 + 3y^3 + xy$

30) $\frac{7}{3}my - 21m^2y - 14y - \frac{1}{3}m^2 + 2m + 3m^3$

31) $6b^6 - 2b^5x^2 + 0,\hat{6}b^4x^3 - 1,\hat{6}x^7 + 5bx^6 - 15b^2x^4$

32) $6x^3 - 15x^2y + 2y^3x - 5y^4$

33) $8x^4 + 14x^3y + 4xy^2 + 7y^3$

34) $6x^7 + 8x^3y^3 + 9x^4y^2 + 12y^5$

35) $x^4 + 0,1\overset{\frown}{6}x^3y^3 + 6xy^2 + y^5$

by Dal-0r para TARINGA!

Desarrollar los siguientes cuadrados de binomios:

36) $(X+2)^2$

37) $(2X-3)^2$

38) $\left(a^2-\frac{1}{2}\right)^2$

39) $\left(a^2+b\right)^2$

40) $(X-2Y)^2$

41) $\left(\frac{1}{2}X-\frac{3}{2}Y\right)^2$

42) $\left(2n^3-3m^2\right)^2$

43) $\left(-a^2b+ab^2\right)^2$

44) $\left(2a-\sqrt{3}.b\right)^2$

45) $\left(\frac{1}{5}m+5n\right)^2$

46) $\left(\frac{1}{3}XY+3Y\right)^2$

47) $(-2mn-n)^2$

48) $\left(a^2x-2x^2\right)^2$

49) $\left(2\sqrt{a}+\sqrt{ab}\right)^2$

50) $\left(5X-\sqrt{3}Y\right)^2$

Factorear los siguientes polinomios por el 3° Caso de Factores:
Ejercicios con una variable:

51) $4X^2-4X+1$

52) $4x^4++4x^3+x^2$

53) $9x^4+12x^3+4x^2$

54) $\frac{1}{4}x^4+x^2+1$

55) $9x^4-2x^2+\frac{1}{9}$

56) $9X^2-24X+16$

57) $X^2+X+\ 0,25$

58) $\frac{9}{16}X^2+X+\ 0,\hat{4}$

59) $9x^6+\frac{3}{2}x^3+0,0625$

60) $4X^6-X^3+\ 0,25$

Ejercicios con dos variables o con raíces:

61) $a^2b^4+2a^3b^3+a^4b^2$

62) $a^2+2\sqrt{2}\ ab+2b^2$

63) $a^2+2\sqrt{3}\ a+3$

64) $2a^6b^2+\ 2\sqrt{6}\ a^4b^3+\ 3a^2b^4$

65) $a^2+\frac{1}{4}a+a\sqrt{a}$

Decir cuáles de los siguientes son trinomios cuadrados perfectos y cuales no lo son:
Ejercicios con una variable:

66) $X^4+2X^2+\ 1$

67) $X^4-2X^2+\ 1$

68) $9x^6+3x^3+1$

69) $16x^6-16x^4+4x^2$

70) x^2+2x-1

71) $6X^2+2\ \sqrt{15}\ X\ +\ 10$

72) $6X^2+\sqrt{60}\ X\ +\ 10$

73) $6X^2+\sqrt{60X}\ +\ 10$

74) $6X^2+4\ \sqrt{15}\ X\ +\ 10$

75) $6X+4\ \sqrt{15X}\ +\ 10$

Ejercicios con dos variables:

76) $p^2+3pq^2+9q^4$

77) $\frac{1}{4}p^2+3pq^2+9q^4$

78) $X^2Y^2+2X^2Y+Y^2$

79) $X^2Y^2+2X^2Y+X^2$

80) $X^2Y^2-2Y^2X+Y^2$

<u>Desarrollar los siguientes cubos de binomios</u>:

<u>Ejercicios con una variable</u>:

81) $(X+3)^3$

82) $(X-3)^3$

83) $(3X+2)^3$

84) $(3X-2)^3$

85) $\left(X+\frac{1}{3}\right)^3$

86) $\left(3x^2+2x\right)^3$

87) $\left(x+x^2\right)^3$

88) $\left(\sqrt[3]{X}+1\right)^3$

89) $\left(2X-\frac{1}{2}\right)^3$

<u>Ejercicios con dos variables</u>:

90) $\left(2X+\frac{1}{2}XY\right)^3$

91) $\left(0,\widehat{6}\,x+3y\right)^3$

92) $\left(\frac{3}{2}x+2y\right)^3$

93) $\left(\frac{2}{3}a-b\right)^3$

94) $\left(a^2b+ab^2\right)^3$

95) $\left(ab+\frac{1}{3}\right)^3$

<u>Factorear (Cuando Sea Posible!!!) los siguientes polinomios por el 4 ° Caso</u>:

<u>Ejercicios con una variable</u>: (Algunos no se pueden factorear, ojo)

96) $X^3-6X^2+12X-8$

97) $8X^3+6X^2+12X+1$

98) $8X^3+12X^2Y+6X^2Y+Y^3$

99) $8X^3+12X^2+6X+1$

100) $X^6+12X^5+6X^4+8X^3$

101) $X^6+6X^5+12X^4+8X^3$

102) x^3+3x^2+3x+8

103) $X^3+3\sqrt{2}\,X^2+6X+2\sqrt{2}$

104) $8a^3+4\sqrt{3}\,a^2+2a+\frac{\sqrt{3}}{9}$

105) $\frac{1}{8}x^6+\frac{3}{2}x^4+2x^2+8$

106) $8x^9-6x^7+\frac{3}{2}x^5-\frac{1}{8}x^3$

107) $\frac{1}{27}x^6+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}$

108) $n^3-9\sqrt{2}\,n^2+54n-18\sqrt{2}$

109) $\frac{1}{8}n^3-\frac{3}{2}n^2+6n-8$

<u>Ejercicios con dos variables</u>:
(Ojo, que puede haber alguno que no se pueda factorear)

110) $\frac{b^6}{c^3}+3b^3+3c^3+\frac{c^6}{b^3}$

111) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

112) $\frac{x^6}{y^3}+3\frac{x^3}{y}+3y+\frac{y^3}{x^3}$

113) $\frac{64m^3}{n^3}+3m^3n^3+\frac{1}{8}m^3n^6+24m^3$

114) $\frac{27}{8}a^3b^6+4,5a^2b^3-\frac{8}{27b^3}-2a$

115) $\frac{27}{8}a^3b^6-4,5a^2b^3-\frac{8}{27b^3}+2a$

Factorear los siguientes polinomios por el 5° Caso: Diferencia de cuadrados:

Ejercicios con una variable:

116) $X^2 - 4$

117) $\frac{1}{4}x^2 - 9$

118) $a^2 - 1$

119) $1 - \frac{1}{4}X^2$

120) $m^4 - 1$

121) $\frac{4}{9}X^2 - \frac{9}{4}$

122) $4X^2 - \frac{16}{49}$

123) $\frac{25}{16}x^2 - \frac{1}{9}$

124) $-\frac{4}{9}m^2 + 1$

125) $-81n^4 + 16$

126) $-16 + m^4$

127) $x^6 - 1$

128) $x^8 - \frac{1}{9}$

129) $\frac{4}{x^4} - \frac{1}{9}x^2$

Ejercicios con dos variables:

130) $b^{-4} - c^{-2}$

131) $-4a^{-2} + b^{-2}$

132) $(x+1)^2 - y^2$

133) $3X^2 - Y^2$

134) $m^2 - 5n^2$

135) $(x-1)^2 - (y+1)^2$

136) $(a+2b)^2 - (a-2b)^2$

Factorear los siguientes polinomios por el 6° Caso:

137) $X^3 + 1$

138) $a^3 - 1$

139) $X^3 - 8$

140) $X^5 + 32$

141) $m^4 - 1$

142) $X^3 + \frac{1}{27}$

143) $X^5 - 1$

144) $m^3 + 8$

145) $m^5 - 32$

146) $n^3 + 27$

147) $a^4 - 16$

148) $z^3 + \frac{1}{8}$

149) $a^5 - 1$

150) $a^3 + \frac{8}{27}$

151) $X^3 + \frac{1}{1000}$

152) $1 - \frac{b^5}{32}$

153) $X^6 - 64$

154) $X^5 - 0{,}00001$

155) $m^5 + 100.000$

156) $X^3 + 125$

157) $X^3 - \frac{1}{64}$

Factorear los siguientes polinomios aplicando el caso que corresponda:

158) $a^4 - 1$

159) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{8}{3}x^4$

160) $3x^3 + 3x + 2x^2 + 2$

161) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

162) $n^3 + 1$

163) $\frac{1}{4}X^2 - 0{,}01$

164) $\frac{3}{4}p^2 - 3p^3 + 9p$

165) $\frac{1}{4}x^2 - 6x + 36$

166) $10x^3 + 2x^2 + 15x + 3$

167) $m^3 - 1000$

168) $9 - X^2$

169) $\frac{5}{8}x^2 + \frac{35}{16}x^3$

170) $125 - 225x^2 + 135x^4 - 27x^6$

171) $(x+1)^2 - 1$

172) $225 + 60x^2 + 4x^4$

173) $\frac{16}{27}x^2 - \frac{4}{9}$

174) $n^7 + 1$

176) $a^5 + 32$

177) $0{,}01 - 4x^2$

178) $\frac{2}{3}x^2 + 4x^4 + 6x^5$

179) $\frac{1}{27}a^3 + \frac{1}{3}a^2 + a + 1$

180) $9 - 30a^3 + 25a^6$

181) $(x+1)^2 - 36$

182) $8X^6 + 60X^4 + 150X^2 + 125$

183) $x^6 + 8x^2 + \frac{16}{x^2}$

Preguntas:

184) ¿Cuántos términos tiene que tener un polinomio para factorearlo por el tercer Caso?

185) ¿Cuántos términos tiene que tener un polinomio para factorearlo por el cuarto caso?

186) ¿Cuántos términos tiene que tener un polinomio para factorearlo por el quinto caso "Diferencia de cuadrados"? ¿Cómo tienen que ser los signos de esos términos?

187) ¿Cómo deben ser los 2 términos de un polinomio para que pueda factorearse por el 6° Caso?

188) Si factoreo $P(X) = X^2 - 1$ por el 6° caso ¿Me da lo mismo que si lo factoreo por el 5° caso?

189) Si tengo un polinomio de grado 4 ¿En cuántos binomios lo puedo factorear como máximo?

190) $(X - 3Y)^2 = (3Y - X)^2$ ¿Es verdadero o Falso?

191) ¿Es cierto que todos los polinomios se pueden factorear?

192) Si yo se que un polinomio se factoreó y el resultado del polinomio factoreado es el producto de tres polinomios de grado 1. ¿Cuál era el grado del polinomio factoreado?

193) ¿Da lo mismo factorear un polinomio de X por cualquier caso de factoreo, que factorearlo buscando las raíces por el método de Gauss?

194) ¿Cuántas raíces como máximo puede llegar a tener un polinomio de X de grado 5?

195) ¿Qué caso se usa para factorear una expresión tipo $X^k - Y^k$, si k es un número par mayor a 2?

196) ¿Se puede factorear por el primer caso un polinomio de solo 2 términos?

197) ¿Se puede factorear por el cuarto caso un polinomio de 3 términos?

198) ¿Se puede factorear por el 3º Caso un P(X) que tenga fracciones como coeficiente principal y término independiente?

199) ¿Puede pasar que un P(X) sea factoreado sucesivamente por todos los casos de factoreo?

200) ¿Cambia el grado de un polinomio cuando se factorea?

Factorear **combinando sucesivamente los casos** de factoreo que sean necesarios:
Ejercicios con una variable:

201) $12x^2 - 3$

202) $5x^7 - 80x^3$

203) $5a^4 + 30a^3 + 45a^2$

204) $32x^6 - 128x^4$

205) $x^6 - \frac{3}{2}x^4 + 3x^5 - \frac{9}{2}x^3$

206) $p^4 - 8p^2 + 16$

207) $X^6 - 1$

208) $X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1$

209) $3X^3 - 3$

210) $3x^4 - 12x^2 + 2x^3 - 8x$

211) $9x^6 + 12x^5 + 4x^4 + 45x^2 + 60x + 20$

212) $4x^8 + 12x^7 + 9x^6 - 16x^4 - 48x^3 - 36x^2$

213) $4x^5 - 20x^4 + 25x^3 + 32x^2 - 160x + 200$

214) $x^5 - 4x^3 - x^2 + 4$

215) $4a^4 + 18a^3 + 27a^2 + \frac{27}{2}a$

216) $5m^3 + 5$

217) $a^4 - 2a^3 + 3a^2 + 2a - 4$

218) $\frac{5}{3}x^5 - 15x^4 + 45x^3 - 45x^2$

219) $X^4 - 2X^3 + X^2$

220) $3X^2 + 3X + \frac{3}{4}$

Factorear **combinando sucesivamente los casos** de factoreo que sean necesarios:

221) $5a^2b^4 + 125b^6X^8 - 50ab^5X^4$

222) $3X^9Y^7 - 12X^7Y^9$

223) $a^2m - b^2m - a^2n + b^2n$

224) $\frac{20}{9}X^5b^3 - 5X^3b$

225) $a^3 - a^2 - a + 1$

226) $\frac{1}{5}x^7y^4 + \frac{9}{10}x^5y^3 + \frac{27}{20}x^3y^2 + \frac{27}{40}xy$

227) $X^3 + 8Y^3 + 3X + 6Y$

228) $\frac{1}{2}a^3X^2 - \frac{1}{8}a^3Y^2 - \frac{1}{2}aX^2 + \frac{1}{8}aY^2$

229) $X^4 - 1 - Y^2 + X^2Y^2$

230) $2aX^3 + 6bX^3 - 2a - 6b$

231) $2X^2Y + 2XYZ - 2aXZ - 2aX^2$

232) $\frac{1}{3}a^2m + \frac{1}{3}abm - \frac{2}{3}a^2n - \frac{2}{3}abn$

234) $2a^3X + 2a^2bX + 2a^2cX - a^3Y - a^2bY - a^2cY$

235) $a^3X^3 - a^3XY + a^3X - abX^3 + abXY - abX$

236) $X^3b^2 - b^2n^3 + X^3m^2 - m^2n^3$

237) $a^4 - 4a^2 - a^3X + 4aX$

238) $24X^4 - 36X^3Y + 18X^2Y^2 - 3XY^3$

239) $\frac{3}{8}a^3X - \frac{9}{4}a^2X + \frac{9}{2}aX - 3X$

240) $2X^7Y - 12X^5Y^2 + 24X^3Y^3 - 16XY^4$

241) $2aX^2Y^2 - 2a^2Y^2 - 18aX^2 + 18a^2$

242) $a^3m^2 - m^2 + a^3n - n$

243) $3a^3b^4 - 6a^3b^2 + 3a^3 + 24b^4 - 48b^2 + 24$

Factorear los siguientes polinomios aplicando la fórmula para obtener raíces de una cuadrática:
Nota1: Aplicar los casos de factoreo que sean necesarios antes.
Nota2: Repasar funciones cuadráticas o ecuaciones de segundo grado.

244) $x^2 + x - 6$

245) $3x^2 + 15x + 18$

246) $x^2 + 2x - 15$

247) $x^2 - 11x + 30$

248) $2x^3 - 14x^2 + 24x$

249) $x^2 + \frac{5}{2}x + 1$

250) $x^2 + \frac{1}{2}x - 3$

251) $x^2 + \frac{7}{3}x - 2$

252) $5x^3 + 35x^2 + 60x$

253) $\frac{1}{3}x^5 + \frac{7}{3}x^4 + \frac{10}{3}x^3$

Por último unos ejercicios de aplicación:

254) En una fábrica de cajas diseñan una caja cúbica cuyas medidas están en función de "x". Su peso está dado por el peso específico al que llaman "y" multiplicado por su volumen. Sabiendo que el peso de la caja está dado por la expresión polinómica: Peso = $8x^3p + 12x^2p + 6xp + p$
Hallar el valor de la arista de la caja.

Una fábrica de tanques de agua, tiene para sus tanques de 500 litros distintos modelos en función de sus dimensiones, pero por especificaciones de diseño todos los modelos responden a una única fórmula general para su volumen, la diferencia está en la relación entre el radio y su altura.
La fórmula general para el volumen de 500 litros es:: Vol = $\boldsymbol{2\pi x^2y + 4\pi xy + 2\pi y + 3\pi x^2 + 6\pi x + 3\pi}$
Y sabemos que el valor del radio está en función de "x" y el valor de la altura en función de "y"
Como ya sabemos, el volumen de un cilindro se calcula como Vol = πR^2h

255) Calcular la expresión en función de "x" para el radio de los tanques
256) Calcular la expresión en función de "y" para la altura de los tanques
257) Si un modelo de 500 Litros tiene una relación: Altura es el doble del radio: Hallar el valor del radio en cm. (1 Litro = 1 dm^3)

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Expresiones Algebraicas Racionales

Número de Tema: **65**

Área: **Matemática**

MCM y MCD de Polinomios:

- **MCM, Mínimo Común Múltiplo**: El MCM de dos números es el número más pequeño de todos los que cumplen con la condición de ser múltiplo de ambos. Por ejemplo el MCM de 8 y 6 es 24. Si quiero averiguar el MCM de dos polinomios, el concepto es el mismo. Tengo que buscar un polinomio que sea múltiplo de ambos, pero que a su vez sea lo más chico posible (por eso se llama **MÍNIMO** Común múltiplo).

¿Cómo se halla el MCM? Bueno, por definición, el MCM es el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente. Obviamente, para hallar el MCM de varios polinomios tengo que descomponer a cada polinomio en sus factores primos.

Descomponer un polinomio en sus factores primos es FACTORIZARLO: Una vez que tengo los polinomios descompuestos en sus factores primos (o sea factorizados), ***puedo armar el MCM multiplicando todos los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente***.

NOTA 1: "comunes y no comunes" significa que pueden o no repetirse en los distintos polinomios.
NOTA 2: Si encuentro un factor que en un polinomio está elevado al cuadrado y en otro elevado al cubo, tengo que usar el que está elevado al cubo, porque es el de mayor exponente.

Veamos un ejemplo: Hallar el MCM entre P(X) Q(X) y R(X)

$$P(X) = 9X^2 - Y^2 \qquad\qquad P(X) = (3X + Y) . (3X - Y)$$
$$Q(X) = 9X^2 + 6XY + Y^2 \quad \xrightarrow[\text{Factoreamos los polinomios}]{} \quad Q(X) = (3X + Y)^2$$
$$R(X) = 6mX + 2mY \qquad\qquad R(X) = 2m (3X + Y)$$

Entonces el MCM es el producto de los factores primos comunes o no comunes elevados al mayor exponente

Fíjense que el factor **(3X + Y)** es común a todos los polinomios
Mientras que el factor **(3X − Y)** pertenece sólo a P(X) y es un factor NO COMÚN...
... y el factor **(2m)** pertenece sólo a R(X) y también es un factor NO COMÚN.

$$MCM = (3X + Y)^2 . (3X - Y)^1 . (2m)^1 \Rightarrow \boxed{MCM = (3X + Y)^2 . (3X - Y) . (2m)}$$

- **MCD, Máximo Común Divisor**: El MCD de dos números es el número más grande de todos los que cumplen con la condición de ser divisores de ambos. Por ejemplo el MCD de 80 y 60 es 20. Si quiero saber el MCD de dos polinomios el concepto es el mismo. Tengo que buscar un polinomio que sea divisor de ambos, pero que a su vez sea lo más grande posible (por eso se llama **MÁXIMO** Común Divisor).

¿Cómo se halla el MCD? Bueno, por definición, el MCD es el producto de los factores primos **comunes** elevados al **menor** exponente. Obviamente para hallar el MCD de varios polinomios tengo que descomponer a cada polinomio en sus factores primos.

Recordemos que descomponer un polinomio en sus factores primos es FACTORIZARLO.

Una vez que "tengo" los polinomios descompuestos en sus factores primos (o sea factorizados), ***puedo armar el MCD multiplicando sólo los factores primos comunes elevados al menor exponente***.

Hallemos el MCD de los polinomios P(X) Q(X) y R(X) del ejemplo anterior:

$$P(X) = 9X^2 - Y^2 \qquad\qquad P(X) = (3X + Y) . (3X - Y)$$
$$Q(X) = 9X^2 + 6XY + Y^2 \quad \xrightarrow[\text{Factoreamos los polinomios}]{} \quad Q(X) = (3X + Y)^2$$
$$R(X) = 6mX + 2mY \qquad\qquad R(X) = 2m (3X + Y)$$

Ahora el MCD es el producto de los factores primos comunes o elevados al menor exponente.

Fíjense que el único factor que es común a todos los polinomios es **(3X + Y)** , y el menor exponente al que se encuentra elevado es **1**.

$$MCD = (3X + Y)^1 \Rightarrow \boxed{MCD = (3X + Y)}$$

Simplificación de Expresiones Algebraicas Fraccionarias:

Fundamental: Saber Factorizar una Expresión Algebraica es una herramienta fundamental para poder simplificar factores que se repiten en el denominador y el numerador de una expresión.

Ejemplo:

Tenemos la expresión $\dfrac{18a^2 - 2b^2}{9a^2 + 6ab + b^2}$ ⇒ Aplicamos **1° Caso** en el numerador y **3° Caso** en el denominador. ⇒ $\dfrac{2\,(9a^2 - b^2)}{(3a + b)^2}$

Luego aplicamos el **5° Caso** en el numerador. Y escribimos el cuadrado del denominador como un producto. ⇒ $\dfrac{2\,(3a-b)\,(3a+b)}{(3a+b)\,(3a+b)}$

Por último podemos simplificar el factor **(3a + b)**. ⇒ $\dfrac{2\,(3a-b)\,\cancel{(3a+b)}}{(3a+b)\,\cancel{(3a+b)}}$

Y de esta manera puede escribir la misma expresión original en forma simplificada. $\boxed{\dfrac{2\,(3a-b)}{(3a+b)}}$

Producto de Expresiones Algebraicas Fraccionarias: Cuando tengo un Producto de Expresiones Algebraicas también puedo simplificar factores de los numeradores con factores de los denominadores.

Ejemplo: $\dfrac{2\,(X-Y)\,(X+Y)}{(a-2b)^2} \cdot \dfrac{(a-2b)}{2\,(X+Y)} = \dfrac{\cancel{2}\,(X-Y)\,\cancel{(X+Y)}}{(a-2b)^{\cancel{2}}} \cdot \dfrac{\cancel{(a-2b)}}{\cancel{2}\,\cancel{(X+Y)}} = \dfrac{(X-Y)}{(a-2b)}$

Suma y Resta de Expresiones Algebraicas Fraccionarias: El procedimiento para sumar o restar Expresiones Algebraicas es similar al proceso usado para sumar o restar fracciones. Primero hay que hallar el denominador común (MCM) entre los denominadores, y luego dividir dicha expresión por cada denominador... lo que me da, lo multiplico por el numerador correspondiente, y luego opero algebraicamente el numerador sumando todas las expresiones que quedan.

Veamos un ejemplo: $\dfrac{1}{X-Y} + \dfrac{2}{X^2-Y^2} =$ Factorizamos los denominadores ⇒ $\dfrac{1}{X-Y} + \dfrac{2}{(X+Y).(X-Y)}$

$\dfrac{1}{X-Y} + \dfrac{2}{(X+Y).(X-Y)} = \dfrac{}{(X+Y).(X-Y)}$ ⇐ Calculamos el MCM o Denominador Común

Si al denominador común lo dividido por (X – Y) me da (X + Y), luego multiplico (X + Y) por 1 que es el numerador y me da (X + Y)...

Divido al denominador común por (X – Y).(X + Y) me da 1, lo multiplico por 2 que es el numerador y me da 2...

$\dfrac{1}{X-Y} + \dfrac{2}{(X+Y)\cdot(X-Y)} = \dfrac{\boxed{X+Y} + \boxed{2}}{(X+Y)\cdot(X-Y)}$

Luego:

$\dfrac{1}{X-Y} + \dfrac{2}{(X+Y)\cdot(X-Y)} = \boxed{\dfrac{X+Y+2}{(X+Y)\cdot(X-Y)}}$

Y este es el resultado final de la operación algebraica. Debemos tener en cuenta que si pudiéramos simplificar esta expresión, deberíamos hacerlo, en este caso, no se puede simplificar, por lo tanto este es el resultado.

Factorear y Hallar el MCM y el MCD de los siguientes grupos de polinomios:

1) $a^2 - x^2 \quad ; \quad a^2 + 2ax + x^2 \quad ; \quad a + x$

2) $X^4 - Y^4 \quad ; \quad 2X^2Y^2 + 2Y^4$

3) $a^3 - b^3 \quad ; \quad a - b \quad ; \quad a + b$

4) $m^3 - n^3 \quad ; \quad m + n$

5) $\frac{1}{4}a^4 - b^4 \quad ; \quad \frac{1}{2}a^2 + b^2$

6) $a^2 - b^2 \quad ; \quad 3ab + 3b^2$

7) $14ab - 7bX \quad ; \quad 28a^2 - 7X^2$

8) $15a^2bm - 6a^2bn \quad ; \quad 30ab^2m - 12ab^2n$

9) $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 \; ; \; m^3 + n^3 \; ; \; m + n$

10) $14m^3nXY^4 \; ; \; 49m^4n^3XY \; ; \; 21mn^3X^5Y$

11) $X^2 - 25 \; ; \; X^2 - 10X + 25 \; ; \; X^3 - 125$

12) $X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3 ; 5X^2 + 10XY + 5Y^2$

13) $\frac{4}{9}a^3X^2Y \quad ; \quad \frac{2}{21}a^2X^3Y^2Z \quad ; \quad \frac{4}{27}a^4X^2Z^3$

14) $a^2 - 4m^2 \; ; \; a^2 + 4m^2 - 4am \; ; \; 3a - 6m$

15) $X^3 - Y^3 \quad ; \quad X^2 + 2XY + Y^2 \quad ; \quad X^2 - XY$

16) $aXm^2 + 2aXm + aXn^2 \; ; \; a^3Xm + a^3Xn \; ; \; 2aX^2$

17) $X^2 - pX + \frac{p^2}{4} \; ; \; aX^2 - a\frac{p^2}{4} + X^2 - \frac{p^2}{4} \; ; \; X^2 - \frac{p^2}{4}$

18) $a^3 - 3a^2X + 3aX^2 - X^3 \; ; \; 4a^2 - 4X^2 \; ; \; 3a^2 - 6aX + 3X^2$

19) $1 + 4a + 4a^2 \quad ; \quad 4a^2 - 1 \quad ; \quad 1 + 8a^3$

20) $5a - 20 \; ; \; a^3 - an^2 - 4a^2 + 4n^2 \; ; \; a^2 - 8a + 16$

21) $4X^2 + 25 - 20X \quad ; \quad 4X^2 - 10X \quad ; \quad 10X - 25$

22) $X^2Y + 2XY - 4X - 2X^2 \; ; \; Y^2 - 4 \; ; \; XY^2 - 4XY + 4X$

Algunos más para factorear y Hallar el MCM y el MCD de los siguientes grupos de polinomios:

23) $X^3 - Y^3$; $X^2 - Y^2$; $X^2 - 2XY + Y^2$; $X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3$

24) $3m^2 - 3n^2$; $m^2 - 2mn + n^2$; $2m^3 - 6m^2n + 6mn^2 - 2n^3$

25) $a^2 - 2ab + b^2$; $a^4 - b^4$

26) $Y^3 - 8$; $Y^2 + 2Y + 4$; $2Y + 4$

27) $16X^4 - 1$; $4X^2 - 4X + 1$; $4X - 2$

28) $\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}b^3$; $a^2 - ab$; $\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}ba^2 + \frac{1}{2}b^2a$

29) $X^4 - Y^4$; $5X^2 + 5Y^2$; $aX^2 + aY^2$

30) $4a^2b - 3ab^2$; $16a^2 - 9b^2$

Factorear y simplificar la expresión:

31) $\dfrac{X^3 + 1}{X^2 + 2X + 1}$

32) $\dfrac{5X^2 - 5}{X + 1}$

33) $\dfrac{X^3 - Y^3}{(X - Y)^2}$

34) $\dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$

35) $\dfrac{1 + 4a + 4a^2}{1 - 4a^2}$

36) $\dfrac{a - b^2}{b^2 - a}$

37) $\dfrac{1 - X}{X - 1}$

38) $\dfrac{a^3 - ab^2}{a^2 + ab}$

39) $\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\left(X^2 - a^2\right)}{\frac{1}{9}\cdot(X + a)}$

40) $\dfrac{2a^2 - 2ab + 2b^2}{2\cdot\left(a^3 + b^3\right)}$

41) $\dfrac{2am^2 + 2m^2X}{a^2m^2 + X^2m^2 + 2aXm^2}$

42) $\dfrac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^2 - 1}$

43) $\dfrac{m^2 + m - mn - n}{m^2 - 2mn + n^2}$

44) $\dfrac{X^2 - Y^3}{X^4 - Y^6}$

45) $\dfrac{X^2 - (Y + Z)^2}{Z^2 - (X + Y)^2}$

46) $\dfrac{1 - (a - b)^2}{(1 + a)^2 - b^2}$

47) $\dfrac{5a^4 - 5}{\left(3a^2 + 3\right)\cdot\left(a^2 + 2a + 1\right)}$

48) $\dfrac{2mn + 10n - 6m - 30}{2n^3 - 54}$

49) $\dfrac{15X^2 - 6XY + 10bX - 4bY}{25X^2 - 4Y^2}$

50) $\dfrac{am - bm + cm + an - bn + cn - a + b - c}{2a^2 - ax - 2ab + bx + 2ac - cx}$

51) $\dfrac{3a^3 + 24}{a^3 - 2a^2 + 4a - a^2b + 2ab - 4b}$

52) $\dfrac{\left(m^3 + n^3\right)\cdot\left(m^2 + 2mn + n^2\right)}{m^3 + n^3 + 3m^2n + 3mn^2}$

53) $\dfrac{6X^2 + 6X - 3X^4 - 3X^3}{X^3 + X^2 - 2X - 2}$

54) $\dfrac{m^2 - 5m - n^2 + 5n}{m + n - 5}$

55) $\dfrac{Y^3X^2 + 4X^2Y + 2Y^2X^2 + 8X^2}{XY^4 - 16X}$

by Dal-0r para TARINGA!

Realizar el producto o división, factorear y simplificar la expresión:

56) $\frac{-X^2}{XY}\cdot\frac{(-Y)^2}{-YZ}\cdot\frac{Z^2}{X}$

57) $\frac{A-B}{M-N}\cdot\frac{M-N}{B-A}$

58) $\frac{a-m}{m+n}\cdot\frac{m^2-n^2}{m-a}\cdot\frac{m}{n-m}$

59) $\frac{a^3+a^2c}{a^2+2ac+c^2}\cdot\frac{b^2+2bc+c^2}{ab+ac}\cdot\frac{a+c}{ab+ac}$

60) $\frac{X^2+XY}{2am-2an+3m-3n}\cdot\frac{X^2-XY+Y^2}{X}\cdot\frac{6a+9}{X^3+Y^3}\cdot(m-n)$

61) $\frac{X^4-1}{2X}\cdot\frac{2aX^2}{X^2+1}\cdot\frac{5X^2-5X}{aX^2-2aX+a}\cdot\frac{X-1}{X^4-X^2}$

62) $\frac{X^2+XY+XZ+YZ}{3X^2-3Z^2}\div\frac{X+Y}{(X+Z)^2}\div\frac{X+Z}{-6X^2+6Z^2}\cdot\frac{1}{(-X-Z)^2}$

63) $\frac{aX^2-2a}{-XY-Y^2+XZ+YZ}\div\frac{3X-3\sqrt{2}}{(X+Y)}\div\frac{2a}{-3Z+3Y}\cdot\frac{10}{X+\sqrt{2}}$

64) $\frac{-X^3+0{,}125}{4X^2-10X}\div\left(\frac{2X^3}{-X+0{,}5}\right)^{-1}\div\frac{X^3+0{,}5X^2+0{,}25X}{2X-5}$

65) $\frac{nm^3}{an+am}\div\frac{m^2n-m^3}{a^3n^2}\div\frac{anm}{n^4-n^2m^2}$

66) $\frac{-X^2-3X-9}{-2X+6}\cdot\frac{-X^2+6X-9}{3}\cdot\frac{24}{2X^3-54}$

67) $\frac{0{,}25.a^2-3a+9}{X+1}\cdot\frac{-1}{0{,}5.a-3}\div\frac{a-6}{X^2-1}\cdot\frac{-6}{X-1}$

68) $\frac{3.a^2}{\frac{1}{2}X-1}\cdot\frac{0{,}25.X^2-1}{-12.a}\div\frac{0{,}25.X^3+1}{X^2-2X+1}\cdot\frac{-2}{a}$

Realizar las siguientes operaciones algebraicas:
Simplificar su resultado a su mínima expresión.

69) $\frac{1}{X+1}-1$

70) $\frac{X}{X^2-1}-\frac{1}{X+1}$

71) $\frac{X+2}{X^2-1}+\frac{2}{X+1}$

72) $\frac{2X}{X+1}+1$

73) $\frac{2X+3}{X-1}+\frac{1}{X+1}-\frac{X^2+4X+1}{X^2-1}$

74) $\frac{X+2}{X-2}+\frac{X-3}{X+2}-\frac{X^2+3X+6}{X^2-4}$

75) $\frac{1}{X-3}+\frac{2X}{X+1}-\frac{X^2-3X+4}{X^2-2X-3}$

76) $\frac{1}{X+2}+\frac{X}{X+5}+\frac{4X+5}{X^2+7X+10}$

77) $\left(\frac{2X}{X+3}-\frac{X+1}{X}\right)\cdot\frac{X^2}{X^3-4X^2-3X}$

78) $\frac{X^2-2X+\frac{X^3+X^2}{X+2}}{\left(2X^3+3X^2-2X\right)}$

79) $\left(\frac{\frac{1}{2}X+1}{\frac{1}{3}X-1}-\frac{3X+1}{2X-\frac{1}{3}}\right)\cdot 2(X-3)(6X-1)$

Primeras Ecuaciones Para hallar x
Sugerencia: Primero realizar las operaciones algebraicas para luego poder despejar la "x"

80) $\frac{3}{x+1}-\frac{2\cdot x}{x-1}+\frac{1}{x^2-1}=-2$

81) $\frac{x^2-2\cdot x-3}{x^2-9}+\frac{x}{x+3}=1$

82) $\frac{x+2}{x^2-3x-10}+\frac{2x-5}{x^2-25}=3x$

83) $\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{2x^2}{x^2-1}$

<u>Más ecuaciones</u>: Hay que hallar "X"

84) $\frac{x+1}{x^2-x-2}+\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x^2-4}=1$

85) $\frac{x^2-9}{2\cdot x-6}+\frac{x^2+x-6}{x+3}=1$

86) $\frac{3}{x-\sqrt{2}}-\frac{2x}{x^2-2}=0$

87) $\frac{2X+1}{x^2-2\sqrt{3}X+3}=\frac{3}{x+\sqrt{3}}$

88) $\frac{X+1}{x^2+2X+1}-\frac{2x}{x+1}=-1$

89) $\frac{X}{x^2-2}-\frac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}=0$

90) $\frac{x^2-8x}{X^3+5x^2+8X+4}=-\frac{x+2}{x^2+4x+4}+\frac{2}{x+1}$

91) $\frac{1}{X^3+3x^2+3X+1}=\frac{1}{x^2+2x+1}-\frac{1}{x^2-1}$

92) $\frac{1}{X+1}+X=\frac{x^2-x-1}{x^2-1}+\frac{2}{x-1}$

93) $\frac{x^3+2x^2-3}{x^3-1}+\frac{2}{x-1}=1$

94) $\frac{5x}{\frac{1}{4}x^2-1}+\frac{4}{\frac{1}{2}x-1}-\frac{5}{\frac{1}{2}x+1}=9$

95) $\frac{\sqrt{3}}{x^2-3}+\frac{1}{x+\sqrt{3}}=2$

96) $\frac{2x^2-2}{x+1}+\frac{7x+4}{x+2}-2x=3$

97) $\frac{2x^2-9x-1}{2x+3}+\frac{3x-5}{x+1}+3=x$

98) $\frac{3x+1}{x-3}-\frac{3x^2-9}{2x+1}+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=9$

99) $\frac{5x-2}{x+2}-\frac{4x-2}{x+3}=1$

100) $\frac{3x^2-2}{x+3}+\frac{7x+1}{x+1}-3x=1$

101) $\frac{6x-2}{x+1}-\frac{5x+1}{x+2}=1$

102) $\frac{7x-2}{x-1}-\frac{4x+31}{x+5}=3$

103) $\left(\frac{5x+2}{x+1}-\frac{5x^2+1}{x^2-1}\right)^2=\frac{3}{x-1}$

104) $\left(\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+3}{x+4}\right)\cdot\left(x^2-4\right)=-1$

105) $\left(\frac{2x+1}{2x+3}-\frac{x+5}{x+6}\right)\cdot\left(x^2-36\right)=9$

106) $\frac{x^2}{x^2-4}+\frac{3}{x+2}=\frac{2x}{2x-4}$

107) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{x}{x+2}=\frac{x-1}{x}$

108) $\frac{2(x+3)}{4x^2-25}=\frac{2}{2x+5}-\frac{4}{2x-5}$

109) $\frac{x}{x^2+10x+25}-\frac{1}{x+5}=\frac{-3}{x^2-25}$

110) $\frac{x+2}{x+3}-\frac{1}{x-3}+\frac{10}{x^2-9}=\frac{x+1}{x-3}+x$

111) $\sqrt{\left(\frac{2(x+1)+3}{x+2}-\frac{x(2x+9)}{x^2+4x+4}\right)\div\frac{10}{x^2}}=\frac{1}{3}$

by Dal-0r para TARINGA!

Potenciación

☆ *Para qué nos sirve aprender Potenciación?* La **Potenciación** nos ahorra tener que estar mucho tiempo escribiendo expresiones y haciendo cuentas de multiplicaciones sucesivas, por ejemplo:

$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ ⇨ Es lo mismo que multiplicar 5 veces por si misma a la variable "a"

☆ Elementos de la Potenciación ➜ x^2 — 2 → **Exponente**; x → **Base**

☆ Propiedades de la Potenciación

Producto de potencias de igual base: Los exponentes se **Suman** ⇨ $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

División de potencias de igual base: Los exponentes se **Restan** ⇨ $x^a \div x^b = x^{a-b}$

Cuando una variable está elevada a una potencia, y el resultado está elevado a otra potencia: Los exponentes se Multiplican ⇨ $\left(x^a\right)^b = x^{a \cdot b}$

Nota importante*:* Fijate que sería lo mismo escribir... $\left(x^a\right)^b$ ... que... $\left(x^b\right)^a$

Ya que "el orden de los factores no altera el producto"... $\left(x^a\right)^b = \left(x^b\right)^a = x^{a \cdot b} = x^{b \cdot a}$

∗ **Propiedad Distributiva:** La Potenciación es distributiva respecto de la multiplicación y división: ⇨ $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$ $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$

OJO !!! : La Potenciación **no es distributiva** respecto de la **suma y resta**...

$\cancel{(a+b)^k = a^k + b^k}$

$\cancel{(a-b)^k = a^k - b^k}$

Error !!!

∗ **Exponente igual a cero:** "Cualquier número" elevado a la cero, es igual a 1 (excepto el cero mismo).

Por ejemplo: $x^0 = 1 \quad (\forall\ x \neq 0) \quad ; \quad 100^0 = 1 \quad ; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$

∗ **Exponente Negativo:** El exponente negativo "nos da vuelta la expresión".

Por ejemplo: $k^{-1} = \frac{1}{k}$ $\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$

Radicación: La **Radicación** es la operación inversa a la potenciación. $\sqrt[a]{x} = b \Leftrightarrow b^a = x$

Salvedad: la expresión no es válida en el campo real, para índices pares y radicandos negativos.

Ejemplo: $2^3 = 8 \Leftrightarrow 2 = \sqrt[3]{8}$

☆ Elementos de la Radicación ➜ $\sqrt[n]{x}$ — n → **Índice**; x → **Radicando**; **Radical:** $\sqrt{\ }$

Como veremos mas adelante, las raíces pueden escribirse como potencias de exponente fraccionario, por lo tanto al radicando también puede llamárselo base

✶ **Propiedad Distributiva de la radicación:**

La Radicación, al igual que la Potenciación,
Sólo es distributiva respecto de la multiplicación y división... $\boxed{\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$ $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$

OJO!!! La Radicación **no** es distributiva respecto de la suma y de la resta... $\cancel{\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $\cancel{\sqrt{a-b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ **Error !!!**

✶ **Exponentes Fraccionarios:** Las expresiones radicales se pueden expresar como potencias de índice fraccionario, de modo que el índice de la raíz sea el denominador del exponente y el exponente (que puede tenerlo o no) de la variable el numerador del exponente.

$\boxed{\sqrt[a]{(x)^b}=(x)^{\frac{b}{a}}}$ Veámoslo en ejemplos: $\sqrt[4]{(5)^3}=(5)^{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[3]{x}=(x)^{\frac{1}{3}}$

✶ **Simplificación de Exponentes Fraccionarios:** Cuando tenemos un exponente fraccionario la fracción se puede simplificar como cualquier fracción, o si no, podemos simplificar directamente el índice de la raíz con el exponente de la potencia. (*Cuidado cunado simplificamos por divisores pares ya que se corresponde con la expresión radical cuyo radicando es el valor absoluto del radicando antes de ser simplificado*).

Ejemplos: $\sqrt[4]{(7)^6}=7^{\frac{6}{4}}=7^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{(7)^3}$ $\sqrt[4]{(-3)^6}=(-3)^{\frac{6}{4}}=|-3|^{\frac{3}{2}}=\sqrt{|-3|^3}$

✶ **Extracción de factores**: Sólo es posible cuando el índice de la raíz es menor que el exponente al cual está elevado el factor. Veamos un ejemplo, vamos a extraer los factores de la siguiente raíz: $\sqrt[3]{a^5}$

Primero, verificamos que el índice (3) es menor al exponente (5) ✔ Ok
Ahora vamos a extraer. Tenemos que hacer una división, al exponente lo dividimos por el índice de la raíz:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

El resto es el exponente que queda "**adentro**" ← 2   1 → El resultado es el exponente que queda "**afuera**"

⇒ $\sqrt[3]{a^5}=a^1\cdot\sqrt[3]{a^2}$

✶ **Introducción de factores:** Ahora vamos a hacer lo contrario de lo anterior... Es decir que a introducir en la raíz los factores que estén afuera. Veamos un ejemplo: $3^2.\sqrt[7]{3^4}$

Primero **multiplicamos** al exponente que está **afuera** por el **índice** de la raíz $3^2.\sqrt[7]{3^4}$ ⇒ 2 . 7 = 14

Luego **al resultado** le **sumamos** el exponente que está **adentro:** 14 + 4 = 18   2 . 7 + 4 = 18

Y escribimos adentro de la raíz el radicando elevado a este resultado adentro de la raíz $3^2.\sqrt[7]{3^4}=\sqrt[7]{3^{18}}$

Nota: Siempre que hagamos esto tenemos que ver que la base que está elevada afuera de la raíz sea la misma que está elevada adentro. En el ejemplo no hay problema porque la base es la misma (3)

Repaso: Factoreo de Números.
Factorear un número es descomponerlo en el producto de sus factores primos.

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$24=2^3.3^1$

Se va dividiendo al número por todos sus factores primos, o sea, todos los números primos por los que sea divisible, tantas veces como sea divisible. Y se expresa como producto de potencias de sus factores primos.

✶ **Sumas Algebraicas de expresiones radicales**: Hay que tener cuidado cuando se suman expresiones radicales, ya que la única forma de sumar algebraicamente expresiones radicales es cuando los radicandos e índices coinciden, cuando los índices coinciden pero los radicandos no, se puede ver si factoreando los radicandos y extrayendo factores, luego coinciden los radicandos.

Ejemplos: $\sqrt[3]{5}+8\sqrt[3]{5}=9\sqrt[3]{5}$ $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{2^3}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

Factoreo el "8"   Extraigo el factor 2^3

by Dal-Or para TARINGA!

Resolver (Parte I)

1) $x \cdot x^2$

2) $5^6 \cdot 5^3 \cdot 5$

3) $8^2 \cdot x^8 \cdot x^{12} : 2^3$

4) $2^4 \cdot x^5$

5) $4^a \cdot 6^b \cdot 4^b \cdot 6^a$

6) $9x^5 \cdot x^8 \cdot 3^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$

7) $\frac{x^5}{x^4}$

8) $\frac{x^4}{x^4}$

9) $\frac{x^4 \cdot y^9}{x^9 \cdot y^4}$

10) $\frac{3^{7x}}{3^{2x}} \cdot 3^2$

11) $(x)^{\frac{4}{3}} \cdot (x)^{\frac{2}{3}}$

12) $(x)^3 \cdot (x)^{\frac{1}{2}}$

13) $\frac{x^3 \cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} \cdot x}$

14) $\frac{32x^3 \cdot 2^9}{x^2 \cdot 2^{13} \cdot x^{11}}$

15) $\frac{[2(x+1)]^5}{2^{-1}(x+1)^3}$

16) $\frac{(h^2-k^2)}{(h-k)}$; $h \neq k$

Mencionar qué propiedad se ha aplicado en cada caso

17) $x^h \cdot x^k = x^{h+k}$

18) $a^0 = 1 \quad (\text{con } a \neq 0)$

19) $\frac{y^h}{y^k} = y^{h-k}$

20) $(b^c)^a = b^{c \cdot a}$

21) $\left(\frac{h}{k}\right)^a = \frac{h^a}{k^a}$

22) $x^{-y} = \frac{1}{x^y}$

23) $(x \cdot y)^k = x^k \cdot y^k$

24) $a^1 = a$

25) $\sqrt[k]{a^h} = a^{\frac{h}{k}}$

26) $(a+b)^x = a^x + b^x$
¿Es correcto esto? ¿Por qué?

¿Verdadero ó Falso? Justificar teniendo en cuenta las propiedades

27) $\frac{h^{2 \cdot n+1}}{h^{2n-1}} = h^2$

28) $\frac{x^{-8} \cdot y^{13}}{x^{13} \cdot y^{-8}} = (x \cdot y)^5$

29) $k^{2 \cdot n+1} \cdot k^{3 \cdot n+1} = k^{6 \cdot n^2+1}$

30) $\left(\frac{x^{-8} \cdot y^{13}}{x^{13} \cdot y^{-8}} \cdot 125 \cdot k^3\right)^0 = 1$
$(\text{Con } x \neq 0 \ ; \ y \neq 0 \ ; \ k \neq 0)$

31) $(a^2)^3 = a^5$

32) $k^0 = k$

33) $\frac{x^8}{x^3} = x^5$

34) $\left(5^{\frac{4}{5}}\right)^5 = 5^4$

35) $\frac{b^2 \cdot a^5}{b \cdot a^6} = \frac{b}{a}$

36) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

Resolver Aplicando propiedades (Parte II)

37) $(13^2)^5$

38) $(5^3)^{\frac{3}{4}}$

39) $\left((k^4)^3\right)^2$

40) $(x^4)^{\frac{5}{2}} \cdot x^{-9}$

41) $\left(x^3 \cdot (x^4)^3\right)^{\frac{6}{5}}$

42) $\left((x \cdot x^3)^2 \cdot (x^4)^3\right)^{\frac{3}{5}}$

43) $(x^{-2} \cdot x)^8$

44) $(a^2 \cdot b^3 \cdot c)^9$

45) $\sqrt[3]{2} \cdot (2 \cdot x^{-2})^{\frac{-1}{3}}$

46) $(5^{-2} + x^3)^2$

47) $\left(\frac{\sqrt{8} \cdot x^2}{2}\right)^4$

48) $\left(\frac{1}{8}x^3\right)^{\frac{2}{3}}$

49) $\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{-2}$

Unir con flechas

50) $a^{\frac{b}{c}} \cdot a^{\frac{c}{b}}$

51) $a^{\frac{b}{c}} \cdot a^{\frac{b}{c}}$

52) $a^{\left(\frac{b+c}{c}\right)} \cdot a^{\left(\frac{b+c}{b}\right)}$

53) $(a^b)^{\frac{c}{b}} \cdot a^2$

54) $(a^b)^{\frac{1}{b}} \cdot \frac{a^c}{a^{c+1}}$

$a^{\frac{b^2+c^2}{c \cdot b}+2}$ $\qquad 1 \qquad$ $a^{\frac{b^2+c^2}{c \cdot b}}$ $\qquad$ $a^{\frac{2 \cdot b}{c}}$ $\qquad$ a^{c+2}

Efectuar las siguientes operaciones

55) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}$

56) $\sqrt{c}\cdot\sqrt[3]{c}$

57) $\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x}$

58) $\sqrt[12]{z^{15}}$

59) $\sqrt{\frac{7}{5}}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$

60) $\dfrac{\sqrt[4]{169}}{\sqrt[8]{13}}$

61) $\dfrac{\sqrt{0{,}5}}{\sqrt{\frac{6}{5}}}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}$

62) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a}}$

63) $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

64) $\sqrt[2n]{k}\cdot\sqrt[n]{k^2}$

65) $\dfrac{\sqrt[9]{8}}{\sqrt[9]{4}}$

66) $x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{x}$

67) $\sqrt{8}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{x^3}$

68) $\sqrt{x}\,\left(x^{-2}\right)^{\frac{5}{4}}$

69) $\sqrt[5]{x^3}\,\left(x^2\right)^{\frac{-9}{10}}$

70) $\sqrt[4]{8x^{-5}}\,\left(4x^{-6}\right)^{\frac{-7}{8}}$

Llevar a la mínima expresión posible con fracciones y exponentes fraccionarios:

71) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{-3}{4}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

72) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-3}{5}}\cdot 2^{\frac{2}{5}}$

73) $\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{-4}{7}}\cdot\left(\frac{16}{49}\right)^{\frac{-2}{7}}$

74) $(0)^{\frac{-5}{8}}\cdot(0)^{\frac{-3}{2}}$

75) $\left(\frac{1}{2}+1\right)^{\frac{-3}{5}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$

76) $\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{-5}{8}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} : \sqrt[8]{2}$

77) $\left(\frac{2}{3}-1\right)^{\frac{-2}{3}}\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)^{\frac{-7}{3}}$

78) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{0}\cdot\sqrt{2}$

79) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-3}{2}}\cdot 2^{-2}$

80) $(0)^{\frac{-2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$

81) $(0)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{0}$

82) $\left(\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)^{\frac{-1}{2}}\right)^{-2}$

83) $\left(\frac{3}{2}-1\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-3}{2}}\cdot\sqrt{2}$

84) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{-1}{2}}\cdot\sqrt{15}$

85) $\left(\frac{3}{4}-1\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$

86) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-3}{2}}\cdot 3^{-2}\right)^{-2}$

Extraer todos los factores posibles de las raíces:

87) $\sqrt{216}$
88) $\sqrt[3]{567}$
89) $\sqrt{675}$
90) $\sqrt[3]{1728}$
91) $\sqrt[7]{1024}$
92) $\sqrt[3]{2000}$
93) $\sqrt{2592}$
94) $\sqrt{98}$
95) $\sqrt{108}$
96) $\sqrt{6300}$
97) $\sqrt{2700}$
98) $\sqrt{756}$
99) $\sqrt[3]{1715}$
100) $\sqrt[4]{1250}$
101) $\sqrt[5]{1701}$

Extraer factores y luego agrupar y operar según corresponda

102) $\sqrt{48}+\sqrt{27}$

103) $\sqrt{12x}+\sqrt{27x}$

104) $7\sqrt{18x}-3\sqrt{50x}$

105) $2x\sqrt{8}-5\sqrt{32x^2}$

106) $\sqrt{45}+\frac{1}{5}\sqrt{1225}-\sqrt{20}$

107) $2\sqrt{6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}-\sqrt{54}$

108) $\left(3\sqrt{40}-\sqrt{250}\right)^{-2}$

109) $\left[\left(\sqrt{12}-\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-2}$

110) $\frac{1}{3}\sqrt{27}-\sqrt{8}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\sqrt{2}$

Efectuar las siguientes operaciones, simplificando lo que sea posible:

111) $\sqrt{49\cdot a^8\cdot b^4\cdot c^2}=$

112) $\sqrt[4]{\dfrac{16\cdot x^{12}}{b^{20}}}=$

113) $\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\right)^{5}=$

114) $\dfrac{\sqrt{81}\cdot\sqrt{64}}{\sqrt[5]{32\cdot x^5}}=$

115) $\sqrt{x^2-2\cdot xy+y^2}=$

116) $\sqrt{\dfrac{h^2}{k^2}+\dfrac{k^2}{h^2}+2}=$

117) $\sqrt[3]{\dfrac{125\cdot x^9}{64\cdot y^6}}=$

118) $\sqrt{1323\cdot x^5}=$

Operar para lograr que solamente quede una única raíz.- Sugerencia: Fijate si te resulta más fácil "pasar" todo a exponentes fraccionarios, y recién después empezar a operar...

119) $\sqrt{\sqrt{a}}$

120) $\sqrt{\sqrt[3]{27^2}}$

121) $\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x}}$

122) $\sqrt[b]{\sqrt[a]{\sqrt{y^c}}}$

123) $\left(\sqrt[b]{\sqrt[a]{\sqrt{y}}}\right)^{c}$

124) $\sqrt{a^4}\cdot\sqrt{45\cdot\sqrt{45\cdot\sqrt{45}}}$

125) $\sqrt{\dfrac{4}{k}\cdot\sqrt[5]{k}}$

126) $\sqrt{(a+b)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}}$

by Dal-Or para TARINGA!

Simplificar los exponentes con las raíces y llegar a la expresión mas simplificada:

127) $\sqrt[3]{(a+b)^{3r}}$ 129) $\sqrt[6]{\frac{729\cdot x^{12}\cdot y^3}{k^6}}$ 131) $\sqrt[4]{\frac{16\cdot x^8\cdot (h+k)^2}{81}}$ 133) $\sqrt[x-1]{\frac{2^{x^2}}{2}}\ \forall\ x\neq 1$

128) $\sqrt[3r]{(a+b)^3}$ 130) $\sqrt[3]{\frac{\cdot(a-b)^3}{a^6}}$ 132) $\sqrt[x^2]{a^x\cdot b^x}$ 134) $\sqrt[2x]{2^x}\ \forall\ x\neq 0$

Extaer todos los factores de las raíces, cuando sea posible.-

135) $\sqrt[3]{x^{15}}$ 137) $\sqrt[3]{125000\cdot a^7\cdot b^{11}\cdot c^2}$ 139) $\sqrt[7]{a^{7\cdot n+14}}$ con $a\neq 0$

136) $\sqrt[4]{625\cdot x^5}+\sqrt{27\cdot y^8}$ 138) $\sqrt[3]{\frac{512\cdot z^{11}\cdot y^{10}\cdot x^6}{x^2}}$ 140) $\sqrt[8]{b^{8+16\cdot y}}$ con $b\neq 0$

Escribir las siguientes expresiones dentro de una única raíz:
Nota, en todos los casos hay que introducir factores, sugiero expresar los denominadores como potencias negativas para introducirlos en los radicales

141) $x\cdot\sqrt{5\cdot x^3}$ 142) $4\cdot h^6\cdot\sqrt[3]{k^2}$ 143) $4\cdot\sqrt[3]{2\cdot h^5}$ 144) $k^8\cdot\sqrt[8]{h}$

145) $\frac{\sqrt[4]{y}}{4\cdot x^2}$ 146) $\frac{\sqrt[3]{\frac{5}{x}}}{\frac{3}{4}}$ 147) $\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{5}}$ 148) $2\cdot x^{-2}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{4}x^7}\ \forall\ x\neq 0$

Efectuar las siguientes operaciones (Siempre y cuando puedan hacerse)

149) $\sqrt{5}+8\cdot\sqrt{5}$ 152) $\sqrt{y}+\sqrt{y^3}$ 155) $\sqrt{\frac{a^5\cdot b}{c^5}}-\sqrt{\frac{a\cdot b^5}{c^5}}-\sqrt{\frac{a^5\cdot b^5}{c^5}}$

150) $h\cdot\sqrt{a}+k\cdot\sqrt{a}$ 153) $\sqrt{45}+\sqrt{63}-\sqrt{18}$

151) $-h\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{h}$ 154) $\sqrt[4]{1296}-\sqrt[4]{4096}+\sqrt[4]{50625}$ 156) $\sqrt{\frac{28^2}{18}}-\sqrt{\frac{3^{-2}}{2^{-7}}}$

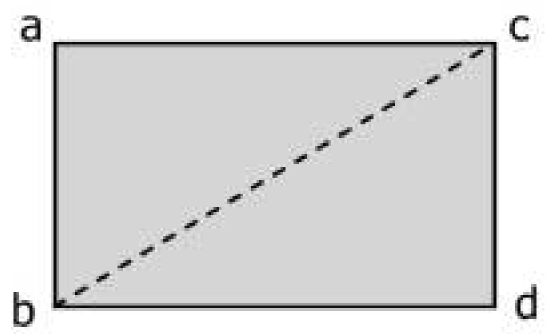
Problemas de aplicación con potencias y raíces:

157) Hallar, usando el teorema de pitágoras, la diagonal de un cuadrado de lado $L=2\sqrt{2}$

158) Hallar, usando el teorema de pitágoras, la diagonal de un rectángulo de $B=\sqrt{2}$ $H=\sqrt{3}$

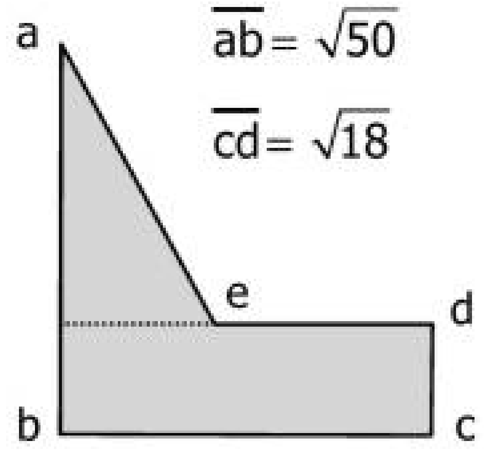
Hallar el perímetro de las siguientes figuras:

159)



abcd es un rectángulo
$\overline{bc}=\sqrt{3}$ $\overline{bd}=\sqrt{2}$

160)



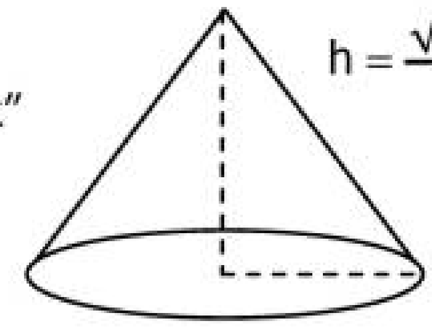
$\overline{ab}=\sqrt{50}$ $\overline{bc}=\sqrt{72}$ $a\hat{b}c=90^{\circ}$
$\overline{cd}=\sqrt{18}$ $\overline{de}=\sqrt{36}$ $b\hat{c}d=90^{\circ}$
$c\hat{d}e=90^{\circ}$

161) Hallar la expresión del valor del lado en función de "m" de un cuadrado de área $(m+1)^2\ cm^2$.

162) Tomando los datos del cuadrado del problema anterior. Calcular la siguiente razón: $\frac{\text{Diagonal}}{m^2+2m+1}$

163) Dado el siguiente cono:
Hallar la expresión de su volumen en función de "k"

Recordemos que la fórmula de volumen del cono es: $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

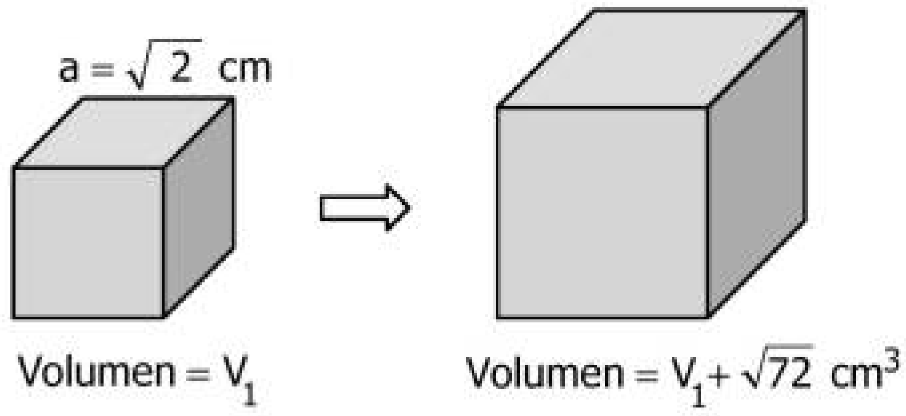


$h = \frac{\sqrt{2k} + \sqrt{k^3}}{k}$

$r = \sqrt{\frac{3\sqrt{k}}{\pi}}$

164) Tenemos un cubo de arista $a = \sqrt{2}$ cm

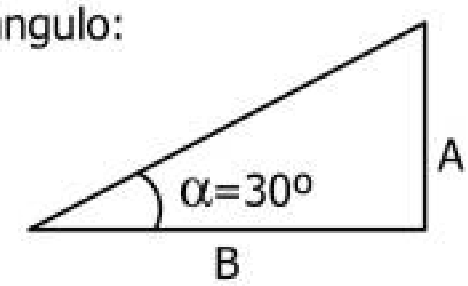
Hallar la expresión del incremento que tiene que sufrir ese valor de la arista para que su volumen se incremente en $\sqrt{72}$ cm^3



165) Tenemos el siguiente triángulo rectángulo:

Sabemos que: $\text{Tg } 30^\circ = \frac{A}{B} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

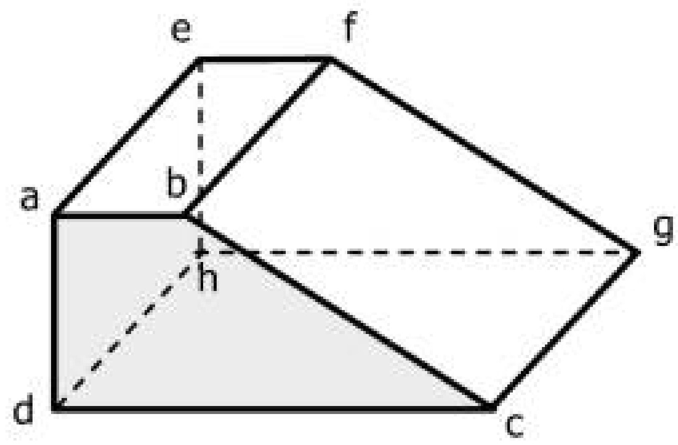
Dado el valor de $A = \sqrt[4]{2}$



Hallar el valor numérico de la expresión: $\left(\frac{A^3}{B} + \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)^2$

166) Tenemos una caja de dimensiones: 18cm * 20cm * 35cm. Encontrar la medida de los cubos tales que el volumen de cada cubo sea 315 veces menor al de la caja. (Expresar en la forma mas simplificada posible)

167) Hallar el área de la figura abcd
168) Hallar el perímetro de la figura abcd
169) Hallar el área de la figura dcgh
170) Hallar el perímetro de la figura dcgh
171) Hallar el volumen del cuerpo.
172) Hallar el área total del cuerpo.



Datos:

$\overline{ad} = \sqrt{2}$

$\overline{bc} = \sqrt{18}$

$\overline{ab} = \overline{bc} - 4$

$\overline{ae} = 2 \cdot \overline{ad}$

Dados "x" "y" y "z" tres números irracionales: $x = \sqrt{2}$ $\quad y = 3\sqrt{8}$ $\quad z = \sqrt{32} + 1$

Realizar las siguientes identidades en cada ejercicio reemplazando "x" "y" y "z" por sus valores correspondientes y verificar la igualdad:

173) $x + y + z = 11\sqrt{2} + 1$

174) $x - y + z = 1 - \sqrt{2}$

175) $x - (y + z) = -9\sqrt{2} - 1$

176) $4(x^2 + y) = (z-3)^2 - 7 + 10\sqrt{2}$

177) $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 24$

178) $x^2 + y^2 - z^2 = (y+z)\cdot(y-z) + 2$

179) $2^2\sqrt{2} + 2^5 + 3x^3 + z = y + z^2$

180) $(x \cdot x^2) + (y + y^2) = x^3 + y\cdot(1+y)$

181) $-(x^2 + z^2) = (x+z)\cdot(x-z) - 5(\sqrt{2})^2$

182) $(1+\sqrt{6})\cdot\sqrt{x+y} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})\cdot\sqrt{7}$

183) $\frac{x^{1/2} \cdot y^{1/2}}{\sqrt[4]{12}} = (x \cdot y)^{1/4}$

184) $\sqrt{y\cdot(z+x)} = \left(\sqrt{\sqrt{y}}\cdot(5\sqrt{2}+1)^{1/4}\right)^2$

185) $2\cdot\sqrt{x} - \frac{2y}{3x} = z^2 - (y - 2x + 1)^2$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Racionalización

Número de Tema: **67**

Área: **Matemática**

Racionalizar significa sacar los radicales de los denominadores, es decir, reescribir una expresión numérica o algebraica, conservando su valor, pero sin radicales en el denominador.

☆ **Cómo se racionaliza una expresión:** Vamos a diferenciar **3 casos**, totalmente diferentes entre sí:

1er.Caso) La raíz del denominador es cuadrada. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, etc.

2do.Caso) La raíz del denominador es del índice mayor a 2. $\frac{4}{\sqrt[3]{11}}$, $\frac{3\cdot\sqrt[5]{3}}{\sqrt[4]{3^2}}$, etc.

3er.Caso) En el denominador hay un binomio (o sea, dos términos). $\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$; etc.

Para ver como resolver cada caso vamos a ver directamente ejemplos

☆ **1° CASO:** Racionalicemos la expresión: $\frac{5}{\sqrt{2}}$ Como vemos este es un ejemplo con raíces cuadradas.

✔ **Paso 1**: Multiplicamos "numerador y denominador" por la raíz del denominador. $\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

✔ **Paso 2**: Resolvemos las operaciones... $\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2}$

✔ **Paso 3**: Simplificamos raíces y exponentes en el denominador $\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2^2}}}=\boxed{\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}}$

Nota: No importa cuán "extensa" nos quede la expresión del ***numerador,*** nunca pierdas de vista que lo importante aquí no es simplificar sino quitar radicales del denominador.

☆ **2° CASO**: Racionalicemos: $\frac{-3}{\sqrt[3]{4}}$ En este caso, tenemos que racionalizar un radical no cuadrado.

✔ **Paso 1**: Multiplicamos y dividimos por la raíz que aparece en el denominador.

Ojo: Ahora vamos a multiplicar y dividir por $\sqrt[3]{4^2}$ porque si te fijás bien, vas a ver que esta es la única manera de lograr simplificar la raíz con el exponente (en el denominador) en el paso que sigue...

Fijate esto: la expresión a racionalizar la puedo escribir así: $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}=-\frac{3}{\sqrt[3]{4^1}}$
Total si elevo cualquier cosa a la uno va a dar lo mismo.

La pregunta es por que multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[3]{4^2}$?

Como el índice de la raíz es 3 y la potencia a la que está elevado el radicando es 1, si multiplico al denominador por la misma raíz elevada también a la 1, no me sirve porque no podría eliminar la raíz. Veamoslo:

➔ No se simplifica la raíz del denominador. $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}=-\frac{3}{\sqrt[3]{4^1}}\cdot\frac{\sqrt[3]{4^1}}{\sqrt[3]{4^1}}=-\frac{3\cdot\sqrt[3]{4^1}}{\sqrt[3]{4^2}}$ Sumo los exponentes (Producto de potencias de igual base)

Entonces debemos multiplicar por una raíz del **mismo índice** pero **elevada a una potencia tal que si se la sumamos a la potencia de la raíz que tenía me de por resultado el índice de la raíz**. Por eso multiplicamos por $\sqrt[3]{4^2}$ Porque de ese modo fijate que pasa..

$$-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}=-\frac{3}{\sqrt[3]{4^1}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}}}=-\frac{3\cdot\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}}$$

Puedo simplificar la raíz del denominador con el exponente del mismo

✔ **Paso 2**: Simplificamos raíz con exponente y listo!!

$$-\frac{3}{\sqrt[3]{4}} = -\frac{3}{\sqrt[3]{4^1}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = -\frac{3 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\cancel{\sqrt[3]{4^3}}} = \boxed{-\frac{3 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{4}}$$

☆ **3° CASO**: Racionalicemos $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ que es un ejemplo de racionalización de expresiones binómicas.

✔ **Paso 1**: Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador...

Repaso: Qué era un "conjugado"?... miremos unos ejemplos...

- El conjugado de **a+b** es **a-b**
- Y el conjugado de **a-b** es **a+b**
- Por otra parte, el conjugado de **-a-b** es **-a+b**
- "solamente tenemos que cambiarle el signo al segundo término".

Propiedad: "Producto de un binomio por su conjugado" $\boxed{(a+b).(a-b) = a^2 - b^2}$

Es simple, cuando multiplicamos a un binomio por su conjugado, nos da por resultado la diferencia de los cuadrados de ambos términos del binomio... Esta propiedad nos va a ser útil en este ejercicio.

Volvamos al ejercicio $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

En el numerador aplicamos la propiedad distributiva.

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$$

En el denominador aplicamos la propiedad que acabamos de repasar.

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{7})}{\sqrt{3}^2-\sqrt{7}^2}$$

✔ **Paso 2**: Resolvemos las operaciones y simplificamos raíces del denominador con los exponentes:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{7}^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}-\sqrt{14}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\cancel{\sqrt{3}^2}-\cancel{\sqrt{7}^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}-\sqrt{14}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{3-7} \Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{14}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{-4}}$$

Y nos quedó la expresión racionalizada.

Importantísimo!!!

En todos los ejercicios de racionalización, tenemos una manera muy simple de comprobar si hicimos las cosas bien (tenelo en cuenta para las pruebas)

La manera de verificar consiste simplemente en hacer la cuenta de la 1° expresión y luego del ejercicio ya racionalizado con la calcu y ver que dé lo mismo, probemos con el último ejemplo...

Habíamos dicho que $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{14}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{-4}$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{1{,}414+1}{1{,}732+2{,}645} = \frac{2{,}414}{4{,}377} = 0{,}551 \checkmark$$

Como nos da lo mismo, podemos quedarnos tranquilos que el resultado debe ser correcto

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{14}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{-4} = \frac{2{,}449-3{,}741+1{,}732-2{,}645}{-4} = \frac{-2{,}205}{-4} = 0{,}551 \checkmark$$

Racionalizar las siguientes expresiones y simplificar los resultados

1) $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$ 4) $\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{6}}{\sqrt{7}}$ 7) $\dfrac{6\cdot y}{\sqrt{2\cdot x}}$

2) $\dfrac{11}{\sqrt[6]{3^3}}$ 5) $\dfrac{6\cdot\sqrt[4]{12}}{\sqrt{10}}$ 8) $\dfrac{\sqrt[3]{2\cdot x^{10}}}{\sqrt{36\cdot x^5}}$

3) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ 6) $\dfrac{15\cdot\sqrt[7]{51}}{\sqrt{15}}$ 9) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^{-3}}\cdot\sqrt{2\cdot x^6}}$

Racionalizar las siguientes expresiones con raices no cuadradas en los denominadores

10) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ 12) $\dfrac{32}{\sqrt[12]{23^5}}$ 14) $\dfrac{5\cdot\sqrt[4]{8^5}}{\sqrt[7]{16^9}}$ 16) $\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{h^5}\right)^2}$

11) $\dfrac{38\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[19]{3^5}}$ 13) $\dfrac{4\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[5]{16}}$ 15) $\dfrac{\sqrt[10]{5\cdot x^3}}{\sqrt[3]{5\cdot x^{10}}}$ 17) $\dfrac{k}{\sqrt[4]{a^9\cdot b^7}}$

Racionalizar las siguientes expresiones con binomios en los denominadores

18) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 20) $\dfrac{\sqrt[2]{20}}{20+\sqrt[2]{20}}$ 22) $\dfrac{\sqrt{2k}}{\sqrt{59h}+5\sqrt{36k}}$ 24) $\dfrac{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}-63\cdot\sqrt{a}}$

19) $\dfrac{12\cdot\left(\sqrt{3}-5\right)}{\sqrt{3}+5}$ 21) $\dfrac{h\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{h}}{h\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{h}}$ 23) $\dfrac{3}{\sqrt{a^9}+\sqrt{b^{27}}}$ 25) $\dfrac{h-k}{\sqrt{h^3}\cdot\sqrt{k^2}-\sqrt{h^2}\cdot\sqrt{k^3}}$

Uní con flechas... Cómo quedarían las expresiones de la izquierda racionalizadas ?

26) $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$ $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

27) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $\dfrac{\sqrt{a+b}}{a+b}$

28) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ $\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{a-b}$

29) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ $\dfrac{\sqrt[3]{a+b}}{a+b}$

30) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a+b}^2}$ $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

31) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+b}$ $\dfrac{\sqrt{a}-b}{a-b^2}$

Más ejercicios para racionalizar expresiones algebraicas:
En el caso que sea conveniente y correcto, podría simplificarse la expresión antes de racionalizar y después de racionalizar. Nota, suponemos para resolver estos ejercicios que "a" y "b" son números reales mayores a 1 y distintos entre sí. Ojo con las simplificaciones ya que no siempre se puede simplificar una expresión!!!

32) $\dfrac{a^3}{a^2\sqrt{a}}$

33) $\dfrac{a\cdot b}{b\cdot\sqrt{ab}}$

34) $\dfrac{a}{\sqrt{a+1}}$

35) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}+1}$

36) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$

37) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$

38) $\dfrac{a^3}{\sqrt[6]{a^5}}$

39) $\dfrac{(a+1)^2}{\sqrt[3]{a+1}}$

40) $\dfrac{(a+1)^2}{\sqrt[3]{(a+1)^2}}$

41) $\dfrac{ab}{\sqrt[3]{ab^2}}$

42) $\dfrac{ab}{\sqrt[3]{a^2b}}$

43) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b\cdot(ab)^2}}$

44) $\dfrac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{(ab)}}$

45) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\cdot b}}{\sqrt[3]{a\cdot b^2}}$

46) $\dfrac{\sqrt{a}+b}{a+\sqrt{b}}$

47) $\dfrac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

48) $\dfrac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}+b}$

49) $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$

50) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$

51) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$

Ejercicios Combinados!!! Hallar la expresión racionalizada y lo más simplificada posible, luego verificar con la calculadora reemplazando "a"y "b" por los siguientes valores: A = 2 y B = 3

La verificación consta de ver que tanto la expresión original sin racionalizar como la expresión racionalizada dan el mismo valor con la calculadora.

52) $\dfrac{ab}{\sqrt[3]{a.\sqrt{b}}}$

53) $\dfrac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{1+\sqrt{b}}}$

54) $\dfrac{3\sqrt{3}\cdot a^3}{\sqrt{27\cdot a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}}}$

55) $\dfrac{ab\cdot(b-1)}{\sqrt{a}\cdot\left(\sqrt{b}+1\right)}$

56) $\dfrac{a^2+a\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+\sqrt{a}}}$

57) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b+1}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-b-1}}$

58) $\dfrac{b}{(a+b)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{a+b}\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$

59) $\dfrac{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

60) $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{11}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

<u>Decir cuales de las siguientes igualdades son verdaderas y cuales son falsas</u>:

61) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}$

62) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=4+\sqrt{3}$

63) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$

64) $\dfrac{6+\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{6}=3\left(\sqrt{2}+1\right)$

65) $\dfrac{\sqrt{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{4}\sqrt{2}=2$

66) $\dfrac{\sqrt{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{4}\sqrt{2}=1+\sqrt{2}$

67) $\dfrac{\frac{1}{3}\sqrt{5}-\frac{3}{5}}{\frac{\sqrt{5}+2}{15}}=43-19\sqrt{5}$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Propiedades de los Logaritmos

Número de Tema: **69**

Área: **Matemática**

- Propiedades de los logaritmos:

1. Definición: $\text{Log}_a(b) = C \Longleftrightarrow a^C = b$

Con a, b y c $\in \Re \wedge a \neq 1 \wedge a>0 \wedge b>0$

✔ Ejemplo: $\log_2(8) = 3 \Longleftrightarrow 2^3 = 8$

2. El **logaritmo de un producto** es la **suma de los logaritmos.**

$$\text{Log}_a(X \cdot Y) = \text{Log}_a X + \text{Log}_a Y$$

✔ Ejemplo:

$$\log(5 \cdot 2) = \log(5) + \log(2)$$

3. El **logaritmo de un cociente** es la **resta de los logaritmos.**

$$\text{Log}_a\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}_a X - \text{Log}_a Y$$

✔ Ejemplo:

$$\log(5/2) = \log(5) - \log(2)$$

4. El logaritmo de una potencia: El exponente pasa a multiplicar como una constante al logaritmo.

$$\text{Log } X^Y = Y \cdot \text{Log } X$$

Y Log X

El exponente "BAJA" y queda multiplicando al logaritmo.

✔ Ejemplo:

$$\log(10)^2 = 2 \cdot \log(10)$$

Nota: al logaritmo de una raíz lo puedo ver como el logaritmo de una potencia fraccionaria.

Ejemplos:

$$\text{Log } X^3 = 3 \cdot \text{Log } X \qquad \text{Log }(X+1)^{3a} = 3a \cdot \text{Log }(X+1)$$

$$\log \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3}\log 7 \qquad \log_a \sqrt[3]{(5X+1)^2} = \frac{2}{3}\log_a(5X+1)$$

- **Cambios de base**:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Con "a" y "c" $\in \Re \wedge$ "a" y "c" > 0

Para pasar un logaritmo de base, hago el logaritmo en "base c" de lo que tenía adentro del logaritmo, dividido el logaritmo en "base c" de la base.

✔ Ejemplo:

$$\log_3(5) = \frac{\log_c 5}{\log_c 3}$$

- **Las calculadoras**: Con las calculadoras sólo puedo calcular en forma directa dos tipos de logaritmos:

- Los de base 10: La tecla "Log" (cuando no se aclara la base de un logaritmo es de base 10).
- Los de base 2,71 "base e" que se llaman logaritmos naturales o neperianos. En la calcu están como "ln".

Pero esto no significa que yo no pueda calcular el logaritmo de base 7 de 4 con la calculadora.
Veamos como ejemplo dos maneras de hacer **Log $_7$ (4) con la calculadora**:

Paso a base 10	*Paso a base "e"*
$\log_7(4) = \frac{\log 4}{\log 7} = \frac{0,602}{0,845} = 0,712$	$\log_7(4) = \frac{\ln 4}{\ln 7} = \frac{1,386}{1,945} = 0,712$

Otros ejemplos de cambio de base: $\log_{\left(\frac{3}{5}\right)}(X+2) = \frac{\ln(X+2)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$ $\qquad \log_{(x+1)}(3X+2) = \frac{\log(3X+2)}{\log(X+1)}$

<u>Ecuaciones exponenciales</u>: Veamos como se resuelven con un ejemplo. Despejemos: $8 = 2^{(x^2+1)}$

La mejor manera es aplicar logaritmos. Pero OJO! no cualquiera, sino el de la base que más me conviene. En este caso, como hay un 8 y un 2 (ambos potencias de 2) voy a aplicar logaritmos en base 2 a ambos lados de la ecuación. OJO de nuevo!! no puedo aplicar distintos logaritmos en los dos lados. Tienen que ser de la misma base!!!

$8 = 2^{x^2+1}$ Aplico en los dos lados de la ecuación: $\log_2$

$$Log_2(8) = Log_2\left[2^{x^2+1}\right]$$

Aplico la propiedad de los logaritmos de una potencia y "BAJO" (X^2+1)

$$\log_2(8) = \log_2\left[2^{(x^2+1)}\right] \Rightarrow \log_2(8) = (x^2+1)\cdot\log_2(2)$$

La ecuación me queda así:

$$\log_2(8) = (x^2+1)\cdot\log_2(2) \Rightarrow$$

Resuelvo los logaritmos: $\begin{cases} \log_2(8) = 3 & \text{ya que } 2^3 = 8 \\ \log_2(2) = 1 & \text{ya que } 2^1 = 2 \end{cases} \Rightarrow 3 = (x^2+1)\cdot 1$

.... Y termino de despejar: $3 = (x^2+1) \Rightarrow 3-1 = x^2 \Rightarrow 2 = x^2 \Rightarrow \sqrt{2} = |x| \Rightarrow X = \pm\sqrt{2}$

Sugerencia: Cada vez que en una ecuación aparezca la X como exponente la mejor manera de despejarla es aplicando logaritmos (ya que después, recurriendo a la Propiedad de Logaritmos de una Potencia, esa potencia va a "BAJAR" multiplicando y la voy a poder despejar fácilmente). OJO!, hay que ver bien en que base conviene aplicar los logaritmos.

<u>Ecuaciones Exponenciales con Cuadrática</u>: Vamos a resolver esta ecuación: $\frac{5}{2}\cdot 2^{2X} - 3\cdot 2^X - 4 = 0$

Primero la escribimos así: $\frac{5}{2}\cdot\left(2^X\right)^2 - 3\cdot\left(2^X\right) - 4 = 0$

Y ahora reemplazamos $\mathbf{2^X}$ por **W** $\Rightarrow \frac{5}{2}\cdot W^2 - 3\cdot W - 4 = 0$

Y así como está, esta es una cuadrática...

$$\underbrace{\frac{5}{2}}_{a}\cdot W^2 \underbrace{-3}_{b}\cdot W \underbrace{-4}_{c} = 0$$

Aplicamos la formulita para resolver una cuadrática: $W_{12} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$W_{12} = \frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot\frac{5}{2}\cdot(-4)}}{2\cdot\frac{5}{2}} \Rightarrow W_{12} = \frac{3\pm\sqrt{49}}{5} \Rightarrow W_{12} = \frac{3\pm 7}{5}$$

$$W_1 = \frac{3-7}{5} \rightarrow W_1 = \frac{-4}{5}$$

$$W_2 = \frac{3+7}{5} \rightarrow W_2 = 2$$

Y acá todavía no termina la cosa, porque no te olvides que teníamos que hallar X, y en realidad hallamos W... Ahora sabemos que W puede tomar 2 valores: $W_1 = \frac{-4}{5}$ $W_2 = 2$

Lo que hay que ver ahora es cuanto vale X, para cada valor de W:

Recordemos que $\mathbf{W = 2^X}$ (Ya que cuando pusimos "**W**" fue porque la reemplazamos por $\mathbf{2^X}$)

Para $W_1 = \frac{-4}{5}$

$$\Downarrow$$

$$2^X = \frac{-4}{5}$$ **Absurdo !**

... por mas que eleve 2 a cualquier potencia, nunca me va a dar un resultado negativo... Así que este resultado está descartado.

Para $W_2 = 2$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{2^X = 2} \Rightarrow \boxed{\mathbf{X = 1}}$$

Esta es la solución de la ecuación

Si bien encontré dos valores de W, en realidad sólo obtengo 1 valor "válido" de X.

by DaL-0r para TARINGA!

- **Hallar el valor de "x"**

1) $\log_4 64 = X$

2) $\log_{10} 1000 = X$

3) $\log_{10} 0,01 = X$

4) $\log_a a^2 = X$

5) $\log_3 81 = X$

6) $\log_2 \frac{1}{4} = X$

7) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = X$

8) $\log_2 \frac{1}{32} = X$

9) $\log_3 \frac{1}{27} = X$

10) $\log_{\frac{1}{32}} 2 = X$

11) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = X$

12) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = X$

13) $\log_{\frac{1}{2}} 1 = X$

14) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{128} = X$

15) $\log_5 \frac{1}{125} = X$

16) $\log_{125} 5 = X$

17) $\log_{16} \frac{1}{2} = X$

18) $\log_X 9 = 2$

19) $\log_X 5 = \frac{1}{2}$

20) $\log_X \left(\frac{1}{25}\right) = -2$

21) $\log_X \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

22) $\log_X \frac{1}{8} = -3$

23) $\log_X 16 = -4$

24) $\log_2 X = 3$

25) $\log_3 \frac{1}{X} = -2$

26) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{X} = \frac{1}{2}$

27) $\log_{\frac{16}{9}} \frac{X}{4} = -\frac{1}{2}$

28) $\log_{\frac{125}{27}} \frac{3}{5X} = -\frac{1}{3}$

29) $\log_{27} \frac{X}{5} = \frac{1}{3}$

30) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{2X}{3} = -\frac{1}{2}$

31) $\log_4 (x) = 0$

32) $\log_2 (x+1) = 0$

33) $4\log_2 (x-1) = 0$

34) $\log (x-1)^2 = 0$

35) $\log_2 \left(x^2 + 2x - 3\right) = 0$

36) $\log_2 \left(x^2 + 3x - 2\right) = 1$

37) $\log_2 (x+1) = -3$

38) $\log_3 (8x+9) = 4$

39) $\log_5 (13x-18) = 3$

40) $\log_3 (x-1) = -1$

41) $\log_{\frac{1}{2}} \left(6x^2 + 5x + \frac{5}{3}\right) = -2$

<u>Hallar el valor de "x"</u> (Estos dos ejercicios son muy fáciles, solo hay que mirarlos bien!!!)

42) $\log_{\left(\frac{2X^3-3X^2+4X-5}{\sqrt{5X^3+3+x-1}}\right)} [1] = X$

43) $\log_{\left(\frac{2+5\sqrt{3}}{7}\right)} \left[\frac{7}{2+5\sqrt{X}}\right] = -1$

44) $\log_{\left(\frac{-2\sqrt{3x}+4x^3}{5x^7+3}\right)} \left[\frac{1}{2}x\right] = 0$

- Realizar las cuentas **sin calculadora, aplicando las propiedades de logaritmos**:

45) $\log_{45} 5 + 2\log_{45} 3 =$

46) $2\log_{10} 4 + 2\log_{10} 5 - \frac{1}{2}\log_{10} 16 =$

47) $\log_{\frac{1}{2}} 20 - \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 125 =$

48) $\log_3 (5) \cdot \log_5 (3) =$

49) $\log_3 \left(\frac{49}{4}\right) \cdot \log_{\frac{7}{2}} (3) =$

50) $\log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{25}{9}\right) =$

- Realizar las cuentas **sin calculadora, aplicando las propiedades de logaritmos**:

51) $\log_{\frac{125}{9}}\left(\frac{729}{64}\right)\cdot\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{27}{125}\right) =$

52) $3^{\log_3(5)}$

53) $\frac{25}{16}^{\log_{\frac{4}{5}}\left(\frac{1}{3}\right)}$

54) $\log_{\frac{5}{3\sqrt{2}}}\left(\frac{18}{25}\right)$

55) $\log_{\frac{X+2}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}X^2+2X+2\right)$

56) $\log_{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+4x+4}\right)+\log_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\left(\frac{16}{9}\right)$

57) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\log_{\frac{4}{3}}(32)$

58) $\log_{10}\left(\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10}}}\right)$

59) $\log_{\frac{2\sqrt{3}}{5}}\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{5}\sqrt{\frac{5}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{12}{25}}}}\right)$

60) $\log_{\frac{1}{9}}2+\log_{\frac{1}{9}}8+2\log_{\frac{1}{9}}\frac{3}{4}$

61) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{5}{7}+2\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{28}-2\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

62) $\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3\sqrt[3]{3}}\right)$

63) $\log_{\sqrt[4]{2}}\left[\sqrt{\left(\sqrt{\sqrt{2}\sqrt[6]{2}}\right)^3}\right]$

- Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

64) $3^x+1=4$

65) $3^{x+1}-2=25$

66) $7^{x+3}-2=-1$

67) $3^{2x-1}=3$

68) $8^{x+1}=2^{2x+7}$

69) $5\cdot 2^x+2^x=24$

70) $3\cdot 2^x-2^x=1$

71) $8\cdot 3^{x+1}+3^{x+1}=1$

72) $2^{x+1}+2^x=12$

73) $5^{x+3}-5^{x+2}=4$

74) $3\cdot 2^{x^2-1}=3$

75) $8\cdot 2^{3x-1}+2^{3x}=\frac{5}{8}$

76) $4^{x+1}+4^{x+2}=1280$

77) $\frac{3}{32}\cdot 4^{x+2}-\frac{1}{8}\cdot 4^{x+1}=1$

78) $2^x\cdot 2^{x+1}=8$

79) $\frac{25}{3}\cdot 5^{3x-1}\cdot 5^{3-2x}=3$

80) $\frac{1}{5}\cdot\frac{3^{4x+2}}{3^{3x+1}}=\frac{1}{45}$

81) $7^x\cdot 7^{1-x}=5x+2$

- **Ecuaciones Exponenciales. Hallar X** (repasar bien ecuaciones de segundo grado)

82) $2^{2X}+5\cdot 2^X-14=0$

83) $3\cdot 5^{2X}-74\cdot 5^X-25=0$

84) $2\cdot 7^{2X}+5\cdot 7^{X+1}-37=0$

85) $5\cdot 2^{2X+1}-8\cdot 2^{X-2}=8$

86) $4^{(X+1)}+2^{(X+3)}=320$

87) $9^{(X-1)}+3^{(X+2)}=90$

88) $36^{(X-2)}+3\cdot 6^{(X-1)}=144$

89) $5\cdot 4^{(X-3)}-3\cdot 2^{(X+1)}=-43$

- **Mas ecuaciones**:

90) $2\ \log X = 1 + \log(x - 0{,}9)$

91) $3\log x - \log 32 = \log\left(\frac{x}{2}\right)$

92) $\log(X+1) - \log(X-1) = \log(2)$

93) $\log(X-2) + \log(X+3) = \log(6)$

94) $\log_2(X-1) = 6 - \log_2(3X+1)$

95) $\log_6(X-1) = 3 - \log_6(5X+1)$

96) $\log_{\frac{1}{X-1}}(X-1) = 5 - \log_{\frac{X}{2}}\left(\frac{5}{4}X^2 - 9\right)^3$

97) $\log_{X^2-1}\left(X^4 - 2X^2 + 1\right) = \log_{\sqrt[6]{X}}\sqrt[3]{(3X-4)}$

98) $8\left(\frac{\log_5 2}{\log_5 4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\log_5 9}{\log_5 3}\right) = \log_{\frac{5}{6}}\left(\frac{11}{12}X - 1\right)^3$

99) $\frac{\log_3 4}{\log_3 2} - \frac{\log_5 9}{\log_5\left(\frac{1}{3}\right)} = \log_{\frac{7}{3}}\left(\frac{5}{9}X - 1\right)^4$

100) $\log(X+1) + \log(X-2) = 1$

101) $-\left[\log\left(X^{-2}\right)\right]^2 - 5\log X = -\frac{3}{2}$

102) $\left[\log_3(X)^{\sqrt{5}}\right]^2 + \log_3\left(\frac{1}{X^3}\right) = 2$

103) $\left[\log_2(X)\right]^2 - 6\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right) = 4$

104) $\left[\log_2\left(\frac{1}{8}X + 1\right)\right]^2 - \log_2\left(\frac{1}{8}X + 1\right)^{-2} = 3$

105) $\log_{\frac{1}{2X-2}} X = \log_{(X+1)}\frac{1}{X+1}$

106) $\log_{\sqrt{2}}(X-2) = \log_2(2X-4)$

107) $\log_{\sqrt{X+1}}(X+3) = \log_{(X+1)}(15X+1)$

Sabiendo que: $\boxed{\log_a X = 2}$ $\boxed{\log_a Y = 3}$ $\boxed{\log_a Z = 4}$

Hallar :

108) $\log_a \sqrt{X.\,Y}$

109) $\log_a \sqrt{X}\ .\,Y$

110) $\log_a \sqrt{X.\,\sqrt{Z}}$

111) $\log_a \frac{X\,.\,Y}{Z}$

112) $\log_a \frac{X^3\,.\,Y}{Z^2}$

113) $\log_a \frac{\sqrt{X}\,.\,\sqrt[3]{Y}}{Z}$

114) $\log_a \frac{a\ X^3}{Y^2}$

115) $\log_Z\ X$

116) $\log_{aX}\frac{\sqrt{X}}{Z}$

117) $\log_{\left(a^2\sqrt{Z}\right)}\frac{\sqrt{a}}{Z}$

Últimas ecuaciones para hallar "x"

118) $2^{x+2}\cdot 4^{2x-1} = \frac{1}{32}$

119) $9^{4x-5}\cdot 27^{2-3x} = \sqrt{3}$

120) $4^{3x-4}\cdot 8^{3-\frac{4}{9}x} = \sqrt[3]{4}$

121) $5^{4x-5}\cdot 50^{2-3x} = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot 2^{3x}}$

by Dal-0r para TARINGA!

➢ **Fórmulas para resolución de problemas de aplicación**:

$$n = \frac{\log\left(\dfrac{V_f}{V_0}\right)}{\log(t)} \qquad t = \left(\frac{V_f}{V_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$V_f = V_0 \cdot (t)^n \qquad V_0 = \frac{V_f}{(t)^n}$$

$$t = 100\% + Crecimiento\,\%$$

- n = Cantidad de Períodos considerados
- t = Tasa (se calcula como 1 + "crecimiento porcentual")
- V_f = Es el Valor final
- V_0 = Es el valor inicial
- Crecimiento Porcentual = Es la variación porcentual que sufre la variable en cada período de tiempo (cada período considerado como "n")

➢ Ejercicios de aplicación:

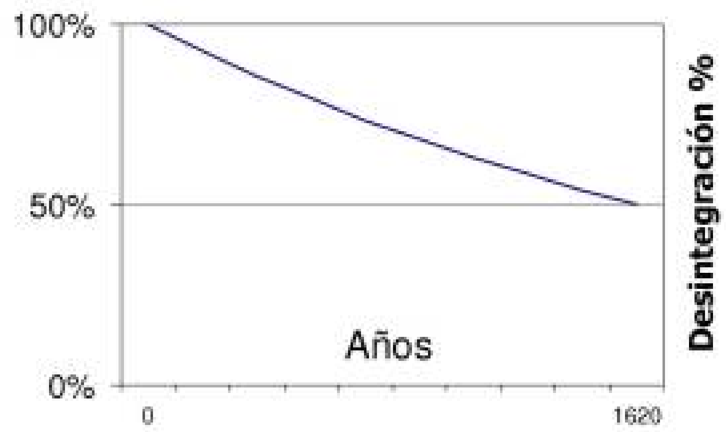
122) Sabiendo que la masa de Carbono 14 (remanente después de su desintegración), puede calcularse con la conocida fórmula: $\mathbf{M = M_0}$. $(70/79)^{\mathbf{t}}$ siendo "M_0", la masa inicial de carbono 14 y "t" el período de tiempo en miles de años. Calcular: A- La masa de carbono 14 de un organismo que en vida tuvo 200 gramos, si ya han pasado 10.000 años. B- El tiempo aproximado de un fósil que en vida tenía 200 gramos de carbono 14 y hoy tiene 76 gramos.

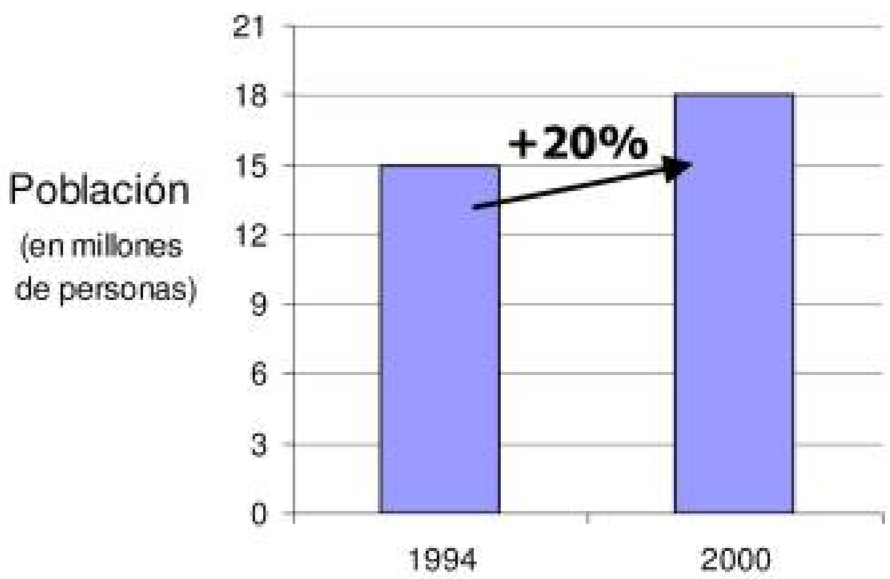
123) La masa de árboles de un bosque es de 5000 toneladas y por efecto de deforestación, decrece un 9% anual. A- ¿Cuál será la masa de árboles de dicho bosque al cabo de 25 años? B ¿Al cabo de cuánto tiempo quedará la mitad de la masa actual? C- ¿Cuál será la masa de árboles de este bosque dentro de 16 meses?

124) La población de cierto tipo de insecto en un ambiente crece a un ritmo de un 22% cada ocho días. A - ¿En cuánto tiempo dicha población será 25 veces mayor a la actual?

125) En la reacción química de combustión del Dióxido de Carbono, la velocidad de reacción cumple con la siguiente función exponencial: $f_{(t)} = 2\ e^t$, siendo t = tiempo de la reacción de la combustión. Se desea saber: A- ¿Cual es la velocidad de reacción de combustión en 2 seg.? B- Cual es el porcentaje de combustión del dióxido de Carbono habiendo transcurrido la mitad del tiempo de reacción?

126) Sabiendo que una determinada masa de Radio-226, tarda 1620 años en desintegrar la mitad de su masa, en forma exponencial. Hallar A) – La masa inicial de Radio-226, para que habiendo transcurrido 126 años hallan quedado 180 gramos. B) – EL porcentaje de pérdida de masa con respecto a la inicial al cabo de 1000 años

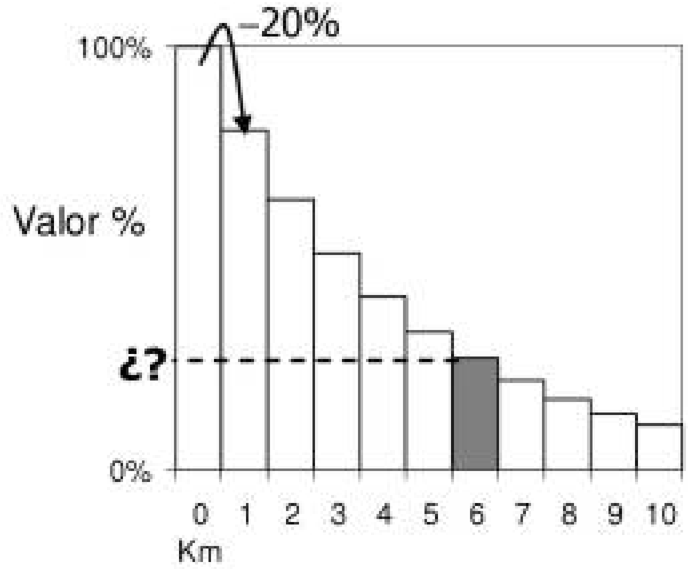




127) Según los censos realizados en un país, se observó que la población pasó de 15 a 18 millones de personas desde el año 1994 al año 2000. Como puede verse en el gráfico siguiente. Suponiendo que va a mantenerse constante (en forma porcentual) el ritmo de crecimiento de esa población: ¿Cuál sería la población estimada de ese país para el año 2018? ¿Y para el año 2021? ¿A partir de que año la población superaría los 50 millones?

Más Ejercicios de Aplicación:

128) Supongamos que los automóviles 0 km, se deprecian a un ritmo constante del 20% anual. Si un auto 0 km de determinada marca hoy cuesta \$20.000 ¿Cuál será su valor dentro de 6 años? ¿dentro de cuántos años este auto valdría menos de la mitad de lo que vale 0 km?



129) Imaginemos que el valor de una antigüedad aumenta un 20% cada 5 años que pasan. Si el valor actual de una antigüedad de este tipo es de \$100 ¿Cuál será su valor al cabo de 100 años? ¿Sería correcto suponer que al cabo de 200 años va a valer el doble de lo que va a valer al cabo de 100 años? Calcular entonces cuánto va a valer al cabo de 200 años y sacar conclusiones acerca de las funciones exponenciales.

130) Una persona piensa depositar en un banco una suma de \$50.000 y le ofrecen un interés mensual de un 0,8%, con lo cual cada mes que pasa, la cifra depositada va aumentando y se va sumando a la cifra a la cual se le van a sumar los intereses que le da el banco. Por otro lado, le ofrecen a la misma persona invertir sus ahorros en acciones de una empresa que le asegura que al cabo de cinco años, no solo recupera su inversión, sino que además le quedan \$22.000 de ganancia extra. ¿Qué le conviene hacer a esta persona, económicamente hablando? ¿Por qué?

Una determinada revista zonal de publicación mensual tiene actualmente una tirada de 200 ejemplares. El precio promedio de una publicidad en esta revista es de \$5.

131) Si su plan es aumentar un 20% esta tirada por cada mes que se publique. ¿En cuántos años llegarían a tener una tirada mensual de 1.000.000 de ejemplares?

132) Si su plan es aumentar un 40% esta tirada pero cada dos meses. ¿Para llegar a tener una tirada mensual de 1.000.000 de ejemplares, se tarda lo mismo que con un crecimiento del 20% por mes?

133) Si se lleva a cabo el primer plan de aumentar un 20% cada mes, y si el precio promedio de la publicidad en la revista es proporcional a la tirada. ¿Cuál sería entonces el precio promedio de la publicidad en la revista al cavo de 4 años exactos?

134) Teniendo en cuenta nuevamente que el precio de publicidad en la revista es proporcional a la tirada de la misma. ¿Cuál va a ser el precio de publicidad a los 8 meses de cumplido el plan de aumentar un 20% la tirada por mes?

135) Si la empresa que imprime la revista quiere lograr tener una tirada de 1.000.000 de ejemplares en tan solo 1 año y medio ¿Qué porcentaje tiene que crecer la tirada cada mes?

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

136) $\begin{cases} 2^{y}=2^{x+1} \\ 3^{y-1}=3^{2x-3} \end{cases}$

139) $\begin{cases} \log_2(x)+\log_2(y) = 3 \\ 3x-2y = -2 \end{cases}$

142) $\begin{cases} 4\cdot 2^{3x+y}= 4^{5-x} \\ \log_2(4x)+\log_2\left(\dfrac{y}{3}\right)=2 \end{cases}$

137) $\begin{cases} 5^{x+2y} = 5 \\ 2^{y+x} = 1 \end{cases}$

140) $\begin{cases} \log_2(x)+\log_2 y^3 = 7 \\ \log_2 \dfrac{x}{y} = -1 \end{cases}$

143) $\begin{cases} 3\cdot 3^{3x-y}= 1 \\ \log_5(2x+1)+\log_5(y-2)=2 \end{cases}$

138) $\begin{cases} 3^{x+1}\cdot 3^{y-4} = 9 \\ 2^{x-3}\cdot 2^{3y-1} = 8 \end{cases}$

141) $\begin{cases} \log x^2 = \log(y+3) \\ 2\log(x) - \log(4y)= 0 \end{cases}$

144) $\begin{cases} \log_7(3x-8)+\log_7(y+4)=2 \\ \log_5(x)-\log_5(y+2)=0 \end{cases}$

Ejercicios de Aplicación:

145) Si una máquina industrial para fabricar sobres que hoy cuesta $10.000, se deprecia de modo tal que, cada año que pasa el valor es del 95% de su valor anterior, es decir que cada año que pasa se deprecia un 5% del valor de ese año.
¿Luego de cuántos años el valor de la máquina se reducirá a menos de la mitad?

La población N(t) (En millones) de Estados Unidos, "t" años después de 1980 se puede aproximar mediante la fórmula: $N(t) = 227\, e^{0,007\,t}$

146) ¿Cuándo será la población mayor al doble de lo que era en 1980?

147) ¿Cuándo será mayor a 350 millones?

148) ¿Cuál será su población aproximada en el año 2011?

Veamos algunas ecuaciones logarítmicas más (Las últimas):

149) $\log(5x)^2 = 6$

150) $\dfrac{\log_2(2x+2)^2}{3} = 2$

151) $\log(4)\dfrac{\log_7(9x+4)^2}{\log(2)} = 2^3$

152) $\log_5(3x+1)+\log_5(x-3)=3$

153) $\log_3(11x+4)+\log_3(x-4)=5$

154) $5\log_4(x)-\log_4(x^3)=4$

155) $\log_2(x+2)+\log_2(5x+2)=8$

156) $\log_x(2x-2)+\log_x(3x-4)=2$

157) $\log_{3x-7}(5x+17)-\log_{3x-7}(x+13)=1$

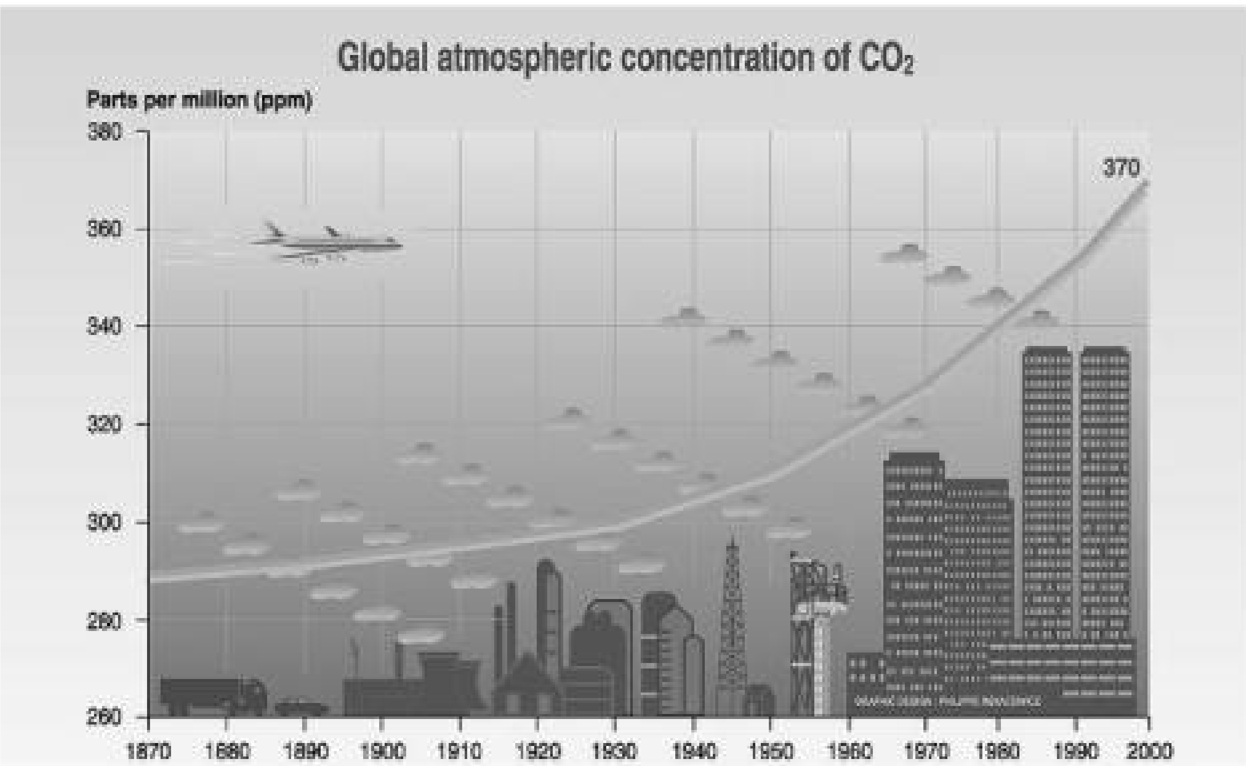
158) $\log_{2x-7}(x-2)+\log_{2x-7}(3)=2$

159) $\log_{x+2}(2x+1)+\log_{x+2}(3x)=2$

Últimos ejercicios de aplicación:

Un dato preocupante en la actualidad son los problemas ocasionados por las excesivas emisiones de dióxido de carbono a la atmósfera. En el año 1870 la cantidad de Partes por millón (ppm) de Co_2 en la atmósfera era de 288ppm, y en el año 2000 ya era de 370 ppm. Y se calcula que las emisiones aumentan en forma exponencial.

Hoy, hay cientos de organizaciones intentando concientizar a la población mundial sobre este flagelo, para que entre todos, haciendo un uso racional de la energía, podamos disminuir estas emisiones. Lo que vamos a hacer nosotros son unos cálculos para aprender matemática, pero no estaría mal tomar conciencia acerca del tema.



Fuente: Mauna Loa Observatory, Institution of Oceanography, University of California

160) Suponiendo que la concentración de CO_2 aumenta y seguirá aumentando en forma exponencial, calcular la tasa anual de crecimiento de esta concentración.

161) Calcular el valor de la concentración de CO_2 para el año 2050 con esta proyección exponencial.

162) calcular en qué año, la concentración de CO_2 será un 50% mayor a la registrada en 1870.

by Dal-0r
para
TARINGA!

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

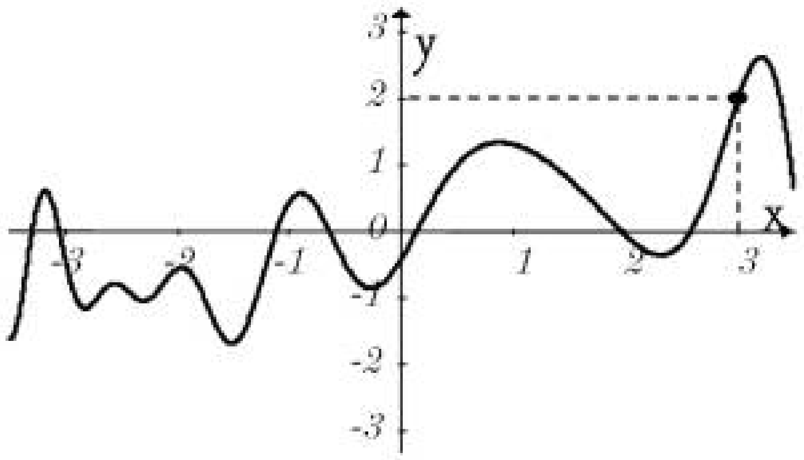
Título del Tema:

Límites
Nivel I

Número de Tema: **70**

Área: **Matemática**

☆ **¿Qué es un límite?** *Es el valor al cual "se aproxima" una función cuando "X tiende o se acerca cada vez más a un valor determinado"*



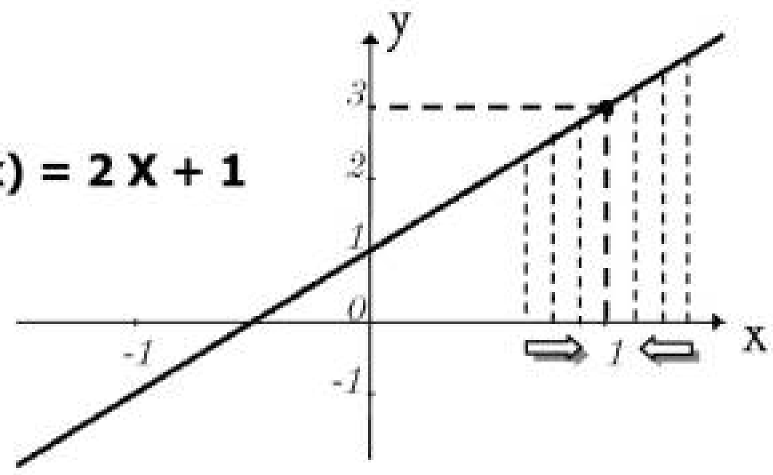
El límite de la función cuando "X Tiende a 3" es 2

$$\text{Límite}_{X\to 3} f(X) = 2$$

☆ **Límites Laterales**: Vamos a analizar la función: $f(x) = 2X + 1$

Veamos que pasa a medida que la X "se acerca al valor 1" Y vamos a usar para esto unas tablitas de valores, pero antes veamos que es esto de los límites laterales:

$f(x) = 2X + 1$

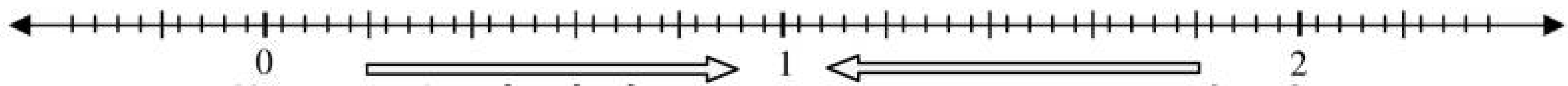


Para calcular el límite de la función para "X tendiendo a 1" tengo que acercarme a 1 por la izquierda y por la derecha

Así voy a tener dos límites:

- El límite para "X tendiendo a 1 por izquierda"
- El límite para "X tendiendo a 1 por derecha"

Para que EXISTA el Límite de la función en un punto**, los límites laterales deben ser iguales.**



Me acerco a 1 por **izquierda** | Me acerco a 1 por **derecha**

Nos acercamos a 1 desde la izquierda

X	Y
0	1
0,5	2
0,6	2,2
0,7	2,4
0,8	2,6
0,9	2,8
0,95	2,9
0,99	2,98

A medida que X se acerca a 1 "por izquierda" Y se acerca a 3

$$\text{Límite}_{X\to 1^-} f(X) = 3$$

Este es el límite de la función para **X** tendiendo a 1 **por izquierda**

Nos acercamos a 1 desde la derecha

X	Y
2	5
1,5	4
1,4	3,8
1,3	3,6
1,2	3,4
1,1	3,2
1,05	3,1
1,01	3,02

A medida que X se acerca a 1 "por derecha" Y se acerca a 3

$$\text{Límite}_{X\to 1^+} f(X) = 3$$

Este es el límite de la función para **X** tendiendo a 1 **por derecha**

Por último decimos que **como los límites laterales coinciden** –> **Existe el límite** de la función para "X tendiendo a 1" y vale 3.

☆ **Cálculo de límites**: Para calcular un límite hay que reemplazar la "X" por el valor al que quiero que "se acerque" (O sea el valor al cual tiende X)

Ejemplo: Calcular el límite de **$f(x) = 2X^2 + 3X - 2$** para X tendiendo a -2

$$\text{límite}_{X\to -2} f(X) = \text{límite}_{X\to -2} 2X^2 + 3X - 2 =$$

Reemplazo "X" por –2 $\Rightarrow$ $\text{límite}_{X\to -2} f(X) = 2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)-2 = 2\cdot 4-6-2$

$$\boxed{\text{límite}_{X\to -2} f(X) = 0}$$

Otro Ejemplo: $\lim\limits_{X \to 1} \dfrac{3X^2 - 1}{\sqrt{X+3}} \Rightarrow$

> Siempre lo primero que hago cuando tengo que calcular un límite es reemplazar "X" por el valor al cual "tiende el límite"

Entonces reemplazando X, me queda:

$$\lim_{X \to 1} \frac{3X^2 - 1}{\sqrt{X+3}} = \frac{3 \cdot (1)^2 - 1}{\sqrt{1+3}} = \frac{3-1}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{X \to 1} \frac{3X^2 - 1}{\sqrt{X+3}} = 1}$$

Límites Infinitos

A veces cuando calculamos un límite, nos da infinito

Ejemplos: $\lim\limits_{X \to 2} \dfrac{3X+4}{5X-10}$

$$\lim_{X \to 2} \frac{3 \cdot 2 + 4}{5 \cdot 2 - 10} = \frac{10}{0} \Rightarrow$$

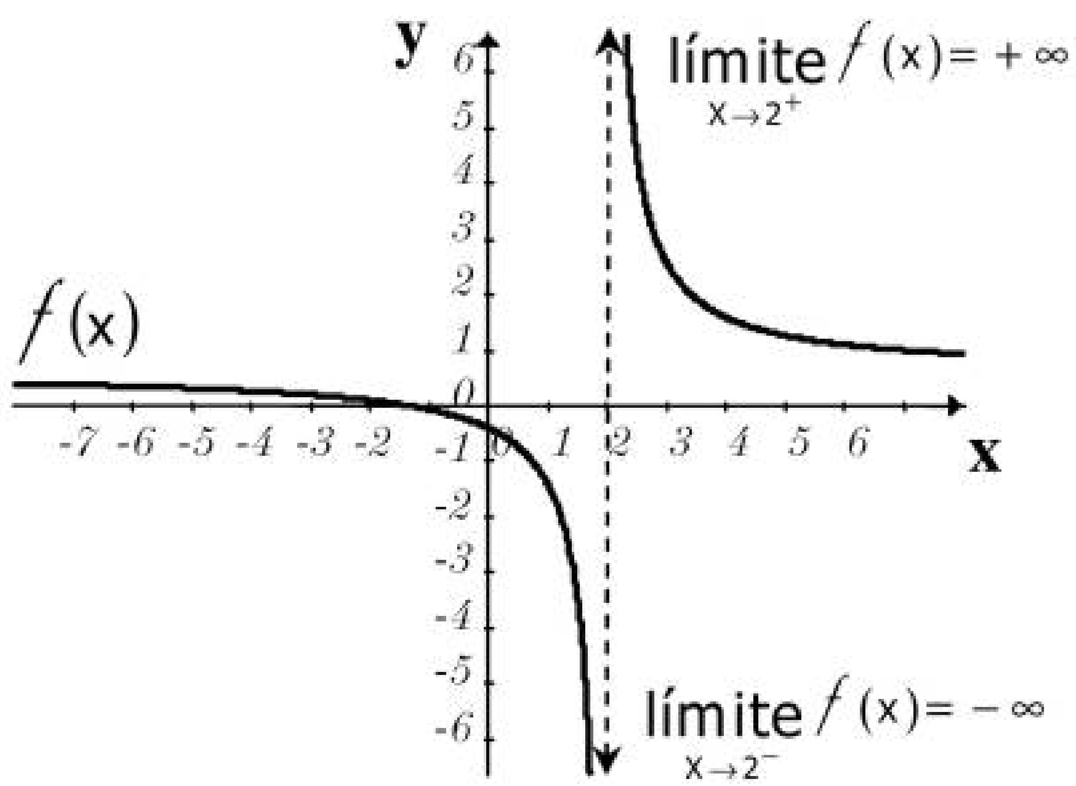
Y ahora, la pregunta es: ¿Cómo hago esta cuenta?

Ya sabemos que no existe la división por "CERO" Pero en realidad **no tenemos que dividir por "CERO"** Ya que lo que estamos calculando es un límite. **El denominador no es CERO, sino que TIENDE a CERO**

Veamos: Calculemos los límites laterales

$$\lim_{X \to 2^+} \frac{3X+4}{5X-10} = \frac{10}{0{,}0000000\,\text{"algo"}} = +\infty$$

$$\lim_{X \to 2^-} \frac{3X+4}{5X-10} = \frac{10}{-0{,}0000000\,\text{"algo"}} = -\infty$$



- Por lo tanto **el límite da infinito**

☆ Límites Indeterminados

Venía muy fácil ¿no? Bueno, ahora se va a complicar un poquito

Veamos que pasa si quiero calcular: $\lim\limits_{X \to 1} \dfrac{X^2 - 1}{X - 1}$

$$\lim_{X \to 1} \frac{X^2 - 1}{X - 1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado} \Rightarrow$$

> Esta cuenta no sólo no se puede hacer, sino que, además, **es indeterminada.**

Entonces la pregunta es: ¿Cuánto da ese límite?
Bueno para saber eso vamos a tener que resolver la **INDETERMINACIÓN**
Pero, antes que nada veamos cuáles son las indeterminaciones más comunes:

- **Las dos indeterminaciones más comunes son:**

$\Rightarrow$ $\dfrac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ **Infinito sobre Infinito** $\quad \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ **Cero sobre Cero**

Empecemos por analizar la primera indeterminación, la de **0 sobre 0**
Hay varias maneras de "salvar" la indeterminación (a continuación están las más comunes)

- Una es **factorear** el numerador y el denominador para poder simplificar el factor que genera la indeterminación.

➢ Si no se acuerdan muy bien de los casos de factoreo, cuando tenemos polinomios, pueden **dividir al numerador y al denominador** 0 del límite, **por el binomio "que lo hacen cero"** –> Aplicando **Ruffini** (tomando como término independiente del divisor al número al cual tiende "X", cambiado de signo).

➢ Hay veces que lo más fácil es **multiplicar al numerador y al denominador por "el conjugado"** de alguno de ellos (generalmente por el conjugado del que tenga una resta).

Volvamos al ejemplo anterior... $\lim\limits_{X \to 1} \frac{X^2-1}{X-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ Indeterminado

Ya sabemos que el límite es indeterminado, por lo tanto voy a tener que "Salvar" la indeterminación, para poder calcular el límite. Una de las maneras de salvar las indeterminaciones era factorear, bueno, vamos a ver como se "salva" la indeterminación del ejemplo, factoreando:

Vamos a factorear el numerador: ⇒ 5º Caso: **"Diferencia de Cuadrados"** ⇒ $\lim\limits_{X \to 1} \frac{X^2-1}{X-1} = \lim\limits_{X \to 1} \frac{(X+1)\cdot(X-1)}{X-1}$

Simplificamos ⇒ $\lim\limits_{X \to 1} \frac{(X+1)\cdot\cancel{(X-1)}}{\cancel{X-1}} = \lim\limits_{X \to 1} (X+1) = \boxed{2}$

Como ya se fue la indeterminación:
Reemplazo la "X" por 1

➢ *Habíamos dicho que había tres maneras básicas de eliminar las indeterminaciones de los límites que dan cero sobre cero, recién vimos un ejemplo sacando la indeterminación factoreando el denominador o numerador, bueno, ahora vamos a ver un ejemplo en el que vamos a sacar la indeterminación dividiendo por Ruffini, usando como divisor el factor de indeterminación.*

Veamos este límite: $\lim\limits_{X \to 3} \frac{X^3-4X^2+X+6}{X-3} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ Indeterminado

Usando Ruffini: Dividimos numerador y denominador por (X–3)

Dividimos por (X–3) porque es el factor de indeterminación, nos damos cuenta de esto por lo siguiente:

➢ Por un lado porque es el único factor del denominador (del numerador no sabemos porque no está factoreado)

➢ Y por otro lado porque si el límite tiende a 3, entonces, es seguro que el factor (X–3) va a tender a cero y puede generar una indeterminación.

$(X^3 - 4X^2 + X + 6) \,/\, (X-3) =$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -4 & +1 & +6 \\ 3 & & 3 & -3 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Me dio de resultado: $X^2 - X - 2$

$(X-3) \,/\, (X-3) = 1$

Por lo tanto, como dividí numerador y denominador por "lo mismo" me queda:

$$\lim_{X \to 3} \frac{X^3-4X^2+X+6}{X-3} = \lim_{X \to 3} \frac{X^2-X-2}{1}$$

Y ahora que se "fue" la indeterminación, puedo reemplazar la "X" por 3. ⇒ $\lim\limits_{X \to 3} \frac{X^2-X-2}{1} = \frac{3^2-3-2}{1} = 4$

Y llego a que, luego de salvada la indeterminación, el límite me da 4.

- *Y todavía nos falta ver un caso muy típico: cuando aparecen raíces. Creo que no hace falta decir que no es muy conveniente andar factoreando raíces o expresiones con raíces. Por lo general la mayoría de los límites indeterminados en los que aparecen raíces se resuelven multiplicando las expresiones de las raíces por sus expresiones conjugadas. Bueno ahora veamos un ejemplo de un límite con raíces para que quede mas claro como se resuelven...*

✰ Último ejemplo con la indeterminación: "Cero sobre Cero"

$$\lim_{X\to 2} \frac{3-\sqrt{X+7}}{2-X} = \frac{0}{0} \Longrightarrow \textit{Indeterminado}$$

El tema, ahora, es como calculamos este límite. Es decir, como "salvamos la indeterminación"

–> Y.... habíamos dicho que una de las maneras de hacer esto era multiplicar el denominador y el numerador por el conjugado de alguno de ellos.

–> Entonces, multipliquemos a ambos por el conjugado del numerador (a ver que pasa...)

$$\lim_{X\to 2} \frac{3-\sqrt{X+7}}{2-X} = \lim_{X\to 2} \frac{3-\sqrt{X+7}}{2-X} \cdot \frac{3+\sqrt{X+7}}{3+\sqrt{X+7}}$$

Fíjense que multiplicamos, arriba y abajo por **lo mismo**, de otra manera no se hubiera mantenido la igualdad.

⇨ Aplicando diferencia de cuadrados en el numerador, me queda:

$$\lim_{X\to 2} \frac{3-\sqrt{X+7}}{2-X} \cdot \frac{3+\sqrt{X+7}}{3+\sqrt{X+7}} = \lim_{X\to 2} \frac{(3)^2-\left(\cancel{\sqrt{X+7}}\right)^{\cancel{2}}}{(2-X)\cdot\left(3+\sqrt{X+7}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{X\to 2} \frac{9-(X+7)}{(2-X)\cdot\left(3+\sqrt{X+7}\right)} = \lim_{X\to 2} \frac{9-X-7}{(2-X)\cdot\left(3+\sqrt{X+7}\right)} = \lim_{X\to 2} \frac{\cancel{2-X}}{\cancel{(2-X)}\cdot\left(3+\sqrt{X+7}\right)} = \lim_{X\to 2} \frac{1}{3+\sqrt{X+7}} = \frac{1}{3+\sqrt{9}} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

Simplifico el factor que me genera la indeterminación.

✰ Indeterminación: **"Infinito sobre Infinito"**

Esta indeterminación se da **cuando la "X" tiende a Infinito** y por lo tanto tiende a infinito el numerador y el denominador al mismo tiempo.

Ejemplo: $\lim_{X\to\infty} \frac{3X^2+2X+1}{2X^2-1} = \frac{\infty}{\infty}$ *Indeterminado*

Otra vez, la cuenta es indeterminada, o sea que tengo que "salvar la indeterminación" Para ello, voy a **dividir numerador y denominador por "X" elevada al mayor exponente** que tenga:

$$\lim_{X\to\infty} \frac{3X^2+2X+1}{2X^2-1} = \lim_{X\to\infty} \frac{\frac{3X^2+2X+1}{X^2}}{\frac{2X^2-1}{X^2}} = \xrightarrow[\text{del "}X^2\text{"}]{\text{Distributiva}} \lim_{X\to\infty} \frac{\frac{3X^2}{X^2}+\frac{2X}{X^2}+\frac{1}{X^2}}{\frac{2X^2}{X^2}-\frac{1}{X^2}} = \lim_{X\to\infty} \frac{\frac{3\cancel{X^2}}{\cancel{X^2}}+\frac{2\cancel{X}}{X^{\cancel{2}}}+\frac{1}{X^2}}{\frac{2\cancel{X^2}}{\cancel{X^2}}-\frac{1}{X^2}}$$

Simplifico...

Y por último reemplazo las "X"

$$\lim_{X\to\infty} \frac{3+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{2-\frac{1}{\infty}} = \frac{3+0+0}{2-0} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Y llegué al resultado final del límite.

Ojo de no confundir los límites indeterminados con los límites que dan infinito o con los que dan cero, acá te mostramos unos ejemplos genéricos para un valor "m" cualquiera, como para refrescar esos conceptos rápidamente.

$$\lim_{X\to 0} \frac{X}{m} = \frac{0}{m} = 0$$

Límites que dan Infinito:

$$\lim_{X\to 0} \frac{m}{X} = \frac{m}{0} = \infty$$

Responder Verdadero o Falso:

1) El límite de una función en un punto es igual al valor de la función en dicho punto, siempre.
2) Si no existe la función en un punto, ya que ese punto no pertenece al dominio de la función, el límite siempre existe.
3) El límite de una función en un punto X_0 es el valor al cual tiende la función cuando "X" está en un entorno de X_0.
4) Todos los límites son indeterminados.
5) Hay distintos tipos de indeterminación, entre ellos "Cero sobre Cero"
6) Cuando en un límite me queda "3 sobre Cero" el límite es indeterminado, ya que no existe la división por cero.
7) Cuando en un límite me queda "3 sobre Cero" el límite da infinito.
8) $\underset{X\to 3^+}{\text{límite}} \frac{X^2+2}{X+2} = \underset{X\to 3^-}{\text{límite}} \frac{X^2+2}{X+2}$
9) Los límites laterales de una función en un punto siempre son iguales.
10) Si existe el límite de una función en un punto, deben coincidir los límites laterales de la función en dicho punto.

Calcular los siguientes límites:

11) $\underset{X\to 3}{\text{límite}} \frac{X+1}{X-2}$

12) $\underset{X\to 3}{\text{límite}} \frac{X-3}{X+3}$

13) $\underset{X\to \sqrt{3}}{\text{límite}} \frac{X^2+3}{X-\sqrt{3}}$

14) $\underset{X\to \sqrt{a}+1}{\text{límite}} \frac{3+X-\sqrt{a}}{2}$

15) $\underset{X\to \sqrt{2}+a}{\text{límite}} \frac{X^2-a^2-2}{2\sqrt{2}}$

16) $\underset{X\to a^2+1}{\text{límite}} \frac{X-a^2}{X-a^2-1}$

17) $\underset{X\to 0}{\text{límite}} \frac{1}{X}$

18) $\underset{X\to 0}{\text{límite}} \frac{X}{5}$

Más Límites para calcular: Calcularlos aproximando la "X" por izquierda y por derecha y luego, calcularlos más exactamente "salvando las indeterminaciones" (Recomendamos repasar Ruffini o Factoreo para estos límites)

19) $\underset{X\to 5}{\text{límite}} \frac{X^2-13X+40}{X^2-21X+80}$

20) $\underset{X\to 4}{\text{límite}} \frac{X^2+X-20}{X^2-17X+52}$

21) $\underset{X\to -4}{\text{límite}} \frac{X^2-6X-40}{X^2+16X+48}$

22) $\underset{X\to -9}{\text{límite}} \frac{X^2+18X+81}{X^2+7X-18}$

23) $\underset{X\to -1}{\text{límite}} \frac{X^2+10X+9}{X^2+10X+9}$

24) $\underset{X\to -1}{\text{límite}} \frac{X^2-9X-10}{X^2-6X-7}$

25) $\underset{X\to 4}{\text{límite}} \frac{X^2+6X-40}{X^2+3X-28}$

26) $\underset{X\to 1}{\text{límite}} \frac{X^3-5X^2-17X+21}{X^3+11X^2+15X-27}$

27) $\underset{X\to 6}{\text{límite}} \frac{X^3-36X}{X^3-23X^2+102X}$

28) $\underset{X\to 8}{\text{límite}} \frac{X^3-4X^2-44X+96}{X^3-12X^2+36X-32}$

29) $\underset{X\to 3}{\text{límite}} \frac{X^3-2X^2-9X-18}{X-3}$

30) $\underset{X\to -7}{\text{límite}} \frac{X^2+5X-14}{X^3-39X+70}$

31) $\underset{X\to 1}{\text{límite}} \frac{X^3-1}{X^2-1}$

32) $\underset{X\to -2}{\text{límite}} \frac{X^3+8}{X^2-4}$

33) $\underset{X\to -1}{\text{límite}} \frac{X^3+3X+3+1}{X^2-4X-5}$

Unos límites más:

34) $\underset{X\to 7}{\text{límite}} \frac{X^2-16X+63}{X^2-7X}$

35) $\underset{X\to -9}{\text{límite}} \frac{X^2-81}{X^2+27X+162}$

36) $\underset{X\to 9}{\text{límite}} \frac{X^2-X-72}{X^2-13X+36}$

37) $\underset{X\to 2}{\text{límite}} \frac{X^2-3X+2}{X^2-15X+26}$

38) $\underset{X\to -5}{\text{límite}} \frac{X^2+3X-10}{X^2-25}$

39) $\underset{X\to 8}{\text{límite}} \frac{X^2-18X+80}{X^2-19X+88}$

40) $\underset{X\to -7}{\text{límite}} \frac{X^2+14X+49}{X^2+8X+7}$

41) $\underset{X\to 2}{\text{límite}} \frac{\sqrt{3X}-\sqrt{6}}{X-2}$

42) $\underset{X\to 5}{\text{límite}} \frac{13-\sqrt{4X^2+69}}{X-5}$

43) $\underset{X\to 3}{\text{límite}} \frac{10-\sqrt{7X^2+37}}{X-3}$

44) $\underset{X\to \sqrt{a}}{\text{límite}} \frac{a-X^2}{X-\sqrt{a}}$

45) $\underset{X\to \sqrt{2}}{\text{límite}} \frac{2-X^2}{3-\sqrt{X^2+7}}$

46) $\underset{X\to \sqrt{3}}{\text{límite}} \frac{3-X^2}{4-\sqrt{X^2+13}}$

47) $\underset{X\to -2}{\text{límite}} \frac{X^2-4}{X-2}$

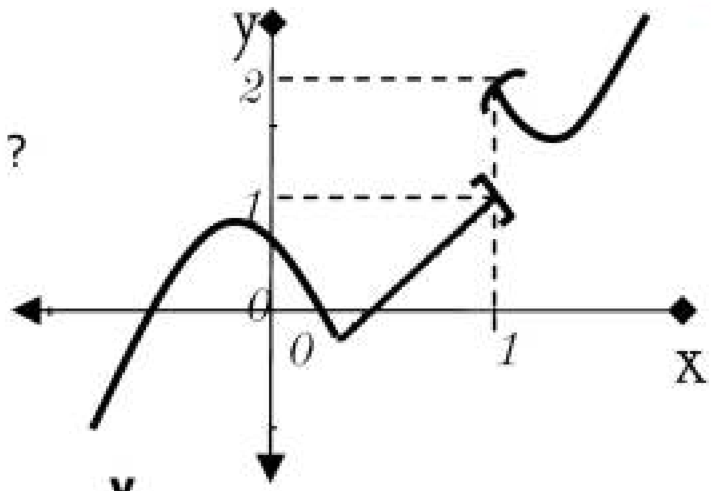
48) $\underset{X\to -2\sqrt{3a}}{\text{límite}} \frac{X^4-1}{X^2-1}$

49) $\underset{X\to 5}{\text{límite}} \frac{6-\sqrt{3x+7}}{X-5}$

50) $\underset{X\to -\sqrt{3}}{\text{límite}} \frac{X^2-3}{2-\sqrt{X^2+1}}$

51) $\underset{X\to 0}{\text{límite}} \frac{X}{1-\sqrt{X+1}}$

52) Dado el siguiente gráfico, que representa a la función $f(x)$



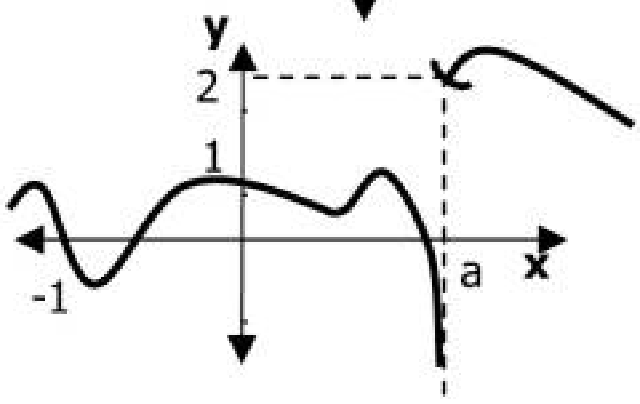
a) ¿Cuánto vale $\underset{X\to 1}{\text{límite}}\, f(x)$?

b) ¿Cuánto vale $\underset{X\to 1^+}{\text{límite}}\, f(x)$?

c) ¿Cuánto vale $\underset{X\to 1^-}{\text{límite}}\, f(x)$?

d) ¿Cuánto vale $f(1)$?

53) Dado el siguiente gráfico, que representa a la función $f(x)$



a) ¿Existe el $\underset{X\to a}{\text{límite}}\, f(x)$?

b) ¿Cuánto vale $\underset{X\to a^+}{\text{límite}}\, f(x)$?

c) ¿Cuánto vale $\underset{X\to a^-}{\text{límite}}\, f(x)$?

<u>Calcular los siguientes Límites con "x" tendiendo a infinito:</u>

54) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{x+1}{3}$

55) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{3}{2x-5}$

56) $\underset{X\to-\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{x+1}{x^2}$

57) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{x^2-1}{2x^2}$

58) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{3x^2+2x+1}{x^2-1}$

59) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{2x^3-2x^2+7}{2x^2+7x+1}$

60) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{8x^3-5x^2-3}{4x^3+x^2+x-1}$

61) $\underset{X\to-\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{6x^2+9x-12}{3x^2+3x+3}$

62) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{5x^3+3x^2+7x}{x^4-1}$

63) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{x^3+11x^2-3x+2}{x^3-7x^2-x}$

64) $\underset{X\to-\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{3x^2+5x+2}{x^3}$

65) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{x^3+4x^2+1}{x^3}$

66) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{7x^{11}+3x^7-x^3}{x^{12}-14x^{11}}$

67) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{2x^2+3x-1}{3x^2-5x}$

68) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{3-x^2}{x^2+1}$

69) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{2x-3x^2}{5x^2+7}$

<u>Dadas</u>: $f_{(x)} = x+1$ y $g_{(x)} = x^2-2x-3$ <u>Hallar</u>:

70) $\underset{X\to 0}{\text{límite}}\, \left(f_{(x)}+g_{(x)}\right)$

71) $\underset{X\to 1}{\text{límite}}\, \left(2f_{(x)}\right)$

72) $\underset{X\to 1}{\text{límite}}\, \left(-f_{(x)}\right)$

73) $\underset{X\to -1}{\text{límite}}\, \left(\dfrac{f_{(x)}}{2}\right)$

74) $\underset{X\to 0}{\text{límite}}\, \left(2f_{(x)}+g_{(x)}+1\right)$

75) $\underset{X\to 0}{\text{límite}}\, \left(f_{(x)}-2\,g_{(x)}-2\right)$

76) $\underset{X\to -1}{\text{límite}}\, \left(f_{(x)}\cdot g_{(x)}\right)$

77) $\underset{X\to -1}{\text{límite}}\, \left(\dfrac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\right)$

78) $\underset{X\to -1}{\text{límite}}\, \left(\dfrac{g_{(x)}}{f_{(x)}}\right)$

79) $\underset{X\to 3^+}{\text{límite}}\, \left(\dfrac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\right)$

80) $\underset{X\to 3^-}{\text{límite}}\, \left(\dfrac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\right)$

81) $\underset{X\to 3}{\text{límite}}\, \left(\dfrac{g_{(x)}}{f_{(x)}}\right)$

82) $\underset{X\to \infty}{\text{límite}}\, \left(\dfrac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\right)$

83) $\underset{X\to +\infty}{\text{límite}}\, \left(\dfrac{g_{(x)}}{f_{(x)}}\right)$

84) $\underset{X\to -\infty}{\text{límite}}\, \left(\dfrac{g_{(x)}}{f_{(x)}}\right)$

85) $\underset{X\to \infty}{\text{límite}}\, \dfrac{g_{(x)}}{\left(f_{(x)}\right)^2}$

<u>Dadas las siguientes igualdades, Hallar "a"</u>

86) $\underset{X\to 0}{\text{límite}}\, \dfrac{x+a}{x-1} = 1$

87) $\underset{X\to 0}{\text{límite}}\, \dfrac{x^2+ax}{x} = 3$

88) $\underset{X\to -1}{\text{límite}}\, \dfrac{x+a}{x^2-1} = \dfrac{-1}{2}$

89) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{ax+1}{2x} = -3$

90) $\underset{X\to 1}{\text{límite}}\, \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2a$

91) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{2x+a}{x+1} = a-1$

92) $\underset{X\to 1}{\text{límite}}\, \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} = \dfrac{a}{2}$

93) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{ax^3+x}{2x^2} = 0$

94) $\underset{X\to -1}{\text{límite}}\, \dfrac{x^2-1}{x+1} = a+1$

95) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{ax+5}{2x-5} = 5$

96) $\underset{X\to a}{\text{límite}}\, \dfrac{a\sqrt{x+a}}{x} = 1$

97) $\underset{X\to 0}{\text{límite}}\, \dfrac{x^3+ax}{3x} = 5$

98) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{3x^2+1}{ax^3+x} = \infty$

99) $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, \dfrac{x^2+2}{x^3+ax^3+1} = \infty$

100) $\underset{X\to a}{\text{límite}}\, \dfrac{ax+1}{2x-a} = 2$

101) $\underset{X\to a}{\text{límite}}\, \dfrac{x^2-a^2}{x-a} = 3$

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Límites
Nivel II

Número de Tema: **71**

Área: **Matemática**

✰ *Casos especiales de Límites*

- **Dos Límites trigonométricos importantes:**

$$\boxed{\lim_{X\to 0} \frac{Sen(X)}{X} = 1} \qquad \boxed{\lim_{X\to 0} \frac{Tg(X)}{X} = 1}$$

Nota: Antes de comenzar a resolver ejercicios de este tipo, recomiendo que se repasen las identidades trigonométricas básicas.

Ejemplo: $\lim_{X\to 0} \frac{X + Cos(\pi/2 - X)}{X}$

$$\lim_{X\to 0} \frac{X + Cos(\pi/2 - X)}{X} = \lim_{X\to 0} \frac{X}{X} + \frac{Cos(\pi/2 - X)}{X} = \overbrace{\lim_{X\to 0} \frac{X}{X}} + \overbrace{\lim_{X\to 0} \frac{Cos(\pi/2 - X)}{X}}^{\text{Separo al límite en dos}}$$

Primero hago la distributiva de la X que está dividiendo

$$\lim_{X\to 0} \frac{\cancel{X}^{1}}{\cancel{X}_{1}} + \lim_{X\to 0} \frac{Cos(\pi/2 - X)}{X} = 1 + \lim_{X\to 0} \frac{Sen(X)}{X} = 1 + 1 = \boxed{2}$$

Simplifico las X

Relación trigonométrica básica del primer cuadrante

Resultado final del límite.

- **Un Límite con la X como índice de una raíz:** Indeterminación ∞^0

$$\boxed{\lim_{X\to\infty} \sqrt[X]{X} = 1}$$

Nota: Por lo general los límites que tenemos que calcular no están así expresados, sino que tenemos que trabajar algebraicamente las expresiones para llegar a una expresión como la de esta fórmula. Veamos un ejemplo.

Ejemplo: Calcular $\lim_{X\to\infty} \sqrt[(x+2)]{2X+4}$

$$\lim_{X\to\infty} \sqrt[(x+2)]{2(X+2)} = \lim_{X\to\infty} \sqrt[(x+2)]{2} \cdot \sqrt[(x+2)]{(X+2)} =$$

⇧ Primero saco factor común 2 adentro de la raíz

⇧ Aplico distributiva de la raíz respecto del producto

$$\lim_{X\to\infty} \sqrt[(x+2)]{2} \cdot \lim_{X\to\infty} \sqrt[(x+2)]{(X+2)} = \lim_{X\to\infty} 2^{\frac{1}{X+2}} \cdot 1 = 2^0 \cdot 1 = 1 \, . \, 1 = \boxed{1}$$

⇧ Separo el límite en dos (el límite de un producto es igual al producto de los límites)

Este límite por la fórmula que vimos mas arriba, ya sabemos que da 1

Y este es el resultado final del límite.

Dos Límites exponenciales muy típicos: Indeterminación 1^{∞}

$$\boxed{\lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{1}{X}\right)^{X} = \mathbf{e}}$$

$$\boxed{\lim_{X\to 0}\left(1+X\right)^{\frac{1}{X}} = \mathbf{e}}$$

Nota: Por lo general los límites que tenemos que calcular no están así expresados, sino que tenemos que trabajar algebraicamente las expresiones para llegar a una expresión como la de estas fórmulas.
Los "trucos" típicos para trabajar estas expresiones son los que se denominan operaciones neutras, que son en realidad operaciones que no alteran el resultado. Algunas de estas son por ejemplo:

- Expresar los numeradores como denominadores y viceversa (Invirtiendo las fracciones)
- Multiplicar y Dividir por las mismas expresiones tanto al numerador como al denominador.
- Restar y sumar "1" o la expresión que sea conveniente.

Ejemplo: Calcular $\lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{2}{X+1}\right)^{3X+5}$

$$\lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{1}{X+1}\cdot\frac{2}{1}\right)^{3X+5} = \lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{1}{(X+1)\div 2}\right)^{3X+5} = \lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{1}{(X+1)/2}\right)^{\frac{(X+1)/2}{(X+1)/2}\cdot(3X+5)}$$

Si está multiplicando al numerador, es como si estuviera dividiendo al denominador

Multiplico y divido **por lo mismo** para que me quede una potencia igual a lo que tengo dentro del paréntesis

$$\lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{1}{(X+1)/2}\right)^{(X+1)/2\cdot\frac{(3X+5)}{(X+1)/2}} = \lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{1}{(X+1)/2}\right)^{(X+1)/2\cdot\frac{(3X+5)\cdot 2}{(X+1)}}$$

Agrupo el exponente de otra manera

El 2 que estaba dividiendo en el denominador, lo escribo multiplicando en el numerador

$$\lim_{(X+1)/2\to\infty}\left(1+\frac{1}{(X+1)/2}\right)^{(X+1)/2\cdot\frac{6X+10}{X+1}} = \lim_{(X+1)/2\to\infty}\left(1+\frac{1}{(X+1)/2}\right)^{\frac{(X+1)}{2}\cdot\left(\frac{\frac{6X}{X}+\frac{10}{X}}{\frac{X}{X}+\frac{1}{X}}\right)}$$

Si X tiende a infinito, (X+1)/2 también tiende a infinito, ya que infinito mas uno dividido dos es infinito

Y acá en el exponente resolvemos como si fuera uno de esos límites de infinito sobre infinito, o sea, dividimos todo por X

$$\Rightarrow \lim_{(X+1)/2\to\infty}\left(1+\frac{1}{(X+1)/2}\right)^{\frac{(X+1)}{2}\cdot 6} \Rightarrow \left[\lim_{(X+1)/2\to\infty}\left(1+\frac{1}{(X+1)/2}\right)^{\frac{(X+1)}{2}}\right]^{6} \Rightarrow \boxed{e^{6}}$$

Ya casi está. Esta expresión es similar a la fórmula que pusimos arriba, por lo tanto la expresión es igual a **e**

Como queda todo elevado a la 6, el límite es igual a e^{6}

by Dal-0r para TARINGA!

Resolver los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{Sen(x)+Cos(x)}{x.Cos(x)} =$

2) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{Sen(x)+Cos(x)}{x.Sen(x)} =$

3) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{Cos(x)\cdot Tg(x)}{x} =$

4) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{3x\ Co\,tg(x)-1}{x\cdot Co\,sec(x)} =$

5) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{Sec(x)\cdot Co\,tg(x)}{\dfrac{2x}{Sen^2(x)}} =$

6) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\left[Sen(x)+Cos(x)\right]^2-1}{x\cdot Cos(x)} =$

7) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{1-Cos^2(x)}{x} =$

8) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{2\,Cos^2(x)\cdot\left[Sec^2(x)-1\right]}{x.Sen(x)} =$

9) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{Tg^2(x)+1}{x\ .\ Co\,tg\ (x)\cdot Sec^2(x)} - x.Cos(x) =$

10) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{Sec^2(x)-Cos^2(x)}{\dfrac{x}{Sen^2(x)}} =$

11) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{Sen^2(x)+x\cdot Tg(x)}{x\cdot Sen(x)} =$

Hallar "k"

12) $\lim\limits_{X\to 2k} \dfrac{Sen(x)}{x} = 1$

13) $\lim\limits_{X\to 2k+6} \dfrac{Sec(x)\cdot tg(x)}{\dfrac{x}{Sen^2(x)}} = 0$

14) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{Sen(x)}{(k+2)\cdot x} = 1$

15) $\lim\limits_{X\to \sqrt{k}} \dfrac{Sen(x)+k^2}{x} = 1$

16) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{tg\,(x+k/2-\pi)}{x+k\dfrac{1}{2\pi}-1} = 1$

17) $\lim\limits_{X\to k-2} \dfrac{Cos(x)\cdot Tg(x)}{(k-1)\,x} = 1$

18) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{k-Cos^2(x)}{Sen(x)\cdot x} = 1$

19) $\lim\limits_{X\to 0} \left(2k+\dfrac{Sen(x)}{x}\right) = 6$

20) $\lim\limits_{X\to 0} \left(k-\dfrac{3\ Tg(x)}{2\,x}\right) = 8-3k$

21) $\lim\limits_{X\to -1} k+\dfrac{3\,Sen(x+1)}{x+1} = 6-k$

22) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{Sen^2(x)}{x} = k+1$

23) $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{1-Cos^2(x)+x.Tg(x)}{x\cdot Sen(x)} = 5k-8$

Hallar los límites:

24) $\lim\limits_{X\to\infty} \sqrt[x+1]{x+1} =$

25) $\lim\limits_{X\to\infty} \sqrt[x+1]{2x+2} =$

26) $\lim\limits_{X\to\infty} \sqrt[2x-1]{4x-2} =$

27) $\lim\limits_{X\to\infty} \sqrt[x-1]{x^2-1} =$

28) $\lim\limits_{X\to\infty} \sqrt[x]{x^3} =$

29) $\lim\limits_{X\to\infty} \sqrt[3x+1]{2x-6} =$

30) $\lim\limits_{X\to\infty} \sqrt[x]{2^x\,x^2} =$

31) $\lim\limits_{X\to\infty} \sqrt[x]{3^x\cdot 2x}$

Hallar los siguientes límites exponenciales

32) $\lim\limits_{X\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{X}\right)^{2X}$

33) $\lim\limits_{X\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2X}\right)^{X+1}$

34) $\lim\limits_{X\to\infty} \left(\dfrac{X+3}{X}\right)^{X}$

35) $\lim\limits_{X\to\infty} \left(\dfrac{X^2+1}{X^2}\right)^{X}$

36) $\lim\limits_{X\to\infty} \left(\dfrac{X^2+1}{X^2}\right)^{X^2}$

37) $\lim\limits_{X\to\infty} \ln\left(\dfrac{X+5}{X}\right)^{X}$

38) $\lim\limits_{X\to 0} (1+2X)^{\frac{1}{X}}$

39) $\lim\limits_{X\to 0} \left(\dfrac{X^2-1}{X-1}\right)^{\frac{1}{X}}$

40) $\lim\limits_{X\to 0} \left(\dfrac{3X+1}{X+1}\right)^{\frac{1}{X}}$

41) $\lim\limits_{X\to 0} \left(\dfrac{2X+1}{3X+1}\right)^{\frac{1}{4X}}$

42) $\lim\limits_{X\to 0} \left(\dfrac{5X+1}{2X+1}\right)^{\frac{3}{2X}}$

43) $\lim\limits_{X\to 0} \ln\left(\dfrac{11X+1}{4X+1}\right)^{\frac{5}{7X}}$

44) $\lim\limits_{X\to 0} \ln\left(2+\dfrac{3X-1}{X+1}\right)^{\frac{1}{4X}}$

45) $\lim\limits_{X\to 0} \ln\left(3-\dfrac{X+4}{5X+2}\right)^{\frac{2}{3X}}$

46) $\lim\limits_{X\to 0} \ln\left(2x+5+\dfrac{X+4}{X-1}\right)^{\frac{1}{X}}$

Hallar "k"

47) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{4X+1}{X+1} \right)^{\frac{\mathbf{k}}{3X}} = e^2$

48) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{5X+1}{2X+1} \right)^{\frac{6}{\mathbf{k}X}} = e^6$

49) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{7X+1}{3X+1} \right)^{\frac{1}{4\mathbf{k}X}} = \sqrt[4]{e}$

50) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{X+1}{3X+1} \right)^{\frac{\mathbf{k}+1}{X}} = \dfrac{1}{e^4}$

51) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{\mathbf{k}X} \right)^{X+1} = \sqrt{e}$

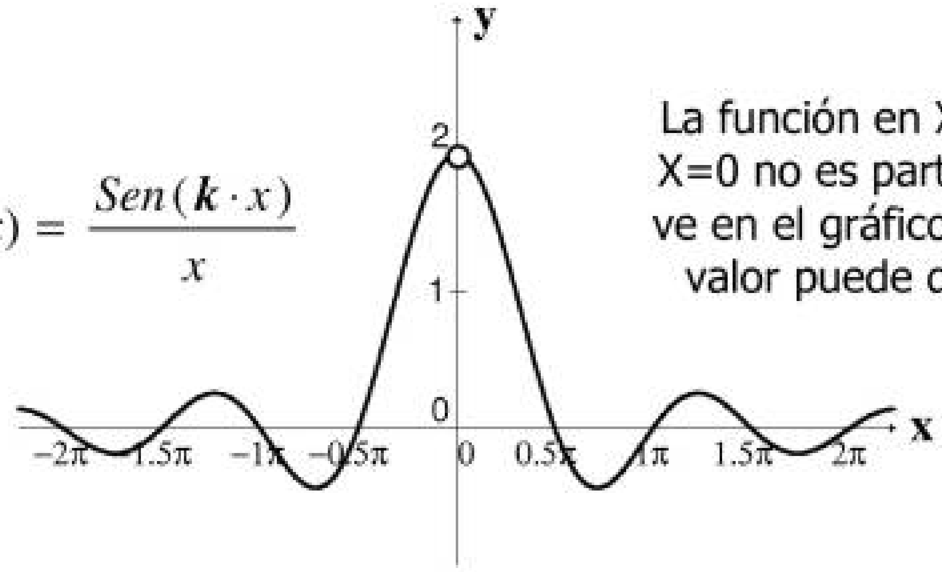
52) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{X+3}{(3\mathbf{k}-20)X} \right)^{X} = e^3$

53) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{3X+1}{\mathbf{k}X-2} + \dfrac{1}{X} \right)^{X} = e^2$

54) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{3X}{\mathbf{k}X+1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{X} \right)^{X} = \sqrt[4]{e}$

55) **Hallar "k"**

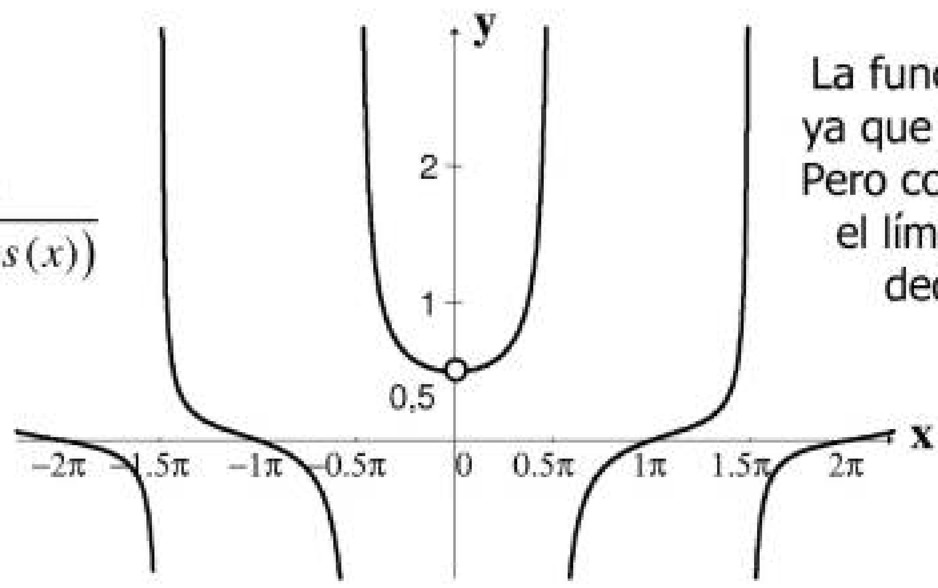
$$f(x) = \frac{Sen(\mathbf{k} \cdot x)}{x}$$



La función en X=0 no está definida, ya que X=0 no es parte del dominio. Pero como se ve en el gráfico, existe el límite en X=0 y su valor puede deducirse del gráfico de f(x)

56) **Hallar "k"**

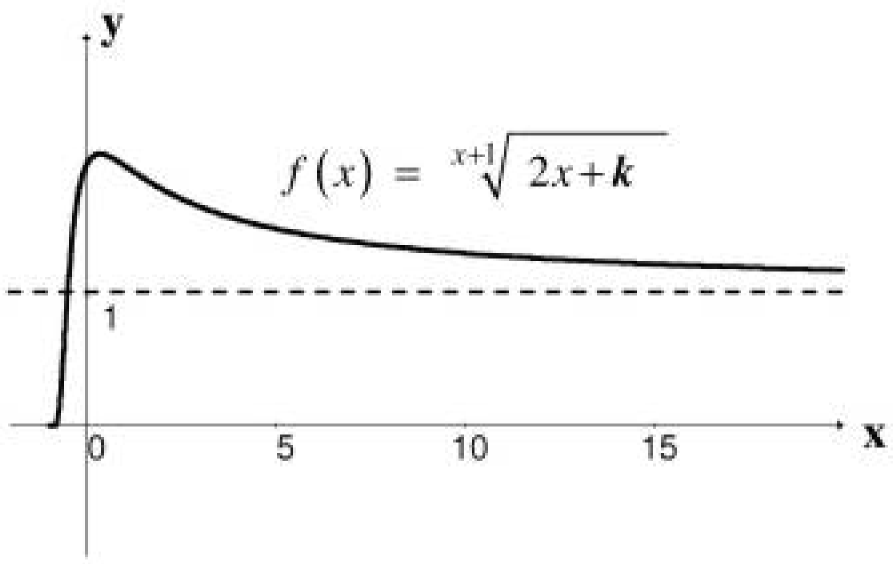
$$f(x) = \frac{1 - Cos^2(x)}{\mathbf{k} \cdot (x \cdot Sen(x) \cdot Cos(x))}$$



La función en X=0 no está definida, ya que X=0 no es parte del dominio. Pero como se ve en el gráfico, existe el límite en X=0 y su valor puede deducirse del gráfico de f(x)

57) **Hallar "k"**

$$f(x) = \sqrt[x+1]{2x + \mathbf{k}}$$



f(x) tiene asíntota horizontal en Y=1

by Dal-0r para TARINGA!

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Límites
Nivel III

Número de Tema: **72**

Área: **Matemática**

¿Cuándo una función es continua?

- Cuando es continua en todos los puntos de su Dominio.

Y ahora la pregunta es: **¿Cuándo una función es contínua en un punto?**
La respuesta es que para que una función sea continua en un punto se tienen que cumplir tres condiciones:

- Tiene que **existir el límite** de la función en ese punto
- Tiene que **existir la función** en ese punto
- El Valor de la función en el punto y el del límite, en ese punto: **DEBEN SER IGUALES**

Cuándo una función no cumple una de estas tres condiciones (cualquiera de ellas), la función es discontinua en el punto que no cumple la condición.

☆ **Clasificación de las discontinuidades:**

☆ Discontinuidades evitables:

- **Existe el límite y no está definida la función** en el punto → ①
- **Existen el límite y está definida la función, pero ambos valores NO COINCIDEN**→ ②

☆ Discontinuidades **NO** evitables

- **La función está definida, pero no existe el límite** (los límites laterales son distintos) → ③
- **La función no está definida, ni existe el límite** en el punto (o el límite es infinito) → ④

A su vez las funciones discontinuas No evitables se pueden clasificar en:

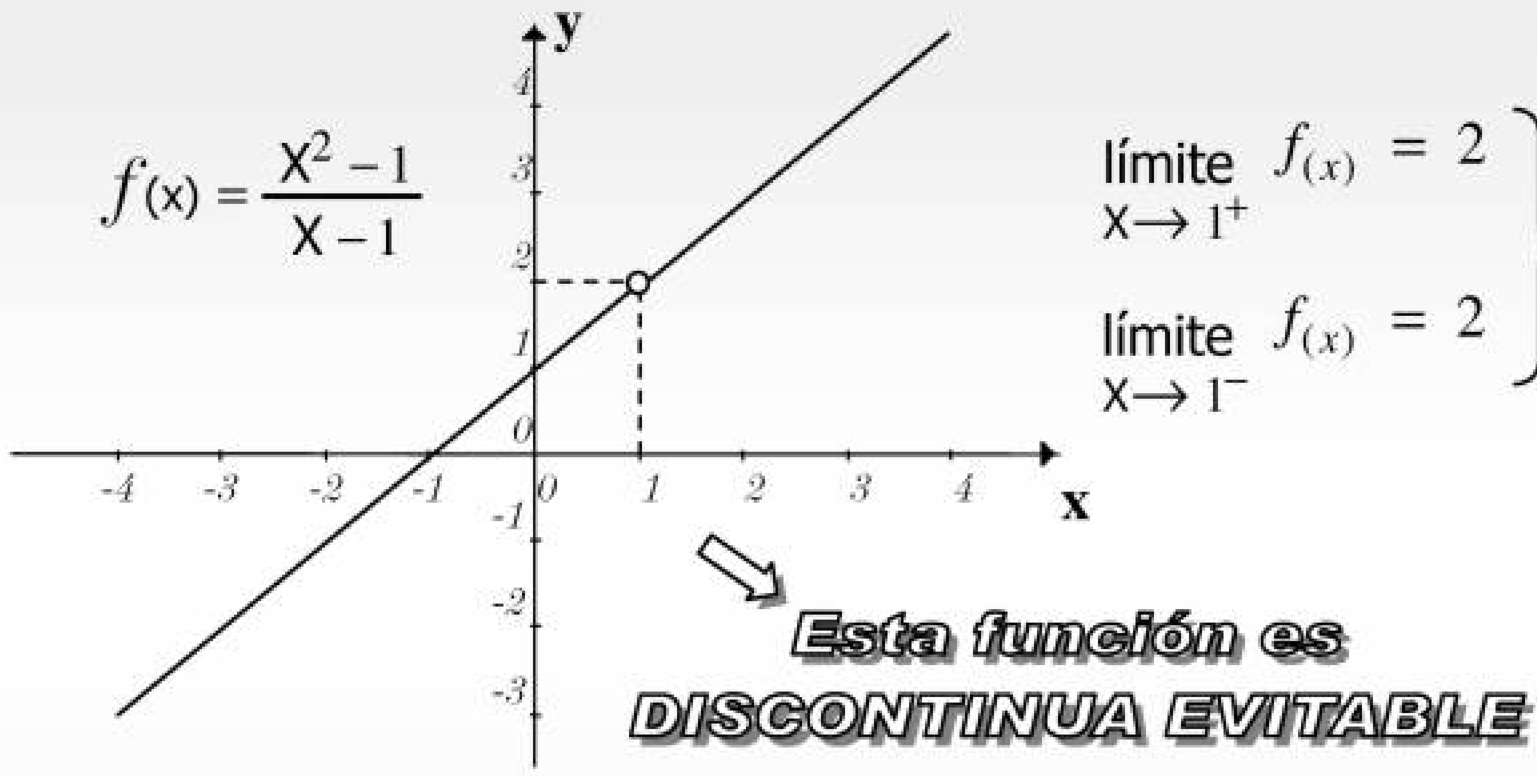
- Discontinuas no evitables de salto finito.
- Discontinuas no evitables de salto infinito.

Veamos ahora un ejemplo de cada tipo de discontinuidad en un gráfico:

①→ **Existe el límite y NO está definida la función en el punto.**

$\boxed{f(1) = \nexists}$

$$f(x) = \frac{X^2 - 1}{X - 1}$$



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{X \to 1^+} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{X \to 1^-} f(x) = 2 \end{array}\right\} \boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 2}$$

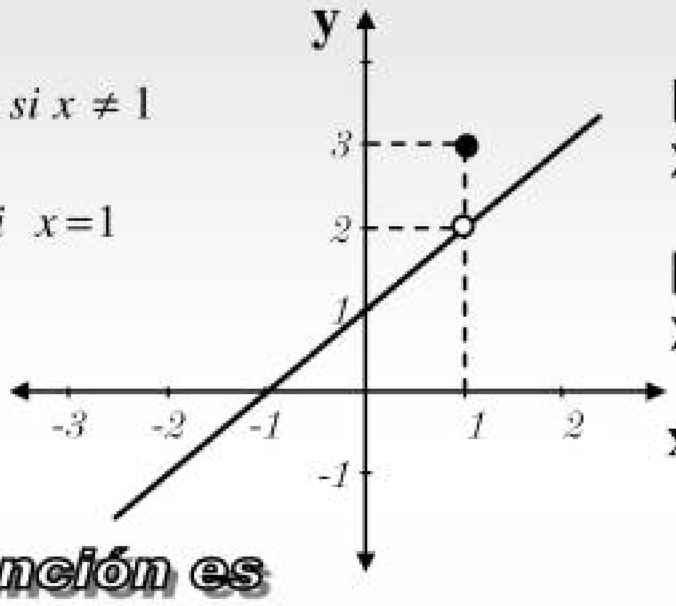
☆ En este ejemplo se ve claramente que **la función no está definida en X=1**, ya que con ese valor el denominador es Cero y por lo tanto el punto no es parte del dominio.

☆ Por otro lado se ve que **el límite sí existe en X=1** ya que existen los límites laterales y son iguales.

Por lo tanto la discontinuidad es EVITABLE

② → Existe el límite y está definida la función, pero los valores SON DISTINTOS.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{X^2-1}{X-1}\dots\ si\ x\neq 1\\ 3\dots\dots\ si\ \ x=1\end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l}\text{límite}\ f_{(x)}=2\\ \text{X}\to 1^+\\ \text{límite}\ f_{(x)}=2\\ \text{X}\to 1^-\end{array}\right\}$$

$f(1)=\boxed{3}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\boxed{2}$

Esta función es DISCONTINUA EVITABLE

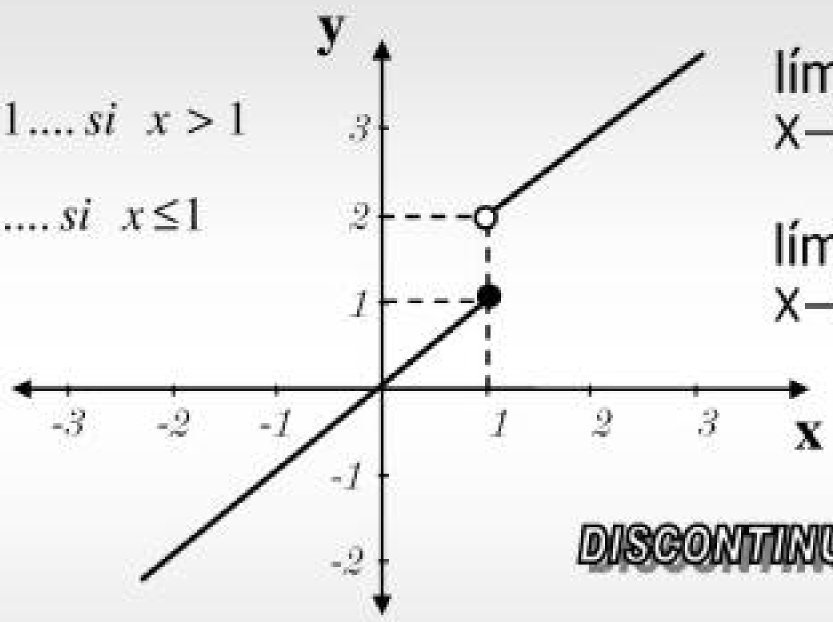
Como vemos, existe la función en el punto (X=1) y vale **3** También existe el límite de la función en ese punto pero vale **2**

- ☆ En este ejemplo se ve claramente que **la función está definida en X=1**, por definición de f(x) en este ejemplo, la función en X=1 vale 3
- ☆ Por otro lado se ve que **el límite también existe en X=1** ya que existen los límites laterales y son iguales, pero la función es discontinua porque no vale lo mismo el límite que la función en X=1.

Por lo tanto la discontinuidad es EVITABLE

③ → Está definida la función en el punto, pero NO existe el límite.

$$f(x)=\begin{cases}X+1\dots\ si\ \ x>1\\ X\ \dots\ si\ \ x\leq 1\end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l}\text{límite}\ f_{(x)}=2\\ \text{X}\to 1^+\\ \text{límite}\ f_{(x)}=1\\ \text{X}\to 1^-\end{array}\right\}$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\nexists$

$f(1)=1$

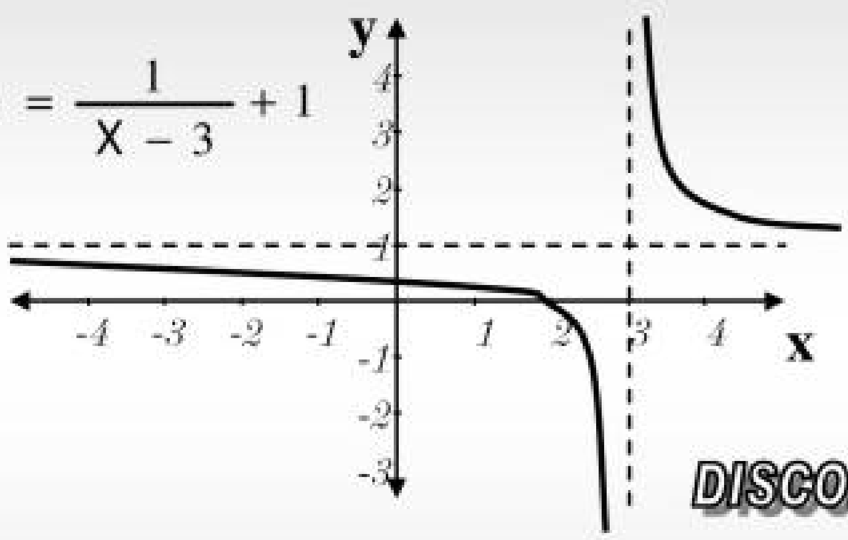
Esta función es DISCONTINUA NO EVITABLE - SALTO FINITO

- ☆ En este ejemplo **la función está definida en X=1**, por f(x)=X, entonces en X=1 vale f(1)=3
- ☆ **El límite <u>NO</u> existe en X=1** ya que los límites laterales son distintos.

Por lo tanto la discontinuidad es NO EVITABLE. Salto Finito

④ → NO Existe el límite y NO está definida la función en el punto.

$$f(x)=\frac{1}{X-3}+1$$



$$\left.\begin{array}{l}\text{límite}\ f_{(x)}=+\infty\\ \text{X}\to 3^+\\ \text{límite}\ f_{(x)}=-\infty\\ \text{X}\to 3^-\end{array}\right\}$$

$f(3)=\nexists$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\nexists$

Esta función es DISCONTINUA NO EVITABLE - SALTO INFINITO

- ☆ En este ejemplo **la función <u>NO</u> está definida en X=3**, (X=3 No es parte del dominio de f(x))
- ☆ **El límite <u>NO</u> existe en X=3.**

Por lo tanto la discontinuidad es NO EVITABLE. Salto Infinito

Antes que nada, unos de VERDADERO O FALSO
Justificar cada punto, o dar un contraejemplo en los casos falsos.

1) La existencia del límite es condición **necesaria** para que una función sea continua en un punto.
2) Que exista el límite es condición **necesaria y suficiente** para que una función sea continua en un punto
3) Si una función es continua en $X_0 \Rightarrow$ el límite para "X" tendiendo a X_0, es igual a $f(X_0)$
4) Para que una función presente una discontinuidad no evitable de salto infinito, debe verificarse obligatoriamente que no exista el límite de esa función en ese punto.-
5) y = Tg x no es continua en los puntos $\mathbf{x = \pi/2 + k\pi}$. (con k perteneciente a los enteros)-
6) La función f(x) = 1/x tiene una discontinuidad evitable en x = 0.
7) Si una función es partida, seguro es discontinua.
8) La función f(x) = 1/(x+2) es discontinua en X=2
9) La función f(x) = 1/(x+2) es discontinua no evitable en X=−2
10) Todas las funciones lineales F(x) = a . x + b son continuas para cualquier valor de "x"
11) Todas las funciones cuadráticas $F(x) = a . x^2 + b . x + c$ son continuas para cualquier valor de "x"
12) Todas las funciones homográficas F(x) = a / (b . x + c) son continuas para cualquier valor de "x"
13) Todas las funciones homográficas F(x) = a / (b . x + c) son discontinuas en algún valor de "x"
14) Las funciones homográficas F(x) = 1/(b.x+c) son discontinuas no evitables en X=−c/b
15) Cualquier función polinómica de cualquier grado es siempre continua para cualquier valor de x.
16) Las funciones logarítmicas F(x) = Log (a.x + b) son siempre continuas para cualquier valor de x.
17) Las funciones exponenciales $F(x) = a^{x+b} + c$ son continuas para cualquier valor de x.
18) Las funciones logarítmicas F(x) = Log (a.x + b) son discontinuas cuando x = −b/a
19) Todas las funciones racionales F(x) = P(X)/Q(x) siempre son discontinuas en algún valor de "x" (Siendo P(x) y Q(x) dos polinomios cualesquiera de grado mayor a 2)

Clasificar la discontinuidad de la siguientes funciones.
Analizar el tipo de discontinuidad que presentan en los puntos pedidos, a partir del gráfico de la función.
Es recomendable construir de manera aproximada la gráfica para realizar esto.

20) $f(x) = \dfrac{X^2}{x+1}$ en $X = -1$

21) $f(x) = \dfrac{X-1}{x^2}$ en $X = 0$

22) $f(x) = \dfrac{X-1}{x^2-1}$ en $X = 1$

23) $f(x) = \dfrac{X-1}{x^2-1}$ en $X = -1$

24) $f(x) = \begin{cases} 2X+1 & \text{si } -1 > X \\ -2 & \text{si } X \geq -1 \end{cases}$ en X= −1

25) $f(x) = \dfrac{X^2-2X+1}{x^2-1}$ en X = −1

26) $f(x) = \dfrac{X^2-2X+1}{x^2-1}$ en X = 1

27) $f(x) = \begin{cases} X^2 - \frac{1}{4} & \text{si } \frac{1}{2} > X \\ \frac{1}{X} - 2 & \text{si } X > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } X = \frac{1}{2} \end{cases}$ en $X = \frac{1}{2}$

28) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}X^2 + 2X - 1 & \text{si } 2 > X \\ \frac{1}{\sqrt{X+2}} + 2 & \text{si } X \geq 2 \end{cases}$ en X = 2

29) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(X) & \text{si } \pi/2 > X \\ \cos(X) & \text{si } X \geq \pi/2 \end{cases}$ en $X = \pi/2$

30) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{X}{2} + \pi\right) & \text{si } 0 > X \\ 2\cos(X-\pi) + 2 & \text{si } X > 0 \\ 1 & \text{si } X = 0 \end{cases}$ en X = 0

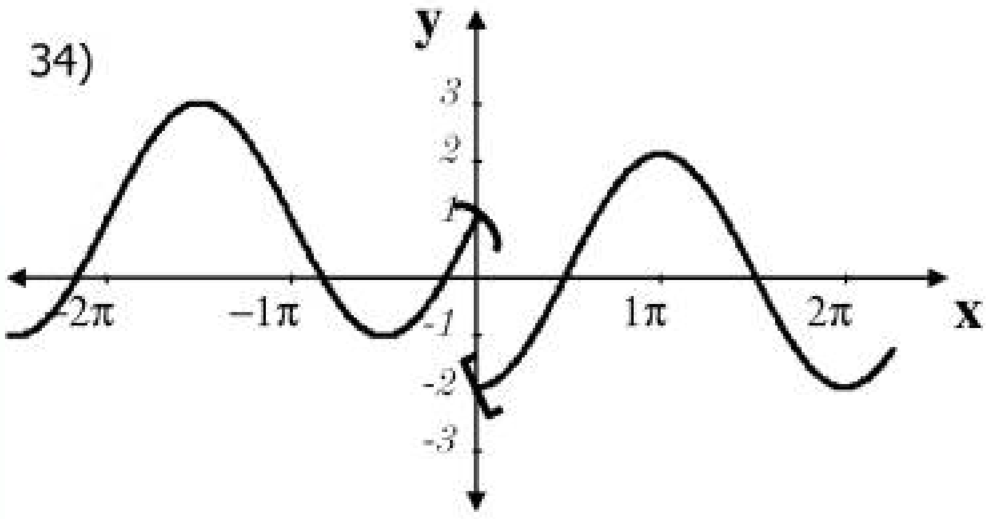
31) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(X + \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } \frac{\pi}{2} > X \\ \text{Tangente}(X) & \text{si } X \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ en $X = \dfrac{\pi}{2}$

32) $f(x) = \begin{cases} X^2 - 2X + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 4x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en x = 2

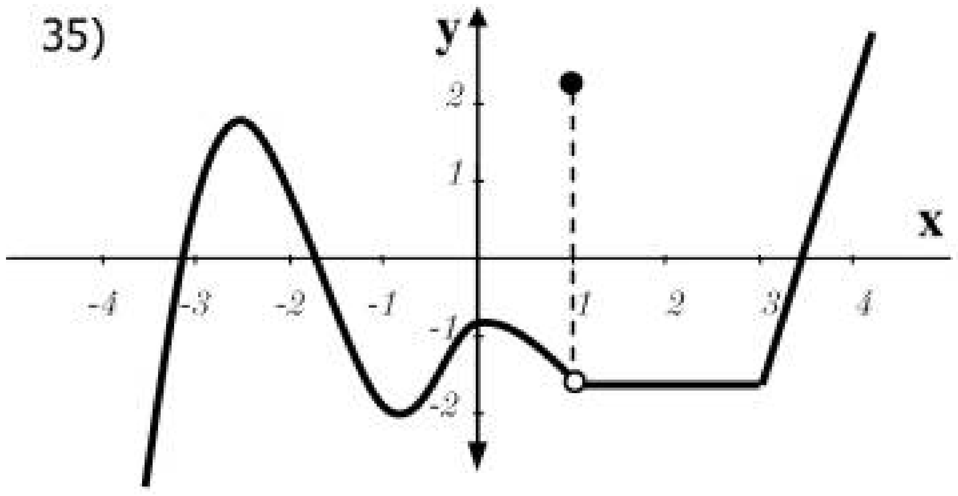
33) $f(x) = \begin{cases} (X+3)^2 - 7 & \text{si } x < 1 \\ 5x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en x = 1

Dados los siguientes gráficos decir si las funciones son continuas o discontinuas, en caso de ser discontinuas, indicar, en que punto es discontinua y clasificar la discontinuidad:

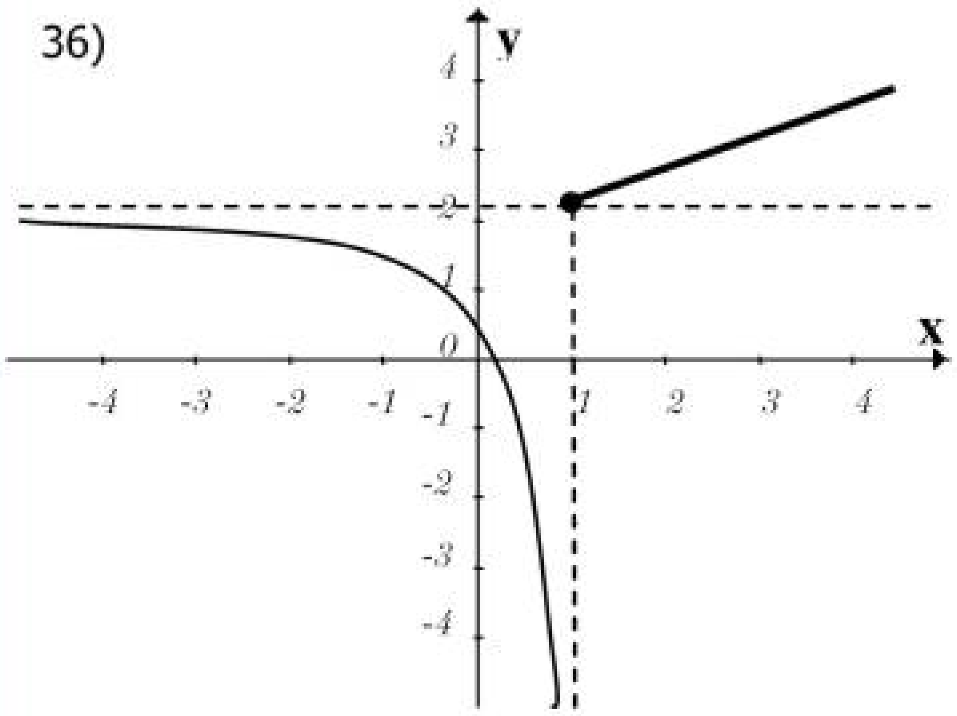
34)



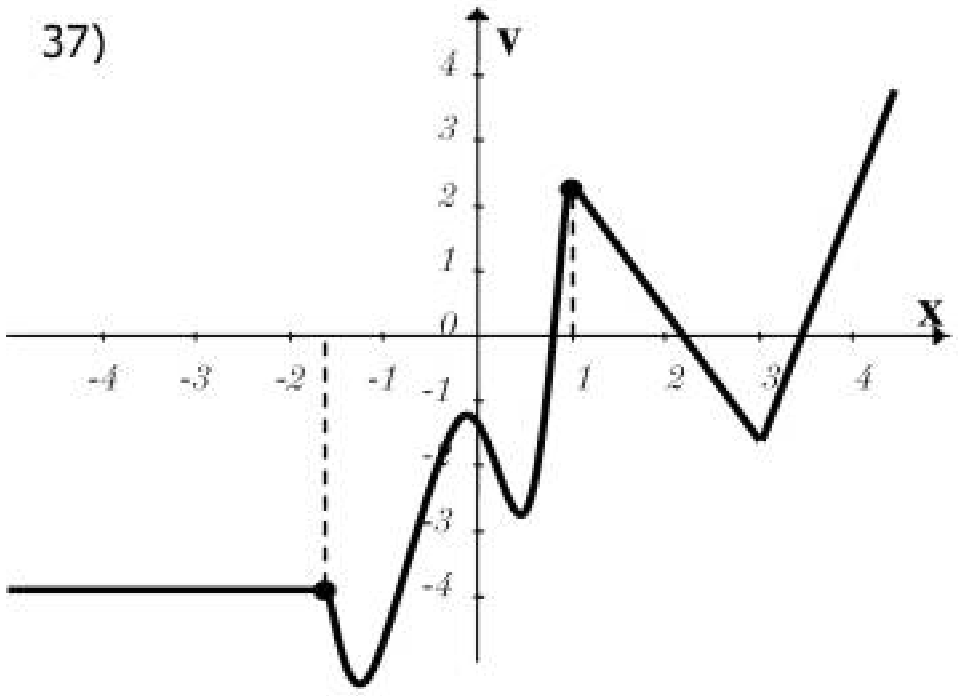
35)



36)



37)



38) Hallar "k" para que f(x) sea continua "para todo X"

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(X+\dfrac{\pi}{2}\right) + 2k & \text{si } \dfrac{\pi}{2} > X \\ 2\cos\left(X-\dfrac{\pi}{2}\right) & \text{si } X \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

39) Hallar "k" $\in (-1;1)$ / $f_{(x)}$ sea continua en $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(2X-\dfrac{\pi}{2}\right) + 2\arccos\left(\dfrac{k}{2}+1\right) & \text{si } \dfrac{\pi}{2} > X \\ 2\cos\left(X-\dfrac{\pi}{2}\right) - 1 & \text{si } X \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

40) ¿Es verdadero afirmar que para los valores positivos de "K" se verifica que $f(x)$ es continua para todos los reales positivos? $f(x) = \dfrac{X^2 - k}{X + k}$

41) ¿Es verdadero afirmar que hay infinitos valores de "K" para los cuales se verifica que $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable? $f(x) = \dfrac{X^2 - k}{X + k}$

42) ¿Es verdadero decir que el dominio de la función Y= Tg(x), es el conjunto de valores (que puede tomar la variable independiente "X"), para los cuales la función es continua?

43) ¿Es verdadero afirmar que para cada valor de "K", hay dos valores de "X", para los cuales se verifica que $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable? $f(x) = \dfrac{X^2 + k}{X^2 - k}$

44) ¿En cuántos puntos $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable? $f(x) = \dfrac{X^2 + 2}{X^2 - 1} \cdot \dfrac{1}{X}$

45) ¿Para cuántos valores pertenecientes al conjunto de los números reales, se puede decir que $f(x)$ es discontinua? $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{X}}$

46) ¿Para cuántos valores pertenecientes al conjunto de los números reales, se puede decir que $f(x) = Tg(x)$ es discontinua?

Dado el siguiente gráfico de la función $f(x)$

47) ¿En Cuántos puntos $f(x)$ es discontinua?

48) ¿En Cuántos puntos $f(x)$ es discontinua Evitable?

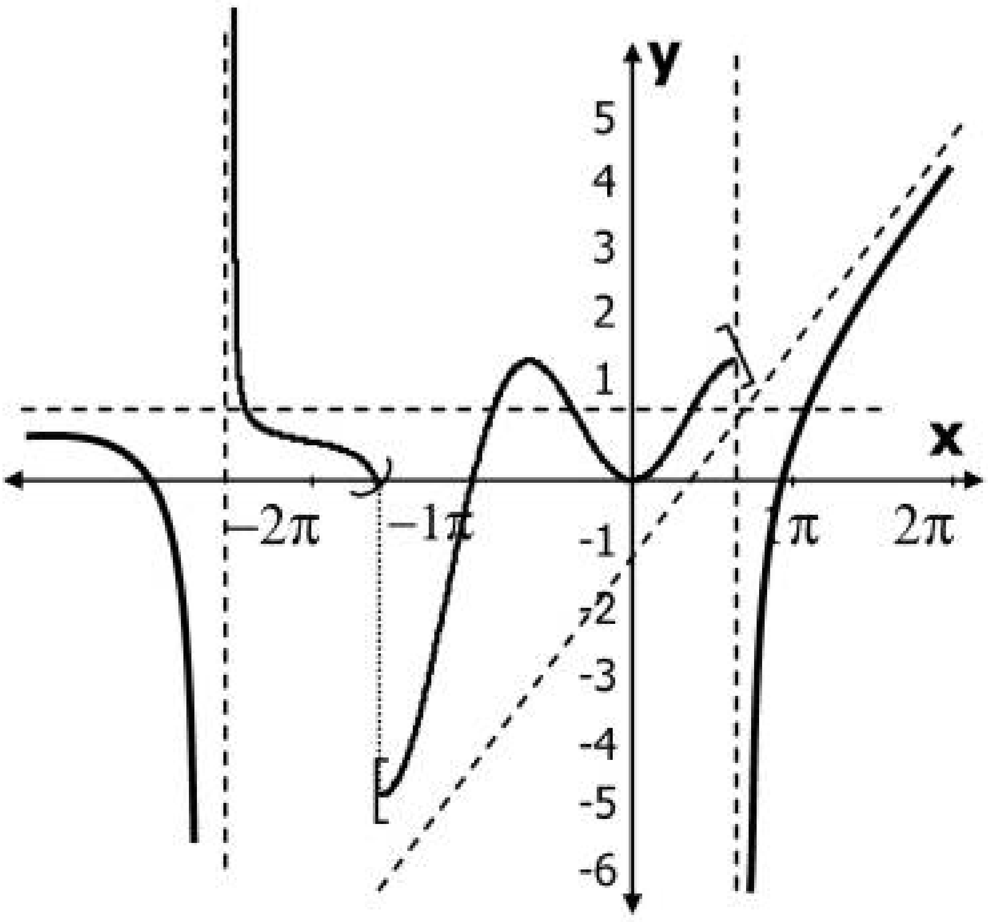
49) ¿En Cuántos puntos $f(x)$ es discontinua No Evitable?

50) ¿En Cuántos puntos $f(x)$ es discontinua No evitable, con salto finito?

51) ¿En Cuántos puntos $f(x)$ es discontinua No evitable, con salto infinito?

52) ¿En Cuántos puntos no existe la función?

53) ¿En Cuántos puntos no existe el límite?



54) ¿Se puede decir que toda función para la cual se verifique: $\underset{x \to k}{\text{límite}}\, f(x) = f(k) \quad \forall\, k \in \Re$

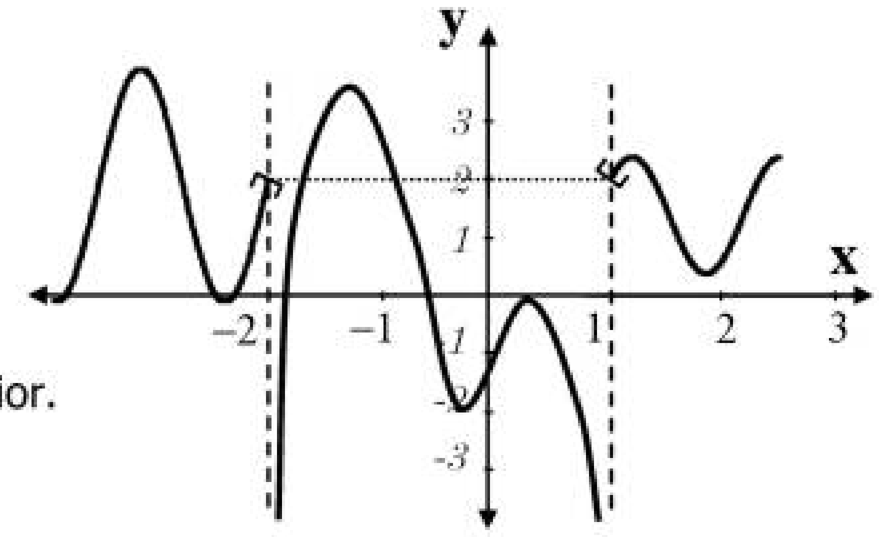
No tiene ningún punto discontinuo, ni evitable, ni no evitable, ya que es continua para todos los reales?

Dada la siguiente gráfica de f(x)

55) Para qué valor/es de "x" la función es continua?

56) ¿Para que valor/es de "x" la función es discontinua?

57) Clasificar los puntos de discontinuidad del punto anterior.



58) Dada f(x) tal que: $\left\{ \begin{array}{ll} \underset{x \to 1^-}{Límite}\, f(x) = 2 & \\ & f(1) = 2 \\ \underset{x \to 1^+}{Límite}\, f(x) = 2 & \end{array} \right\}$ ¿Se puede Afirmar que f(x) es continua para X=1 sin tener ningún otro dato ni gráfica de la función?

Dados en cada caso los siguientes datos de f(x), clasificar los puntos de discontinuidad (según los datos)

59 $\left\{ \begin{array}{l} \underset{x \to 0^-}{Límite}\, f(x) = -2 \\ \underset{x \to 0^+}{Límite}\, f(x) = -2 \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$

60) $\left\{ \begin{array}{l} \underset{x \to 0^-}{Límite}\, f(x) = -2 \\ \underset{x \to 0^+}{Límite}\, f(x) = 3 \\ f(0) = 3 \end{array} \right.$

61) $\left\{ \begin{array}{l} \underset{x \to a^-}{Límite}\, f(x) = 2a \\ \underset{x \to a^+}{Límite}\, f(x) = 2a \\ f(a) = 2a + 1 \end{array} \right.$

62) $\left\{ \begin{array}{l} \underset{x \to 5^-}{Límite}\, f(x) = 0 \\ \underset{x \to 5^+}{Límite}\, f(x) = +\infty \\ f(5) = 0 \end{array} \right.$

63) $\left\{ \begin{array}{l} \underset{x \to 0^-}{Límite}\, f(x) = 1 \\ \underset{x \to 0^+}{Límite}\, f(x) = 1 \\ f(0) = \nexists \end{array} \right.$

64) $\left\{ \begin{array}{l} \underset{x \to 2^-}{Límite}\, f(x) = -\infty \\ \underset{x \to 2^+}{Límite}\, f(x) = +\infty \\ f(2) = \nexists \end{array} \right.$

65) $\left\{ \begin{array}{l} \underset{x \to "A"^-}{Límite}\, f(x) = \underset{x \to "A"^+}{Límite}\, f(x) \\ f("A") = \underset{x \to "A"}{Límite}\, f(x) + 2 \end{array} \right.$

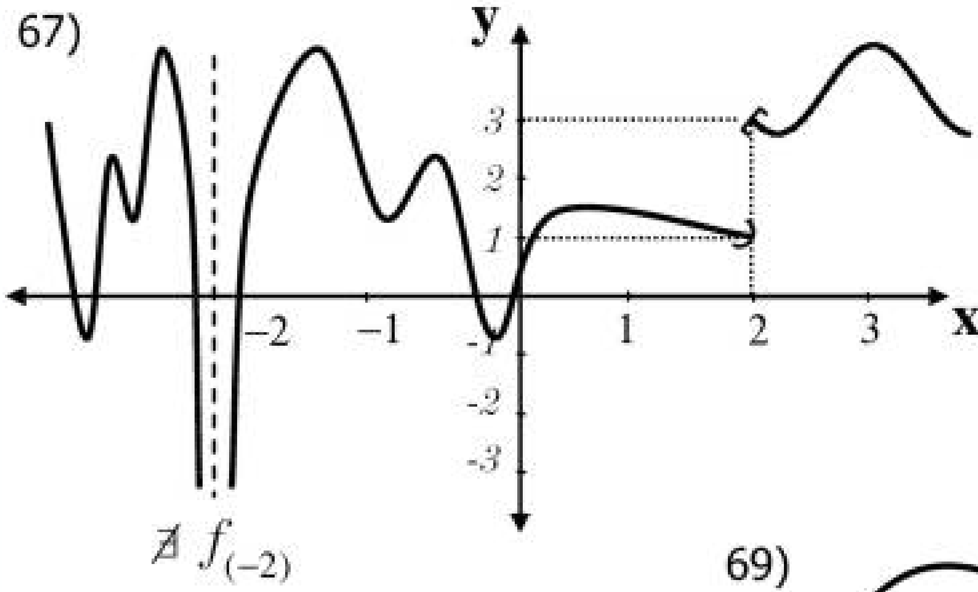
by Dal-0r para TARINGA!

66) Según los datos dados, clasificar los puntos de discontinuidad de f(x)

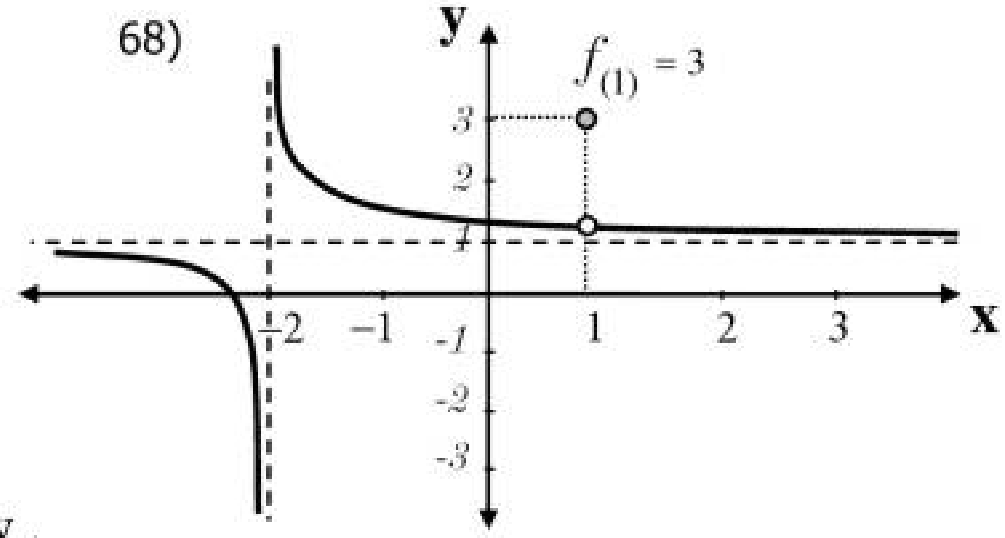
$$\begin{cases} \underset{x\to 6^-}{Límite}\, f(x) \neq \underset{x\to 6^-}{Límite}\, f(x) \\ f(6) = \nexists \\ f(x) \text{ Tiene Asíntota Vertical en } X = 6 \end{cases}$$

Dados los siguientes gráficos de funciones y datos respectivos, clasificar los puntos de discontinuidad en cada caso:

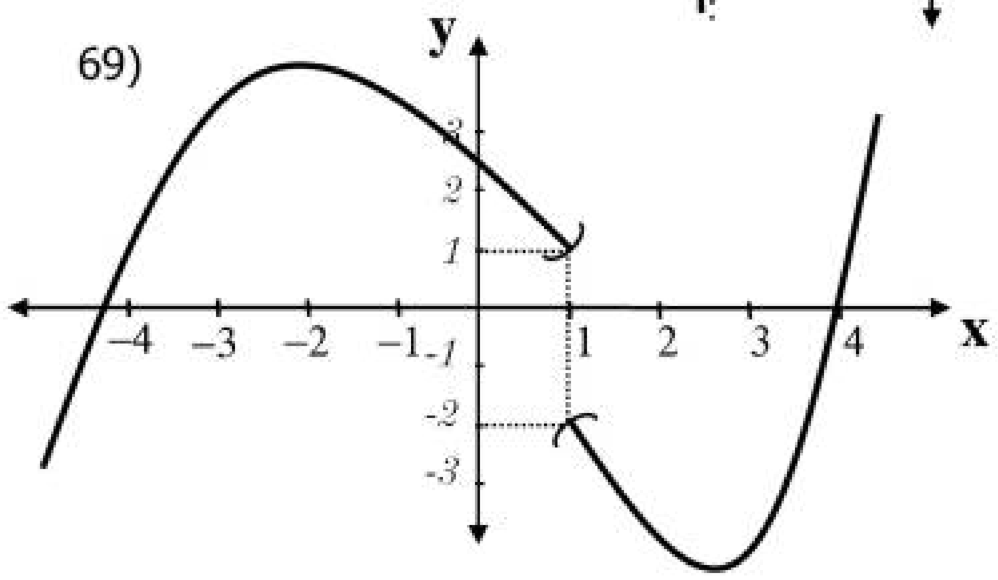
67)



68)



69)



Hallar el valor de "k" para que F(x) sea continua para todos los "x" pertenecientes a los reales:

70) $f(x) = \begin{cases} (X-3)^2 + 3 & \text{si } x < 5 \\ 3x - k & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

71) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 5 & \text{si } x \leq 2 \\ k \cdot x - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

72) $f(x) = \begin{cases} (k+3) \cdot x - 1 & \text{si } x \neq 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

73) $\begin{cases} f_{(1)} = 2 \\ f_{(x)} = \dfrac{2x+k}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$

74) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{si } x \leq -3 \\ (k-1) \cdot x & \text{si } x > -3 \end{cases}$

75) $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ (k-3) \cdot 3^x & \text{si } x > -1 \end{cases}$

76) $f(x) = \begin{cases} Sen(x) & \text{si } x \leq 0 \\ 4^x - k & \text{si } x > 0 \end{cases}$

77) $f(x) = \begin{cases} Cos(x) & \text{si } x < 0 \\ (x+k)^2 - k & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

78) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x < 0 \\ 2 + (x+k)^{-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

79) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^{k+5} & \text{si } x < 3 \\ (x-2)^{-1} + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

80) $f(x) = \begin{cases} Sen(x) + (x+2)^{-2k+1} & \text{si } x \leq 0 \\ 3x^3 - 2x^2 - 5x + 8 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

81) $f(x) = \begin{cases} Log(13x+9) & \text{si } x \leq 7 \\ \dfrac{1}{2}x^2 - (3k-2)x + \dfrac{11}{2} & \text{si } x > 7 \end{cases}$

by Dal-0r para TARINGA!

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Límites
Nivel IV

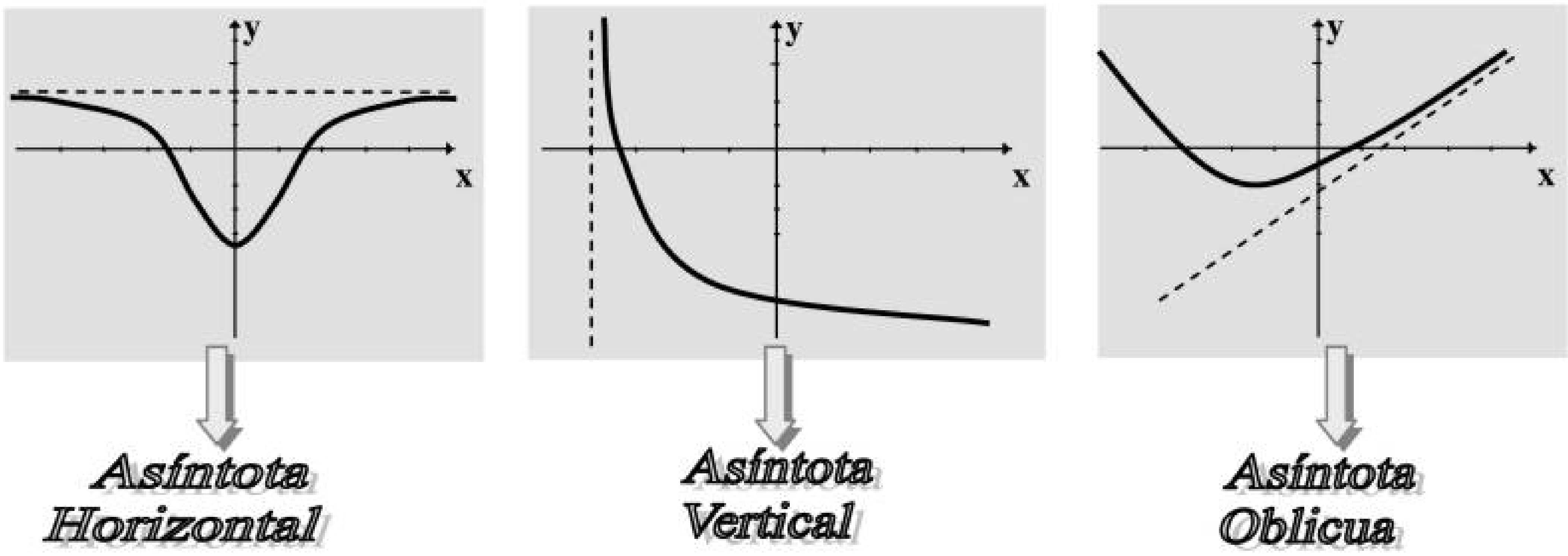
Número de Tema: **73**

Área: **Matemática**

★ Asíntotas

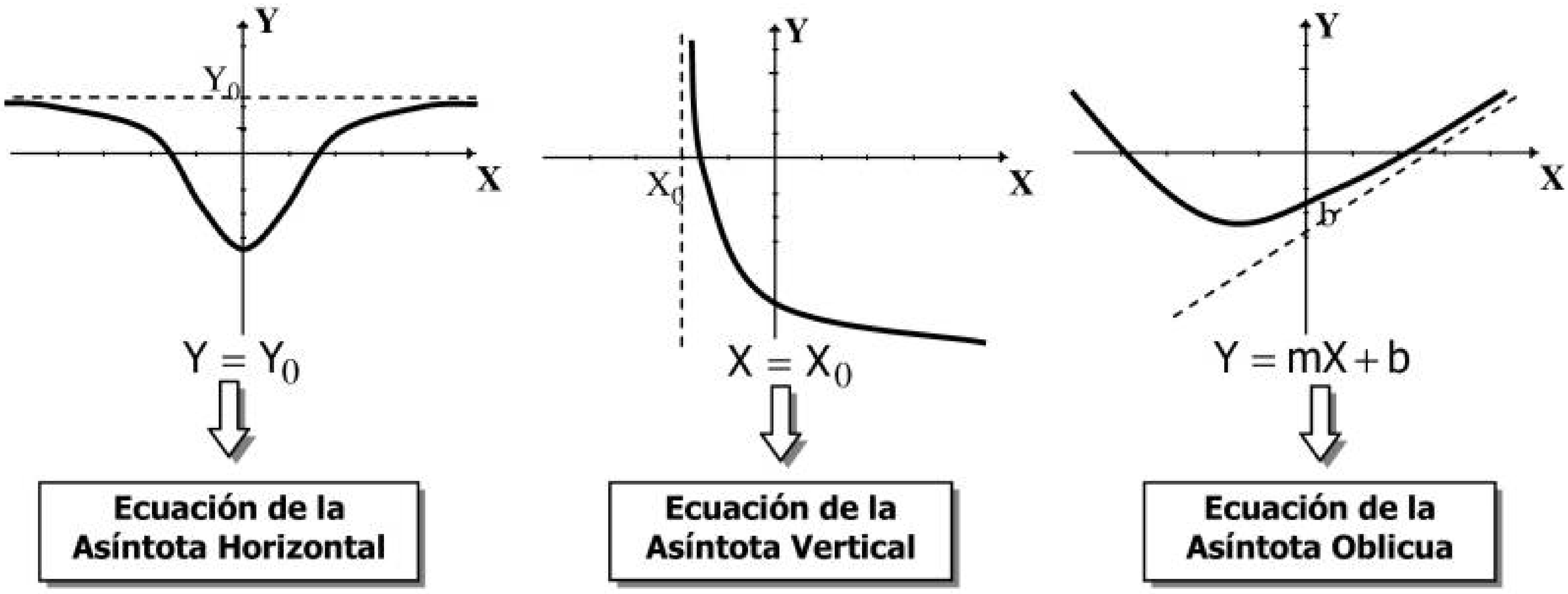
¿Qué es una asíntota? "Es una recta que en el infinito tiende a cortarse con la gráfica de la función"

Ejemplos



Las asíntotas son elementos muy usados para poder hacer gráficas aproximadas de una función, sin hacer tablas de valores.

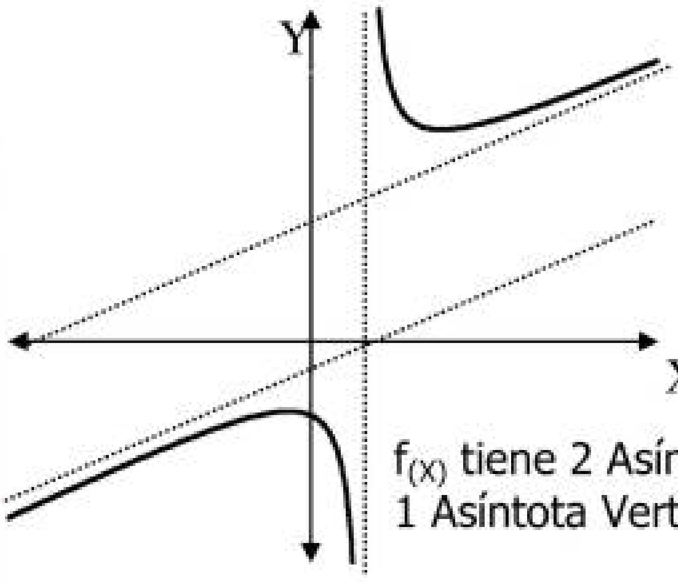
¿Cómo se calcula la ecuación de una asíntota a una función?
Cada tipo de asíntota, ya sea horizontal, vertical u oblicua se calcula de manera diferente. Veamos primero como va a ser en general la ecuación de cada asíntota.



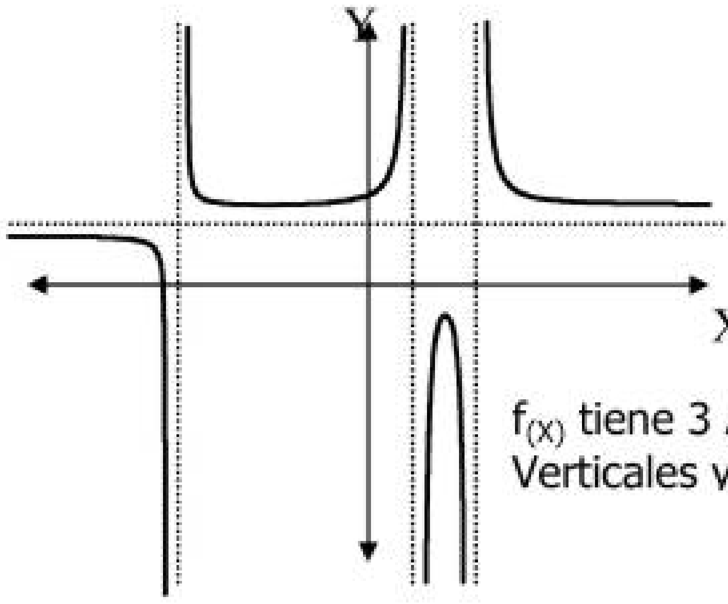
Nota: Una función f(x) puede no tener ninguna asíntota, o puede tener una o más de una asíntota, a su vez puede tener una o mas de una asíntota de cada tipo. Mirando la gráfica podemos notarlo fácilmente, pero si es complicado trazar la gráfica de una función, no queda otra que ir probando si tiene asíntotas de cada tipo calculándolas, es decir intentando calcular por ejemplo la asíntota horizontal (por mas que no sepamos si tiene o no asíntota horizontal), si la función no tiene asíntota horizontal, cuando la querramos calcular nos vamos a dar cuenta, mas adelante veremos por que.

En cualquier función, para la cual querramos calcular las ecuaciones de las asíntotas debemos calcular para ello los valores que las definen. Por ejemplo, el valor que define a la asíntota horizontal es el que llamamos "Y_0" , si calculamos "Y_0" entonces ya tenemos la asíntota horizontal. En el caso de las asíntotas verticales, se definen con "x_0". Y en el caso de las asíntotas oblicuas, se definen con dos valores que son "m" y "b".

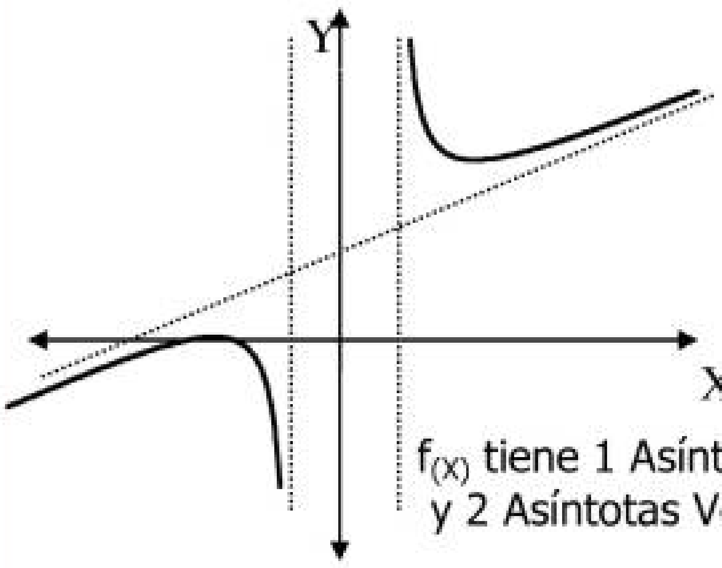
Ejemplo de funciones con distintos tipos de asíntotas combinadas: Como dijimos antes, una función puede tener varias asíntotas y a su vez, puede tener varias de cada tipo, veremos ahora algunos ejemplos:



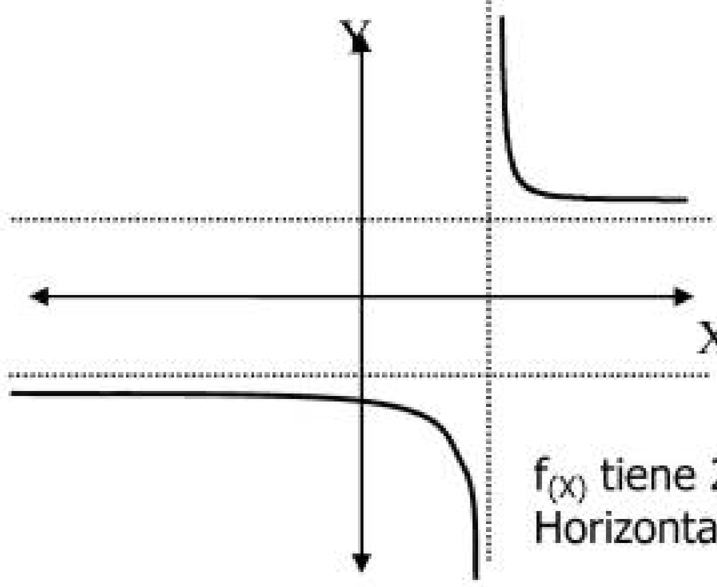
$f_{(X)}$ tiene 2 Asíntotas Oblicuas y 1 Asíntota Vertical



$f_{(X)}$ tiene 3 Asíntotas Verticales y 1 Horizontal



$f_{(X)}$ tiene 1 Asíntota Oblicua y 2 Asíntotas Verticales



$f_{(X)}$ tiene 2 Asíntotas Horizontales y 1 Vertical

Ahora sí, vamos a ver como se calculan "X_0" "Y_0" "m" "b" para hallar las ecuaciones de las asíntotas analíticamente.

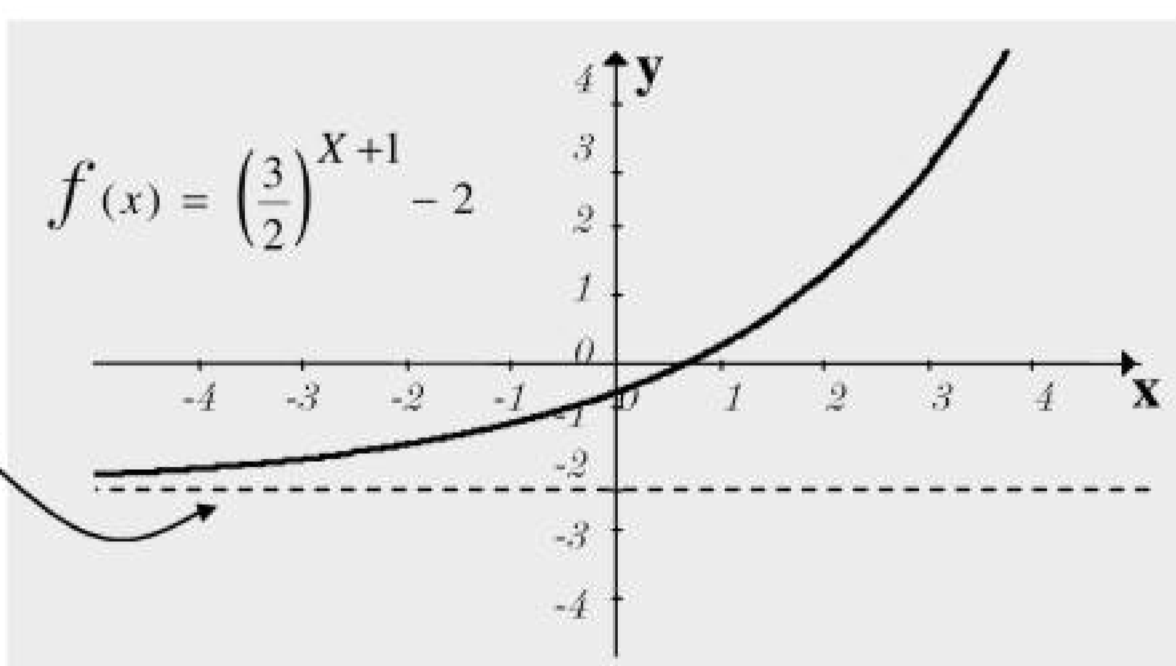
Empecemos:

☆ **Asíntota Horizontal**: Calculemos la asíntota Horizontal de: $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{X+1} - 2$

$Y = Y_0$ Es la ecuación de la asíntota horizontal

Entonces para calcular la ecuación de la asíntota horizontal, hay que calcular el límite de la función con X tendiendo a infinito. ⇨ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = Y_0$

Acá se ve como Cuando "X tiende a menos infinito", la función se acerca cada vez más a –2, que es su asíntota.



De todos modos vamos a calcular la asíntota como si no tuviéramos el gráfico, este gráfico lo ponemos solo para empezar a orientarnos.

Decíamos entonces que tenemos que calcular el límite: $\underset{X\to\infty}{\text{límite}}\, f(x) = Y_0$

Calculamos el límite:

$$\underset{x\to+\infty}{Límite}\, f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\infty+1} - 2 = \infty$$

$$\underset{x\to-\infty}{Límite}\, f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty+1} - 2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\infty} - 2 = 0 - 2 = -2 \Rightarrow \boxed{Y = -2}$$

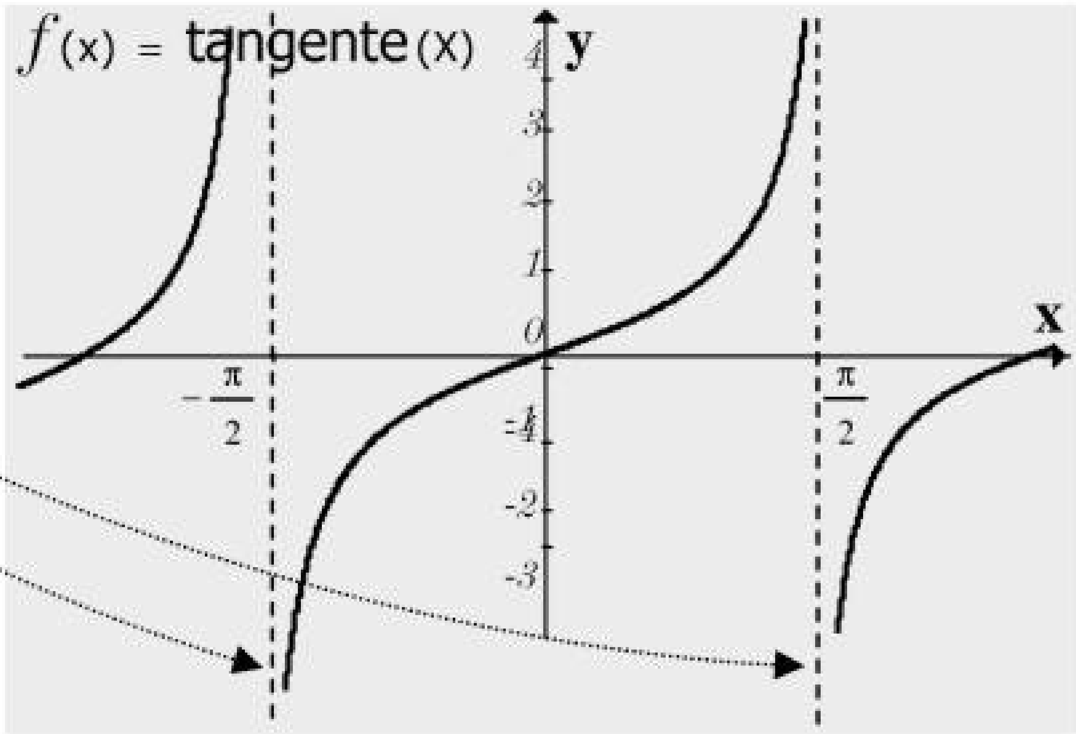
Es la ecuación de la asíntota horizontal

- **Asíntota Vertical**: Calculemos la Asíntota Vertical de: $f(x) = Tangente(x)$

$$\underset{x\to x_0}{Límite}\, f(x) = \infty \Leftrightarrow X = X_0 \text{ es la ecuación de la asíntota Vertical}$$

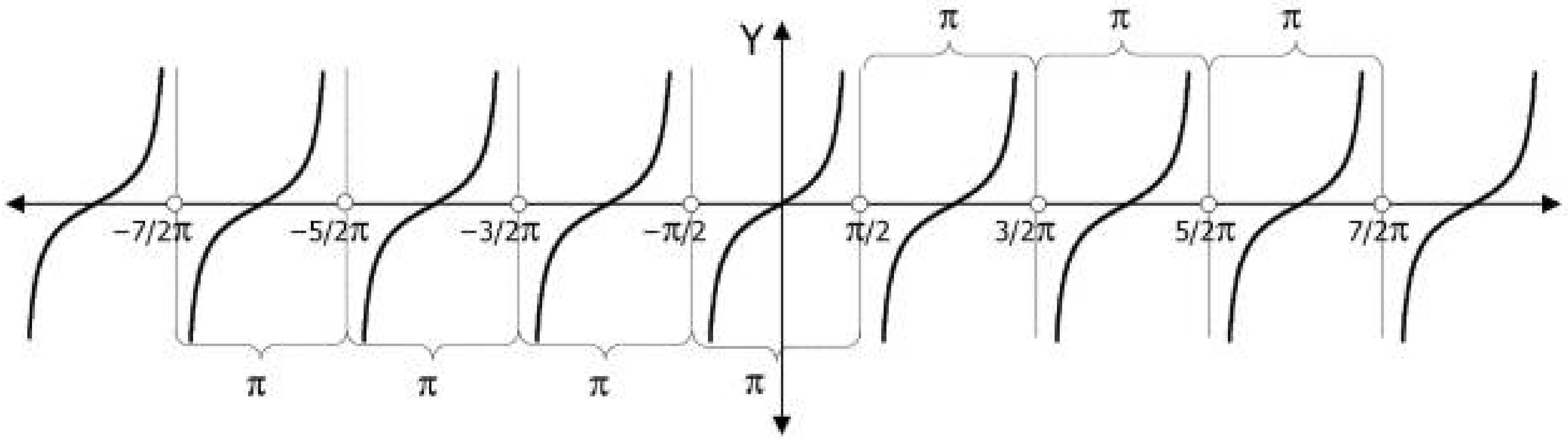
Entonces, lo que hay que hacer, es ver para qué valor de "X" el límite me da infinito.

Acá se ve como, cuando "X tiende a π/2 la función "tiende a infinito" , o sea que tiene en π/2 una asíntota vertical. Y lo mismo se repite periódicamente con un período de π



Esto suele pasar con las funciones trigonométricas ya que son periódicas, es decir que si tiene una asíntota, la misma se va a repetir periódicamente.

Vemos aquí abajo el gráfico de esta función con la escala de "x" ampliada para ver como se repite periódicamente, no solo la función, sino también sus asíntotas.



Por lo tanto esta función va a tener infinitas asíntotas verticales...

Calculamos el "X_0" de la asíntota:

$$\underset{x\to+X_0}{Límite}\, f(x) = \infty \quad \underset{X\to+X_0}{Límite}\, tg(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad X_0 = \frac{\pi}{2}$$

Ya que es el valor para el cual la tangente tiende a infinito

Para saber con qué valor la función tiende a infinito, hay que concentrarse en el denominador. La función tiende a infinito cuando el denominador tiende a cero

Si observamos la función tangente, podemos verla como el cociente Seno/Coseno, por lo tanto la función tangente tiende a infinito cuando el coseno tiende a cero, y cuando x tiende a π/2 el coseno tiende a cero, ya que Cos (π/2) = 0

$X = \pi/2 + k\pi \quad \text{con } k \in Z$

⇓

Es la ecuación de las asíntotas verticales.

Asíntota Oblicua:

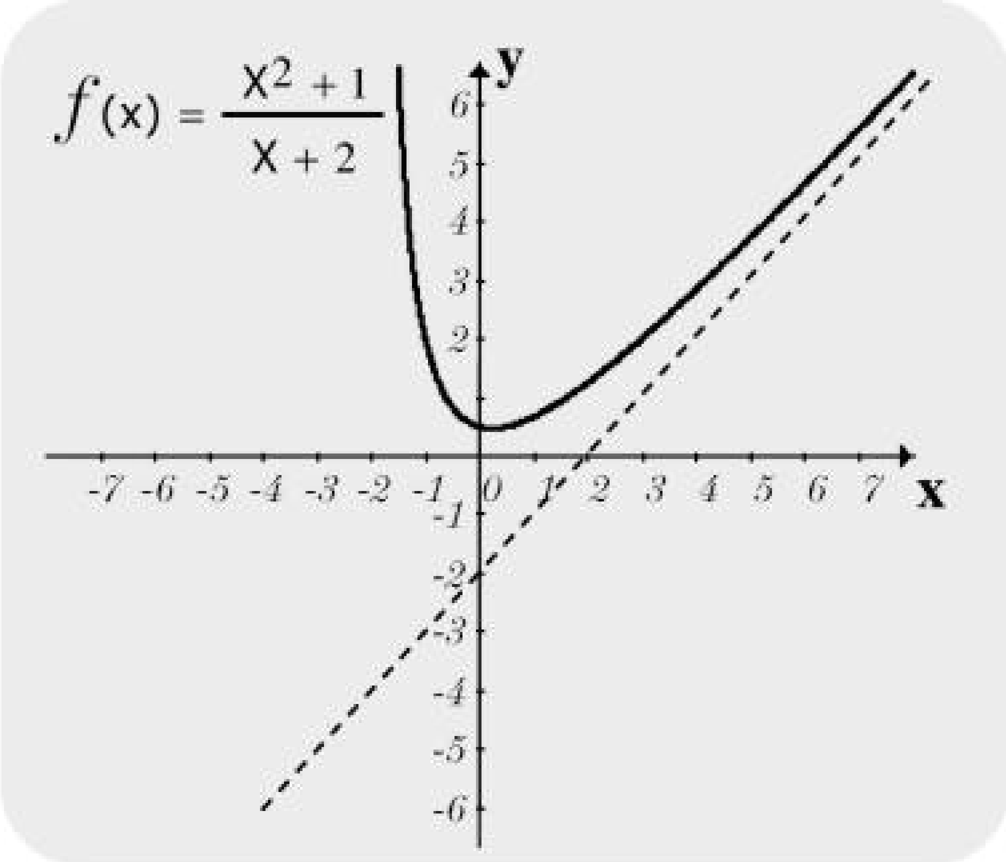
La ecuación de la asíntota oblicua, hay que calcularla "en dos partes". Por un lado la pendiente de la recta, y por el otro, la ordenada al origen.

$$Sea\ Y = mX + b \quad asíntota\ oblicua\ de\ f_{(x)}$$

$$\boxed{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f_{(x)}}{X} \qquad b = \lim_{x\to\infty} \left(f_{(x)} - mX \right)}$$

Estas son las fórmulas que vimos antes para calcular los valores de la asíntota oblicua.

Ejemplo: Vamos a calcular la ecuación de la asíntota oblicua de $f(x) = \dfrac{X^2+1}{X+2}$



La ecuación de la asíntota oblicua va a ser de la forma: Y = m X + b

Si usamos las fórmulas para calcular "m" y "b" nos queda:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{X} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{X^2+1}{X+2}}{X}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - mX = \lim_{x\to\infty} \frac{X^2+1}{X+2} - mX$$

Primero calculamos la pendiente de la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{X} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{X^2+1}{X+2}}{X} = \lim_{x\to\infty} \frac{X^2+1}{X^2+2X} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{X^2}{X^2}+\frac{1}{X^2}}{\frac{X^2}{X^2}+\frac{2X}{X^2}} = \frac{1+0}{1+0} = \boxed{1}$$

Y una vez que tenemos el valor de "m" la pendiente, calculamos la ordenada al origen de la asíntota oblicua:

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - mX = \lim_{x\to\infty} \frac{X^2+1}{X+2} - X = \lim_{x\to\infty} \frac{X^2+1-X\ (X+2)}{X+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2X}{X+2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-2X}{X+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{X}-\frac{2X}{X}}{\frac{X}{X}+\frac{2}{X}} = \frac{0-2}{1+0} = \boxed{-2}$$

Con esto ya sabemos los dos datos de la ecuación de la asíntota oblicua Y = mx + b

m = 1 y b = −2

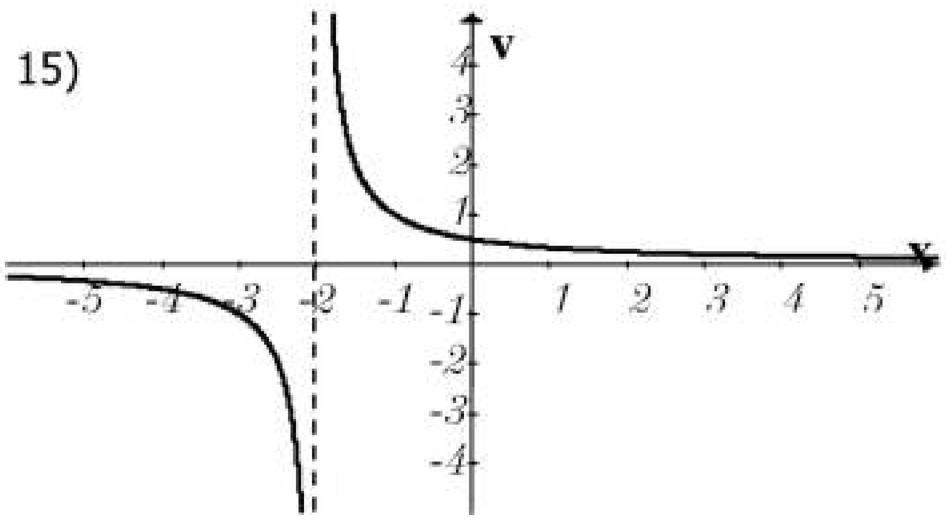
⇒ La ecuación de la asíntota oblicua es: **Y = X − 2**

RESPONDER V o F

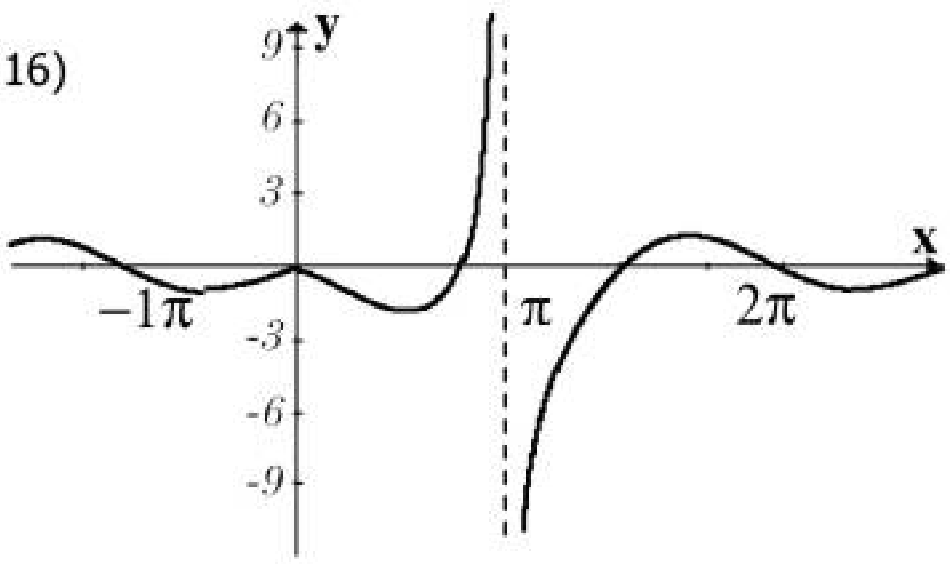
1) Las funciones continuas no pueden tener asíntotas
2) Las funciones continuas para todos los valores de "x", no pueden tener asíntotas verticales
3) Una función puede tener más de una asíntota vertical.
4) Una función puede tener más de una asíntota.
5) Las funciones homográficas (del tipo Y= a/(X+b), siempre tienen una asíntota vertical y una horizontal.
6) La función f(x)= x / (x+2) tiene la misma asíntota vertical que f(x)= 1 / (x+2)
7) Todas las funciones logarítmicas del tipo f(x) = Log (x+a) + b tienen asíntota vertical.
8) Todas las funciones exponenciales del tipo f(x) = a .x^b +c tienen asíntota vertical.
9) Todas las funciones logarítmicas del tipo f(x) = Log (x+a) + b tienen asíntota horizontal.
10) Todas las funciones exponenciales del tipo f(x) = a .x^b +c tienen asíntota horizontal.
11) Las funciones del tipo F(x) = Sen(x+a) tienen asíntota horizontal porque nunca son mayores a 1.
12) Las funciones lineales del tipo F(x) = a .x +b no tienen asíntotas de ningún tipo.
13) Las funciones cuadráticas del tipo F(x) = ax^2 +bx + c pueden tener asíntotas según los valores de "a".
14) Las funciones del tipo F(x)= 1/(ax^2+bx+c), siempre tienen asíntota vertical.

Dadas las siguientes gráficas, clasificar sus asíntotas y dar sus ecuaciones:

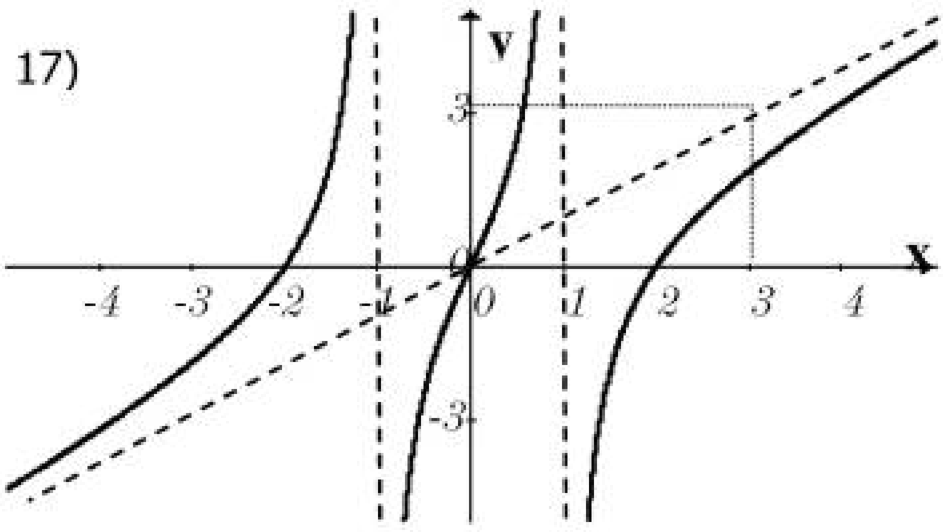
15)



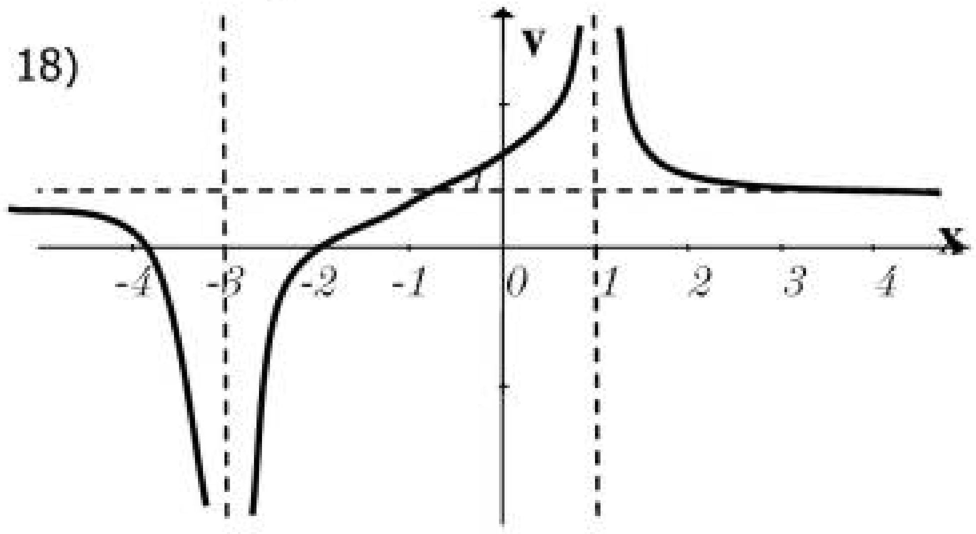
16)



17)



18)



Calcular analíticamente las ecuaciones de las asíntotas a las siguientes funciones:

19) $f(x) = \dfrac{X^4 - 9X^2}{X^3 - 4X}$

20) $f(x) = \dfrac{X^4 - 9X^2}{X^3 - 4}$

21) $f(x) = \dfrac{X^4 - 9X^2}{X^3 - 4X^2}$

22) $f(x) = \dfrac{X - 9}{1 - 4X^2} - 1$

23) $f(x) = \dfrac{X + 1}{X} - 1$

24) $f(x) = \dfrac{\text{Sen}(X)}{X}$

25) $f(x) = \dfrac{X}{\text{Sen}(X)}$

26) $f(x) = \dfrac{X}{\text{Sen}^2(X)}$

27) $f(x) = \dfrac{X^2 + 1}{X^2}$

28) $f(x) = \dfrac{X^2}{1 - X^2}$

29) $f(x) = \dfrac{(X - 1)^2}{X + 1}$

30) $f(x) = \dfrac{X^2 + 1}{X + 2}$

Calcular analíticamente las ecuaciones de las asíntotas a las siguientes funciones:

31) $f(x) = \dfrac{2X^2 - 1}{X - 1}$

32) $f(x) = \left|\dfrac{X^2 + 1}{X}\right|$

33) $f(x) = \left|\dfrac{(X-3)^2 + 1}{X - 1}\right|$

34) $f(x) = \left|\dfrac{(X+1)^2 - 1}{X^2 - 1}\right|$

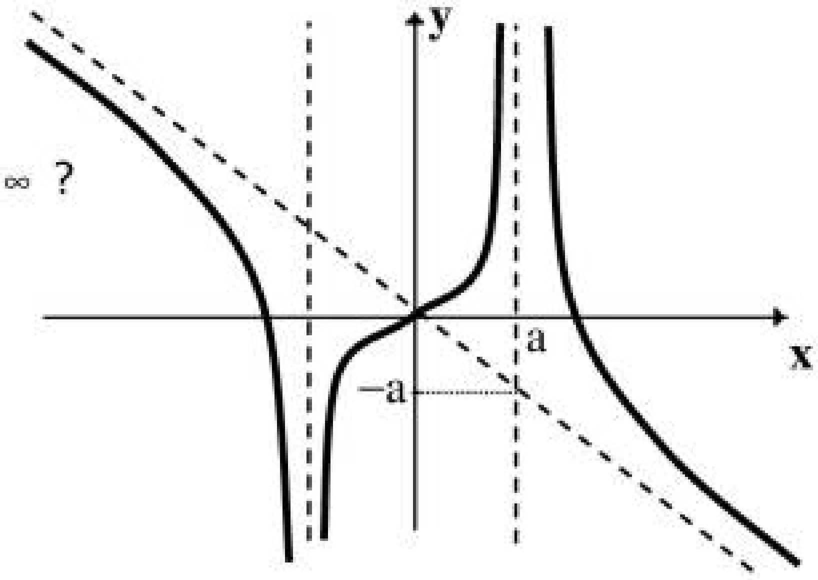
35) $f(x) = \dfrac{\text{Ln}\,(x+1)^2}{x+1}$

36) $f(x) = \dfrac{\text{Ln}\,(x+1)^2}{x-1}$

37) $f(x) = \text{Sen}\left(\dfrac{X^2 - 1}{X^3 - \text{sen}(X)}\right)$

38) $f(x) = \sqrt[x]{x}$

Dada la siguiente gráfica de una función

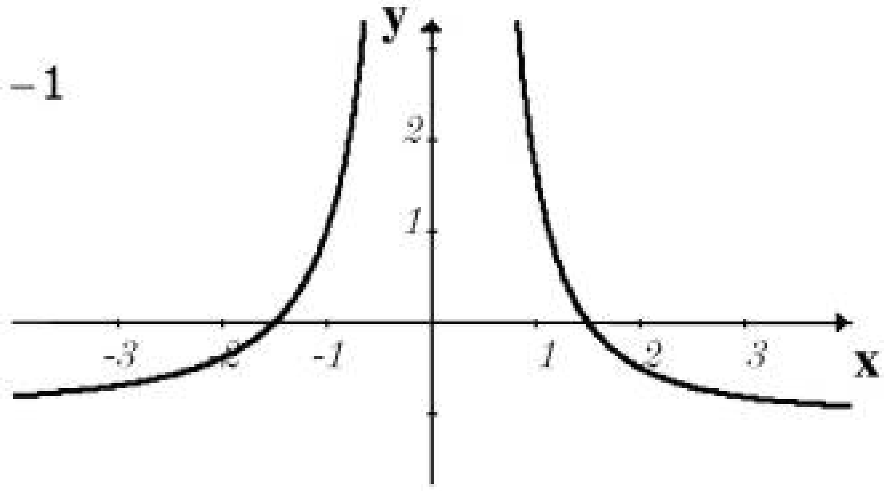


39) ¿Se puede afirmar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$?

40) Calcular: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) + x$

41) Calcular: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$

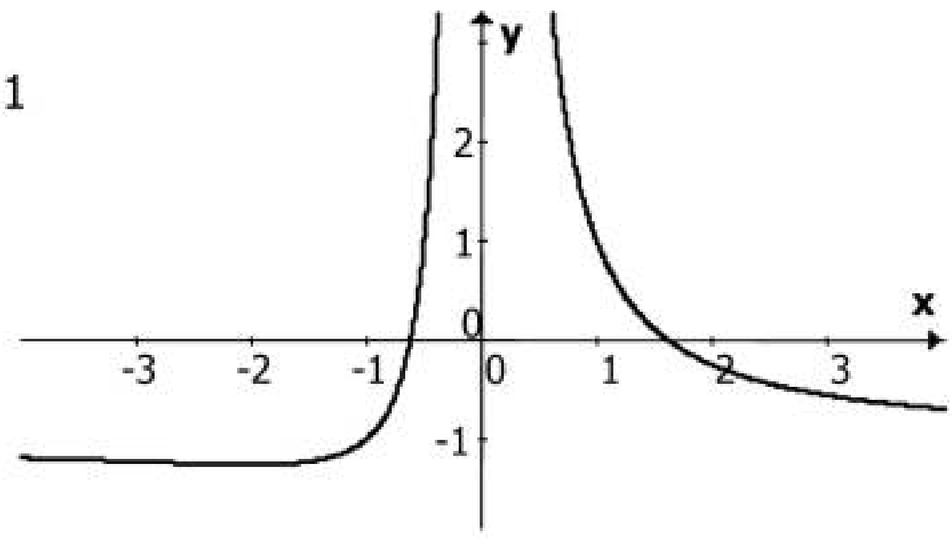
Dada Y en función de X y su gráfica: $Y = \dfrac{X - 9}{X - 4X^2} - 1$



42) Es verdadero afirmar que la función tiene solo una asíntota vertical.

43) ¿Cuántas asíntotas, en total, tiene la función?

Dada Y en función de X y su gráfica: $Y = \dfrac{X + 1}{X^2} - 1$



44) Es verdadero afirmar que la función tiene solo una asíntota vertical y solo una vertical.

45) ¿Cuántas asíntotas, en total, tiene la función?

46) Escribir una función que tenga: Asíntota horizontal $X = -1$ y Asíntota vertical $Y = 2$

47) Escribir la ecuación de una función homográfica que tenga asíntotas a las rectas: $X = 3$ $\quad Y = -1$
¿Cuántas de estas ecuaciones podrías escribir?

48) Dada la función $f(x) = \dfrac{X}{X + 2a} - 1$ Hallar "a" para que la función tenga asíntota vertical en $X = 3$

49) Dada la función $f(x) = \dfrac{(ax+1)^2}{x^2 - 1} - 5$ Hallar "a" para que la función tenga asíntota horizontal en $Y = -1$

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Derivadas

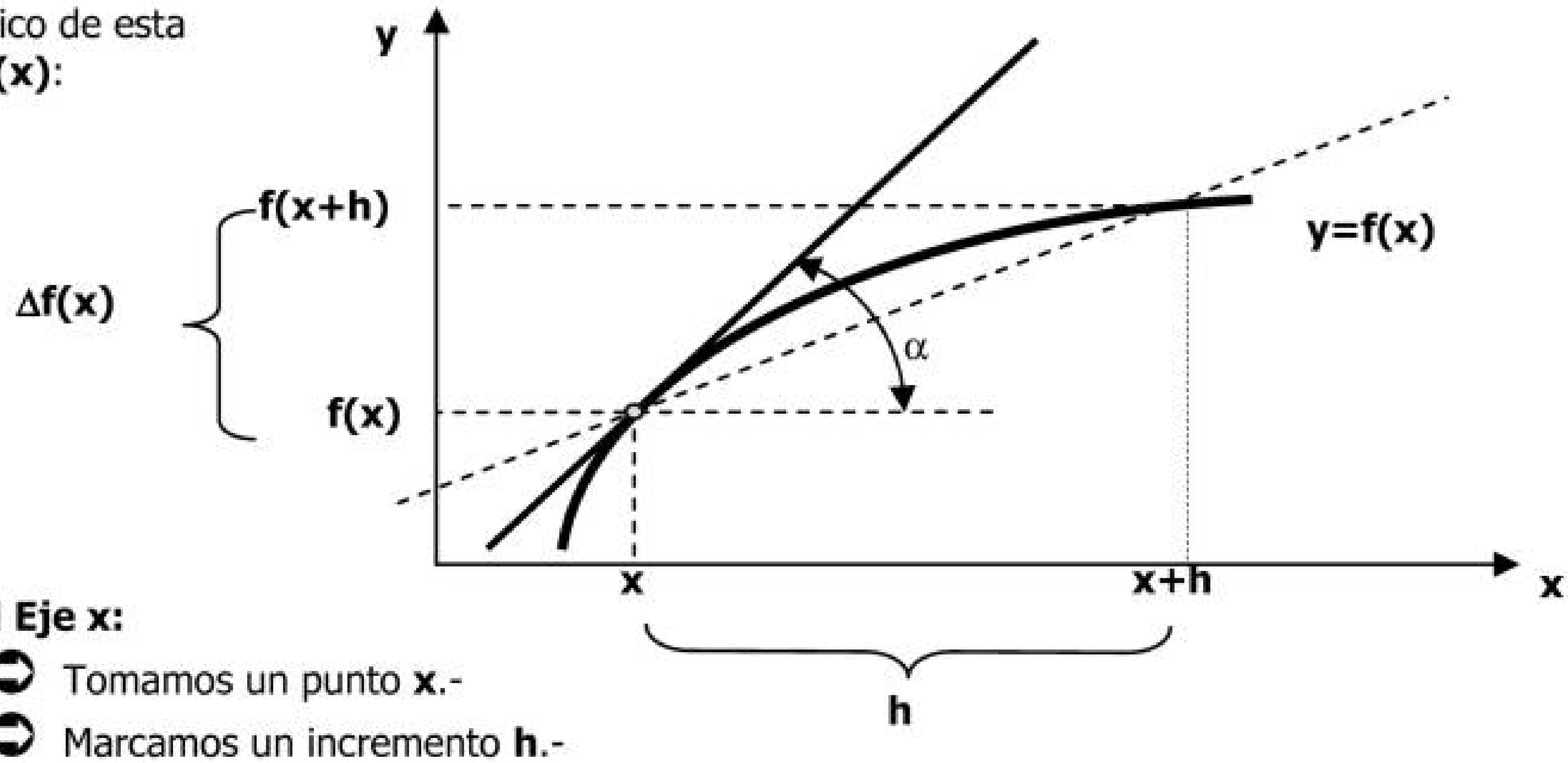
Nivel I

Número de Tema: **74**

Área: **Matemática**

Qué es la Derivada de una función en un punto? El valor de la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a esa función en ese punto.

Mirá bien el gráfico de esta función **f(x)**:



En el Eje x:

- Tomamos un punto **x**.-
- Marcamos un incremento **h**.-
- Y nos queda determinado el punto **x+h**.-

Experimento:

- Achiquemos el incremento **h** hasta que sea casi imperceptible...
- ... llega un punto que h es tan chico, que la línea que une f(x) y f(x+h) toca a la curva en un solo punto, o *sea, se hace tangente a la curva*

Ahora la pregunta es ¿Cuánto vale numéricamente la pendiente a la recta tangente en un punto x? *La pendiente es la razón entre el incremento vertical y el incremento horizontal. Por lo tanto esa es la pendiente de la curva en el punto "x", es decir ese cociente de incrementos:*

$$\frac{\Delta\, Vertical}{\Delta\, Horizontal} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Longrightarrow$$

Esto se denomina COCIENTE INCREMENTAL

¿Viste que recién experimentamos "achicando" la **h** ? bueno, esto en Matemática se expresa así: $\lim\limits_{h \to 0}$

y como lo que queremos calcular es la pendiente de la curva, calculamos el límite para h tendiendo a cero de ese famoso cociente incremental.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \Longrightarrow$$

Y esta es la definición de derivada de f(x) en el punto x

✔ **Derivada de f(x)** se escribe "con un tilde" **f ' (x)**

- Derivadas por definición: La manera de calcular una derivada por definición es un poco "engorrosa" pero es necesario saberlo hacer para entender bien el significado de la definición de derivadas.

Calculemos entonces, a modo de ejemplo, la derivada de **$f(x)=x^2$** en **x=1**
Primero calculamos la derivada de g(x) para cualquier valor de x:
Para eso, partimos de la fórmula de definición de derivadas:

Si $f(x) = x^2$, **entonces** $f(x+h) = (x+h)^2$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Desarrollamos el cuadrado del binomio:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2\cdot x\cdot h + h^2 - \cancel{x^2}}{h} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot x\cdot h + h^2}{h}$$

... ahora sacamos factor común **h** en el numerador...

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(2\cdot x+h)}{\cancel{h}} \Rightarrow \lim_{h\to 0} 2\cdot x+h = 2 . X + 0 = \boxed{2X} \Rightarrow \boxed{f'_{(x)} = 2x}$$

O sea que la derivada de $\mathbf{x^2}$ es **2.x**
la derivada de $\mathbf{x^2}$ evaluada en el punto **x=1** sería:

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2\cdot x \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(1) = 2\cdot 1 = 2}$$

....Y así podría calcular la derivada de $f(x)=X^2$ en cualquier punto, una vez que ya tengo la fórmula general, lo único que me faltaría es reemplazar la "X" de la fórmula de derivada f'(x) = 2X por el valor en el cual quiero conocer la derivada, y listo...

- Reglas de Derivación: El desarrollo de toda la Teoría del Cálculo Infinitesimal (o sea el que incluye a las derivadas) fue presumiblemente llevado a cabo hacia 1684 por Newton (sí, el mismo de las fórmulas de física de cinemática) y Leibnitz... (en realidad todavía no se sabe bien quién de los dos la ideó primero). Como el cálculo de las derivadas tal como lo hicimos con $\mathbf{x^2}$ es más bien pesado, se idearon reglas de derivación, destinadas a hacernos los cálculos un poco más fáciles...

  Ahora vamos a ver esas "reglas de derivación"

- REGLAS DE DERIVACIÓN

  - **Función Constante**: $f_{(x)} = k \quad \Rightarrow \quad f'_{(x)} = 0$

    Ejemplo: $f_{(x)} = 4 \Rightarrow f'_{(x)} = 0$

    O sea que la derivada de "cualquier número, o función constante" es cero

  - **Función Potencial:** $f_{(x)} = x^n \quad \Rightarrow \quad f'_{(x)} = n\cdot x^{n-1}$

    Ejemplos: $f_{(x)} = x^{18} \Rightarrow f'_{(x)} = 18\cdot x^{18-1} = 18\cdot x^{17}$

    $f_{(x)} = x^{-5} \Rightarrow f'_{(x)} = (-5)\cdot x^{-5-1} = (-5)\cdot x^{-6}$

    O sea que para calcular la derivada de una función cuya variable **x** está elevada a un exponente "n" es el producto de "n" por "x" elevada al exponente "n-1"

  - **Radicales (índice = 2):** $f_{(x)} = \sqrt{x} \Rightarrow f'_{(x)} = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

  - **Funciones Trigonométricas:** $f_{(x)} = Sen(x) \Rightarrow f'_{(x)} = Cos(x)$

    $f_{(x)} = Cos(x) \Rightarrow f'_{(x)} = -Sen(x)$

- **Logaritmo Neperiano:** $f_{(x)} = \ln(x) \Rightarrow f'_{(x)} = \frac{1}{x}$
- **Función exponencial:** $f_{(x)} = a^x \Rightarrow f'_{(x)} = a^x \cdot \ln a$
- **Caso especial de Función Exponencial:** $f_{(x)} = e^x$

$$f_{(x)} = e^x \Rightarrow f'_{(x)} = e^x \cdot \ln e \Rightarrow f'_{(x)} = e^x$$

- **Derivada de la Suma de Funciones:** La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de dichas funciones

Ejemplo: Calculemos la derivada de: $f_{(x)} = \ln(x) + \sqrt{x} + Sen(x)$

Veamos: $f(x) = \ln(x) + \sqrt{x} + Sen(x) \Rightarrow f'(x) = \underbrace{(\ln(x))'}_{\frac{1}{x}} + \underbrace{(\sqrt{x})'}_{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}} + \underbrace{(Sen(x))'}_{Cos(x)}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} + Cos(x)}$$

- **Derivada de la Resta de Funciones**: La derivada de una resta de funciones es la resta de las derivadas de dichas funciones.

- **Derivada de un Producto de Funciones**: $\left[u_{(x)} \cdot v_{(x)}\right]' = u'_{(x)} \cdot v_{(x)} + u_{(x)} \cdot v'_{(x)}$

Sean **u(x)** y **v(x)** dos funciones.
La derivada de **u(x).v(x) será:**

La **Derivada de un producto** de funciones es igual a: "la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la primera sin derivar por la derivada de la segunda"

Veamos un ejemplo... derivemos $f_{(x)} = x^2 . \cos x$

En este caso tendríamos que: $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = \cos x \end{cases}$

Aplicamos la fórmula de derivada de un producto: $\left[u_{(x)} \cdot v_{(x)}\right]' = u'_{(x)} \cdot v_{(x)} + u_{(x)} \cdot v'_{(x)}$

$$\left[u_{(x)} \cdot v_{(x)}\right]' = \left(x^2\right)' \cdot Cos(x) + x^2 \cdot (Cos(x))' = 2 \cdot x \cdot Cos_{(x)} + x^2 \cdot (-Sen_{(x)})$$

$$\boxed{f'_{(x)} = 2x \cdot Cos_{(x)} - x^2\, Sen_{(x)}}$$

- Caso especial de la Derivada de un Producto:
"**Constante por Función**" Si tengo un producto de funciones, y una de ellas es constante (o sea, "igual a un numero"), existe una manera más fácil de derivar: "saco" la constante "afuera" de la derivada y sólo derivo "la función con la **x**"

$$\left[k \cdot f(x)\right]' = k \cdot \left[f'(x)\right]$$

Es muy común encontrar constantes que afectan a las funciones, y si usamos la formula de derivada de un producto se nos hace muy largo y es innecesario ya que podemos sacar las constantes afuera y derivar el resto de la función y sale todo mucho mas rápido.

Veamos un <u>Ejemplo de derivada de Constante por Función</u>: $\left(3\cdot x^2\right)' = 3\cdot\left(x^2\right)' = 3\cdot(2\cdot x) = 6\cdot x$

... en este caso el **3** es nuestra constante. Saco el "3" afuera y derivo el x^2

Otro ejemplo $f_{(x)} = \left(\dfrac{2\cdot Sen(x)}{5}\right) \Rightarrow f_{(x)} = \left(\dfrac{2}{5}\right)\cdot Sen(x)$ Reescribimos la función sacando una constante fraccionaria

Y calculamos la derivada de una manera mucho más cómoda que con la fórmula de la derivada de un producto o de una división. $\Rightarrow f'_{(x)} = \left(\dfrac{2}{5}\right)\cdot\left(Sen(x)\right)' = \dfrac{2}{5}Cos(x)$

- **<u>Derivada de un Cociente de Funciones</u>**: ¿Qué pasa si quiero derivar un cociente de funciones? Hay otra fórmula parecida a la de derivada de un producto:

Veamos: Por ejemplo, sean **u(x)** y **v(x)** dos funciones. La derivada de **u(x) : v(x)** será: $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$

> La derivada de un cociente de funciones es igual a: "la derivada de la primera por la segunda sin derivar menos la primera sin derivar por la derivada de la segunda... todo dividido la segunda al cuadrado"

Veamos un ejemplo... derivemos $\boldsymbol{f_{(x)} = x / \ln(x)}$

Vamos a aplicar la fórmula de derivada de una división tomando: $\begin{cases} \mathbf{u(x) = x} \\ \mathbf{v(x) = \ln x} \end{cases}$

Escribimos la fórmula de derivada de una división: $\Rightarrow \left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Reemplazamos **u(x)** y **v(x)** $\Rightarrow \left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{(x)'\cdot \ln x - x\cdot(\ln x)'}{(\ln x)^2}$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{(x)'\cdot \ln x - x\cdot(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{1\cdot \ln x - \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{(\ln x)^2} = \boxed{\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}}$$

Derivamos Y simplificamos

Y terminamos el ejercicio

Otro ejemplo: Derivar $\boldsymbol{f_{(x)} = x^2 / Sen(x)}$

Vamos a aplicar la fórmula de derivada de una división tomando: $\begin{cases} \mathbf{u(x) = x^2} \\ \mathbf{v(x) = Sen(x)} \end{cases}$

Escribimos la fórmula de derivada de una división: $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Reemplazamos **u(x)** y **v(x)** $\Rightarrow \left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{\left(x^2\right)'\cdot Sen(x) - x^2\cdot(Sen(x))'}{(Sen(x))^2}$

Derivamos $\Rightarrow \boxed{f'_{(x)} = \dfrac{2x\,.Sen(x) - x^2\cdot Cos(x)}{(Sen(x))^2}}$

- **Hallar la función derivada de:**

1) $f(x) = X^3$
2) $f(x) = X^5$
3) $f(x) = 2X^4$
4) $f(x) = -X^4$
5) $f(x) = \text{Sen } X$
6) $f(x) = 3\text{ Cos } X$
7) $f(x) = 2\text{ Ln } x$
8) $f(x) = 3X^4 + 2X$
9) $f(x) = X^3 - 3X^2 + 2X - 5$
10) $f(x) = \text{Sen}(x) - 3$
11) $f(x) = 2 - \text{Cos}(x)$
12) $f(x) = 5\text{ Ln}(x) + \text{Cos}(x) - 3$
13) $f(x) = 5(x)^2 + (5x)^2$
14) $f(x) = e^x + 2\text{ Cos}(x)$
15) $f(x) = \text{Cos}(x) - x$
16) $f(x) = \text{Ln}(x) - 2x - 3$
17) $f(x) = \text{Ln}(4) + \text{Cos}(45°) + x^2$
18) $f(x) = 5^x - \text{Sen}(x)$
19) $f(x) = 2^5 + 3^x$
20) $f(x) = \text{Ln}(2) - \text{Cos}(x) + 2^3$

- **Hallar $f'_{(0)}$**

21) $f(x) = 2X^2 + 3X - 1$
22) $f(x) = 5X^3 - 2X^2 + X$
23) $f(x) = 11X^3 - 4X^2 + 6X - 3$
24) $f(x) = e^x$
25) $f(x) = \text{Cos}(X)$
26) $f(x) = \text{Sen}(X) + 1$
27) $f(x) = \text{Cos}(X) + X$
28) $f(x) = e^X + 2X + \text{Cos } X$
29) $f(x) = \text{Cos } X - \text{Sen } X$
30) $f(x) = e^X - 2e^2 + \text{Sen}(30°)$

- **Hallar la derivada de:**

31) $e^x - x^{15}$
32) $\text{Sen}(x) + \text{Cos}(x) - \ln x$
33) $\sqrt{x} + x^9 - 2 \cdot x^3$
34) $4^x - x^4$
35) $e^x - \dfrac{4}{x}$
36) $18 \cdot x - 10 \cdot x^2 - \text{Sen}(x) - \text{Cos}(x)$
37) $\ln x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$
38) $\sqrt[3]{x} + 3^x$
39) $\dfrac{e}{x^4}$
40) $\dfrac{-5}{x^5} + Sen(x) - 5^x$

- **Hallar las siguientes derivadas con productos y divisiones**

41) $f_{(x)} = \dfrac{Sen\ (x)}{x}$

42) $f_{(x)} = \dfrac{Cos\ (x)}{x} + x$

43) $f_{(x)} = \dfrac{\ln\ (x)}{x}$

44) $f_{(x)} = \ln(x)\ .\ Sen\ (x)$

45) $f_{(x)} = x\ .\ \ln(x) + Cos\ (x)$

46) $f_{(x)} = e^x\ .\ x - 2e^x + e^2$

47) $f_{(x)} = \dfrac{e^x + 1}{x} + e^x + e.x + 1$

48) $f_{(x)} = \sqrt[3]{x^2}\ .\ e^x + e^{31}$

49) $f_{(x)} = \dfrac{e^x + e}{2x} + \dfrac{x}{e^2} \cdot e^3 - e$

50) $f_{(x)} = x\ .\ Sen\ (x) + x^2$

51) $f_{(x)} = x\ .\ Cos\ (x) - x^2$

52) $f_{(x)} = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} + (X+1)\cdot(X-1)$

53) $f_{(x)} = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} + \left(X^2+4\right)\cdot\left(X^2-4\right)$

54) $f_{(x)} = \dfrac{2x}{\ln\ (x)} + 2.e^x.Sen\ (30°) - \dfrac{2.x.Cos(30°)}{\sqrt{3} \cdot \dfrac{\ln(x)}{2}}$

55) $f_{(x)} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} - \left(\sqrt{x}-1\right) + \dfrac{e^x+1}{e^x} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{1}{e^x}}$

by Dal-0r para TARINGA!

- **Hallar f ' (1)**

56) $f_{(x)} = \dfrac{x-1}{0,5\ x^{-1}} + \dfrac{e^x - 1}{\ln(x)} - \dfrac{x^2+3x-10}{x+5} - e^x$

57) $f_{(x)} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{x} + \left(x^2+x+1\right)\cdot\sqrt{x} - \dfrac{Sen\ (x-1)}{e^x}$

- **Hallar la pendiente de la recta tangente de las siguientes funciones para X=1**

58) $f_{(x)} = 2x+3$

59) $f_{(x)} = 2x^2+3$

60) $f_{(x)} = x^2-2x+1$

61) $f_{(x)} = 3x^2+5x-2$

62) $f_{(x)} = \dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x$

63) $f_{(x)} = x^3-\dfrac{1}{2}$

64) $f_{(x)} = x^5+\dfrac{3}{4}x^4$

65) $f_{(x)} = \sqrt{x}$

66) $f_{(x)} = \sqrt{x^3}$

67) $f_{(x)} = \sqrt{x^3}+1$

68) $f_{(x)} = \left(\sqrt{x^3}\right)^5$

69) $f_{(x)} = x^2\sqrt{x}$

70) $f_{(x)} = x^3\sqrt{x}$

71) $f_{(x)} = x+2\sqrt{x}$

72) $f_{(x)} = 3x-4\sqrt{x}$

73) $f_{(x)} = \dfrac{4\sqrt{x}}{x}$

74) $f_{(x)} = \dfrac{2\sqrt{x}}{3x}$

75) $f_{(x)} = x\cdot\ln(x)$

76) $f_{(x)} = \dfrac{x\cdot\ln(x)}{2}$

77) $f_{(x)} = \dfrac{x+1}{2}$

78) $f_{(x)} = \dfrac{x^2+2x+1}{2}$

79) $f_{(x)} = \dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$

80) $f_{(x)} = \dfrac{x^2-1}{2x}$

Hallar "x" / f ' (x) = 1

81) $f_{(x)} = 3x^2+5x-1$

82) $f_{(x)} = 2\sqrt{x}+1$

83) $f_{(x)} = 3\sqrt{x}-x$

84) $f_{(x)} = e^x-1$

85) $f_{(x)} = \ln(x)+2x$

86) $f_{(x)} = Sen(x)+x$

87) $f_{(x)} = x^{3/2}$

88) $f_{(x)} = x\cdot\ln(x)$

89) $f_{(x)} = \dfrac{x^3+8x^2+17x+10}{x+1}$

90) $f_{(x)} = 3x+2\sqrt{x}$

91) $f_{(x)} = e^x-(e-1)x$

92) $f_{(x)} = \dfrac{2\sqrt{x}}{x}$

Hallar "a" / f ' (0) = 1

93) $f_{(x)} = x^2+3a\cdot x-2$

94) $f_{(x)} = 2a\,x + x^{a+1}$

95) $f_{(x)} = Sen(x)+\dfrac{1}{2}a\,x$

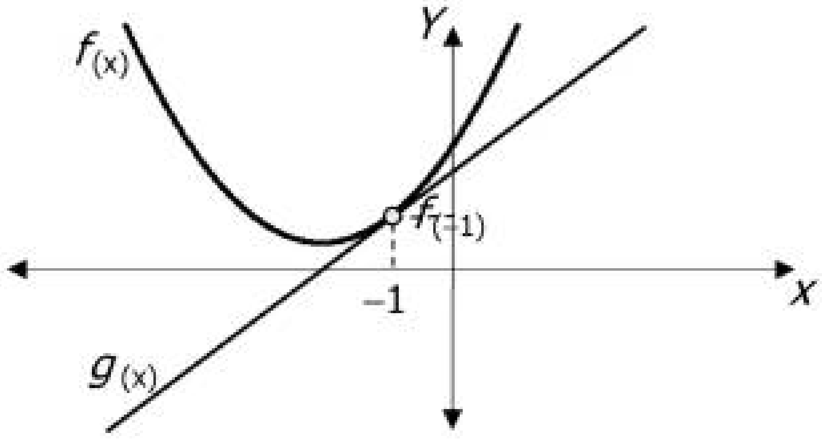
96) $f_{(x)} = 3x^5-(2a-3)\cdot x$

97) $f_{(x)} = 2x+a\cdot e^x$

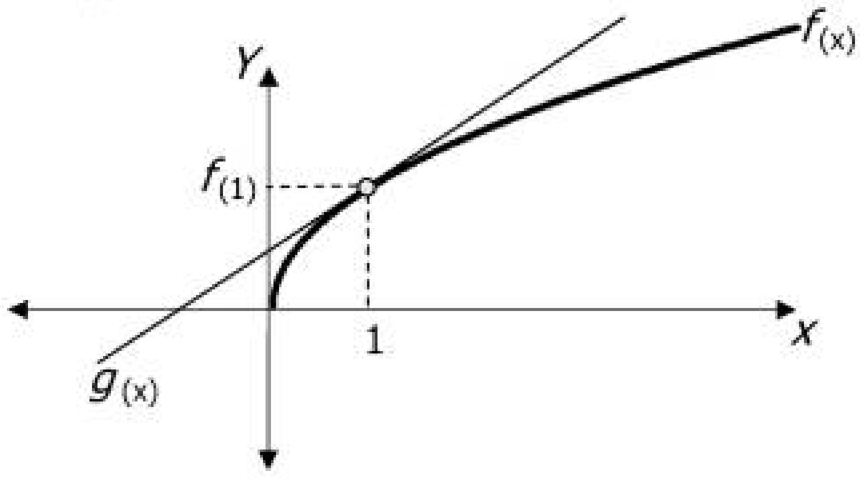
98) $f_{(x)} = x\cdot\left(x+e^a\right)$

➢ Dados los siguientes gráficos, **hallar la ecuación de g(x) "la recta tangente a f(x)" en el punto indicado**: (Sugerencia: Para hallar la ordenada al origen de la recta tangente, igualar la función a la recta tangente en el punto)

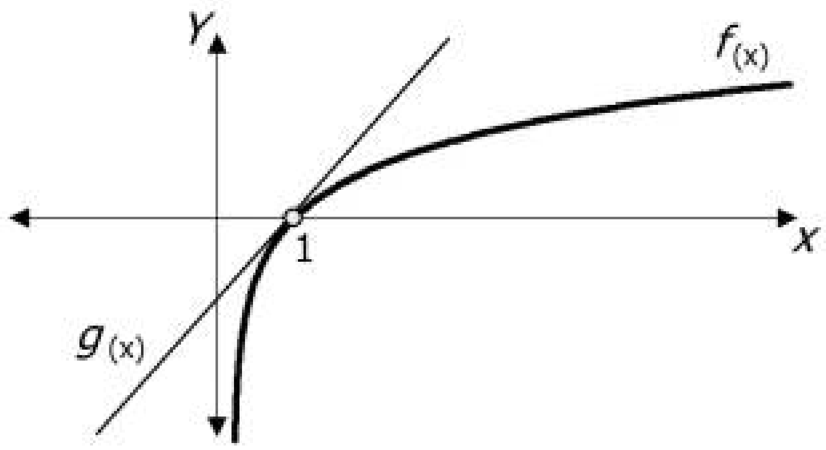
99) $f_{(x)} = x^2 + 4x + 5$



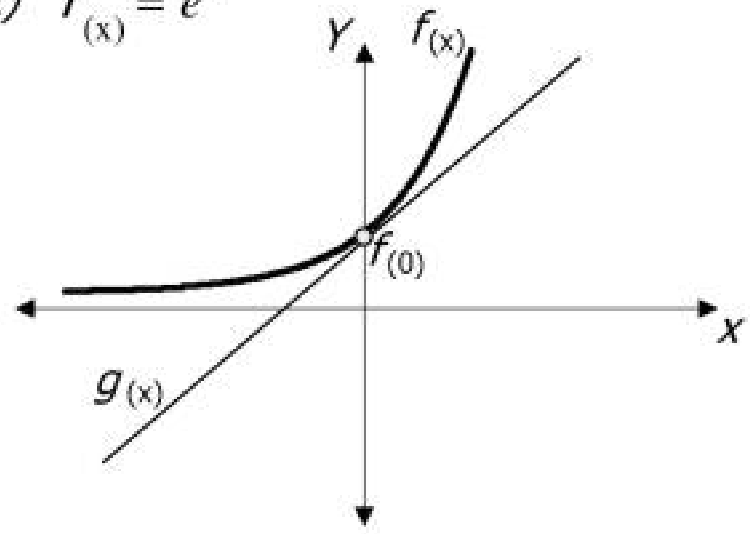
100) $f_{(x)} = 2\sqrt{x}$



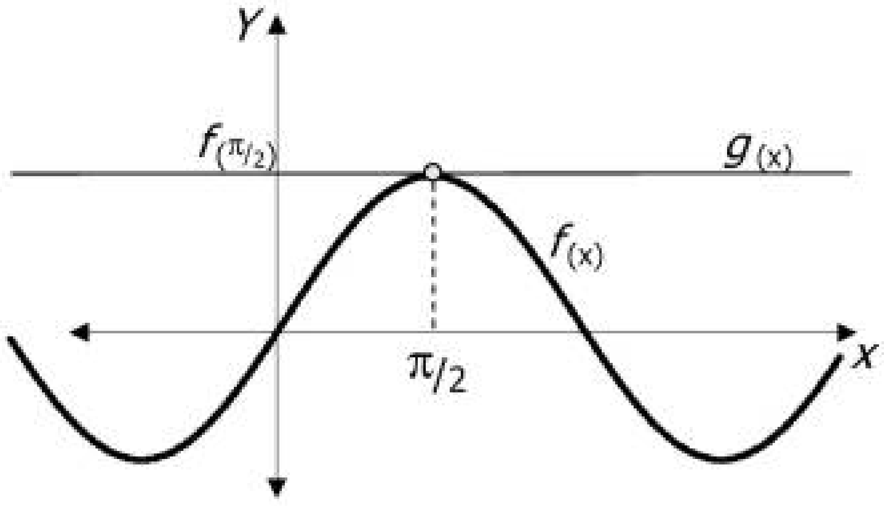
101) $f_{(x)} = \ln(x)$



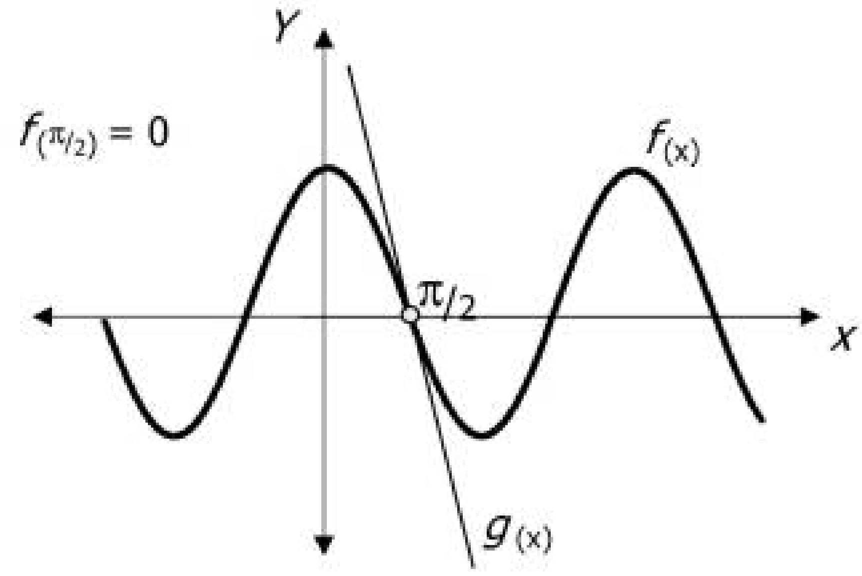
102) $f_{(x)} = e^x$



103) $f_{(x)} = Sen(x)$



104) $f_{(x)} = 2\,Cos(x)$



105) Dada f(x) = $3\boldsymbol{k}x^2 - x + 2$
Sea g(x) la recta tangente a f(x) en x=1
Hallar "**k**" para que la recta Y = 5x–4 sea paralela a g(x)

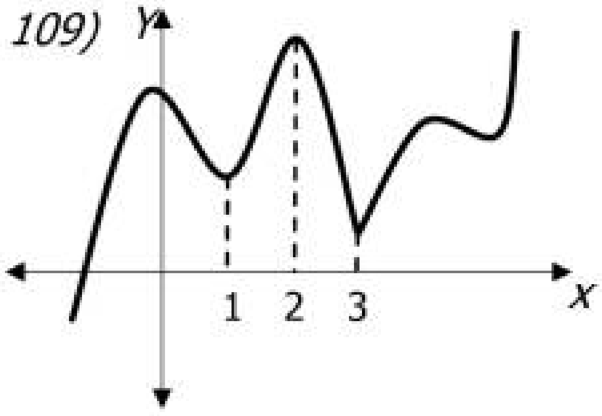
106) Dada f(x) = $3\,\boldsymbol{k}x^2 - 8\boldsymbol{k}x + 5$
Sea g(x) la recta tangente a f(x) en x=2
Hallar "**k**" para que la recta Y = ¼ x + 3 sea perpendicular a g(x)
(Recordar que las pendientes de dos rectas perpendiculares tienen la relación: $m_1 = -1/m_2$)

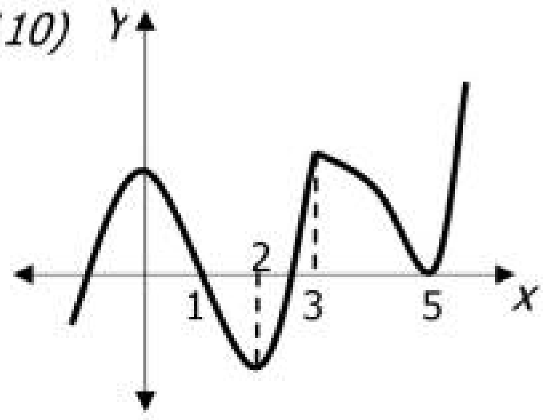
107) Hallar el punto en que la pendiente de la recta tangente a f(x) vale (–4).
Siendo f(x) = $3x^2+2x+1$

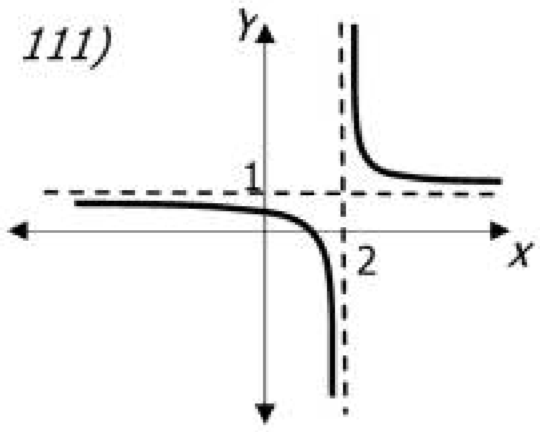
108) Hallar el o los puntos en que la pendiente de la recta tangente a f(x) sea 4.

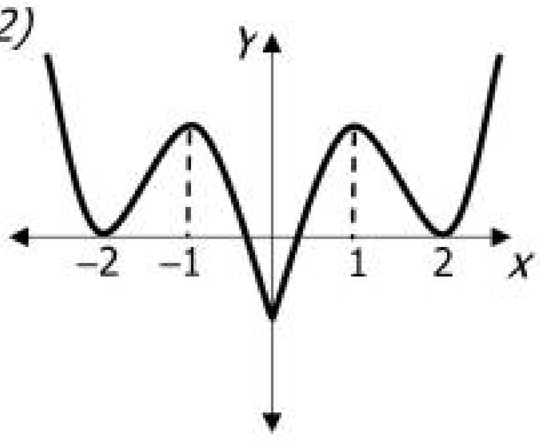
Siendo $f_{(x)} = \begin{cases} x^2 - 6x + 2 \longrightarrow si \quad x \geq 3 \\ 11 - x^2 \longrightarrow si \quad x < 3 \end{cases}$

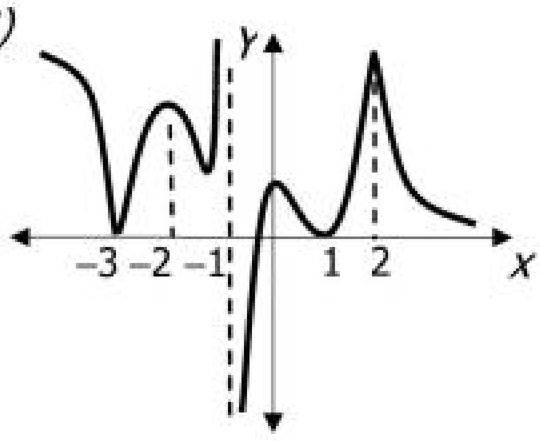
➢ Dados los gráficos, ¿Para qué valores de "x" la función **no tiene recta tangente** o no es derivable?

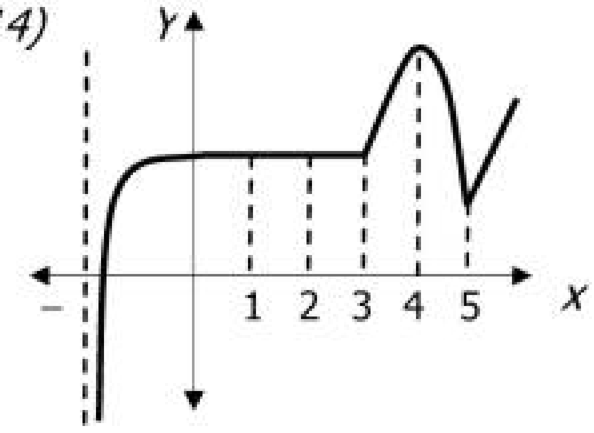
109)


110)


111)


112)


113)


114)


➢ **Ejercicios de Aplicación**:

- Movimiento rectilíneo Variado y Uniforme:

115) El espacio recorrido por cierto móvil (en metros) en función del tiempo (en segundos) está dado por: $e_{(t)} = x^2 - 3x + 1$

La velocidad instantánea en un momento o instante está dada por la expresión: $V = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{\partial e}{\partial t} = e'_{(t)}$

a) Hallar las velocidades instantáneas en los instantes: t=1 seg t=2 seg y t = 3seg
b) Hallar en qué instante e tiempo la velocidad es cero.
c) Sacar conclusiones acerca del tipo de movimiento de este móvil, según los valores de la velocidad.

116) El espacio recorrido por cierto móvil (en metros) en función del tiempo (en segundos) está dado por: $e_{(t)} = 2x - 1$

La velocidad instantánea en un momento o instante está dada por la expresión: $V = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{\partial e}{\partial t} = e'_{(t)}$

a) Hallar las velocidades instantáneas en los instantes: t=1 seg t=2 seg y t = 3seg
b) Sacar conclusiones acerca del tipo de movimiento de este móvil, según las velocidades calculadas.

- Tiro Vertical:

117) Si lanzamos una piedra hacia arriba "con velocidad inicial" la altura (en metros) que alcanza la piedra está dada por la expresión: $h_{(t)} = 20t - 4,9t^2$

"aclaramos que esta expresión sería diferente a otra velocidad inicial"

Por otro lado sabemos que la velocidad va a ir decayendo a medida que la piedra sube, hasta detenerse y comenzar a caer, la expresión, para este caso de la velocidad en función del tiempo estaría dada por la siguiente expresión: $V_{(t)} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\partial h}{\partial t} = h'_{(t)}$

Y la aceleración (que sería la tasa de cambio de la velocidad) está dada por: $a_{(t)} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\partial V}{\partial t} = V'_{(t)}$

a) Hallar la velocidad inicial de esta piedra y las velocidades al cabo de 1 seg y 2 seg de movimiento.
b) Hallar en que momento se detiene la piedra para comenzar a caer.
c) Hallar la aceleración de la piedra. Sacar conclusiones en cuanto al significado real del valor de aceleración

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Derivadas
Nivel II

Número de Tema: **75**

Área: **Matemática**

☆ **Regla de la Cadena**: ¿Cómo se derivan las funciones compuestas?
La Regla de la Cadena sirve para derivar Funciones Compuestas.

... y dice que: $\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$

Hasta ahora veníamos derivando una función f(x) pero siempre respecto de la variable "x". La diferencia que encontramos ahora es que tenemos que derivar una función f(x) respecto de otra función g(x)

La regla de la cadena significa que, cuando tenemos una función f(x) dentro de la cual la variable "x" está afectada por otra función distinta g(x), la derivada de todo va a ser la derivada de f(x) respecto de g(x) multiplicada por la derivada de g(x) respecto de "x"

Ejemplos de funciones compuestas que se derivan aplicando la regla de la cadena:

$$f(x) = \ln\,(x^2+1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \ln\left(g_{(x)}\right) \\ g(x) = x^2+1 \end{cases}$$

$$f(x) = Cos\,(x^3) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = Cos\left(g_{(x)}\right) \\ g(x) = x^3 \end{cases}$$

La derivada de f(x) respecto de g(x)

La derivada de g(x)

$$\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

Derivemos ahora este último ejemplo: $\left[Cos\left(x^3\right)\right]' = \underbrace{-Sen\left(x^3\right)}_{\text{La derivada del Coseno...}} \cdot \underbrace{3\cdot x^2}_{\text{... la derivada de } x^3}$

...por...

Veamos bien detenidamente este ejemplo:

$$f(x) = \left[(3x+2)^5\right] \Rightarrow f_{\left[g_{(x)}\right]} = (3x+2)^5 \Rightarrow f_{\left[g_{(x)}\right]} = \left(g_{(x)}\right)^5 \Rightarrow \left(f_{\left[g_{(x)}\right]}\right)' = \left[\left(g_{(x)}\right)^5\right]' \cdot g'_{(x)}$$

La derivada de f(x) que sería **la derivada del Exponente**...
Multiplicada por:
La derivada de g(x) que sería **la derivada de (3x+2)**

$$\Rightarrow \left[(3x+2)^5\right]' = 5\cdot(3x+2)^4 \cdot 3$$

Otro ejemplo, un poco más complejo: $\left[\ln\,\left(\mathrm{Sen}\left(x^2+\sqrt{2}\right)\right)\right]' =$

$$= \underbrace{\frac{1}{Sen\left(x^2+\sqrt{2}\right)}}_{\text{La derivada del Logaritmo Neperiano...}} \cdot \underbrace{\mathrm{Cos}\left(x^2+\sqrt{2}\right)}_{\text{... la derivada del Seno...}} \cdot \underbrace{(2\cdot x)}_{\text{... la derivada de } x^2+\sqrt{2}}$$

Recordar que todos los términos de la fórmula de la regla de la cadena van siempre multiplicados entre sí

☆ **Derivadas Sucesivas:**

Este concepto es fácil de aprender, se llaman derivadas sucesivas a:

- ✔ Derivada segunda: A la derivada de la derivada
- ✔ Derivada tercera: A la derivada de la derivada segunda
- ✔ Derivada cuarta: A la derivada de la derivada tercera... y así sucesivamente

Se escriben generalmente con números romanos como superíndices por ejemplo:

$f(x)$	$f^{\mathrm{I}}(x)$	$f^{\mathrm{II}}(x)$	$f^{\mathrm{III}}(x)$	$f^{\mathrm{IV}}(x)$
Función	Derivada	Derivada Segunda	Derivada Tercera	Derivada Cuarta

Veamos un ejemplo: Calculemos las derivadas sucesivas de f(x) = $x^3 + 3x^2 - 5x + 2$

Derivamos la función y tenemos la derivada primera
$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 2 \Rightarrow \boxed{f^{\mathrm{I}}(x) = 3x^2 + 6x - 5}$$

Derivamos la derivada y tenemos la derivada segunda
$$f^{\mathrm{I}}(x) = 3x^2 + 6x - 5 \Rightarrow \boxed{f^{\mathrm{II}}(x) = 6.x + 6}$$

Derivamos la derivada segunda y tenemos la derivada tercera
$$f^{\mathrm{II}}(x) = 6.x + 6 \Rightarrow \boxed{f^{\mathrm{III}}(x) = 6}$$

Derivamos la derivada tercera y tenemos la derivada cuarta
$$f^{\mathrm{III}}{}_{(x)} = 6 \Rightarrow \boxed{f^{\mathrm{IV}}{}_{(x)} = 0}$$

Si para este mismo ejemplo seguimos calculando más derivadas sucesivas, nos vana dar todas cero, ya que la derivada cuarta es cero, si seguimos derivando esta expresión va a seguir dando cero, lo que no significa para nada que no hayan mas derivadas sucesivas.

☆ **Regla de L´hopital:** Esta regla es muy útil para calcular límites indeterminados (0/0)

Sean f(x) y g(x) funciones derivables y $f(0) = 0$ y $g(0) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{\mathrm{I}}(x)}{g^{\mathrm{I}}(x)}$$

Ejemplo: Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{Sen(x)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{Sen(x)} = \frac{e^0 - 1}{Sen(0)} = \frac{0}{0} \Rightarrow$$

Como me da indeterminado, vamos a probar aplicar la regla de L´Hopital

Aplicamos la regla de L´hopital entonces Derivamos numerador y denominador
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{Sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{Cos(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{Sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{Cos(x)} = \frac{e^0}{Cos(0)} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

Y se fue la indeterminación, con lo cual calculamos el límite rápidamente

Remplazamos "x" por 0
Ya que es el valor al que tiende "x"

✔ **Derivar los siguientes productos de funciones:**

1) $Sen(x)\cdot \ln x$

2) $e^{x}\cdot Cos(x)$

3) $Sen(x)\cdot Cos(x)$

4) $Sen(x)\cdot[-Cos(x)]$

5) $e^{x}\cdot \ln x$

6) $Sen(3x^{4}+6x)\cdot Cos(\pi)$

7) $\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot \ln \sqrt{x}$

8) $Sen(\sqrt{x})\cdot Cos(5\cdot x+\pi)$

9) $\ln \frac{\pi}{x}\cdot Sen(\pi)$

10) $\ln \frac{\pi}{x}\cdot e^{\pi\cdot x}$

11) $(x-\pi)\cdot(x+\pi)$

12) $(e-x)\cdot(e+x)$

13) $e^{2\cdot x+e}\cdot Cos(2\cdot x+e)$

14) $Sen(6\pi\cdot \ln x)\cdot Sen(3e^{x}\cdot\sqrt{x})$

✔ **Derivar aplicando la fórmula de cocientes de funciones y regla de la cadena:**

15) $\frac{e^{x}}{e^{\pi\cdot x}}$

16) $\frac{\ln(8\cdot x^{2})}{\sqrt{x}}$

17) $\frac{Sen(\pi\cdot x)}{Cos(\pi\cdot x)}$

18) $\frac{\ln\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

19) $\frac{Sen(\pi\cdot x)}{e^{\pi\cdot x}}$

20) $\frac{3\cdot x^{2}+\sqrt{x}+e}{\ln x+Cos(\pi)}$

21) $\frac{\sqrt{x^{3}+3\cdot x+2}}{3\cdot x^{2}+3}$

22) $\frac{Sen(2\cdot x^{3}+6\cdot x+\pi)}{6\cdot x^{2}+6}$

23) $\frac{e^{3\cdot\pi\cdot x}}{\ln\ (3\cdot\pi\cdot x)}$

24) $\sqrt{\frac{\ln(3\cdot x^{3})}{\ln(x^{3})}}$

25) $e^{\frac{\ln x}{Sen(x)}}$

26) $\ln\left(\frac{3\cdot x^{3}+2\cdot\pi}{9\cdot x+c}\right)$

27) $Sen\left(\frac{x}{\ln x}\right)$

28) $\left(\frac{\sqrt{x+2}}{e^{x}}\right)^{4}$

29) $\pi^{\left(\frac{e^{6\cdot x}}{\ln x}\right)}$

✔ **Derivar los siguientes expresiones:**

30) $e^{Sen\ x}$

31) $Cos(x+a\cdot x^{2}+b)$

32) $\ln(e^{x+2})$

33) $\ln\left(\frac{Sen(x)}{Cos(x)}\right)$

34) $Sen(\ln(x))$

35) $(\ln(2\cdot x+1))^{5}$

36) $e^{(x^{3})}$

37) $\ln(2\cdot x^{3}+3\cdot x+6)$

38) $\sqrt{\ln(x)}$

39) $\ln(Sen^{2}(x))$

40) $\frac{e^{2\cdot x}}{\ln x}$

41) $e^{(e^{x})}$

42) $a^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

43) $\ln(\sqrt{2\cdot x})$

44) $\sqrt[3]{\ln(3\cdot x+6)}$

45) $\sqrt[6]{Sen(x)^{5}}$

46) $\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{2}$

47) $e^{6\cdot x^{3}}-e^{-x}$

48) $e^{2\cdot x^{2}}\cdot \ln x$

✔ **Hallar $f''(x)$**

49) $f_{(x)} = e^{2x}$

50) $f_{(x)} = \text{Cos}(3x)$

51) $f_{(x)} = -Sen(2x+1)$

52) $f_{(x)} = 3x^3 + 2x^2 - X + 5$

53) $f_{(x)} = x^2 - 5x + 3$

54) $f_{(x)} = (X+2).(X-3)$

55) $f_{(x)} = (X-5).(X-1)$

56) $f_{(x)} = (X+1)^2 - 3$

57) $f_{(x)} = x \,.\, \ln(2x)$

58) $f_{(x)} = e^{2x+1} \cdot e^{x-1}$

59) $f_{(x)} = \ln\left(x^2\right)$

60) $f_{(x)} = Cos(x-1) + 3x^2 + 2x$

✔ **Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L´hopital:**

61) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Sen(x)}{e^x - 1}$

62) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Cos(x) - 1}{1 - e^x}$

63) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\,Sen(2x)}{e^{3x}}$

64) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \,.\, Sen(x)}{Cos(x) - 1}$

65) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+e) - 1}{x}$

66) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x}}{e^x - Cos(x)}$

67) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^e \,.\, -1}{e.x}$

68) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{Cos(x)}{Sen(2x-\pi)}$

69) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + 2x}{\sqrt{x}}$

70) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3}{\sqrt{x+1} - 1}$

71) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{2 \,.\, \sqrt{x+9} - 6}$

72) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - 1 + e^{11\,x} + 3\,Sen(2x)}{5 \,.\, \sqrt{x+4} - 2 \,.\, (x^2 + 3x + 5)}$

73) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 2}{x^2 - x}$

74) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{x+1}{2x-1} + 1}{\dfrac{6 - 2\,x}{3 + 5\,x} + 2}$

75) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{4x+3}{3x+1} - 3}{\dfrac{4 - x^2}{3x-2} - 2\,(x-1)}$

76) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{\,\text{sen}(x)} - 1}{x}$

77) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Sen\,(x+\pi)}{Cos(x - \pi/2)}$

78) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\,Sen(x)} - 1}{e - e^{\,Cos(x)}}$

Hallar f '' (0)

79) $f_{(x)} = e^{\left(x^2 + x\right)}$

80) $f_{(x)} = e^{Sen(x)}$

81) $f_{(x)} = x + e^{(x^2+1)}$

Hallar f ''' (0)

82) $f_{(x)} = e \cdot x^2 + e^{(2x)}$

83) $f_{(x)} = ex^3 + e^{(x^2+x+1)}$

84) $f_{(x)} = e^x \cdot Sen(x) \; + \; e^{(2x+1)} \cdot Cos(x)$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

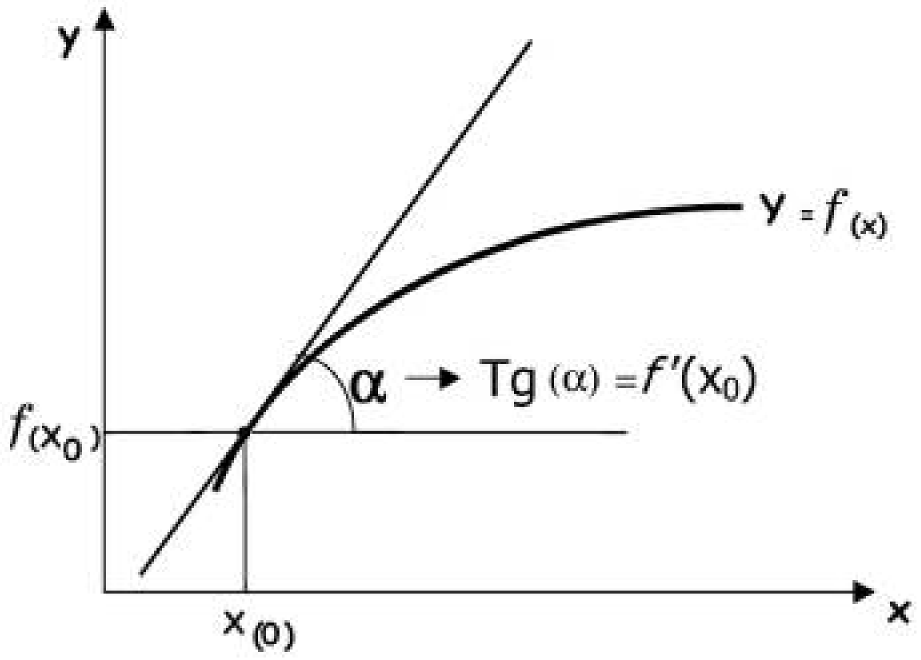
Derivadas
Nivel III

Número de Tema: **76**

Área: **Matemática**

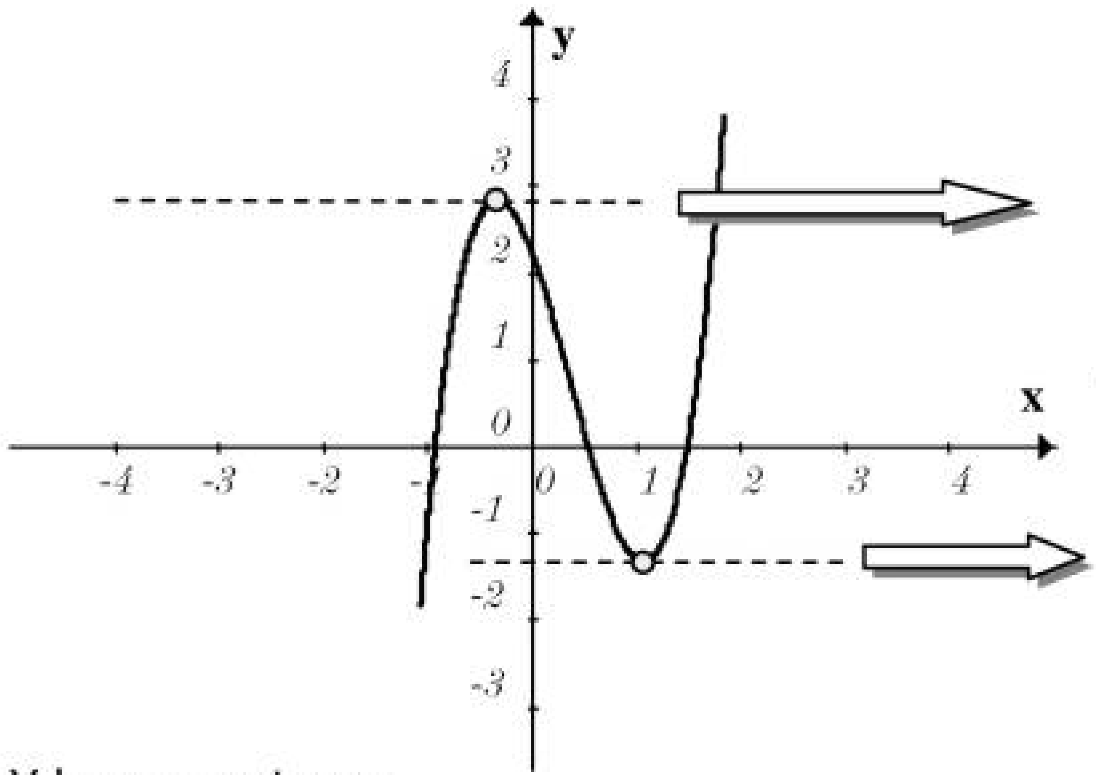
Máximos y Mínimos

¿Para qué sirve saber la "Derivada" de una función? Saber como calcular derivadas, sirve, por ejemplo, para saber donde una función presenta sus valores máximos y mínimos.



Como ya sabemos, la derivada de una función en un punto
nos indica la pendiente de la recta tangente
a esa función en ese punto determinado...

Pero... La pregunta es... ¿Qué pasa cuando la función presenta un máximo o un mínimo?



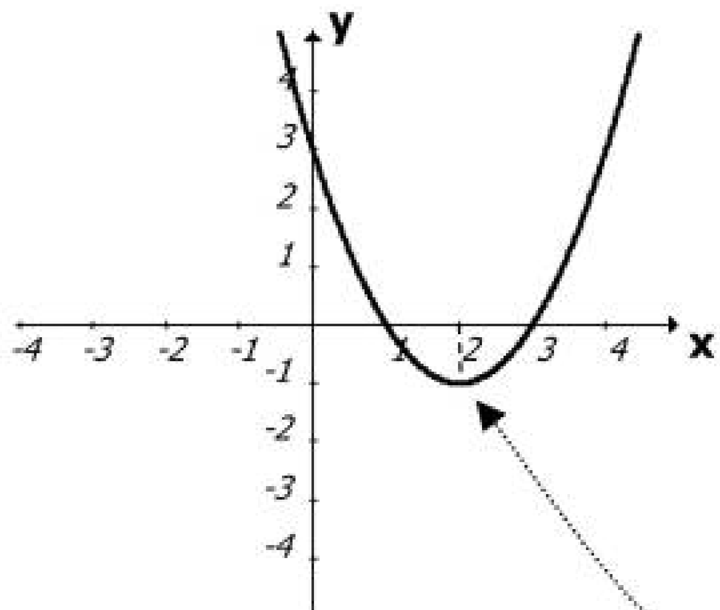
La recta tangente es horizontal.
El ángulo α es igual a cero. $\alpha = 0$

$\Rightarrow$ **tg (α) = 0** $\Rightarrow$ $f'_{(x)} = 0$

Y la respuesta es:
En los puntos en que la función presenta máximos o mínimos, la derivada de la función es CERO.

Pero... ***¿Es condición necesaria y suficiente, que la derivada sea CERO, para que la función presente un máximo o mínimo relativo?***

La respuesta es NO.
Esta es una condición necesaria. No puede haber máximos ni mínimos sin que la derivada sea CERO. Pero, en cambio, hay casos en los que con que se cumpla esta condición sola no alcanza. Veamos unos ejemlpos



$f_{(X)} = X^2 - 4X + 3$

$f'_{(X)} = 2X - 4$ ⇦ Derivamos f(x)

$0 = 2X - 4$ ⇦ Igualamos f ' (x) = 0

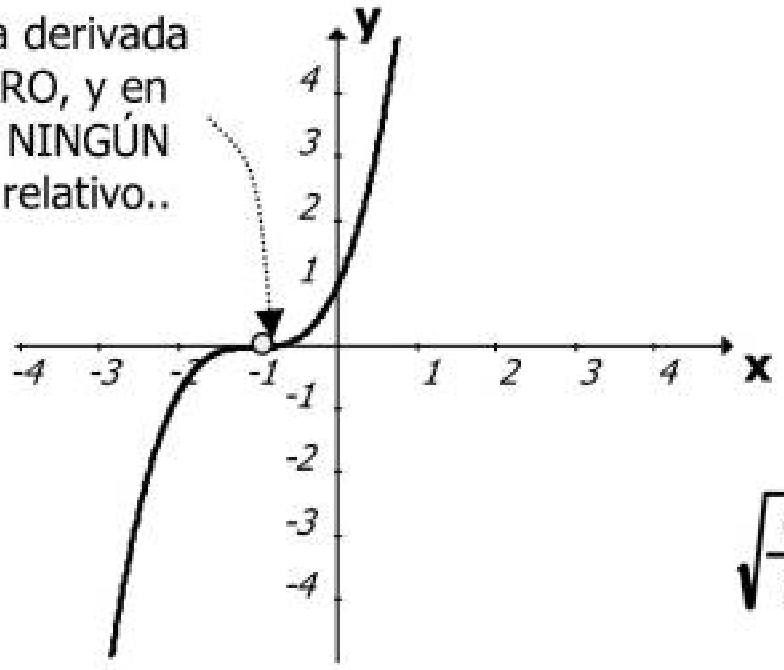
$4 = 2X$ ⇦ Despejamos "x"

$4 : 2 = X$

$X = 2$

En este caso, la derivada en X = 2, vale CERO, y en ese punto hay efectivamente un mínimo.

En este otro caso, la derivada en X = –1, vale CERO, y en ese punto NO HAY NINGÚN mínimo ni máximo relativo..



$$f_{(X)} = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$$

$$f'_{(X)} = 3X^2 + 6X + 3$$

$$f'_{(X)} = 3\,(X^2 + 2X + 1)$$

$$f'_{(X)} = 3\,(X+1)^2 \implies 0 = 3\,(X+1)^2$$

$$\sqrt{\frac{0}{3}} = X + 1 \implies 0 = X + 1 \implies -1 = X$$

Pero ... entonces... **¿Cómo me aseguro si en un punto donde la derivada vale CERO, hay o no hay un máximo o un mínimo?** Hay tres Criterios Básicos para responder a esa pregunta (cualquiera de los tres es válido)

- ☆ **Criterio de la DERIVADA SEGUNDA.**
- ☆ **Estudio de la concavidad (Signo de la derivada).**
- ☆ **Estudio de los valores de la función en un entorno del punto crítico.**

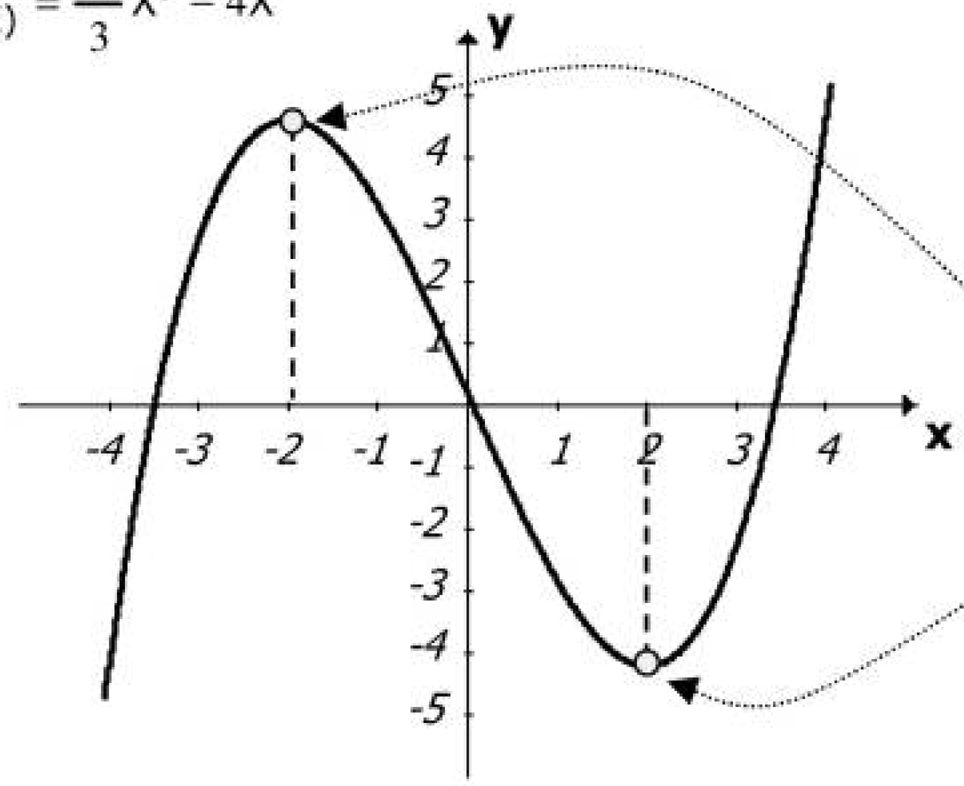
1 – Criterio de la derivada segunda.

Este criterio supone lo siguiente:

$$f'_{(X_0)} = 0 \implies \begin{cases} \text{Si... } f''_{(X_0)} < 0 \implies f_{(X_0)} \text{ es un } \textbf{máximo relativo} \\ \text{Si... } f''_{(X_0)} > 0 \implies f_{(X_0)} \text{ es un } \textbf{mínimo relativo} \\ \text{Si... } f''_{(X_0)} = 0 \implies f_{(X_0)} \text{ es un } \textbf{Punto de Inflexión} \end{cases}$$

Ejemplo:

$$f_{(X)} = \frac{1}{3}X^3 - 4X$$



$$\left.\begin{aligned} f_{(X)} &= \frac{1}{3}X^3 - 4X \\ f'_{(X)} &= X^2 - 4 \\ 0 &= X^2 - 4 \\ 4 &= X^2 \\ X &= \pm 2 \end{aligned}\right\}$$

Derivo e igualo a 0
Y Despejo "x"

En el gráfico se ve como en X = –2 hay un máximo y en X = 2 hay un mínimo, pero vamos a comprobarlo con el criterio de la derivada segunda.

$$f_{(X)} = \frac{1}{3}X^3 - 4X \implies f'_{(X)} = X^2 - 4 \implies f''_{(X)} = 2X$$

Hallamos la derivada segunda.

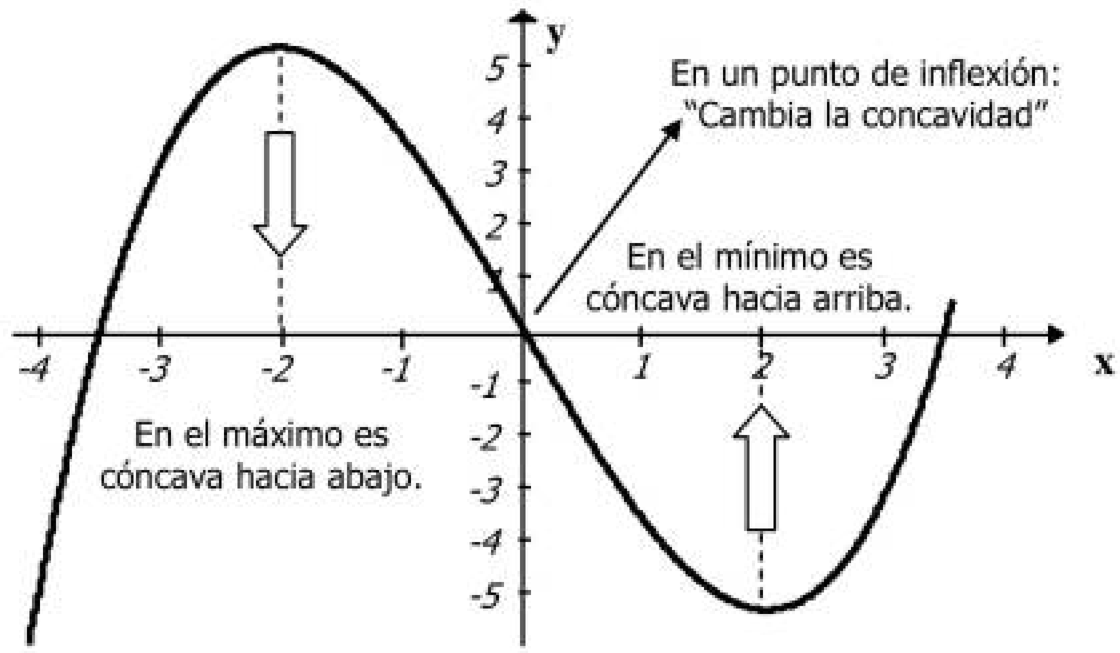
Ahora habría que reemplazar "X" por los puntos que quiero averiguar si son máximos , mínimos o puntos de inflexión.

En X = –2 $\implies f''_{(-2)} = 2\cdot(-2) \implies f''_{(-2)} = -4 \implies f''_{(-2)} < 0 \implies$ En X = –2 hay un **MÁXIMO**

En X = 2 $\implies f''_{(2)} = 2\cdot 2 \implies f''_{(2)} = 4 \implies f''_{(2)} > 0 \implies$ En X = 2 hay un **MÍNIMO**

2 – Criterio de la concavidad:

Según este criterio, en los máximos y mínimos no cambia la concavidad, mientras que en los puntos de inflexión, cambia. Además para un máximo la función es "cóncava hacia abajo", mientras que en un mínimos es "cóncava hacia arriva"



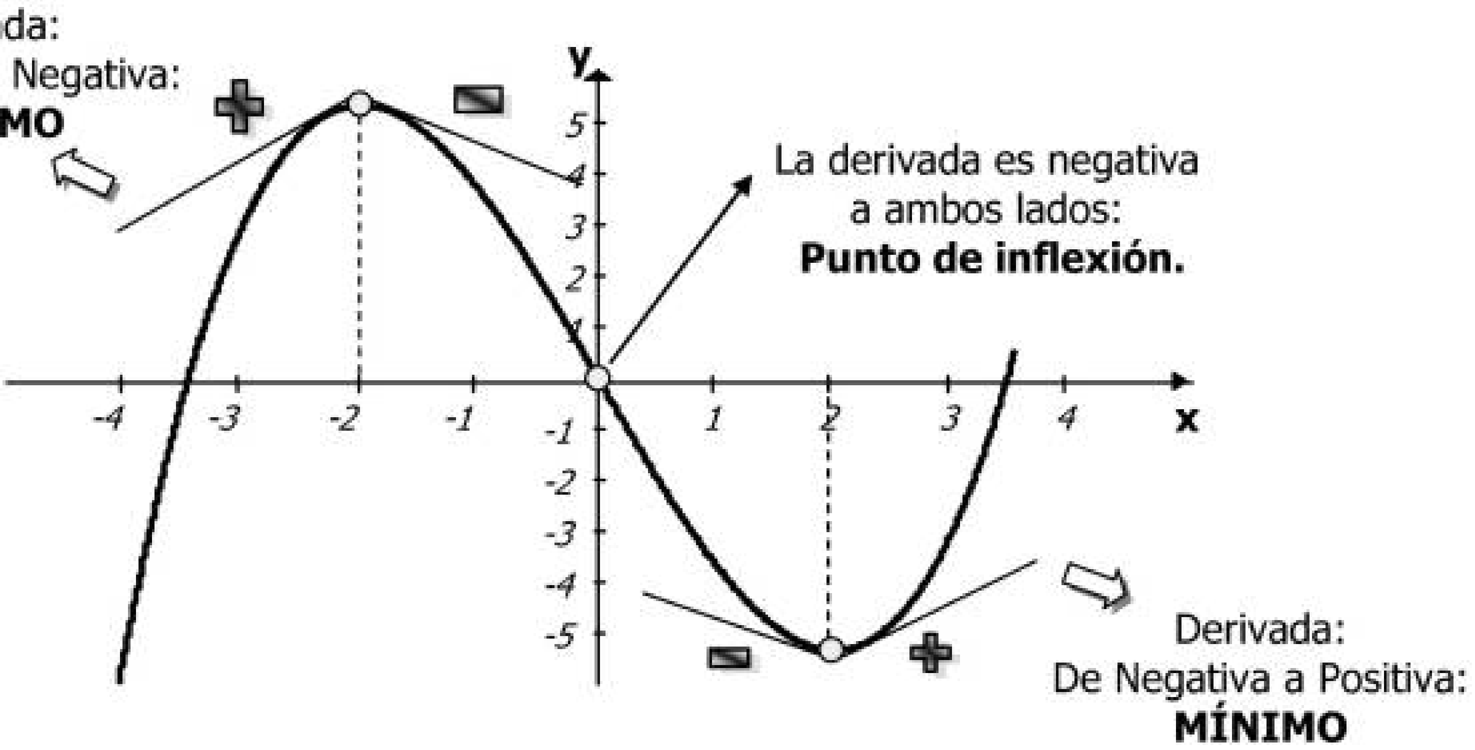
Y.. ¿Cómo me doy cuenta cuál es la concavidad de la función?

Respuesta: Por el signo de la derivada o de la derivada segunda. **Lo que hay que hacer, es estudiar, como es el signo de la derivada un "poquito" a la izquierda del punto y "un poquito" a la derecha del punto.**

En realidad ese "poquito" es un infinitésimo Veamos el siguiente esquema: (cuando la derivada en el punto es CERO)

Signo de f' (x) a la izquierda del punto	Signo de f' (x) a la derecha del punto	Clasificación del punto crítico
NEGATIVO	POSITIVO	**MÍNIMO**
POSITIVO	NEGATIVO	**MÁXIMO**
POSITIVO	POSITIVO	Punto de Inflexión
NEGATIVO	NEGATIVO	Punto de Inflexión

Esto es lo mismo que dice el cuadro anterior pero lo vemos gráficamente:



Veamos esto en forma analítica: Primero hallamos los puntos críticos para clasificarlos

$$f_{(X)} = \frac{1}{3}X^3 - 4X \xrightarrow[\text{Hallamos la derivada}]{} f'_{(X)} = X^2 - 4 \xrightarrow[\text{Igualamos a CERO}]{} 0 = X^2 - 4 \Rightarrow 4 = X^2 \Rightarrow X = \pm 2$$

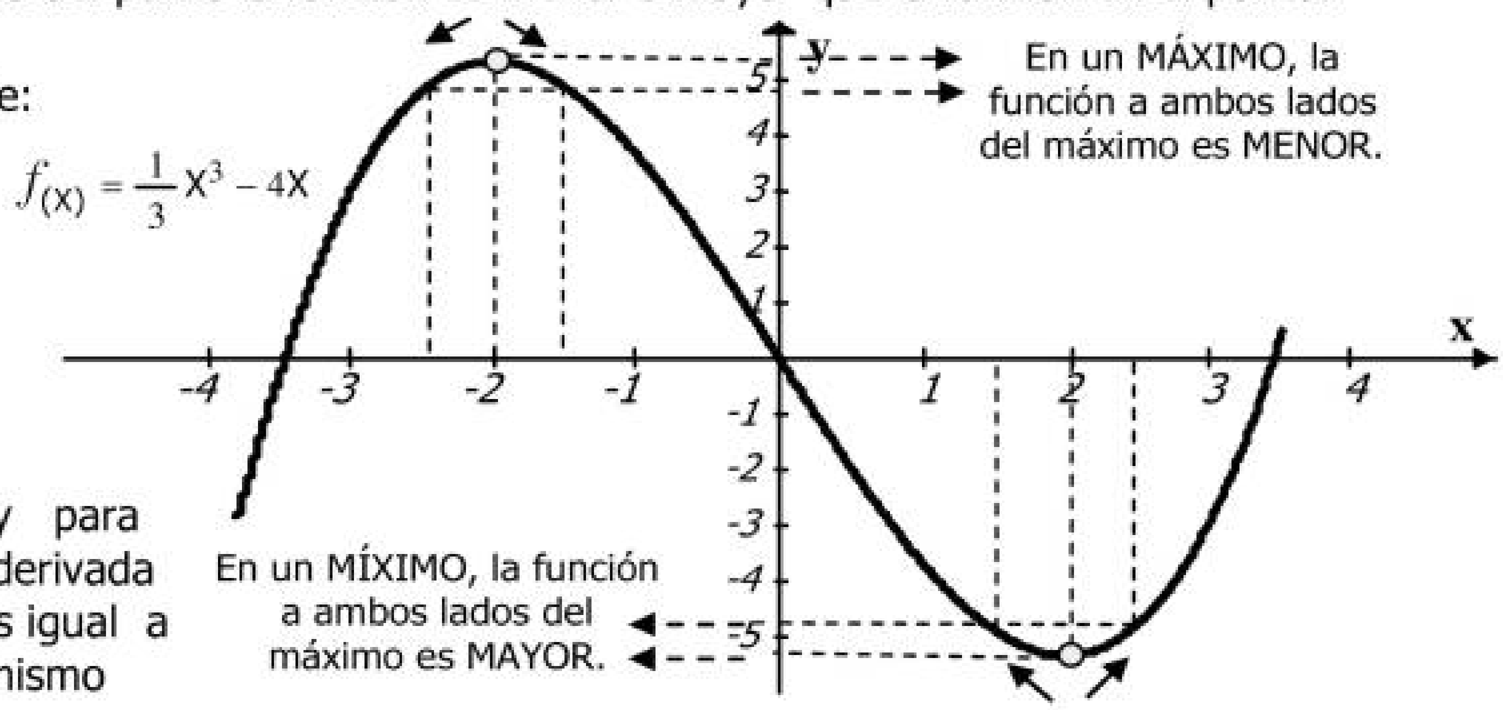
Ahora, habría que ver, por el criterio de la concavidad, si los puntos son, máximos, mínimos o puntos de inflexión.

	Signo de f ' (x) a la izquierda de –2	Signo de f ' (x) a la derecha de –2	Tipo de Punto crítico
En **X=–2**	$f'_{(-2,1)} = (-2{,}1)^2 - 4 = 0{,}41$ POSITIVO	$f'_{(-1,9)} = (-1{,}9)^2 - 4 = -0{,}39$ NEGATIVO	$f_{(-2)}$ = Máximo MÁXIMO

	Signo de f ' (x) a la izquierda de 2	Signo de f ' (x) a la derecha de 2	Tipo de Punto crítico
En **X= 2**	$f'_{(1,9)} = (1{,}9)^2 - 4 = -0{,}39$ NEGATIVO	$f'_{(2,1)} = (2{,}1)^2 - 4 = 0{,}41$ POSITIVO	$f_{(2)}$ = Mínimo MÍNIMO

3 – Criterio de los valores de la función en un entorno del punto crítico. Lo que hay que ver es si (una vez que sabemos los puntos para los cuales la derivada da CERO) a la izquierda y a la derecha del punto la función es menor o mayor que la función en el punto.

Lo vemos graficamente:



Esto lo hacemos para X = –2 y para X=2 porque sabemos que la derivada de la función en esos puntos es igual a CERO. Recordemos que es el mismo ejemplo de siempre.

Vemos primero que pasa en X = –2

$f_{(-2,1)} = 5{,}313$
$f_{(-2)} = 5{,}333$
$f_{(-1,9)} = 5{,}313$

A ambos lados de la función $f_{(X)}$ es menor que en el punto crítico. ⟹ *El punto es un* ***MÁXIMO.***

Vemos ahora que pasa en X = 2

$f_{(1,9)} = -5{,}313$
$f_{(2)} = -5{,}333$
$f_{(2,1)} = -5{,}313$

A ambos lados de la función $f_{(X)}$ es MAYOR que en el punto crítico. ⟹ *El punto es un* ***MÍNIMO.***

Veamos otro ejemplo: $f_{(X)} = X^3$ Obviamente tenemos que hallar los puntos críticos y clasificarlos.

⟹ (Primero Derivamos) $f'_{(X)} = 3X^2$ ⟹ $0 = 3X^2$ (Igualamos a CERO) ⟹ $X = 0$ (Despejamos X)

Ahora hay que ver que pasa en X = 0 (¿máximo, mínimo o punto de inflexión?) Veamoslo por cada criterio:

1–**Criterio de la derivada segunda**: $f_{(X)} = X^3$ ⟹ $f'_{(X)} = 3X^2$ ⟹ $f''_{(X)} = 6X$

El punto crítico era X=0... Veamos que pasa con la derivada segunda para X=0

$f''_{(0)} = 6 \cdot 0 = 0$ ⟹ Como la derivada segunda es CERO, es ***punto de Inflexión***.

2–**Criterio de la Concavidad**: $f_{(X)} = X^3$ ⟹ $f'_{(X)} = 3X^2$

$f'_{(-0,1)} = 3(-0{,}1)^2 = 0{,}03$ ✚ | $f'_{(0,1)} = 3(0{,}1)^2 = 0{,}03$ ✚ ⟹ Como los signos de las derivadas a ambos lados son iguales, cambia la concavidad, por lo tanto es ***punto de Inflexión***.

3–**Criterio de los valores de la función en un entorno del punto**:

$f_{(-0,1)} = (-0{,}1)^3 = -0{,}001$ La función es **menor** que en el punto crítico	$f_{(0)} = (0)^3 = 0$	$f_{(0,1)} = (0{,}1)^3 = 0{,}001$ La función es **mayor** que en el punto crítico	Como de un lado del punto crítico la función es MENOR y del otro es MAYOR el punto es: ⟹ ***Punto de Inflexión***.

RESPONDER V o F

1) Toda función para la cual existe un valor en el que la derivada de dicha función vale CERO, tiene un máximo o un mínimo.

2) Hay funciones para las cuales existe un punto donde la derivada vale cero y sin embargo no tienen ni máximos ni mínimos.

3)Hay funciones para las cuales no existen valores que verifiquen que la derivada de dicha función es CERO.

4) Hay funciones para las cuales no existen valores que verifiquen que la derivada de dicha función es CERO. Entonces, podemos decir que esas funciones no tienen ni máximos ni mínimos ni puntos de inflexión.

5) Hay funciones para las cuales no existen valores que verifiquen que la derivada es igual a CERO, pero sin embargo, podemos decir, que pueden tener un punto de inflexión.

6) En los puntos de inflexión cambia la concavidad de las funciones, siempre!.

7) En los extremos relativos (ya sean máximos o mínimos) siempre se verifica que la derivada vale CERO.

8) El signo de la derivada hacia ambos lados de un extremo relativo (en un entorno pequeño) es distinto.

9) ¿Se verifica la siguiente expresión, sabiendo que en X_0, la función presnta un máximo relativo? $\lim\limits_{\Delta X\to 0}\text{ite}\ \dfrac{f'(X_0+\Delta X)}{f'(X_0-\Delta X)} < 0$

10) ¿Se verifica la siguiente expresión, sabiendo que en X_0, la función presnta un mínimo relativo? $\lim\limits_{\Delta X\to 0}\text{ite}\ \dfrac{f'(X_0+\Delta X)}{f'(X_0-\Delta X)} < 0$

11) Toda función polinómica de tercer grado, presenta indefectiblemente un punto de inflexión y puede presentar un máximo y un mínimo relativo o ninguno de ellos.

12) Toda función cuadrática tiene un punto que es mínimo relativo.

13) Si estudiamos el criterio de la concavidad para las funciones lineales, llegamos a la conclusión que estas tienen infinitos puntos de inflexión.

14) Las funciones polinómicas de grado 3 siempre tienen mínimos y máximos relativos.

15) Las funciones polinómicas de grado 3 siempre tienen valores de x para los cuales la derivada vale cero.

16) La función $F(x)=x^2+2x-3$ tiene un máximo relativo en $X=-1$

17) Las funciones cuadráticas $F(x)=ax^2+bx+c$, cuando $a>0$ tienen siempre un mínimo relativo en $x=-b/(2a)$

18) Las funciones lineales nunca presentan ni máximos, ni mínimos relativos ni puntos de inflexión.

19) Como la pendiente de la recta tangente a $F(x)= x^2+2x-3$, en $x=-1$ es cero, la función no tiene recta tangente en ese punto.

20) Las funciones trigonométricas del tipo $F(x)=a\ \mathrm{Sen}(b.x+c)$ tienen infinitos valores de "x" para los cuales la función presenta máximos y mínimos relativos porque son funciones periódicas.

✔ Hallar los puntos críticos de las funciones y clasificarlos como máximos, mínimos o puntos de inflexión:

21) $f_{(X)}=(X+1)^2$

22) $f_{(X)}=-2x^2-3x+1$

23) $f_{(X)}=(X+1)^3+1$

24) $f_{(X)}=\left(\frac{1}{2}X-1\right)^3-8$

25) $f_{(X)}=\frac{1}{3}X^3+\frac{5}{2}X^2+6X+4$

26) $f_{(X)}=\frac{1}{3}X^3-\frac{5}{2}X^2+6X-6$

27) $f_{(X)}=X^4-2X^2$

28) $f_{(X)}=-\frac{1}{3}X^4+2X^2$

29) $f_{(X)}=Sen(X)$

30) $f_{(X)}=Cos(2X+\pi)$

31) $f_{(X)}=\ln\left(2X^2+1\right)$

32) $f_{(X)}=\ln\left(X^2+2X+3\right)$

33) $f_{(X)}=\frac{1}{2}(e)^{X^2-2X}$

34) $f_{(X)}=(e)^{\ln(x^2+1)}$

35) $f_{(X)}=\cos^2\left(\frac{1}{2}X-\frac{\pi}{2}\right)$

36) $f_{(X)}=(e)^{\ln\left[Sen^2(x)\right]}$

37) $f_{(X)}=(2)^{\log_2 X^2}$

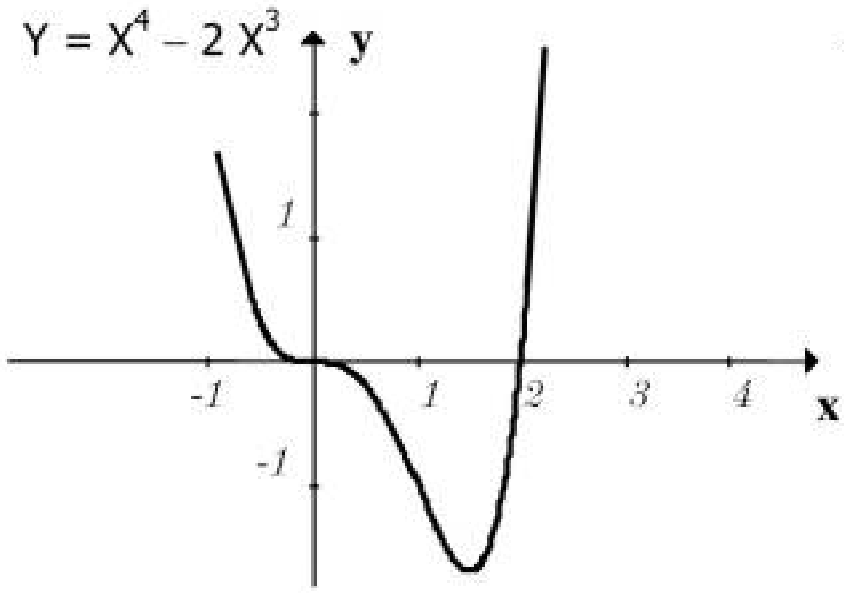
Hallar y clasificar los puntos críticos de: 38) $f_{(X)} = e^{\operatorname{sen}(X)}$

Advertencia: Este ejercicio es bastante difícil y tramposo. Se recomienda sólo para quienes manejen bien el tema de puntos críticos y las funciones trigonométricas.

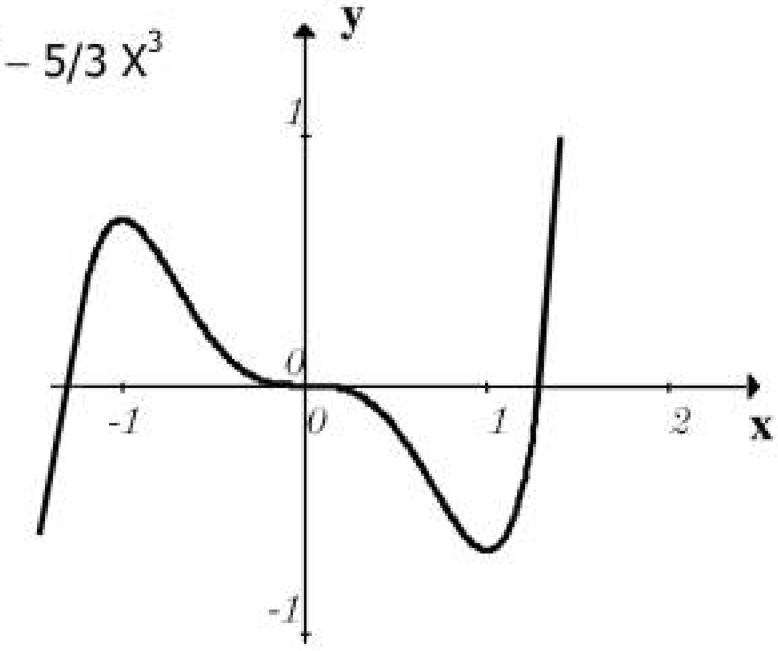
Nota: Si se animan a resolver este, les doy una ayudita "Los máximos y mínimos son fáciles de calcular, lo complicado está en los puntos de inflexión. La derivada segunda es un "choclo" pero igualmente se puede igualar a cero fácilmente, pero nos queda una expresión con seno y coseno cuadrado, lo que hay que hacer ahí es usar la identidad trigonométrica del seno cuadrado mas coseno cuadrado. Pero no termina ahí la cosa, lo que queda ahora es una cuadrática, y luego de resolver la cuadrática quedan dos resultados, pero hay que ver bien en ese punto, el codominio de la función seno. Una vez que tienen el ángulo para el cual la derivada segunda da cero, ya casi está, pero..... no termina ahí, hay que ver que pasa con los 4 cuadrantes, hay que ver la equivalencia de las funciones trigonométricas en los 4 cuadrantes y así si llegamos a los dos puntos de inflexión que se repiten periódicamente, en un ciclo de 2π de período.

✔ Dadas las siguientes gráficas Y SUS FUNCIONES decir cuáles son los puntos críticos y clasificarlos en máximos, mínimos y puntos de inflexión.

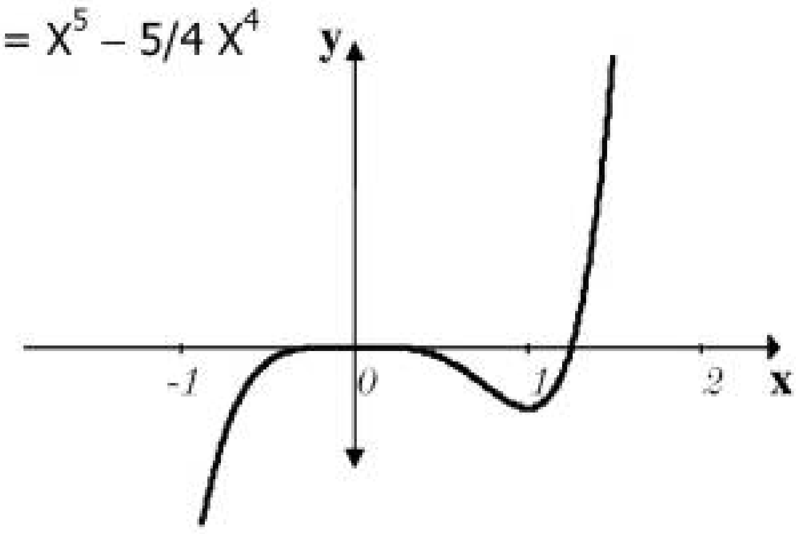
39) $Y = X^4 - 2X^3$



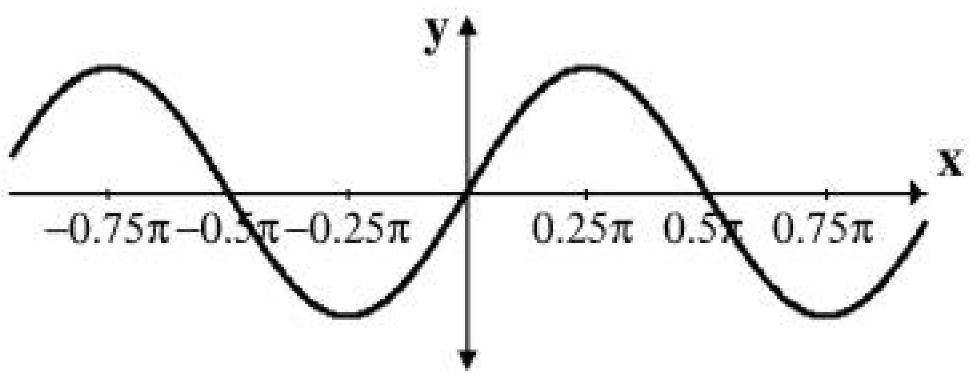
40) $Y = X^5 - 5/3\,X^3$



41) $Y = X^5 - 5/4\,X^4$



42) Y = Sen (X) * Cos (X)



✔ **Hallar el valor de "k" para que *f*(X) presente un máximo en X = 1**

43) $f_{(X)} = -kX^2 + (k+2)\,X + 1$

44) $f_{(X)} = \frac{1}{k}X^2 + X$

45) $f_{(X)} = kX^3 + 3X$

46) $f_{(X)} = -k\ln\left[(X-k)^2 + k\right]$

47) $f_{(X)} = \ln\left(X^K - 2X + K\right)^{-K}$

✔ **Hallar "k" para que en X = 1 *f*(X) presente un punto de inflexión.**

48) $f_{(X)} = kX^3 - 3X^2 + kX - 1$

49) $f_{(X)} = (X-k)^3$

50) $f_{(X)} = (2X + 1 - 3k)^4 - 3X - K^{5k}$

51) $f_{(X)} = \ln\left(X^2 + k\right)^k$

✔ Más ejercicios para hallar máximos, mínimos y puntos de inflexión:

52) $f_{(X)} = \dfrac{8}{X^3} - \dfrac{6}{X}$ 53) $f_{(X)} = \dfrac{(X+1)^2}{X^2+1}$ 54) $f_{(X)} = \dfrac{X^2-1}{\sqrt{X^2+1}}$

55) $f_{(X)} = X\sqrt{X} + 4X - 3\sqrt{X}$ 56) $f_{(X)} = X\sqrt{X} - 4X$

57) Hallar el valor de X dentro del intervalo (0 ; 1) para el cual f(x) llega a su valor mínimo. $\Rightarrow f_{(X)} = X - \sqrt[3]{X^2}$

58) Hallar el valor de X para el cual f(x) tiene un mínimo relativo y un máximo relativo. $\Rightarrow f_{(X)} = \dfrac{X^2+5}{X+2}$

59) Hallar el valor de X para el cual f(x) tiene un mínimo relativo y un máximo relativo. $\Rightarrow f_{(X)} = X^2\sqrt{X+1}$

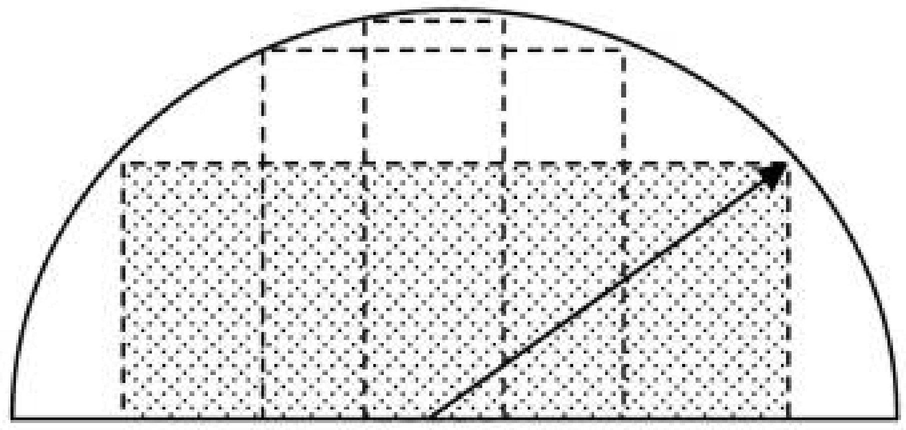
✔ Ejercicios de Aplicación de máximos y mínimos

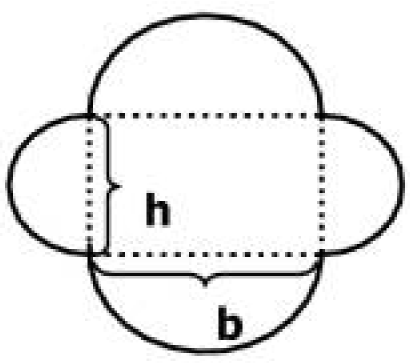
Nota: En este tipo de ejercicios hay que plantear una "Función de una variable" para poder derivarla, igualarla a cero y hallar lo que nos pida el ejercicio.

60) Sean X e Y dos números reales negativos distintos de cero, tales que $X^2 - Y = 1$ Hallar el valor máximo que puede tomar: $X^3 + Y$

61) ¿Cuál es el área del mayor rectángulo (máxima superficie) que puede ser inscripto en un semicírculo de radio = 4 cm.

Ayuda: (plantear la relación entre b/2 y h del rectángulo usando el teorema de pitágoras, tomando el radio como hipotenusa)





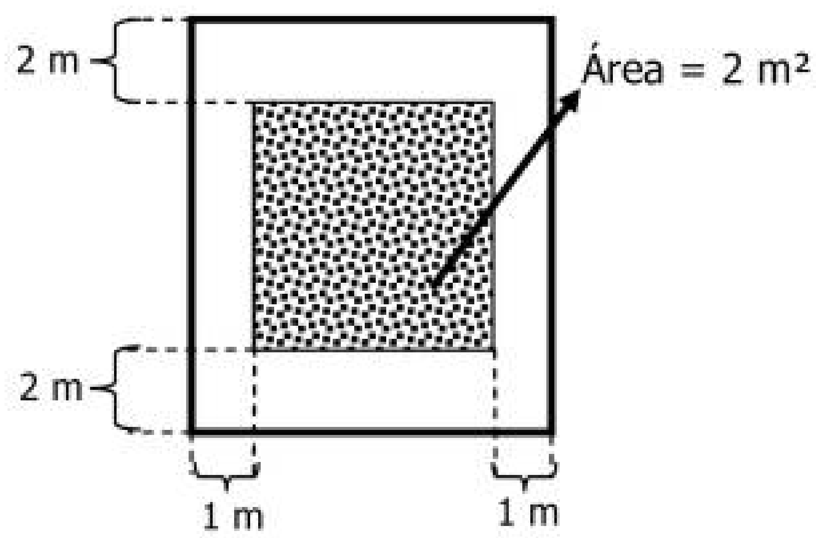
62) Hallar las dimensiones óptimas del terreno de forma rectangular con regiones semicirculares adosadas a los lados opuestos para que el área sea mínima. Si se sabe que el perímetro del terreno es de 1200 mts.

63) Sean A y B dos números enteros, tales que A + B = 6. Hallar A y B para que $A^2 + B^2$ sea lo más pequeño posible.

64) Sean m y n dos números racionales positivos tal que: $m + \dfrac{4}{3}n^3 = 1$
–> Hallar el valor máximo que puede tomar m + n

65) Se quiere armar un cuadro rectangular con un recuadro interior de 2 m² de superficie (también rectangular) cuyos bordes laterales sean de 1 metro y los superiores e inferiores de 2 metros. ¿Cuáles son las medidas del rectángulo grande, si queremos minimizar el área total del mismo?

Nota: El dibujo NO está a escala, es sólo esquemático.



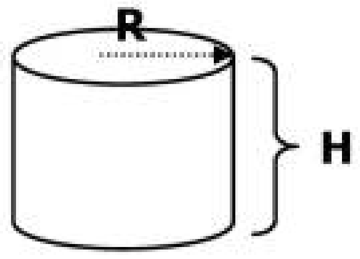
66) Unos hinchas de boca quieren diseñar una bandera azul, con la franja amarilla, de 14 metros de perímetro, y quieren que el área de la parte azul sea de 9 m². Pero quieren que la franja amarilla tenga el mayor ancho posible, sin alterar los valores que dijimos antes. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la bandera para que se cumplan esas condiciones? ¿Si el largo tiene que ser mayor al alto, cómo va a quedar la franja? ¿Vertical u horizontal?

67) Si se corta un alambre en dos trozos de manera tal de formar con los dos trozos un círculo y un cuadrado, cumpliendo la condición de que la suma de ambas áreas debe ser igual a 16 m².

a) ¿Cuál es la máxima cantidad de alambre que puedo usar?
b) ¿Cuál es la mínima cantidad de alambre que puedo usar?

Nota: Expresar el resultado en función de π.

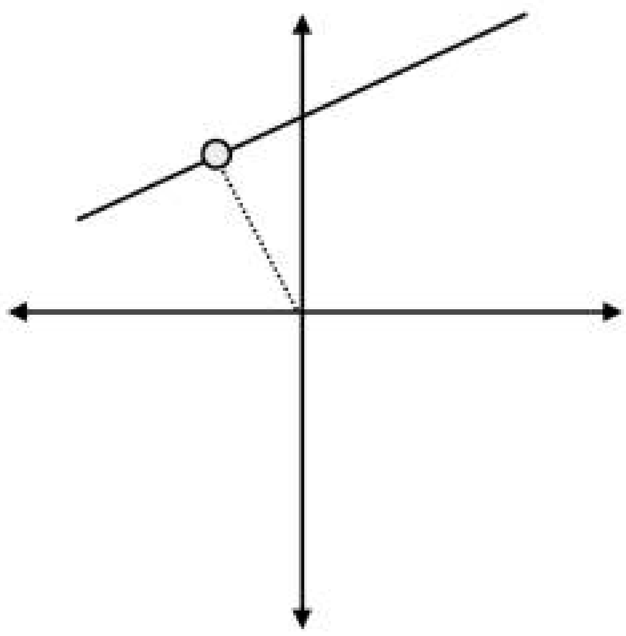
68) De todos los cilindros de Volumen fijo $V = 2\pi\ cm^3$ Hallar el valor del radio y la altura de modo que su superficie total sea la menor posible



Fórmula de superficie lateral del cilindro: $S = 2\pi \cdot R^2 + 2\pi \cdot R \cdot H$

Fórmula de Volumen del Cilindro: $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$

69) Dada la función: $Y = \dfrac{1}{2}x + 5$



Que es una recta. Determinar, aplicando criterios de minimización con la derivada de la función a minimizar, cuál de todos los puntos de esa recta está mas cerca del origen de coordenadas.

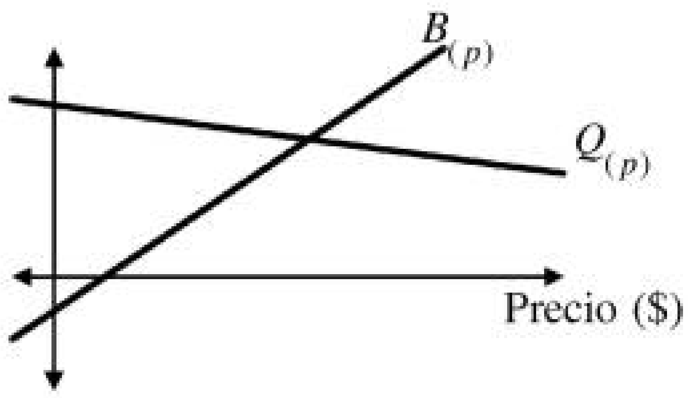
Ayuda: Fórmula para saber la distancia de cualquier punto al origen de coordenadas: $Dist = \sqrt{x^2 + y^2}$

La recta, no es ni mas ni menos que una relación o condición entre el valor de "x" y el valor de "y" de cada punto que pertenece a ella.

70) Sea B(p) la función que representa el beneficio unitario de un producto en función de su precio de venta. Y sea Q(p) la función que representa la cantidad vendida en función del precio. **Determinar el valor del precio para que la empresa obtenga la mayor ganancia total posible en la venta de ese producto**. (Nota: La ganancia total es el producto del beneficio unitario por la cantidad vendida)

$$B_{(p)} = \frac{1}{2}p - 3$$

$$Q_{(p)} = \frac{-1}{10}p + 15$$

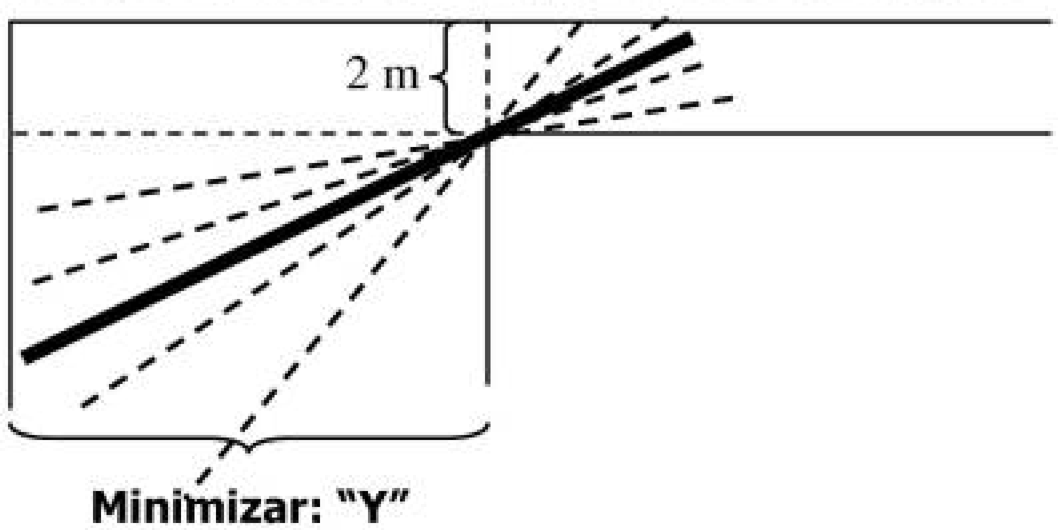


$B_{(p)}$ = Beneficio Unitario

$Q_{(p)}$ = Cantidad Vendida

Ahora el "Desafío" (Es muy DIFÍCIL!!!)

71) Tenemos dos pasillos, perpendiculares, uno de ellos tiene 3 metros de ancho. Hallar el mínimo ancho posible del otro pasillo para poder pasar de un pasillo a otro con una plancha de 16 metros de largo (y una altura similar a la de los pasillos)



Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Integrales

Nivel I

Número de Tema: **77**

Área: **Matemática**

- **Concepto de Función Primitiva**: Dada una función cualquiera *f(x)* definida en un intervalo cerrado [*a,b*], se llama *función primitiva* de *f(x)* a otra función *F(x)* cuya derivada sea *f(x)* en dicho intervalo. Es decir, *F'(x) = f(x)* para todo *x* de [*a,b*].

Por Ejemplo: F(x) = *Sen(x)* es una primitiva de f(x) = C*os (x)*
Ya que *(sen x)' = cos x.*

Otro Ejemplo: F(x) = $\frac{x^2}{2}$ es una primitiva de f(x) = X
Ya que $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x$

- **Propiedad elemental de las funciones primitivas:**

Si ***F(x)*** es una primitiva de ***f(x)*** y ***C*** una constante cualquiera (un número), la función ***F(x) + C*** es otra primitiva de ***f(x)***.

Esto pasa porque la derivada de una constante C cualquiera es cero y porque la suma de las derivadas es la derivada de la suma...

De esta propiedad se deduce que una función f(x) que tiene una primitiva F(x), tiene infinitas primitivas dadas por F(x) + C (Para cualquier "C" perteneciente al conjunto de los números reales)

Habíamos dicho que si *f(x)* = Cos (x) Entonces: *F(x)* = Sen (x) es primitiva de *f(x)*
Ahora con esta propiedad podemos decir que *F(x)* = Sen (x) + 1 también es primitiva de *f(x)*
O bien que *F(x)* = Sen (x) − 2 también es primitiva de *f(x)*

Ya que ⇨ *La derivada de F(x)= Sen(x) + 1 es f(x)=Cos(x)*
La derivada de F(x)= Sen(x) – 2 es f(x)=Cos(x)

Ambas son primitivas de f(x) = Cos(x)

Y así vemos que f(x) = Cos (x) tiene infinitas funciones primitivas dadas por F(x) = Sen (x) + C Con C perteneciente al conjunto de los números reales.

- **INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA FUNCIÓN**

Se llama *Integral Indefinida* de una función *f(x)*, al conjunto de todas las primitivas de la función *f(x)*, y se simboliza

$$\int f(x)\,.\,dx$$

Por lo tanto, si F(x) es primitiva de f(x), entonces: $\int f(x)\,.\,dx = F(x) + C$

Ejemplo: Calculemos la integral de f(x) = $\frac{1}{X}$

Como sabemos que la derivada de F(x) = ln (x) vale 1/x:

$$\int f(x)\,.\,dx = \int \frac{1}{x}\,.\,dx = \ln(x) + C$$

Tabla de Integrales Directas:

La siguiente tabla, es una guía para encontrar las funciones primitivas más comunes

1. $\int f'(x)\,.\,dx = f(x) + C \quad \wedge \quad \int dx = x + C$

2. $\int x^m\,.\,dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C \Leftrightarrow m \neq -1$

3. $\int \dfrac{1}{x}\,.\,dx = \ln|x| + C$

4. $\int a^x\,.\,dx = \dfrac{a^x}{\ln|a|} + C \Leftrightarrow a > 0 \wedge a \neq 1$

5. $\int e^x\,.\,dx = e^x + C$

6. $\int Sen(x).\,dx = -Cos(x) + C$

7. $\int Cos(x).\,dx = Sen(x) + C$

8. $\int Tg(x).\,dx = -\ln|Cos(x)| + C$

9. $\int Cotg(x).\,dx = \ln|Sen(x)| + C$

10. $\int \dfrac{1}{Cos^2(x)}.\,dx = Tg(x) + C$

11. $\int \dfrac{1}{Sen^2(x)}.\,dx = -Cotg(x) + C$

12. $\int Sec(x)\cdot Tg(x).\,dx = Sec(x) + C$

13. $\int Cosec(x)\cdot Cotg(x).\,dx = -Cosec(x) + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ArcSen(x) + C = -ArcCos(x) + C$

15. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = ArcTg(x) + C = -ArcCotg(x) + C$

16. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = ArcSec(x) + C =$

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C =$

18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C =$

19. $\int \dfrac{dx}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C =$

Propiedades Importantes de las Integrales:

La Integral de una suma o resta de funciones, es respectivamente la suma o resta de las integrales de las funciones:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$
$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)\ dx - \int g(x)\ dx$$

La Integral de una Constante por una función, es igual a la Constante por la integral de la función:

$$\int k\,.\,f(x)\ dx = k\,.\int f(x)\ dx$$

Y la integral directa más sencilla de todas: $\int k\,.\,dx = k\,.\,x + C$

by Dal-0r para TARINGA!

Ejemplo: Vamos a calcular la siguiente integral: $\int (5X + 3 - e^x).\,dx$

En primer lugar la descomponemos en la suma/resta de integrales

$$\int (5X + 3 - e^x).\,dx = \int 5X.\,dx + \int 3.\,dx - \int e^x.\,dx$$

Saco las constantes afuera

$$\int (5X + 3 - e^X).\,dx = 5\boxed{\int X.\,dx} + 3\boxed{\int dx} - \boxed{\int e^X}\,dx$$

Integro usando la tabla:

$$\int (5X + 3 - e^x).\,dx = 5.\boxed{\frac{X^2}{2}} + 3\boxed{X} - \boxed{e^x} + C$$

$$\boxed{\int (5X + 3 - e^x).\,dx = 5.\frac{X^2}{2} + 3X - e^x + C}$$

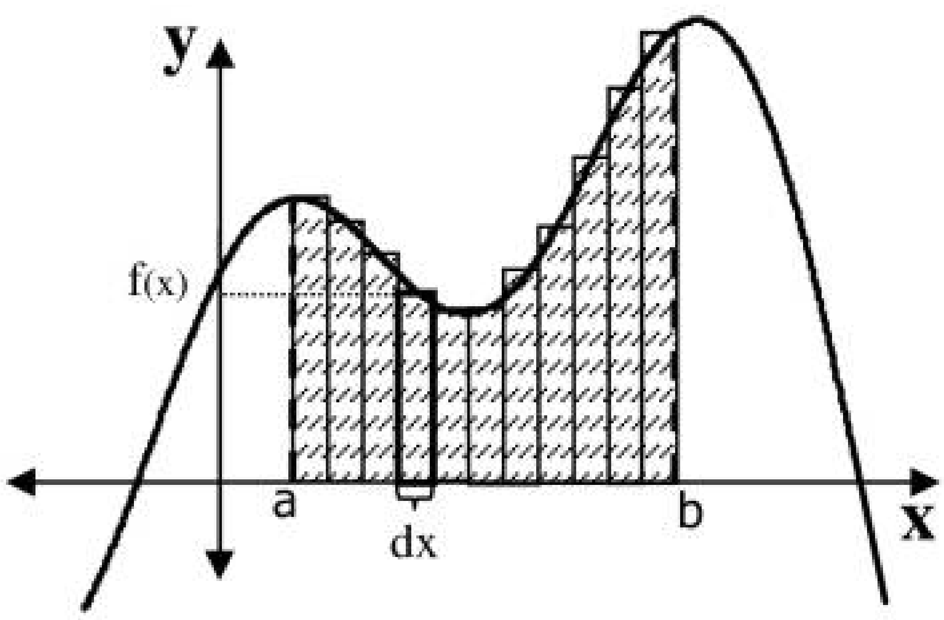
INTEGRAL DEFINIDA DE UNA FUNCIÓN

Regla de Barrow

Si $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, y $F(x)$ una función definida en $[a,b]$, derivable y primitiva de $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$ para cualquier $x \in (a, b)$, entonces

$$\int_a^b f(x).\,dx = F(b) - F(a)$$

*Aplicación de la integral definida: La integral definida entre "a" y "b" de una función, representa al **área entre la curva** y el eje x, de la función integrada, entre los valores "a" y "b"*



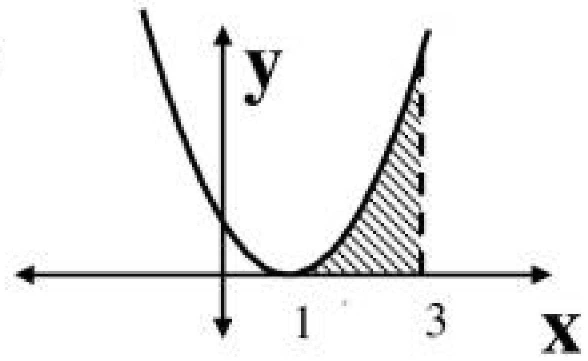
En realidad, la integral es una sumatoria de infinitos f(x).dx, a medida que dx se hace mas chico, la cantidad de términos de la sumatoria es mas grande, y cuando el dx es infinitamente pequeño, la cantidad de términos de la sumatoria, es infinita, y sería como sumar las áreas de los rectángulos, que a medida que dx es cada vez mas chico, esa área es cada vez mas parecida al área real debajo de la curva.

Dx es un diferencial, lo que significa que es un valor infinitamente pequeño, tendiendo a cero, en el gráfico lo dibujamos con un valor considerable, como para que se entienda el concepto de las áreas, pero tengan en cuenta que en realidad dx es casi 0.

Otra propiedad importante para integrales definidas:

$$\int_a^b -f(x).\,dx = \int_b^a f(x).\,dx \quad \text{O Bien} \quad \int_a^b f(x).\,dx = -\int_b^a f(x).\,dx$$

Veamos un ejemplo de cálculo de áreas mediante integrales:
Calcular el área debajo de la curva $f(x) = (X-1)^2$ entre X=1 y X=3



Desarrollamos el cuadrado del binomio

$$\text{Área} = \int_1^3 \left(X^2 - 2X + 1\right).\, dx$$

Descomponemos la integral

$$\text{Área} = \int_1^3 X^2.\, dx - \int_1^3 2X.\, dx + \int_1^3 1.\, dx$$

Integramos

$$\text{Área} = \left[\frac{X^3}{3}\right]_1^3 - 2.\left[\frac{X^2}{2}\right]_1^3 + \left[X\right]_1^3$$

Reemplazamos X por los límites de integración (Regla de Barrow)

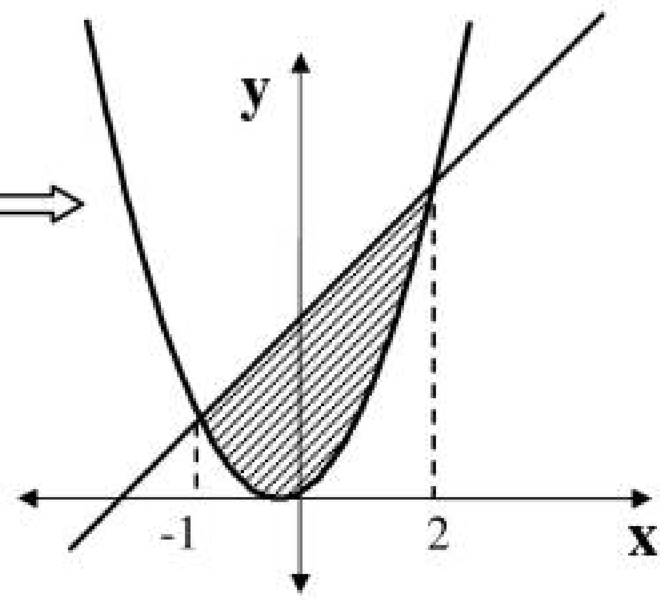
$$\text{Área} = \left(\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) - 2.\left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) + (3-1)$$

$$\text{Área} = \left(9 - \frac{1}{3}\right) - 2.\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) + (2) = \frac{26}{3} - 8 + 2 = \boxed{\frac{8}{3}}$$

★ **Área Entre curvas:** Para calcular el área entre dos curvas, restamos el área de las curvas. Y como límites de integración, usamos las intersecciones entre las curvas.

Ejemplo: Calcular el área entre las curvas $f(x) = X^2$ y $g(x) = X + 2$

Como no me dicen los límites de integración, vamos a tener que calcularlos, para eso, calculamos las intersecciones entre las funciones: ⇨



$$X^2 = X + 2 \Rightarrow X^2 - X - 2 = 0$$

$$X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-2)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1 \text{ y } 2$$

Entonces calculamos la resta de las áreas de las funciones entre -1 y 2

$$\text{Área} = \int_{-1}^{2} (X+2).\, dx - \int_{-1}^{2} X^2.\, dx = \int_{-1}^{2} X.dx + \int_{-1}^{2} 2.dx - \int_{-1}^{2} X^2.\, dx$$

$$\text{Área} = \left[\frac{X^2}{2}\right]_{-1}^{2} + 2.\left[X\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{X^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right] + 2.\left[2-(-1)\right] - \left[\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right]$$

$$\text{Área} = \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right] + 2.[3] - \left[\frac{8}{3} - \frac{-1}{3}\right] = \frac{3}{2} + 6 - 3 = \boxed{\frac{9}{2}}$$

- Nota 1: Si restamos al revés las funciones, o si calculamos un área que está por debajo del eje X, nos da un valor negativo, pero correcto, ya que lo que nos interesa es el valor absoluto del área.

- Nota 2: Si queremos calcular el área de una curva entre "a" y "b" y la curva corta al eje X entre esos valores, tenemos que partir la integral en 2 partes, desde "a" hasta la raíz y desde la raíz hasta "b", ya que la parte que está debajo del eje X va a dar negativa y la tenemos que sumar, si no partimos la integral, cuando calculamos el toda entera, queda restada la parte que está debajo del eje X en vez de sumada y el valor final del área sería incorrecto.

- *Resolver las siguientes Integrales Indefinidas:*

1) $\int \frac{1}{x} \, . \, dx =$

2) $\int Sen(x) \, . \, dx =$

3) $\int [Cos(x) + 2] \, . \, dx =$

4) $\int [x + e^x] \, . \, dx =$

5) $\int [2x - 1] \, . \, dx =$

6) $\int [3x^2 - 4x + 5] \, . \, dx =$

7) $\int [-6x^2 + 6x - 1] \, . \, dx =$

8) $\int [-e^x + e] \, . \, dx =$

9) $\int \left(\frac{1}{Cos^2(x)} + \frac{1}{Sen^2(x)} \right) dx =$

10) $\int \frac{2 \, dx}{\sqrt{1 - X^2}} =$

11) $\int \frac{5 \, dx}{1 + X^2} =$

12) $\int (Sen(x) + Cos(x)) dx =$

13) $\int (3 \, Sen(x) - 2x) dx =$

14) $\int (2 \, tg(x) - 3) dx =$

15) $\int (3e^x - 4e) dx =$

16) $\int (9x^2 - 8x + 3) dx =$

17) $\int (3x^2 - 3 + e^x) dx =$

18) $\int (Sen(x) - \pi) \, dx =$

19) Sea $g_{(x)} = \int (3x^2 + 2x + 4) dx$ *una función polinómica cuya ordenada al origen es 3. Hallar g(x)*

20) Sea $g_{(x)} = \int 2 \, dx$ *una función lineal que corta al eje X en 1. Hallar g(x)*

- *Calcular las siguientes integrales definidas*

21) $\int_0^{\pi} (Cos(x) - \pi) \, dx$

22) $\int_0^{\pi/2} (Cos(x) - 1) \, dx$

23) $\int_0^2 e^x \, dx$

24) $\int_{-1}^2 (x + 1) \, dx$

25) $\int_1^5 (3x - 2) \, dx$

26) $\int_0^4 (x^2 - 3x + 2) \, dx$

27) $\int_{-1}^3 (x^2 + 2x - 1) \, dx$

28) $\int_{-1}^1 (2x + 3) \, dx$

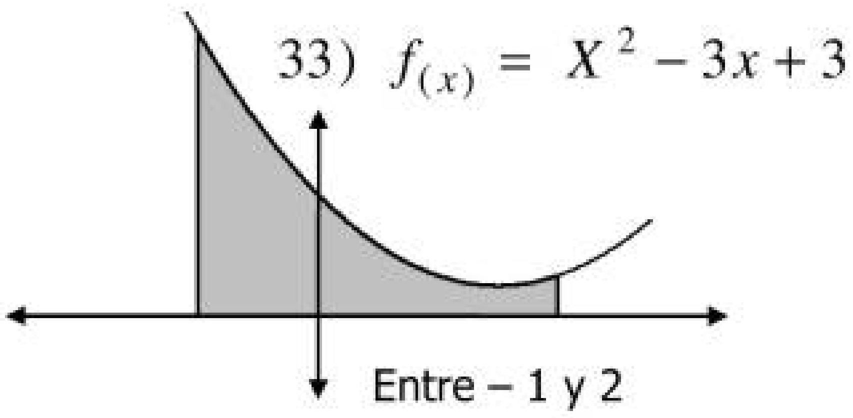
29) $\int_{-2}^{-1} (4x - 1) \, dx$

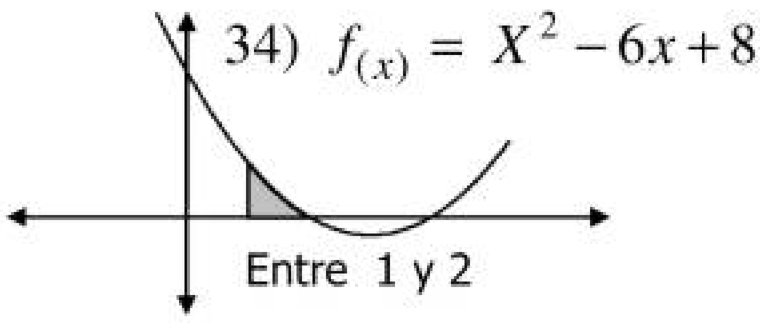
30) $\int_1^2 \left(3x - \frac{1}{2} \right) dx$

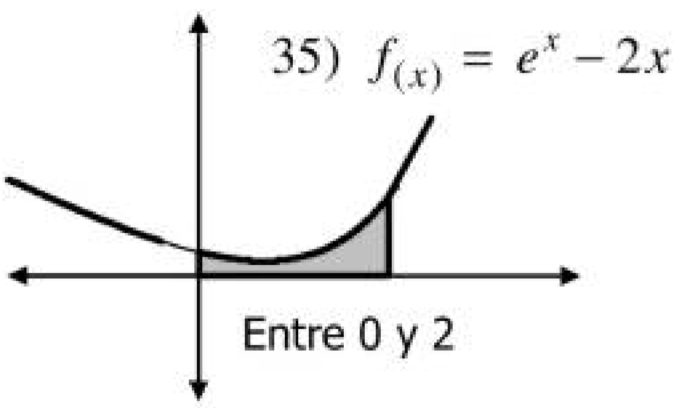
31) $\int_e^{e^2} \left(\frac{1}{x} \right) dx$

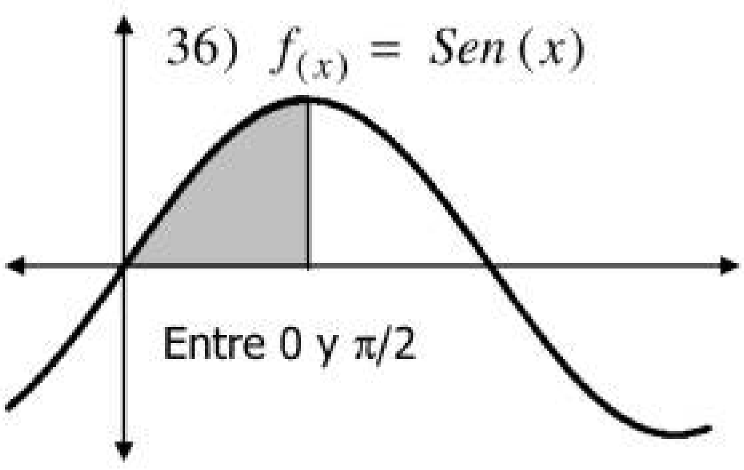
32) $\int_1^{e^9} \left(\frac{1}{3x} \right) dx$

- *Calcular el área bajo la curva entre los valores que se piden en cada caso:*



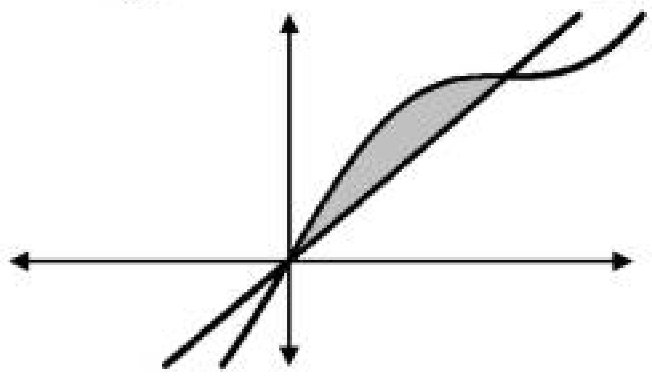




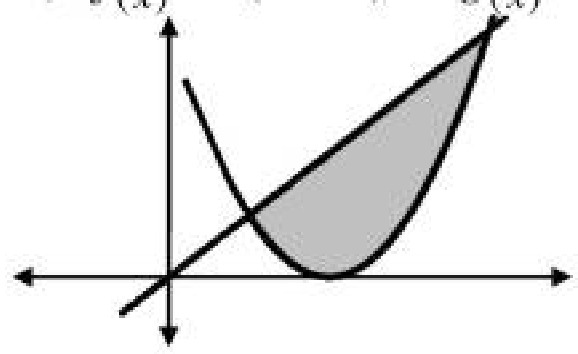


- *Calcular el área entre las curvas:*

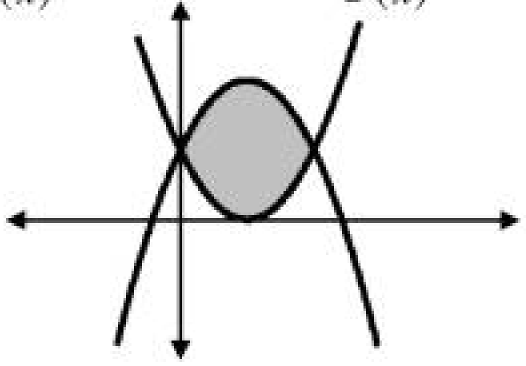
37) $f_{(x)} = Sen(x) + x \qquad g_{(x)} = x$



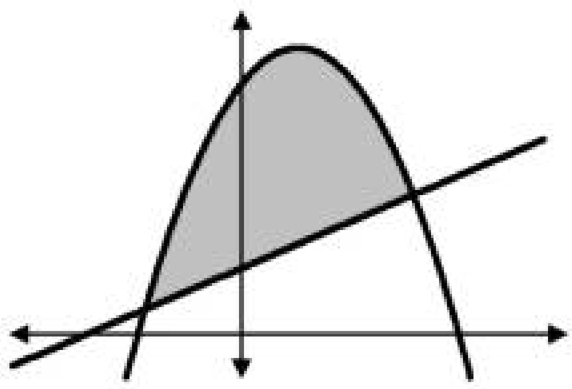
38) $f_{(x)} = (x-2)^2 \qquad g_{(x)} = x$



39) $f_{(x)} = (x-1)^2 \qquad g_{(x)} = -(x-1)^2 + 2$



40) $f_{(x)} = -x^2 + 2x + 7 \qquad g_{(x)} = \frac{2}{3}x + 2$

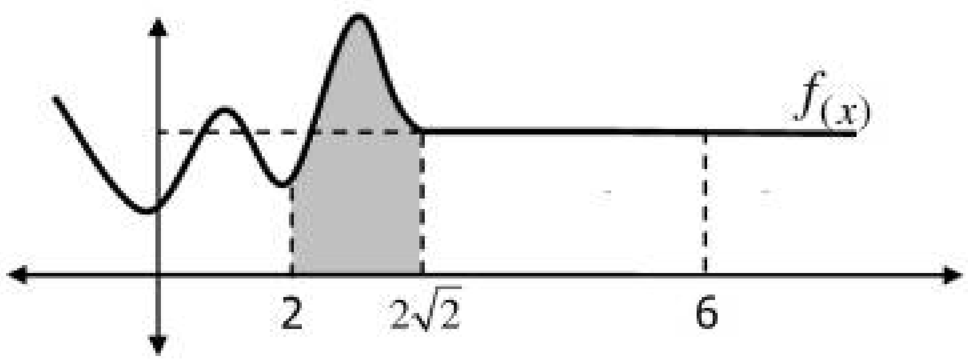


41) Sabiendo que: $\int_1^3 f(x)\,dx = 5 \quad Hallar: \int_1^3 \left(f(x)+1\right)dx$

42) Sabiendo que: $\int_{-1}^4 g(x)\,dx = 2 \quad Hallar: \int_4^{-1} \left(g(x)-5\right)dx$

43) Sabiendo que el área de la región sombreada vale 6. Hallar: $\int_2^6 f_{(x)}\,dx$

$f_{(x)}$ entre $2\sqrt{2}$ e Infinito es constante y vale $\sqrt{2}+3$



- Hallar el área limitada por las curvas:

44) $f_{(x)} = x^2 \;;\; g_{(x)} = \frac{1}{2}x^2 + 2$

45) $f_{(x)} = x^2 \;;\; g_{(x)} = 9 \;;\; x = 0$

46) $f_{(x)} = -x^2 \;;\; g_{(x)} = -4 \;;\; x = 0$

47) $f_{(x)} = -x^2 \;;\; g_{(x)} = -4 \;;\; x = 3$

48) $f_{(x)} = x^2 \;;\; g_{(x)} = x$

49) $f_{(x)} = x^2 \;;\; g_{(x)} = x \;;\; h_{(x)} = x+2$

50) $f_{(x)} = x^2 \;;\; g_{(x)} = x+2 \;;\; h_{(x)} = 2-x$

Teniendo como dato que: $\int_0^2 f_{(x)}\,dx = 4 \quad \wedge \quad \int_2^5 f_{(x)}\,dx = 7$

Responder cuales de las siguientes afirmaciones son Verdaderas y cuales son falsas:

51) $\int_0^5 f_{(x)}\,dx = 7$

53) $\int_2^0 f_{(x)}\,dx = -4$

55) $3\int_0^2 f_{(x)}\,dx = 12$

57) $\int_0^2 f^2_{(x)}\,dx = 16$

52) $\int_0^5 f_{(x)}\,dx = 11$

54) $\int_0^1 f_{(x)}\,dx = 2$

56) $\int_0^2 2f_{(x)}\,dx = 8$

58) $\frac{2}{3} + \int_0^5 \frac{f_{(x)}\,dx}{33} = 1$

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Integrales
Nivel II

Número de Tema: **78**

Área: **Matemática**

❖ Métodos de Integración

✓ **Método de Integración por sustitución de variable:**

- Veamos primero las aplicaciones más simples del método de sustitución de variable:

Ejemplo: $\int \frac{1}{x+6}\ dx$

Si miramos bien la integral, vemos que es muy parecida a una integral directa muy fácil que es: $\int \frac{1}{x}\ dx$

Por lo tanto vamos a remplazar o sustituir la variable "x" de la siguiente manera, llamaremos "u" al denominador de la integral que tenemos. Por lo tanto: **u=x+6**

Sustituimos entonces (x+6) por la variable "**u**" y nos queda: $\Longrightarrow \int \frac{1}{x+6}\ dx = \int \frac{1}{u}\ dx$

Ahora tendríamos que sacar de la integral al diferencial de x, ya que vamos a integrar una función de la variable "**u**". Para ello tenemos que derivar "**u**" para buscar una relación entre "**dx**" y "**du**"

Antes de derivar, repasemos las notaciones de la derivada: $u' = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx}$

Ahora sí, derivamos "**u**" $\Longrightarrow u = x+6 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Longrightarrow du = dx$

Entonces, remplazamos al dx de la integral por du (Ojo, que en este caso lo remplazamos así porque llegamos a que du=dx, pero no siempre pasa lo mismo) $\Longrightarrow \int \frac{1}{u}\ dx = \int \frac{1}{u}\ du$

Ahora, integramos en función de "**u**" $\Longrightarrow \int \frac{1}{u}\ du = \ln(u) + C$

Y sustituimos "**u**" por X+6, ya que habíamos partido de que u = x+6 $\Longrightarrow \ln(u) + C = \boxed{\ln(x+6) + C}$ Y ya quedó resulta la integral

---

Otro Ejemplo: $\int sen\ (3x-1)dx$

En este caso vamos a sustituir (3x–1) por la variable "**u**" $\Longrightarrow u = 3x-1$

$$\Longrightarrow \int sen\ (3x-1)dx = \int sen\ (u)dx$$

Derivamos "**u**" y despejamos "dx" para sustituirlo en la integral:

$$u = 3x-1 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = (3x-1)' \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 3 \Longrightarrow du = 3dx \Longrightarrow \frac{du}{3} = dx$$

Y Sustituimos "dx" Y resolvemos la integral:

$$\Longrightarrow \int Sen(u)\ dx \Longrightarrow \int Sen(u)\ \frac{du}{3}$$

Volvemos a Sustituir "u" por "3x-1"

Resolvemos la integral:

$$\int Sen(3x-1)\ dx = \int Sen(u)\ \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int Sen(u)du = -\frac{1}{3}Cos(u) = -\frac{1}{3}Cos(3x-1) + "c"$$

- Otras aplicaciones del método más complicadas: Este método es muy útil cuando tenemos dentro de la integral una función y la forma derivada de la misma.

Veamos un ejemplo: $\int 2x \cdot (e)^{x^2}\, dx$

En este caso, tengo la función X^2 y a su vez tengo también 2X, que es la derivada de X^2

Lo primero que hago, es sustituir la función de variable x: X^2 por otra variable que llamaremos "u" $\Longrightarrow$ $\boxed{u = x^2}$

Luego derivamos "u" en función de x $\Longrightarrow$ $u' = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx}$ $\Longrightarrow$ $u' = 2x$

Luego despejamos **dx** $\Longrightarrow$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\frac{du}{2x} = dx}$

Ahora hay que sustituir en la integral, a la función "u" y al diferencial "dx" $\Longrightarrow$ $\int 2x \cdot (e)^{x^2}\, dx = \int 2x \cdot (e)^u \frac{du}{2x}$

Ahora, Resolvemos la integral en forma directa. $\int \cancel{2x} \cdot (e)^u \frac{du}{\cancel{2x}} = \int e^u\, du = e^u + C$

Por Último, sustituimos "u" $\Longrightarrow$ $\boxed{\int 2x \cdot (e)^{x^2}\, dx = (e)^{x^2} + C}$

Otro ejemplo: $\int Sen(x) \cdot Cos^2(x).dx$

Tomamos: $\Longrightarrow$ $\boxed{u = Cos(x)}$ $\Longrightarrow$ $\int Sen(x) \cdot Cos^2(x).dx = \int Sen(x)\,.\,u^2.dx$

Derivamos: $u = Cos(x) \Longrightarrow u' = \frac{du}{dx} = -Sen(x) \Longrightarrow du = -Sen(x)\,.\,dx \Longrightarrow \boxed{\frac{du}{-Sen(x)} = dx}$

Sustituimos "dx" en la integral: $\int Sen(x) \cdot Cos^2(x).dx = \int Sen(x) \cdot u^2.\frac{du}{-Sen(x)}$

Simplificamos y resolvemos la integral en función de "u":

Por último sustituimos "u" por Cos(x):

$$\int \cancel{Sen(x)} \cdot u^2.\frac{du}{-\cancel{Sen(x)}} \Longrightarrow \int -u^2.du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{1}{3}Cos^3(x) + C$$

Queda el signo "_"

Y terminé de resolver la integral: $\int Sen(x) \cdot Cos^2(x).dx = -\frac{1}{3}Cos^3(x) + C$

by Dal-Or para TARINGA!

✓ **<u>Método de Integración por partes</u>:** Para resolver integrales por este método vamos a utilizar la siguiente fórmula:

$$\boxed{\int u.dv = u \cdot v - \int v.du}$$

Veamos de donde sale esta fórmula por si nos la olvidamos:

Partimos de la fórmula de la derivada de un producto: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Ahora integramos a ambos términos de la igualdad: $\int (u \cdot v)' = \int (u' \cdot v + u \cdot v')$

Partimos la integral de la suma en la suma de las integrales: $\int (u \cdot v)' = \int u' \cdot v + \int u \cdot v'$

"Simplificamos" Derivada con integral (en realidad es como decir que la integral de una función f(x) derivada, es f(x) ya que tanto integrar como derivar son acciones inversas.

$$\int (u \cdot v)' = \int u' \cdot v + \int u \cdot v' \Longrightarrow u \cdot v = \int u' \cdot v + \int u \cdot v'$$

Y despejando de términos me queda: $u \cdot v - \int u' \cdot v = \int u \cdot v'$

Y llegamos a la fórmula que queríamos demostrar:

$$u \cdot v - \int u' \cdot v = \int u \cdot v' \Longrightarrow u \cdot v - \int du \cdot v = \int u \cdot dv$$

Ejemplo de resolución de integral por partes:

Vamos a resolver la siguiente integral: $\int \ln(x)\ dx$

Si comparamos esta integral con: $\int u.dv = u \cdot v - \int v.du$

$\int \ln(x)\ dx \Longrightarrow$ Podemos decir que llamamos: $\Longrightarrow \begin{cases} u = \ln(x) \\ dv = dx \end{cases}$

Ya tenemos **u** y **dv**, ahora nos faltarían **du** y **v** para poder aplicar la fórmula y resolver la integral, para ello, para hallar **du**, derivamos **u** y para hallar **v** integramos **dv**

$\Longrightarrow \begin{cases} u = \ln(x) \Longrightarrow \text{Derivamos } \mathbf{u} \text{ para hallar } \mathbf{du} \Longrightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = dx \Longrightarrow \text{Integramos } \mathbf{dv} \text{ para hallar } \mathbf{v} \Longrightarrow \int dv = \int dx \Longrightarrow v = x \end{cases}$

Entonces aplicando la fórmula: $\int u.dv = u \cdot v - \int v.du$

$$\int \ln(x)\ dx = \underset{\mathbf{v}}{x} \cdot \underset{\mathbf{u}}{\ln(x)} - \int \underset{\mathbf{v}}{x} \cdot \frac{1}{x} dx \longrightarrow \mathbf{du}$$

Por último, operando y resolviendo la integral, nos queda:

$$\int \ln(x)\ dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln(x) - \int dx = \boxed{x \cdot \ln(x) - x + c}$$

Otro Ejemplo de resolución de integral por partes, Resolvamos: $\int x \cdot e^x \cdot dx =$

En este caso planteamos: $\Rightarrow \begin{cases} u = x \\ dv = e^x \cdot dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = x \Rightarrow \text{Derivamos } \mathbf{u} \text{ para hallar } \mathbf{du} \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x \cdot dx \Rightarrow \text{Integramos } \mathbf{dv} \text{ para hallar } \mathbf{v} \Rightarrow \int dv = \int e^x \cdot dx = e^x \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes: $\int x \cdot e^x \cdot dx = x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx$

Resolviendo lo que quedó: $\int x \cdot e^x \cdot dx = \boxed{x \cdot e^x - e^x + C}$

✓ **<u>Integrales de Funciones Racionales Inmediatas</u>:** Vamos a estudiar en primer lugar, las integrales de funciones racionales cuando el grado del denominador es mayor o igual al grado de numerador. Además, vamos a comenzar con los tipos más sencillos.

Pasos a seguir para Integrar una Función Racional del tipo: $\int \frac{p_{(x)}}{q_{(x)}} dx$

1. Hacer la división de los polinomios
2. Escribir la Función Racional como la suma entre el resultado o cociente de la división y el resto sobre el divisor ($q_{(x)}$) $\left\{ \frac{p_{(x)}}{q_{(x)}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{q_{(x)}} \right.$
3. Descomponer la integral en la suma de las integrales de ambos términos
4. Integrar

<u>Veamos un ejemplo:</u> $\int \frac{x^2 + 5x + 5}{x+1} dx$

1. Hacemos la división por Ruffini:

	1	5	5
−1		−1	−4
	1	4	1

$\Rightarrow$ { Cociente: X + 4
Resto: 1

2. Descomponemos la Función racional:

$$\frac{x^2 + 5x + 5}{x+1} = (x+4) + \frac{1}{x+1} \Rightarrow \int \frac{x^2 + 5x + 5}{x+1} dx = \int \left[(x+4) + \frac{1}{x+1} \right] dx$$

3. Descomponemos

$$\int \left[(x+4) + \frac{1}{x+1} \right] dx = \int (x+4)\, dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \int x\, dx + \int 4\, dx + \int \frac{1}{x+1} dx$$

4. Integramos: $\int x\, dx + \int 4\, dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \boxed{\frac{x^2}{2} + 4x + \ln(x+1) + C}$

✓**Método de descomposición en fracciones simples:** Este método se utiliza cuando tenemos la integral de una Función Racional y además, el grado del numerador es menor al grado del denominador (Si el grado del numerador es mayor, se debe proceder a dividir los polinomios como en el ejemplo anterior)

Se descompone una fracción en fracciones simples cuando: El grado del numerador es menor al del denominador y además el numerador es al menos de grado 1.

Ejemplos: $\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}$ o $\dfrac{x^2+5x+2}{(x+1)^3}$

Ejemplo 1. Descomposición en Fracciones Simples con denominador de **Raíces Reales Únicas**:

$$\int \frac{5x+7}{x^2+3x+2}\,dx \Longrightarrow \int \frac{5x+7}{(x+1)\cdot(x+2)}\,dx$$

1. Factoreamos el denominador

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4.1.2}}{2.1} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$X_1 = -1 \quad X_2 = -2$

2. Planteamos la descomposición:

$$\frac{5x+7}{(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)}$$

3. Operamos algebraicamente:

$$\frac{\boxed{5x+7}}{(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{\boxed{A\cdot(x+2)+B\cdot(x+1)}}{(x+1)\cdot(x+2)}$$

4. Planteamos la igualdad:

$$A\cdot(x+2)+B\cdot(x+1) = 5x+7$$

5. Despejamos A y B remplazando "x" por las raíces

$A\cdot(x+2)+B\cdot(x+1) = 5x+7$

X = –1 → A . (–1+2) + B . (–1+1) = 5 . –1 + 7 ⟹ $\boxed{A = 2}$

X = –2 → A . (–2+2) + B . (–2+1) = 5 . –2 + 7 ⟹ $\boxed{B = 3}$

6. Sustituimos A y B en la expresión
Y ya nos quedaron fracciones simples

$$\frac{5x+7}{(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{2}{(x+1)} + \frac{3}{(x+2)}$$

7. Integramos:

$$\int \frac{5x+7}{(x+1)\cdot(x+2)}\cdot dx = \int\left(\frac{2}{(x+1)} + \frac{3}{(x+2)}\right)\cdot dx = \int \frac{2}{(x+1)}\cdot dx + \int \frac{3}{(x+2)}\cdot dx$$

$$\int \frac{2}{(x+1)}\cdot dx + \int \frac{3}{(x+2)}\cdot dx = 2\int \frac{1}{(x+1)}\cdot dx + 3\int \frac{1}{(x+2)}\cdot dx = \boxed{2\ln(x+1) + 3\ln(x+2) + C}$$

Ejemplo 2. Descomposición en Fracciones Simples con denominador de **Raíces Reales Múltiples**:

- *Si "α" es una raíz múltiple de multiplicidad "**n**" (está repetida "**n**" veces), la descomposición en fracciones simples de:*

$$\frac{p_{(x)}}{(x\pm\alpha)^n} = \frac{A_{(1)}}{(x\pm\alpha)} + \frac{A_{(2)}}{(x\pm\alpha)^2} + \frac{A_{(3)}}{(x\pm\alpha)^3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_{(n)}}{(x\pm\alpha)^n}$$

Ejemplo: $\int \frac{x+4}{x^2+2x+1}dx$

1. Factoreamos el denominador $\Longrightarrow \frac{x+4}{x^2+2x+1} = \frac{x+4}{(x+1)^2}$

2. Planteamos la Descomposición: $\Longrightarrow \frac{x+4}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2}$

3. Operamos algebraicamente: $\Longrightarrow \frac{\boxed{x+4}}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{\boxed{A\cdot(x+1)+B}}{(x+1)^2}$

4. Planteamos la igualdad: $\Longrightarrow$ A . (x+1) + B = x + 4

5. Despejamos A y B remplazando "x" por la raíz y por otro valor cualquiera:

A . (x+1) + B = x + 4 $\xrightarrow{X=-1}$ A . (–1+1) + B = –1 + 4 $\Longrightarrow$ $\boxed{B = 3}$

A . (x+1) + B = x + 4 $\xrightarrow{X=5}$ A . (5+1) + 3 = 5 + 4 $\Longrightarrow$ $\boxed{A = 1}$

6. Sustituimos A y B en la expresión: $\frac{x+4}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2}$

7. Integramos:

$$\int \frac{x+4}{(x+1)^2}dx = \int\left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right)dx = \int\frac{1}{x+1}dx + \boxed{\int\frac{3}{(x+1)^2}dx}$$

Usamos el método de sustitución con **u=x+1 -> du=dx** $\Longrightarrow$

$$\boxed{3\int\frac{1}{(x+1)^2}dx = \int\frac{1}{(u)^2}du = 3\int u^{-2}du = -3u^{-1} + C = -\frac{3}{x+1} + C}$$

$$\int\frac{x+4}{(x+1)^2}dx = \boxed{\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C}$$

by DaL-0r para TARINGA!

Método de Integración por sustitución de variable:

1) $\int (x-1)^5 \, dx =$

2) $\int (3x-2)^{1/3} \, dx =$

3) $\int x+1 dx =$

4) $\int \frac{2}{x+1} \, dx =$

5) $\int sen(x).\cos(x) dx =$

6) $\int Sen(5x-2) dx =$

7) $\int e^{(3x-2)} dx =$

8) $\int x \cdot \cos(x^2) \, dx =$

9) $\int \frac{6}{5} x.\cos(x^2-\pi) \, dx =$

10) $\int e^{sen(x)}. \cos(x) \, dx =$

11) $\int \frac{3x^2}{x^3+3} \, dx =$

12) $\int \frac{\ln(2x)^2}{x} \, dx =$

13) $\int (x^2+6x+5).(x+3) \, dx =$

14) $\int \frac{1}{3x+2} \, dx =$

15) $\int (5-3x)^{-1} \, dx =$

16) $\int \frac{5}{2x+3} \, dx =$

17) $\int \frac{x+1}{2x^2+4x-1} \, dx =$

18) $\int \frac{30x}{5x^2+1} \, dx =$

19) $\int 4x.sen(x^2+1).\cos(x^2+1) \, dx =$

20) $\int (x+1).e^{\left(3x^2+2x-1\right)} \, dx =$

Método de Integración por partes:

21) $\int (1+3x).\, e^{(3x-1)} dx =$

22) $\int x.\cos(x) \, dx =$

23) $\int \ln(5x) \, dx =$

24) $\int x.\ln\left(\frac{1}{x}\right) dx =$

25) $\int e^{3x}.(x+2) \, dx =$

26) $\int sen(x).\, e^{2x} \, dx =$

27) $\int x.(5+x)^2 \, dx =$

28) $\int x^{-1/2}.\ln(x) \, dx =$

29) $\int \left(x^3+7x-2\right).\, e^x \, dx =$

30) $\int 6.\ln\left(x^2\right) dx =$

31) $\int \ln(x) \, dx =$

32) $\int e^x.\, x^3 \, dx =$

33) $\int (x^2+2x).(x+2)^{-3} \, dx =$

34) $\int x.\, tg(x).\cos(x) \, dx =$

35) $\int \frac{sen(x)}{cos^2 x} \, dx =$

➢ Método de Integración por fracciones simples:

36) $\int \frac{x+2}{(x+3).(x-1)}\,dx=$

37) $\int \frac{x^3+5x^2+3x+6}{x-1}\,dx=$

38) $\int \frac{x^2+2x+1}{x-1}\,dx=$

39) $\int \frac{3x^3+2x^2+2x+1}{x+2}\,dx=$

40) $\int \frac{x^3+x^2}{x+3}\,dx=$

41) $\int \frac{x^3+2}{x-1}\,dx=$

42) $\int \frac{x^3+x^2-2}{x^2-1}\,dx=$

43) $\int \frac{x^3-1}{x^2-1}\,dx=$

44) $\int \frac{x^3+1}{x^2-1}\,dx=$

45) $\int \frac{x^3+1}{x+1}\,dx=$

46) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+1}\,dx=$

47) $\int \frac{x+1}{x^2+4x-5}\,dx=$

48) $\int \frac{4}{x^2+2x-3}\,dx=$

49) $\int \frac{2}{x^2+7x+12}\,dx=$

50) $\int \frac{7x+21}{x^2-5x-6}\,dx=$

51) $\int \frac{3x+6}{x^2-x-2}\,dx=$

52) $\int \frac{9x+9}{x^2+x-20}\,dx=$

53) $\int \frac{x^2}{x^2-4}\,dx=$

54) $\int \frac{x^3}{x-1}\,dx=$

55) $\int \frac{x^4+2x^3+x^2-2x+1}{x+1}\,dx=$

➢ Integrar por el método que corresponda en cada caso:

56) $\int x^2 \cdot Sen(x) \cdot dx=$

57) $\int x \cdot \ln(x) \cdot dx=$

58) $\int \frac{\ln(x)}{x^2} \cdot dx=$

59) $\int \frac{\ln(x^2)}{x} \cdot dx=$

60) $\int \left[-sen(x^2).2x+2sen(x)\cos(x) \right] dx=$

61) $\int \frac{10.\ln(5x+3)}{5x+3}\,dx=$

62) $\int [\,sen(x)+x.\cos(x)\,]dx=$

63) $\int \left(e^x.x^3+e^x.3x^2 \right)dx=$

64) $\int \frac{9x-6}{\left(3x^2+5\right)}\,dx=$

65) $\int \frac{sen\left(x^{-1}\right)}{x^2}\,dx=$

66) $\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx=$

67) $\int x^2.(\cos 2x)\,dx=$

68) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx=$

69) $\int \cos\left(\sqrt{6x+1}\right)dx=$

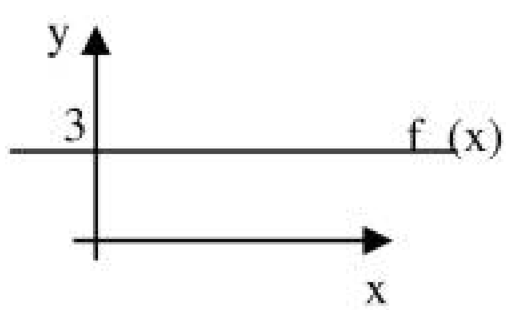
70) $\int \frac{sen(x+3)\cos(x)}{sen^2(x)+sen(x)-2}\,dx=$

71) $\int \ln[\,Sen(x)\,] \cdot Cos(x)\,dx=$

72) Hallar una función F(x) , primitiva de f(x), tal que F(0)=1. Siendo f(x) = x + 1

73) Hallar una función F(x) , primitiva de f(x), tal que F(π)=π. Siendo f(x) = $Cos^2(x)$

74) Sea F(x) una función lineal de la forma F(x) = A x + B, sabiendo que además F(x) es la primitiva de f(x) que vemos graficada. Hallar B, para que F(1)=f ′(2)



Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Sucesiones y Series Numéricas

Número de Tema: **79**

Área: **Matemática**

¿Qué es una sucesión? Una sucesión es un conjunto infinito de números reales, cada número se denomina término, cada sucesión tiene un primer término y cada término tiene un término siguiente.

Término general: Las sucesiones se definen como una función cuyo dominio son los números naturales. Y a dicha función se la denomina término general de la sucesión. El término general se escribe como: a_n

El primer término se denomina a_1, el segundo a_2, el tercero a_3 y así hasta el término enésimo que es a_n

Ejemplo: La sucesión más conocida de todas es la sucesión de números Naturales
Esta sucesión está definida por el término general: $a_n = n$
Por lo tanto, la sucesión queda formada por los números: 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 … n

Sucesiones Aritméticas: Son las sucesiones más simples y tienen la particularidad de que la diferencia entre un término cualquiera y el siguiente siempre es constante. O sea que a medida que van siguiendo los términos se va sumando o restando una constante (esa constante se llama razón).

Ejemplo: La sucesión 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 20 ; 23 …
Es una sucesión aritmética ya que la diferencia entre términos consecutivos es constante (en este caso 3)

Término general de las sucesiones Aritméticas: $\mathbf{a_n = r \cdot n + k}$

Donde: "r" es la razón
"k" es una constante
"n" es el número de término

Ejemplo: $a_n = 2 \cdot n + 7$

Veamos uno por uno los primeros términos de la sucesión:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \cdot 1 + 7 = 9 \\ a_2 = 2 \cdot 2 + 7 = 11 \\ a_3 = 2 \cdot 3 + 7 = 13 \\ a_4 = 2 \cdot 4 + 7 = 15 \\ a_5 = 2 \cdot 5 + 7 = 17 \\ a_6 = 2 \cdot 6 + 7 = 19 \end{cases}$$

Por lo tanto la sucesión sería:
9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ; 19 ; 21 ; 23 ; 25 ; 27 … n

Término general de las sucesiones Aritméticas en función de a_1: $\mathbf{a_n = a_1 + r \cdot (n-1)}$

"r" es la razón
"a_1" es el 1° término

Si queremos representar la sucesión anterior con un término general en función de a_1 nos quedaría:

$$a_n = a_1 + r \cdot (n-1) \Longrightarrow a_n = 9 + 2 \cdot (n-1) \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \cdot (1-1) + 9 = 2 \cdot 0 + 9 = 9 \\ a_2 = 2 \cdot (2-1) + 9 = 2 \cdot 1 + 9 = 11 \\ a_3 = 2 \cdot (3-1) + 9 = 2 \cdot 2 + 9 = 13 \\ a_4 = 2 \cdot (4-1) + 9 = 2 \cdot 3 + 9 = 15 \\ a_5 = 2 \cdot (5-1) + 9 = 2 \cdot 4 + 9 = 17 \\ a_6 = 2 \cdot (6-1) + 9 = 2 \cdot 5 + 9 = 19 \end{cases}$$

Como vemos es la misma sucesión, pero expresada con un término general que indica cual es el primer término.

¿Qué pasa si quiero expresar el término general de una sucesión Aritmética en función de a_6 o de a_k para cualquier "k"? Bueno, para ello también hay una fórmula general en función de a_k y de "k"

Término general de la sucesión aritmética en función de a_k y de "k": $\mathbf{a_n = a_k + r \cdot (n-k)}$ $\forall$ "k" ∈ N
Por ejemplo si reemplazo "k" por 6: $a_n = a_6 + r \cdot (n-6)$

Esta fórmula me sirve para resolver un ejercicio como este: Hallar el término general de una sucesión aritmética de razón 3 cuyo término número 20 valga 140.

Entonces, según la fórmula en función de "a_k"
$\Rightarrow a_n = a_k + r \cdot (n-k) \Rightarrow a_n = a_{20} + r \cdot (n-20) \Rightarrow a_n = a_{20} + 3 \cdot (n-20) \Rightarrow a_n = 140 + 3n - 60 \Rightarrow \boxed{a_n = 3n + 80}$

Sucesiones Aritméticas Crecientes y Decrecientes: Cuando la razón es positiva, la sucesión es creciente. En cambio Cuando la razón es negativa, la sucesión es decreciente.

Ejemplos:
Sucesión Creciente: $a_n = 2 \cdot n - 1 \Rightarrow$ 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ……
Sucesión Decreciente: $a_n = -3 \cdot n + 8 \Rightarrow$ 5 ; 2 ; –1 ; –4 ; –7 ; –10 ; –13 ; –14 ……

Sucesiones Geométricas: Son aquéllas en las que cada término se obtiene **multiplicando** al anterior por una constante a la que se llama "razón"

Están dadas por la fórmula general: $\mathbf{a_n = k \cdot r^n}$

Ejemplo: $a_n = 1 \cdot 2^n$ $\Rightarrow$ 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 ; 256 ; 512 ; 1024 … que son las potencias de 2.

En estas sucesiones también se llama razón al coeficiente "r"

Término general de las sucesiones Geométricas en función de a_1: $\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}}$

Término general de las sucesiones Geométricas en función de a_k: $\mathbf{a_n = a_k \cdot r^{(n-k)}}$ $\forall$ "k" $\in$ N

Propiedad: El cociente entre un término de la sucesión geométrica y su término anterior es la razón.

Sucesiones Oscilantes: Son las sucesiones cuyos términos contiguos son de distinto signo.
Ejemplo: 3 ; – 4 ; 5 ; –6 ; 7 ; –8 ; …

Sucesiones Geométricas con razón negativa: Cuando una sucesión geométrica tiene razón negativa, obtenemos una sucesión oscilante.

Ejemplos: $a_n = 1 \cdot (-2)^n$ $\Rightarrow$ –2 ; 4 ; –8 ; 16 ; –32 ; 64 ; –128 ; 256 ; –512 ; 1024 …
$a_n = 3 \cdot (-1)^n$ $\Rightarrow$ –3 ; 3 ; –3 ; 3 ; –3 ; 3 ; –3 ; 3 ; –3 ; 3 …

Vemos claramente como tomando dos términos consecutivos cualesquiera de la sucesión oscilante siempre vamos a encontrar que sus signos son diferentes.

En realidad cuando tenemos r = 1 o r=–1 estamos tratando con casos especiales de este tipo de sucesiones que merecen de por si un capítulo aparte. Lo citamos aquí solo como ejemplo para conocer este tipo de sucesiones.

Otros tipos de sucesiones: Hay infinidad de tipos de sucesiones diferentes, el objetivo en este capítulo es ver sólo las más importantes, es por eso que sólo vamos a agregar algunos casos más.

La sucesión: $a_n = 1/n$
Esta sucesión tiene los siguientes términos: 1/2 ; 1/3 ; 1/4 ; 1/5 ; 1/6 ; 1/7 ; 1/8 ; 1/9 ; 1/10 ; 1/11 … 1/n
Es una sucesión muy importante que deberemos recordar más adelante.

¿Qué pasa si al término general de una sucesión aritmética le agrego el factor $(-1)^n$?
Veamos un ejemplo: $a_n = (4n + 3) \cdot (-1)^n$
La sucesión sería entonces la siguiente $\Rightarrow$ –7 ; 11 ; –15 ; 19 ; –23 ; 27 ; –31 ; 35 ; –39 …

Conclusión: Cuando vea una función oscilante en la que la diferencia entre los valores absolutos de los términos consecutivos se mantiene constante, el término general de esta sucesión será igual al de una sucesión aritmética multiplicada por el factor $(-1)^n$

Convergencia de una sucesión: Una sucesión es convergente cuando "tiende" a un determinado número, es decir cuando a medida que vamos escribiendo los términos de la sucesión vemos que son cada vez mas cercanos a un determinado número finito.
En otras palabras es convergente cuando existe el límite: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k \Longrightarrow$ La sucesión converge en "k"

Ejemplos:

La sucesión: 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ; 19 …. Cuyo $a_n = 2n - 1$
Como el límite existe y es infinito, la sucesión es divergente.
El límite del término general para "n" tendiendo a infinito, da infinito: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2n - 1 = 2 \cdot \infty - 1 = \infty$

En cambio la sucesión geométrica: $\frac{3}{2};\frac{3}{4};\frac{3}{8};\frac{3}{16};\frac{3}{32};\frac{3}{64};\frac{3}{128};\frac{3}{256};\frac{3}{512};\frac{3}{1024}\cdots$ Con $a_n = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Converge al valor "0" por lo tanto la sucesión es convergente.
Si calculamos el límite de a_n para "n" tendiendo a infinito, da cero: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \cdot \frac{1^\infty}{2^\infty} = 3 \cdot \frac{1}{\infty} = 0$

Nota: Cuando una sucesión converge a un valor, este no tiene por qué ser cero, puede converger a cualquier valor determinado y finito.

Escribir los 5 primeros términos de las sucesiones con los siguientes términos generales:

1) $a_n = n$

2) $a_n = n+1$

3) $a_n = 2n+3$

4) $a_n = \frac{1}{3}n-1$

5) $a_n = \frac{1}{n}$

6) $a_n = \frac{2}{n+1}$

7) $a_n = \frac{2}{3n}$

8) $a_n = \frac{n+1}{n+3}$

9) $a_n = 2^n$

10) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

11) $a_n = 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

12) $a_n = 2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^n$

13) $a_n = 2\cdot(-1)^n$

14) $a_n = (2)^n - 5$

15) $a_n = \frac{1}{3}(3)^n - 9$

16) $a_n = (n+1)\cdot(-1)^n$

17) $a_n = (n-1)\cdot(-1)^n$

18) $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)\cdot(-1)^n$

Dadas las siguientes sucesiones, clasificar si son aritméticas o geométricas:

19) 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16

20) 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10

21) $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{6}{3}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{10}{3}$

22) $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{16}{3}$; $\frac{32}{3}$

Busca el término general de las sucesiones:

23) 5, 8, 11, 14,...

24) 580, 540, 500, 460, 420, ...

25) 4, 2, 1, 0,5, 0,25, ...

26) 1, 4, 9, 16, 25, ...

27) 1, 3, 9, 27, 81, ...

28) 1, 10, 100, 1000, ...

29) Halla el término a_{14} de la sucesión del ejercicio 23.

30) Halla el término a_{19} de la sucesión del ejercicio 24.

Hallar el término número 20 de las siguientes sucesiones:

31) 100 ; 97 ; 94 ; 91 ; 88 ; 85 ...

32) 104 ; 97 ; 90 ; 83 ; 76 ; 69 ...

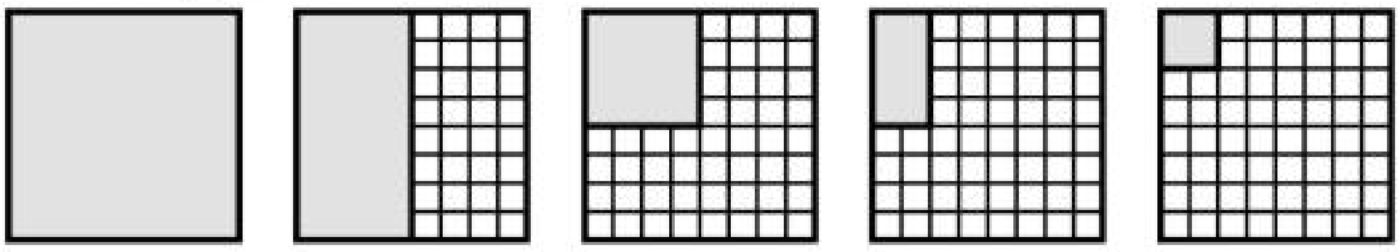
33) 1 ; 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; 25....

34) –10 ; –8 ; –6 ; –4 ; –2 ; 0 ...

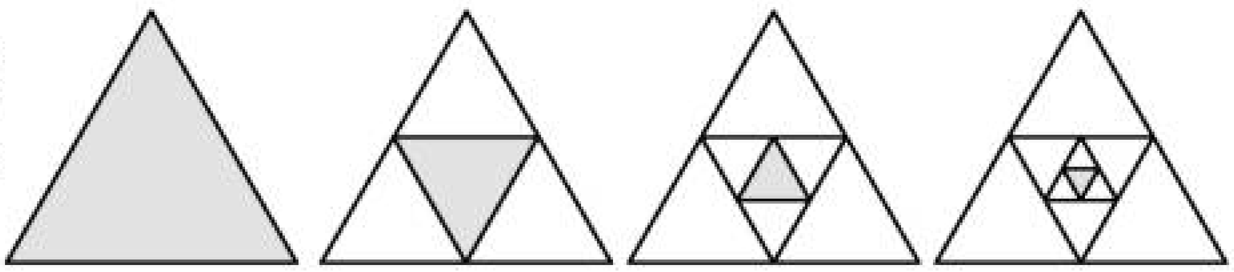
35) 1 ; –1 ; 1 ; –1 ; 1 ; –1 ; 1...

36) 1 ; –2 ; 3 ; –4 ; 5 ; –6 ; 7...

37) Dar le término general de la sucesión que represente sucesivamente la fracción de la superficie total del cuadrado que muestra la siguiente secuencia:

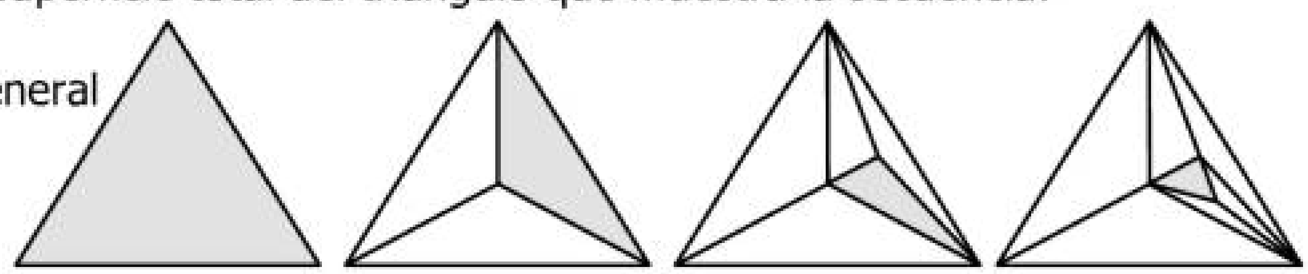


38) Dar le término general de la sucesión que represente sucesivamente la fracción de la superficie total del triángulo que muestra la siguiente secuencia:

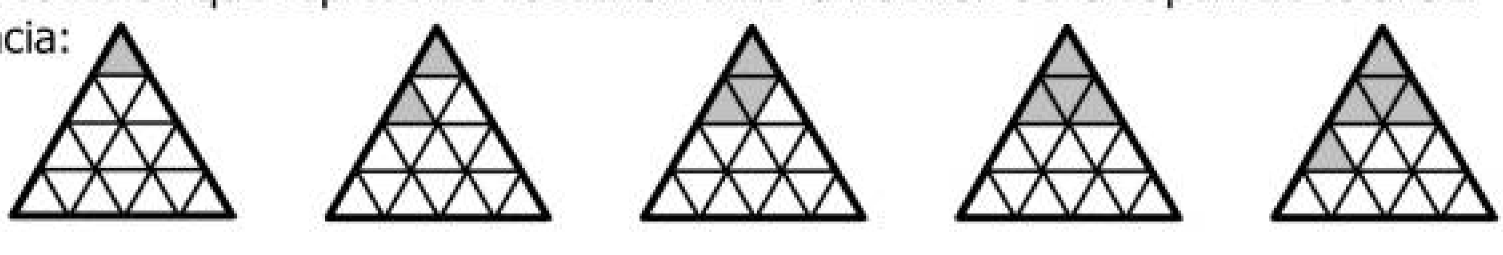


39) En la siguiente secuencia, se muestran sucesivos triángulos que se van dividiendo en tres por sus medianas (recordemos que las medianas se cotan en el centro de gravedad del triángulo, con lo cual divide al mismo en partes de "igual peso"). ¿Existe un término general de una sucesión que represente sucesivamente la fracción de la superficie total del triángulo que muestra la secuencia:

Si existe escribir este término general
Si no existe, explicar por qué.



40) Dar el término general de la sucesión que represente sucesivamente la fracción de la superficie total del triángulo que muestra la secuencia:



Dados los siguientes términos, en todos los casos correspondientes a sucesiones aritméticas, hallar la razón y el término general:

41) $a_1 = 1$ y $a_8 = 15$

42) $a_1 = -2$ y $a_7 = 16$

43) $a_8 = 17$ y $a_{15} = 31$

44) $a_{11} = \frac{13}{2}$ y $a_{20} = 11$

45) $a_{13} = 7$ y $a_{79} = 40$

46) $a_5 = 7$ y $a_{11} = -5$

47) $a_9 = -7$ y $a_{18} = -34$

48) $a_{15} = 11$ y $a_{24} = 17$

49) $a_{20} = 12$ y $a_{100} = -20$

50) $a_{13} = 5$ y $a_{78} = 40$

Responder Verdadero o Falso:

51) En las sucesiones aritméticas la diferencia entre términos consecutivos de la sucesión es igual a la razón.

52) En las sucesiones geométricas la diferencia entre 2 términos consecutivos es igual a la razón.

53) En las sucesiones aritméticas el cociente entre un término y el anterior es igual a la razón.

54) En las sucesiones geométricas el cociente entre un término y el anterior es igual a la razón.

55) La sucesión aritmética de términos: 1 ; 5 ; 9 ; 13 ; 17; 21 ; 25… puede tener dos razones diferentes.

56) La sucesión de términos: 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13; 16 ; 19… es aritmética y su razón es 3.

57) Las sucesiones aritméticas siempre son crecientes.

58) Las sucesiones geométricas siempre son decrecientes.

59) Las sucesiones aritméticas son crecientes cuando la razón es positiva.

60) Las sucesiones geométricas son decrecientes cuando la razón es mayor a 0 y menor a 1.

61) Las sucesiones geométricas siempre son oscilantes cuando la razón es negativa.

62) Las sucesiones aritméticas con razón negativa son oscilantes.

63) Las sucesiones aritméticas nunca pueden ser oscilantes.

64) Todas las sucesiones tienen un término general que definen a todos los términos de la sucesión.

65) No se puede calcular la razón de una sucesión aritmética si se tienen solo dos términos consecutivos.

66) Se calcula la razón de una sucesión aritmética con la fórmula: $(a_p - a_q)/(p - q)$

67) Las sucesiones convergentes son las que, tienden a un valor único medida que se desarrolla la sucesión.

68) Las sucesiones aritméticas son siempre divergentes.

69) La sucesión de término general $a_n = 1/n$ no es ni aritmética ni geométrica.

70) Las sucesiones oscilantes siempre son sucesiones geométricas.

<u>Dados 1 término y la razón de una sucesión geométrica escribir los cinco primeros términos de la sucesión</u>:

71) $a_1 = 2$ y $r = 2$

72) $a_1 = 3$ y $r = 2$

73) $a_1 = \frac{1}{2}$ y $r = -2$

74) $a_1 = 16$ y $r = \frac{1}{2}$

75) $a_3 = 54$ y $r = 3$

76) $a_{25} = 4$ y $r = -1$

77) $a_5 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$

78) $a_6 = 48$ y $r = \frac{2}{3}$

79) $a_7 = \frac{2}{9}$ y $r = \frac{-1}{3}$

Algunos problemas con otros tipos de sucesiones:

80) ¿Es el "79" algún término de la sucesión $a_n = (2^n - 5n)$? Si es así ¿Cuál, qué número de término?

81) Escribir el término número 12 de la sucesión del ejercicio anterior.

82) ¿Se puede decir que la sucesión del ejercicio 80 es una sucesión geométrica?

83) Escribir los 3 términos que siguen a la siguiente sucesión: 1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 21 ; 28 ; 36 ; 45 ; 55 ; 66

84) escribir los 3 términos que siguen a la sucesión: 100 ; 99 ; 97 ; 94 ; 90 ; 85 ; 79 ; 72 ; 64 ; 55 ; 45 ….

Esta fórmula sirve para hallar la razón de una sucesión geométrica conociendo dos de sus términos (a_y y a_x) $r^{y-x} = \dfrac{a_y}{a_x} \Rightarrow r = \sqrt[y-x]{\dfrac{a_y}{a_x}}$

Hallar la o las posible/s razones de las sucesiones geométricas de las que se conocen los siguientes términos

85) $a_{11} = -120$ y $a_9 = \dfrac{-15}{2}$

86) $a_1 = 8\sqrt{2}$ y $a_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$

87) $a_{10} = \dfrac{1}{80}$ y $a_6 = \dfrac{1}{5}$

88) $a_{12} = \dfrac{5}{2}$ y $a_{19} = 320$

89) $a_7 = \dfrac{3}{2}$ y $a_{16} = -768$

90) $a_{23} = 0{,}0000001$ y $a_{30} = -1$

Algunos problemas redactados:

91) Sabiendo que el primer término de una sucesión aritmética es 3 y que el término número 12 es 25, determinar la razón y el término general.

92) Determinar si el número 37 pertenece a la sucesión aritmética con a_1=5 y r=2 . Si es así, indicar que número de término es el 37.

93) Determinar si el número 157 pertenece a la sucesión aritmética con a_1= –8 y r=3 . Si es así, indicar que número de término es el 157.

94) Una empresa le cotiza el trabajo de cavar un pozo para sacar agua al dueño de una estancia. Le dice que por el primer decímetro cavado se cobra \$20 y que por cada decímetro después del primero se le van agregando \$3 al costo del decímetro de cavado anterior (o sea que el primer decímetro cuesta \$20, el segundo \$23, el tercero \$26 y así sucesivamente). El dueño de la estancia acepta la cotización y manda a hacer el pozo. Cuando se termina el trabajo el costo del último decímetro cavado fue de \$191. ¿Cuántos decímetros tiene el pozo de profundidad?

95) Ignacio comienza colocando 2 botones, uno al lado de otro, a una distancia de 15 cm. entre sí. Luego coloca un tercer botón a 16 cm. del segundo, luego un cuarto a 17 cm. del tercero y así, va agregando botones de manera que al siguiente siempre aumenta 1 cm. la distancia. Si termina colocando 143 botones ¿A qué distancia debió colocar el botón número 143 del número 142?

96) Sea la sucesión geométrica: 0.4 ; 1.2 ; 3.6 ; 10.8 ; 32.4 ; 97.2 ; 291.6 ; ... Encontrar el término 11.

97) Sea la sucesión geométrica: –0.6 ; 1.2 ; –2.4 ; 4.8 ; –9.6 ; 19.2 ; –38.4 ; ... Encontrar el término 17.

98) Una bola se deja caer desde una altura de 54 m. El primer rebote alcanza una altura de 18 m; el segundo, 6 m y así sucesivamente. ¿Cuál es la distancia que sube la bola en el séptimo rebote? (expresar esta altura en cm.)

99) ¿Cuál es el siguiente término de la sucesión?: 2 ; 5 ; 10 ; 17 ; 26 ; 37 ; 50 ; 65 ...

100) Calcula el término que ocupa el lugar número 100 de una sucesión aritmética cuyo quinto término es igual a 4 y la razón es igual a 5.

101) Calcula el término que ocupa el lugar número 137 de una sucesión aritmética cuyo término número 47 es igual a 29 y la razón es igual a 3.

102) Si se Interpolan cuatro términos entre los números 7 y 27 para que formen una sucesión aritmética. ¿Cuál será la razón de dicha sucesión? (interpolar términos significa que se agregan esos términos entre los dos extremos citados)

103) Si se Interpolan tres términos entre los números 15 y 31 para que formen una sucesión aritmética. ¿Cuál será la razón de dicha sucesión?

104) Si se Interpolan seis términos entre los números 192 y 227 para que formen una sucesión aritmética. ¿Cuál será la razón de dicha sucesión?

105) Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en sucesión aritmética de diferencia 3. (Nota: Este es un poco complicado, pero no tanto, hay que recordar el grandioso teorema de Pitágoras y luego una ecuación cuadrática)

Más Problemas:

106) El producto de 2 términos consecutivos de una sucesión aritmética es 340 y la razón de dicha sucesión es 3. Hallar dichos términos.

107) Un corredor tarda para correr 1000 metros un determinado tiempo. Supongamos que a medida que va desarrollando su práctica y entrenamiento, por cada semana de práctica disminuye su tiempo en un 1/56 del total que tardaba la semana anterior. Si este corredor antes de comenzar a practicar tardaba 136 seg. ¿Cuánto tardará luego de practicar 30 semanas?

108) El quinto término de una sucesión geométrica es 81/16 y el segundo término es 9/2. Halla el primer término de dicha sucesión.

109) En una sucesión geométrica de primer término 7 y razón igual a 2, un cierto término es 28672. ¿Qué lugar ocupa dicho término?

110) Sabiendo que el 7° término de una sucesión geométrica es 1 y la razón 1/2, halla el primer término.

111) Interpola tres números entre los números 8 y 128 para que formen una sucesión geométrica. ¿Cuál es la razón de la sucesión que resulta luego de interpolar esos tres términos?

112) Interpola ocho números entre los números 2 y 3906250 para que formen una sucesión geométrica. ¿Cuáles son los dos primeros números que se deben interpolar para que resulte una sucesión geométrica?

113) En una sucesión geométrica se sabe que el término decimoquinto es igual a 512 y que el término décimo es igual a 16. Halla el primer término.

114) Halla el término que le sigue a la sucesión: 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; ...

115) Los siguientes términos pertenecen a la famosa sucesión de Fibonacci, esta sucesión ha sido muy conocida desde hace siglos y los grandes matemáticos encontraron en ella curiosidades muy extrañas.
Los primeros términos son: 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; ... ¿Te animás a hallar el término que le sigue a esta sucesión? ¿Cuál es la regla de formación que tiene la sucesión?

116) En una sucesión geométrica, los términos primero y decimoquinto son 6 y 54, respectivamente. Halla el término que ocupa el octavo lugar en la sucesión.

<u>Determinar si las siguientes sucesiones convergen a algún valor, si es así decir a qué valor convergen</u>:

117) $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

118) $a_n = 3 \cdot (2)^n$

119) $a_n = 2 + 3n$

120) 2,05 ; 2,005 ; 2,0005 ; 2,00005...

121) $a_n = 3 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$

122) 1 ; 1,3 ; 1,33 ; 1,333 ; 1,3333 ...

<u>Determinar si las siguientes sucesiones dadas por su término general convergen a algún valor, si es así determinar a qué valor converge la sucesión</u>:

<u>Nota</u>: Para resolver esta tira de ejercicios e necesario saber hallar límites determinados e indeterminados

123) $a_n = \frac{1}{3n+2}$

124) $a_n = \frac{5}{2n-1}$

125) $a_n = \frac{3n+2}{5n-1}$

126) $a_n = \frac{n+5}{n-2}$

127) $a_n = \frac{2n+3}{n-1} - 5$

128) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

129) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{6n}$

130) $a_n = \frac{n^2+2n+3}{3n^2+1} + \frac{1}{2}$

131) Puede converger a algún valor una sucesión oscilante? ¿Si es así a qué valor puede converger? ¿Si es así, podrías citar algunos términos de una sucesión oscilante que converja a algún valor?

132) Escribir el término general de una sucesión cuyo primer término sea 4 y que converja a 3. Sugerencia: Basarse en la sucesión de término general $a_n = 1/n$

133) Escribir el término general de una sucesión cuyo primer término sea (–5) y que converja a 2.

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

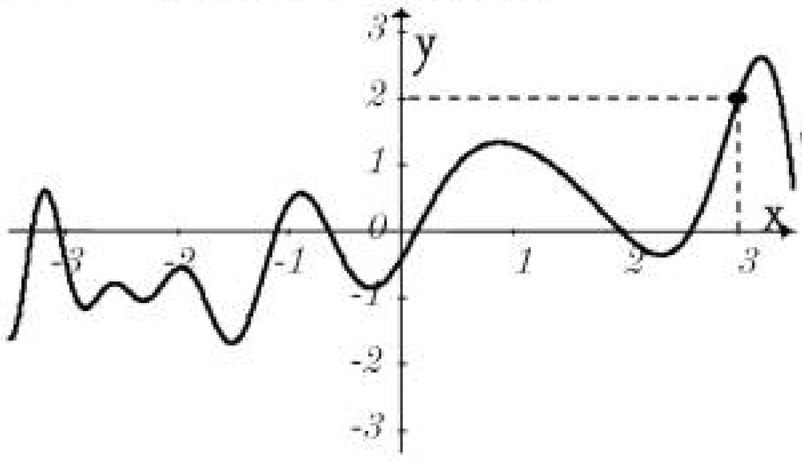
Título del Tema:

Introducción Análisis Matemático

Número de Tema: **80**

Área: **Matemática**

☆ **¿Qué es un límite?** *El valor al cual "se aproxima" una función cuando "X tiende o se acerca cada vez más a un valor determinado"*



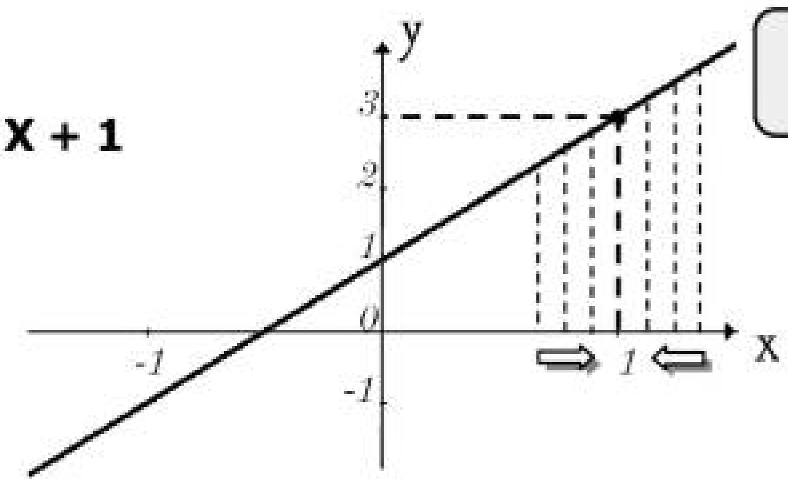
El límite de la función cuando "X Tiende a 3" es 2

$$\text{Límite}_{X\to 3}\ f(X) = 2$$

☆ **<u>Límites Laterales</u>**: Vamos a analizar la función: $f(x) = 2X + 1$

Veamos que pasa a medida que la X "se acerca al valor 1" Y vamos a usar para esto unas tablitas de valores, pero antes veamos qué es esto de los límites laterales:

$\boldsymbol{f(x) = 2X + 1}$

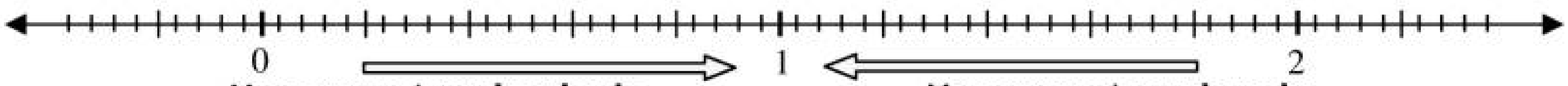


Para calcular el límite de la función para "X tendiendo a 1" tengo que acercarme a 1 por la izquierda y por la derecha

Así voy a tener <u>dos límites</u>:

- El límite para "X tendiendo a 1 por izquierda"
- El límite para "X tendiendo a 1 por derecha"

Para que EXISTA el Límite de la función en un punto**, los límites laterales deben ser iguales.**



Me acerco a 1 por **izquierda** Me acerco a 1 por **derecha**

Nos acercamos a 1 desde la izquierda

X	Y
0	1
0,5	2
0,6	2,2
0,7	2,4
0,8	2,6
0,9	2,8
0,95	2,9
0,99	2,98

A medida que X se acerca a 1 "por izquierda" Y se acerca a 3

$$\text{Límite}_{X\to 1^-}\ f(X) = 3$$

Este es el límite de la función para **X** tendiendo a 1 **por izquierda**

Nos acercamos a 1 desde la derecha

X	Y
2	5
1,5	4
1,4	3,8
1,3	3,6
1,2	3,4
1,1	3,2
1,05	3,1
1,01	3,02

A medida que X se acerca a 1 "por derecha" Y se acerca a 3

$$\text{Límite}_{X\to 1^+}\ f(X) = 3$$

Este es el límite de la función para **X** tendiendo a 1 **por derecha**

Por último decimos que **como los límites laterales coinciden** –> **Existe el límite** de la función para "X tendiendo a 1" y vale 3.

☆ **<u>Cálculo de límites</u>**: Para calcular un límite hay que reemplazar la "X" por el valor al que quiero que "se acerque" (O sea el valor al cual tiende X)

Ejemplo: Calcular el límite de $\boldsymbol{f(x) = 2X^2 + 3X - 2}$ para X tendiendo a -2

$$\text{límite}_{X\to -2}\ f(X) = \text{límite}_{X\to -2}\ 2X^2 + 3X - 2 =$$

Reemplazo "X" por –2 $\quad \text{límite}_{X\to -2}\ f(X) = 2\cdot(-2)^2 + 3\cdot(-2) - 2 = 2\cdot 4 - 6 - 2$

$$\boxed{\text{límite}_{X\to -2}\ f(X) = 0}$$

Otro Ejemplo: $\lim\limits_{X \to 1} \frac{3X^2 - 1}{\sqrt{X+3}}$ ⇒ Siempre lo primero que hago cuando tengo que calcular un límite es reemplazar "X" por el valor al cual "tiende el límite"

Entonces reemplazando X, me queda:

$$\lim_{X \to 1} \frac{3X^2 - 1}{\sqrt{X+3}} = \frac{3 \cdot (1)^2 - 1}{\sqrt{1+3}} = \frac{3-1}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \lim_{X \to 1} \frac{3X^2 - 1}{\sqrt{X+3}} = 1$$

Límites Infinitos A veces cuando calculamos un límite, nos da infinito

Ejemplos: $\lim\limits_{X \to 2} \frac{3X + 4}{5X - 10}$ $\quad \lim\limits_{X \to 2} \frac{3 \cdot 2 + 4}{5 \cdot 2 - 10} = \frac{10}{0}$ ⇒ Y ahora, la pregunta es: ¿Cómo hago esta cuenta?

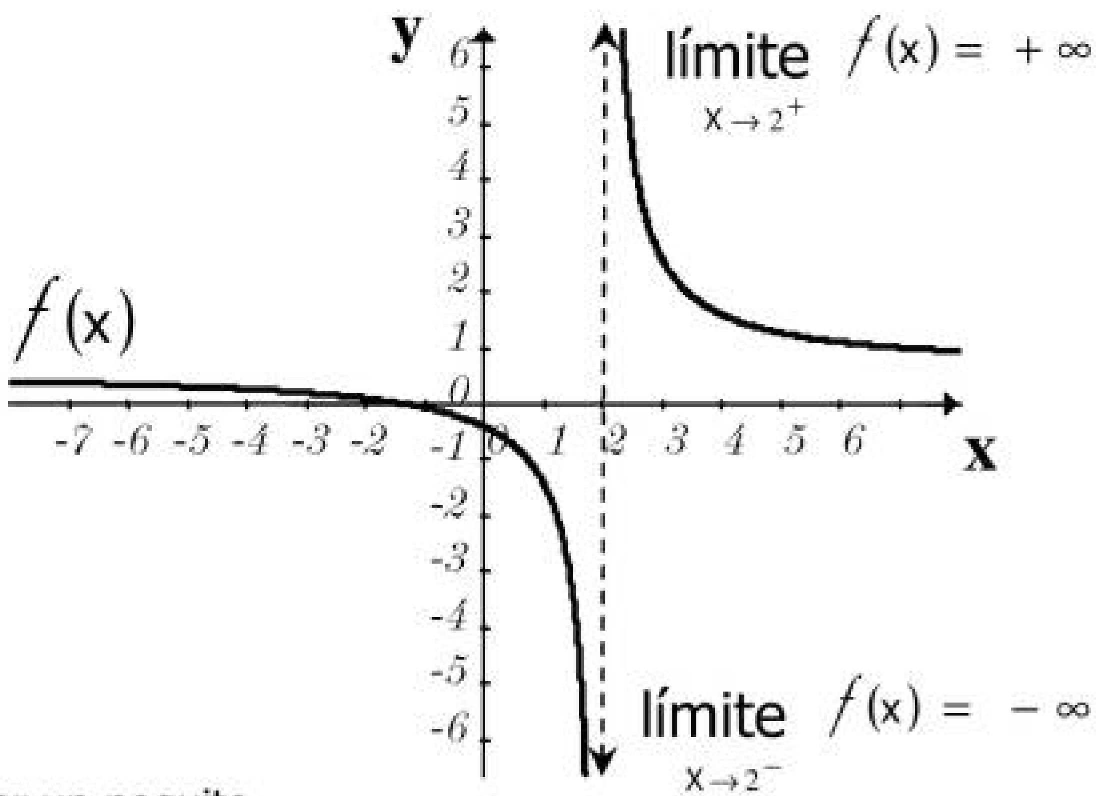
Ya sabemos que no existe la división por "CERO" Pero en realidad **no tenemos que dividir por "CERO"** Ya que lo que estamos calculando es un límite. **El denominador no es CERO, sino "TIENDE" a CERO**

Veamos: Calculemos los límites laterales

$$\lim_{X \to 2^+} \frac{3X + 4}{5X - 10} = \frac{10}{0{,}0000000\,\text{"algo"}} = +\infty$$

$$\lim_{X \to 2^-} \frac{3X + 4}{5X - 10} = \frac{10}{-0{,}0000000\,\text{"algo"}} = -\infty$$

➢ Por lo tanto **el límite da infinito**



☆ Límites Indeterminados

Venía muy fácil ¿no? Bueno, ahora se va a complicar un poquito

Veamos que pasa si quiero calcular: $\lim\limits_{X \to 1} \frac{X^2 - 1}{X - 1}$

$$\lim_{X \to 1} \frac{X^2 - 1}{X - 1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado} \Rightarrow$$

Esta cuenta no sólo no se puede hacer, sino que, además, **es indeterminada.**

Entonces la pregunta es: ¿Cuánto da ese límite?
Bueno para saber eso vamos a tener que resolver la **INDETERMINACIÓN**
Pero, antes que nada veamos cuáles son las indeterminaciones más comunes:

➢ **Las dos indeterminaciones más comunes son:** $\frac{\infty}{\infty}$ ⇒ Infinito sobre Infinito

$\frac{0}{0}$ ⇒ Cero sobre Cero

Empecemos por analizar la primera indeterminación, la de **0 sobre 0**
Hay varias maneras de "salvar" la indeterminación (a continuación están las más comunes)

➢ Una es **factorear** el numerador y el denominador para simplificar el factor que genera la indeterminación.

➢ Si no se acuerdan muy bien de los casos de factoreo, cuando tenemos polinomios, pueden **dividir al numerador y al denominador** del límite, **por el binomio "que lo hacen cero"** –> Aplicando **Ruffini** (tomando como término independiente del divisor al número al cual tiende "X", cambiado de signo).

➢ Hay veces que lo más fácil es **multiplicar al numerador y al denominador por "el conjugado"** de alguno de ellos (generalmente por el conjugado del que tenga una resta).

Volvamos al ejemplo anterior... $\lim\limits_{X \to 1} \frac{X^2 - 1}{X - 1} = \frac{0}{0}$ ⇒ **Indeterminado**

Ya sabemos que el límite es indeterminado, por lo tanto voy a tener que "Salvar" la indeterminación, para poder calcular el límite. Una de las maneras de salvar las indeterminaciones era factorear, bueno, vamos a ver como se "salva" la indeterminación del ejemplo, factoreando:

Vamos a factorear el numerador: ⇨ 5º Caso: **"Diferencia de Cuadrados"** ⇨ $\text{límite}_{X\to 1} \frac{X^2-1}{X-1} = \text{límite}_{X\to 1} \frac{(X+1)\cdot(X-1)}{X-1}$

Simplificamos ⇨ $\text{límite}_{X\to 1} \frac{(X+1)\cdot\cancel{(X-1)}}{\cancel{X-1}}$ Como ya se fue la indeterminación: Reemplazo la "X" por 1 ⇨ $= \text{límite}_{X\to 1} (X+1) = \boxed{2}$

➢ *Habíamos dicho que había tres maneras básicas de eliminar las indeterminaciones de los límites que dan cero sobre cero, recién vimos un ejemplo factoreando el denominador o numerador, bueno, ahora vamos a ver un ejemplo en el que vamos a sacar la indeterminación dividiendo por Ruffini, usando como divisor el factor de indeterminación.*

Veamos este límite: $\text{límite}_{X\to 3} \frac{X^3-4X^2+X+6}{X-3} = \frac{0}{0}$ ⇨ **Indeterminado**

Usando Ruffini: Dividimos numerador y denominador por (X–3)

Dividimos por (X–3) porque es el factor de indeterminación, nos damos cuenta de esto por lo siguiente:

➢ Por un lado porque es el único factor del denominador (del numerador no sabemos porque no está factoreado)

➢ Y por otro lado porque si el límite tiende a 3, entonces, es seguro que el factor (X–3) va a tender a cero y puede generar una indeterminación.

$(X^3 - 4X^2 + X + 6) / (X-3) =$

	1	−4	+1	+6
3		3	−3	−6
	1	−1	−2	0

Me dio de resultado: $X^2 - X - 2$

$(X-3) / (X-3) = 1$

Por lo tanto, como dividí numerador y denominador por "lo mismo" me queda:

$$\text{límite}_{X\to 3} \frac{X^3-4X^2+X+6}{X-3} = \text{límite}_{X\to 3} \frac{X^2-X-2}{1}$$

Y ahora que se "fue" la indeterminación, puedo reemplazar la "X" por 3. ⇨ $\text{límite}_{X\to 3} \frac{X^2-X-2}{1} = \frac{3^2-3-2}{1} = 4$ Y llego a que, luego de salvada la indeterminación, el límite me da 4.

➢ *Y todavía nos falta ver un caso muy típico: cuando aparecen raíces. Por lo general la mayoría de los límites indeterminados en los que aparecen raíces se resuelven multiplicando las expresiones de las raíces por sus expresiones conjugadas. Bueno ahora veamos un ejemplo de un límite con raíces para que quede mas claro como se resuelven...*

✰ Último ejemplo con la indeterminación: "Cero sobre Cero" $\text{límite}_{X\to 2} \frac{3-\sqrt{X+7}}{2-X} = \frac{0}{0}$ **Indeterminado**

El tema, ahora, es como calculamos este límite. Es decir, como "salvamos la indeterminación"

–> Y.... habíamos dicho que una de las maneras de hacer esto era multiplicar el denominador y el numerador por el conjugado de alguno de ellos. Hagamos esto con este ejemplo:

$$\text{límite}_{X\to 2} \frac{3-\sqrt{X+7}}{2-X} = \text{límite}_{X\to 2} \frac{3-\sqrt{X+7}}{2-X} \cdot \frac{3+\sqrt{X+7}}{3+\sqrt{X+7}}$$

Fíjense que multiplicamos, arriba y abajo por **lo mismo**, de otra manera no se hubiera mantenido la igualdad.

⇨ Aplicando diferencia de cuadrados en el numerador, me queda:

$$\text{límite}_{X\to 2} \frac{3-\sqrt{X+7}}{2-X} \cdot \frac{3+\sqrt{X+7}}{3+\sqrt{X+7}} = \text{límite}_{X\to 2} \frac{(3)^2-(\cancel{\sqrt{}}X+7)^{\cancel{2}}}{(2-X)\cdot(3+\sqrt{X+7})}$$

$$\Rightarrow \text{límite}_{X\to 2} \frac{9-(X+7)}{(2-X)\cdot(3+\sqrt{X+7})} = \text{límite}_{X\to 2} \frac{9-X-7}{(2-X)\cdot(3+\sqrt{X+7})} = \text{límite}_{X\to 2} \frac{\cancel{2-X}}{\cancel{(2-X)}\cdot(3+\sqrt{X+7})} = \text{límite}_{X\to 2} \frac{1}{3+\sqrt{X+7}} = \frac{1}{3+\sqrt{9}} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

☆ Indeterminación: **"Infinito sobre Infinito"**

Esta indeterminación se da **cuando la "X" tiende a Infinito** y por lo tanto tiende a infinito el numerador y el denominador al mismo tiempo.

Ejemplo: $\underset{X\to\infty}{\text{límite}} \dfrac{3X^2+2X+1}{2X^2-1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ **Indeterminado**

Otra vez, la cuenta es indeterminada, o sea que tengo que "salvar la indeterminación" Para ello, voy a **dividir numerador y denominador por "X" elevada al mayor exponente** que tenga:

$$\underset{X\to\infty}{\text{límite}} \frac{3X^2+2X+1}{2X^2-1} = \underset{X\to\infty}{\text{límite}} \frac{\frac{3X^2+2X+1}{X^2}}{\frac{2X^2-1}{X^2}} = \xrightarrow[\text{del "}X^2\text{"}]{\text{Distributiva}} \underset{X\to\infty}{\text{límite}} \frac{\frac{3X^2}{X^2}+\frac{2X}{X^2}+\frac{1}{X^2}}{\frac{2X^2}{X^2}-\frac{1}{X^2}} = \underset{X\to\infty}{\text{límite}} \frac{\frac{3\cancel{X^2}}{\cancel{X^2}}+\frac{2\cancel{X}}{X^{\cancel{2}}}+\frac{1}{X^2}}{\frac{2\cancel{X^2}}{\cancel{X^2}}-\frac{1}{X^2}}$$

Simplifico...

Y por último reemplazo las "X"

$$\underset{X\to\infty}{\text{límite}} \frac{3+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{2-\frac{1}{\infty}} = \frac{3+0+0}{2-0} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Y llegué al resultado final del límite.

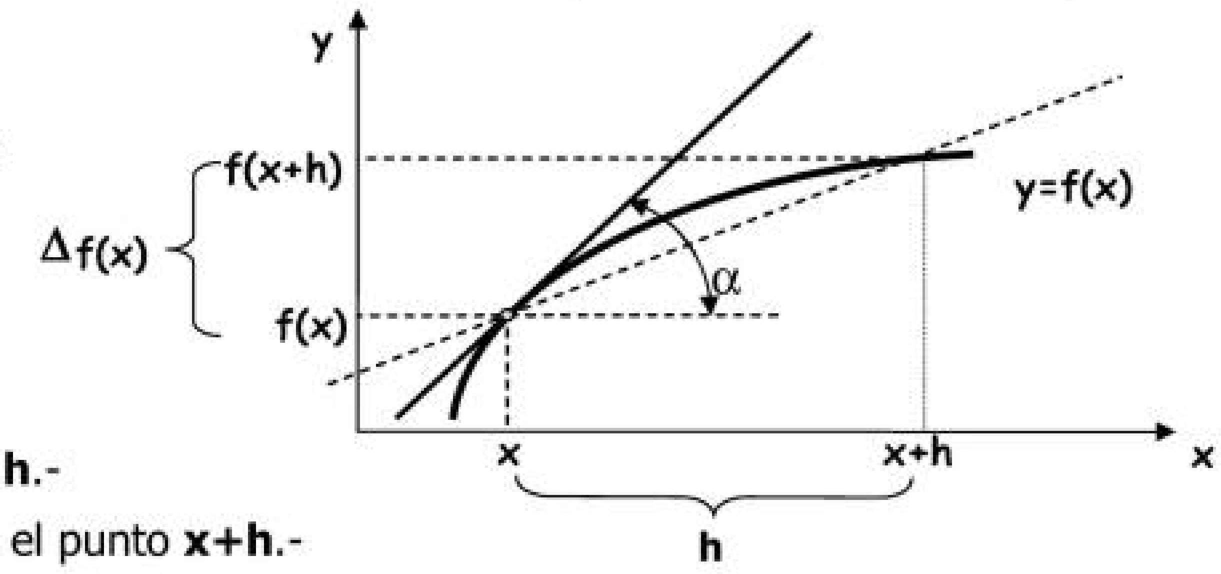
Ojo de no confundir los límites indeterminados con los límites que dan infinito o con los que dan cero, acá te mostramos unos ejemplos genéricos para un valor "m" cualquiera, como para refrescar esos conceptos rápidamente.

Límites que dan Infinito: $\underset{X\to 0}{\text{límite}} \dfrac{m}{X} = \dfrac{m}{0} = \infty$

Límites que dan Cero: $\underset{X\to 0}{\text{límite}} \dfrac{X}{m} = \dfrac{0}{m} = 0$

- <u>¿Qué es una Derivada</u>? La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a esa función en ese punto.

Mirá bien el gráfico de esta función cualquiera **f(x)**:



En el Eje x:

- Tomamos un punto **x**.-
- Marcamos un incremento **h**.-
- Y nos queda determinado el punto **x+h**.-

Experimento:

- Achiquemos el incremento **h** hasta que sea casi imperceptible...
- ... llega un punto que h es tan chico, que la línea que une f(x) y f(x+h) toca a la curva en un solo punto, o *sea, se hace tangente a la curva*

Ahora la pregunta es ¿Cuánto vale numéricamente la pendiente a la recta tangente en un punto x?
<u>La pendiente es la razón entre el incremento vertical y el incremento horizontal. Por lo tanto esa es la pendiente de la curva en el punto "x", es decir ese cociente de incrementos:</u>

$$\frac{\Delta\, Vertical}{\Delta\, Horizontal} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Longrightarrow$$

Esto se denomina **COCIENTE INCREMENTAL**

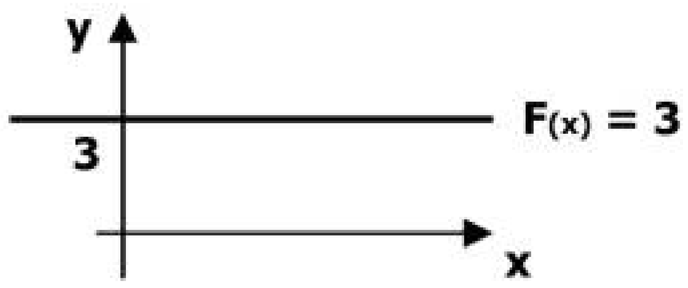
¿Viste que recién experimentamos "achicando" la **h** ? Esto en Matemática se expresa así: $\lim\limits_{h\to 0}$
y como lo que queremos calcular es la pendiente de la curva, calculamos el límite para h tendiendo a cero de ese famoso cociente incremental.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_{(x)}$$

Y esta es la definición de derivada de f(x) en el punto x

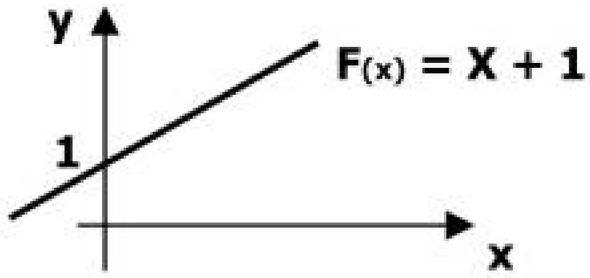
En otras palabras: ***La derivada de una función nos indica la "<u>Tasa de cambio</u>" es decir, nos indica qué tanto va a variar "y" a medida que varía "x"***

La derivada de una función constante:



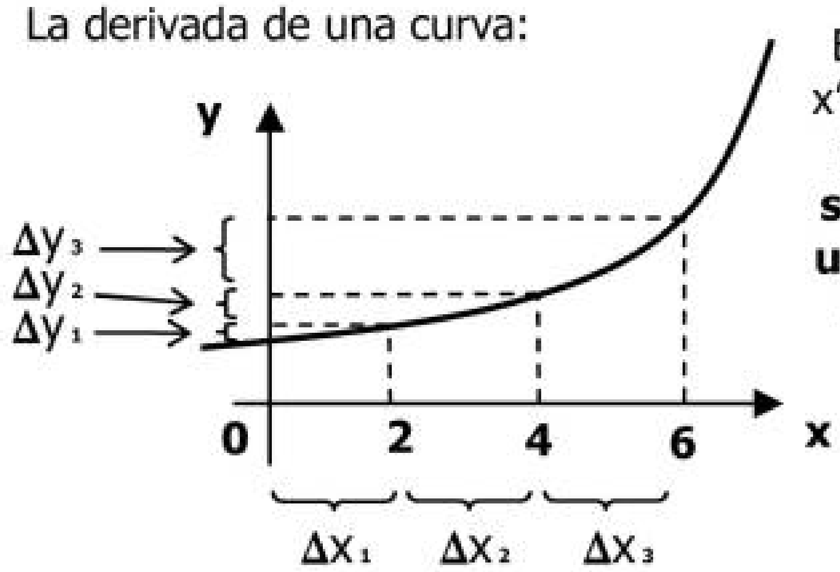
En este caso, la función no varía a medida que "avanza x", por lo tanto **la "Tasa de cambio" es cero**, entonces, **la derivada de esta función va a ser cero para cualquier valor de x**

La derivada de una recta con pendiente distinta de cero:



En este caso, **la función varía** a medida que "avanza x", y además, en cualquier punto **la variación es constante** ya que es una recta, eso significa que la **"Tasa de cambio" es constante**, entonces, **la derivada de esta función va a ser un valor numérico que represente a la tasa de cambio y para cualquier valor de x va a ser siempre la misma.**

La derivada de una curva:



En el caso de una curva, **la función varía** a medida que "avanza x", y además, también varía la **"Tasa de cambio" (Fíjense que a iguales incrementos de "x" los incrementos de la función son distintos)** entonces, **la derivada de esta función va a ser un valor numérico que represente a la tasa de cambio para cada valor de x, ya que para cada valor de X va a ser una tasa de cambio diferente.**

Por lo tanto, la derivada de estas curvas, puede expresarse como una función de "x" que según el valor que tenga "x" va a darme una derivada diferente o una "tasa de cambio" diferente.

- Cálculo de Derivadas por definición: La manera de calcular una derivada por definición es un poco "engorrosa" pero es necesario saberlo hacer para entender bien el significado:

✔ **Derivada de f(x)** se escribe "con un tilde" **f ' (x)**

Calculemos entonces, a modo de ejemplo, la derivada de $\mathbf{f(x)=x^2}$ en **x=1**
Primero calculamos la derivada de g(x) para cualquier valor de x:
Para eso, partimos de la fórmula de definición de derivadas: **Si** $f(x)=x^2$, **entonces** $f(x+h)=(x+h)^2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

Desarrollamos el cuadrado del binomio:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2\cdot x\cdot h+h^2\cancel{-x^2}}{h} \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{2\cdot x\cdot h+h^2}{h}$$

... ahora sacamos factor común **h** en el numerador...

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot(2\cdot x+h)}{\cancel{h}} \Rightarrow \lim_{h\to 0}\ 2\cdot x+h = 2\,.\,X+0 = \boxed{2X} \Rightarrow \boxed{f\,'_{(x)}=2x}$$

O sea que la derivada de $\mathbf{x^2}$ es **2.x**
la derivada de $\mathbf{x^2}$ evaluada en el punto **x=1** sería: $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2\cdot x \Rightarrow \boxed{f'(1)=2\cdot 1=2}$

....Y así podría calcular la derivada de $f(x)=X^2$ en cualquier punto, una vez que ya tengo la fórmula general, lo único que me faltaría es reemplazar la "X" de la fórmula de derivada f'(x) = 2X por el valor en el cual quiero conocer la derivada, y listo...

- Reglas de Derivación El desarrollo de toda la Teoría del Cálculo Infinitesimal (o sea el que incluye a las derivadas) fue presumiblemente llevado a cabo hacia 1684 por Newton (sí, el mismo de física) y Leibnitz... (en realidad todavía no se sabe bien quién de los dos la ideó primero). Como el cálculo de las derivadas tal como lo hicimos con $\mathbf{x^2}$ es más bien pesado, se idearon reglas de derivación, destinadas a hacernos los cálculos un poco más fáciles..

REGLAS DE DERIVACIÓN

- **Función Constante:** $f_{(x)} = k \Rightarrow f'_{(x)} = 0$

$f_{(x)} = 4 \Rightarrow f'_{(x)} = 0$

O sea que la derivada de "una función constante" es cero

- Derivada de una **Función Lineal**: $f_{(x)} = m\,x + b \Rightarrow f'_{(x)} = m$

$f_{(x)} = \frac{3}{5}x + 2 \Rightarrow f'_{(x)} = \frac{3}{5}$

La derivada de "una función lineal" es su pendiente

- **Función Potencia:** $f_{(x)} = x^n \Rightarrow f'_{(x)} = n \cdot x^{n-1}$

Ejemplos: $f_{(x)} = x^{18} \Rightarrow f'_{(x)} = 18 \cdot x^{18-1} = 18 \cdot x^{17}$ $\quad f_{(x)} = x^{-5} \Rightarrow f'_{(x)} = (-5) \cdot x^{-5-1} = (-5) \cdot x^{-6}$

O sea que para calcular la derivada de una función cuya variable **x** está elevada a un exponente "n" es el producto de "n" por "x" elevada al exponente "n-1"

- Derivada de sumas o restas: La derivada de una suma o resta de funciones es la suma o resta de las derivadas de dichas funciones.

$$f_{(x)} = g_{(x)} + h_{(x)} \Rightarrow f'_{(x)} = g'_{(x)} + h'_{(x)}$$

Ejemplo: $f_{(x)} = \left(x^2\right) + (3x+2) \Rightarrow f'_{(x)} = 2x + 3$

Concepto de Función Primitiva

Concepto de Función Primitiva: Dada una función cualquiera *f(x)* definida en un intervalo cerrado [*a,b*], se llama *función primitiva* de *f(x)* a otra función *F(x)* cuya derivada sea *f(x)* en dicho intervalo. Es decir, *F'(x) = f(x)* para todo *x* de [*a,b*].

Por Ejemplo: F(x) = x^2 es una primitiva de f(x) = 2x Ya que $(x^2)' = 2x$

Propiedad elemental de las funciones primitivas: Si *F(x)* es una primitiva de *f(x)* y *C* una constante cualquiera (un número), la función *F(x) + C* es otra primitiva de *f(x).*

Esto pasa porque la derivada de una constante C cualquiera es cero y porque la suma de las derivadas es la derivada de la suma...

De esta propiedad se deduce que f(x) que tiene una primitiva F(x), tiene infinitas primitivas F(x) + C

Habíamos dicho que si *f(x)* = 2x *F(x)* = x^2 es primitiva de *f(x)*

Ahora con esta propiedad podemos decir que *F(x)* = x^2 + 1 también es primitiva de *f(x)*
O bien que *F(x)* = x^2 − 2 también es primitiva de *f(x)*

Y así vemos que f(x) = 2x tiene infinitas funciones primitivas dadas por F(x) = x^2 *+ C*
Con C perteneciente al conjunto de los números reales.

INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA FUNCIÓN

INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA FUNCIÓN: Se llama *Integral Indefinida* de una función *f(x)*, al conjunto de todas las primitivas de la función *f(x)*, y se simboliza: $\int f(x)\,.\,dx$

Por lo tanto, si F(x) es primitiva de f(x), entonces: $\int f(x)\,.\,dx = F(x) + C$

Ejemplo, calculemos la integral de f(x) = 3
Tenemos que buscar una función que sea primitiva de f(x). Como vimos antes, la derivada de una función lineal es su pendiente, por lo tanto la primitiva de f(x) tiene que ser cualquier función lineal de pendiente 3.
Lo escribimos:

$$sea\ f(x) = 3 \Rightarrow \int f(x)\,.\,dx = \int 3.dx = 3x + "c"$$

by Dal-Or para TARINGA!

Propiedades Importantes de las Integrales:

La Integral de una suma o resta de funciones, es respectivamente la suma o resta de las integrales de las funciones:

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

$$\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)\ dx - \int g(x)\ dx$$

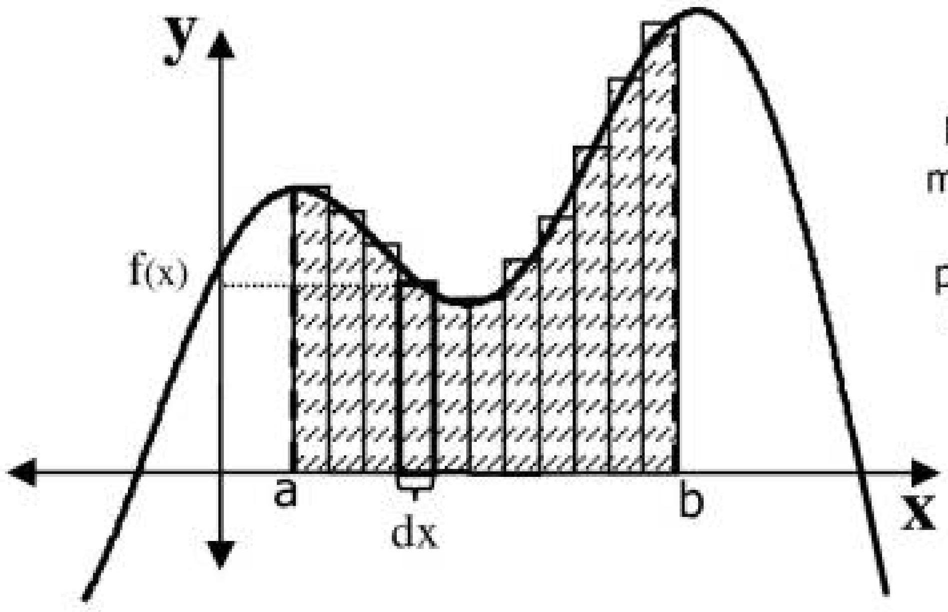
INTEGRAL DEFINIDA DE UNA FUNCIÓN

Regla de Barrow

Si *y = f(x)* es una función continua en el intervalo [*a, b*], y *F(x)* una función definida en [*a,b*], derivable y primitiva de *f(x)*, es decir, *F'(x) = f (x)* para cualquier *x*

$$\int_a^b f(x).\ dx = F(a) - F(b)$$

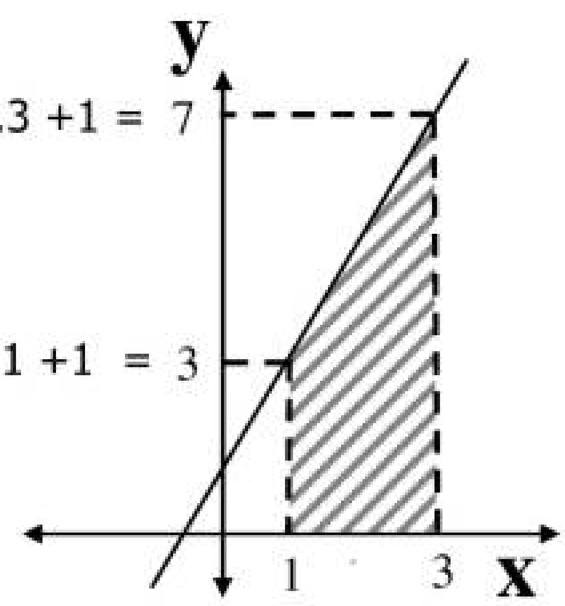
*<u>Aplicación de la integral definida</u>: La integral definida entre "a" y "b" de una función, representa al **área entre la curva** y el eje x, de la función integrada, entre los valores "a" y "b"*



En realidad, la integral es una sumatoria de infinitos f(x).dx, a medida que dx se hace mas chico, la cantidad de términos de la sumatoria es mas grande, y cuando el dx es infinitamente pequeño, la cantidad de términos de la sumatoria, es infinita, y sería como sumar las áreas de los rectángulos, que a medida que dx es cada vez mas chico, esa área es cada vez mas parecida al área real debajo de la curva.

Dx es un diferencial, lo que significa que es un valor infinitamente pequeño, tendiendo a cero, en el gráfico lo dibujamos con un valor considerable, como para que se entienda el concepto de las áreas, pero tengan en cuenta que en realidad dx es casi 0.

Veamos un ejemplo de cálculo de áreas mediante integrales:
Calcular el área debajo de la recta f(x) = 2x+1 entre X=1 y X=3



Área = $\int_1^3 (2x+1)\ .\ dx$ ⇨ Distributiva del "dx" ⇨ Área = $\int_1^3 2x.\ dx + 1\ .\ dx$

Propiedad suma de Integrales ⇨ Área = $\int_1^3 2x.\ dx + \int_1^3 1\ .\ dx$

Calculo las primitivas ⇨ Área = $\left[x^2\right]_1^3 + \left[x\right]_1^3$

Reemplazamos X por los límites de integración (Regla de Barrow) ⇨ $\left(3^2-1^2\right) + \left(3-1\right)$ ⇨ Área = $9-1+2 = 10$

Podríamos verificar el resultado, calculando el área del trapecio formado, utilizando las fórmulas de área del rectángulo y triángulo y veremos que llegamos al mismo resultado, o bien el área del trapecio rectángulo con la fórmula (B+b).h/2 De esa forma me quedaría: (7+3).2/2 = 10 y se verifica el valor del área.

Responder Verdadero o Falso:

1) El límite de una función en un punto es igual al valor de la función en dicho punto, siempre.
2) Si no existe la función en un punto, ya que ese punto no pertenece a la función, el límite siempre existe.
3) El límite de una función en un punto X_0 es el valor al cual tiende la función cuando "X" está en un entorno de X_0.
4) Todos los límites son indeterminados.
5) Hay distintos tipos de indeterminación, entre ellos "Cero sobre Cero"
6) Cuando en un límite me queda "3 sobre Cero" el límite es indeterminado, ya que no existe la división por cero.
7) Cuando en un límite me queda "3 sobre Cero" el límite da infinito.
8) $\text{límite}_{X\to 3^+} \frac{X^2+2}{X+2} = \text{límite}_{X\to 3^-} \frac{X^2+2}{X+2}$
9) Los límites laterales de una función en un punto siempre son iguales.
10) Si existe el límite de una función en un punto, deben coincidir los límites laterales de la función en dicho punto.

Calcular los siguientes límites:

11) $\text{límite}_{X\to 3} \frac{X+1}{X-2}$
13) $\text{límite}_{X\to \sqrt{3}} \frac{X^2+3}{X-\sqrt{3}}$
15) $\text{límite}_{X\to \sqrt{2}+a} \frac{X^2-a^2-2}{2\sqrt{2}}$
17) $\text{límite}_{X\to 0} \frac{1}{X}$
12) $\text{límite}_{X\to 3} \frac{X-3}{X+3}$
14) $\text{límite}_{X\to \sqrt{a}+1} \frac{3+X-\sqrt{a}}{2}$
16) $\text{límite}_{X\to a^2+1} \frac{X-a^2}{X-a^2-1}$
18) $\text{límite}_{X\to 0} \frac{X}{5}$

Más Límites para calcular: Calcularlos aproximando la "X" por izquierda y por derecha y luego, calcularlos más exactamente "salvando las indeterminaciones" (Recomendamos repasar Ruffini para estos límites...O si no la otra forma es aplicar los casos de factoreo...)

19) $\text{límite}_{X\to 5} \frac{X^2-13X+40}{X^2-21X+80}$
20) $\text{límite}_{X\to 4} \frac{X^2+X-20}{X^2-17X+52}$
21) $\text{límite}_{X\to -4} \frac{X^2-6X-40}{X^2+16X+48}$
22) $\text{límite}_{X\to -9} \frac{X^2+18X+81}{X^2+7X-18}$
23) $\text{límite}_{X\to -1} \frac{X^2+10X+9}{X^2+10X+9}$
24) $\text{límite}_{X\to -1} \frac{X^2-9X-10}{X^2-6X-7}$
25) $\text{límite}_{X\to 4} \frac{X^2+6X-40}{X^2+3X-28}$
26) $\text{límite}_{X\to 1} \frac{X^2-8X+7}{X^2+8X-9}$
27) $\text{límite}_{X\to 6} \frac{X^2-36}{X^2-23X+102}$
28) $\text{límite}_{X\to 8} \frac{X^2-2X-48}{X^2-10X+16}$
29) $\text{límite}_{X\to 8} \frac{X^2+2X-80}{X^2-13X+40}$
30) $\text{límite}_{X\to -7} \frac{X^2+X-42}{X^2+5X-14}$
31) $\text{límite}_{X\to 6} \frac{X^2-11X+30}{X^2-16X+60}$
32) $\text{límite}_{X\to -9} \frac{X^2+11X+18}{X^2+22X+117}$
33) $\text{límite}_{X\to -10} \frac{X^2+3X-70}{X^2+29X+190}$

__Unos límites más__:

34) $\text{límite}_{X\to 7} \frac{X^2-16X+63}{X^2-7X}$
35) $\text{límite}_{X\to -9} \frac{X^2-81}{X^2+27X+162}$
36) $\text{límite}_{X\to 9} \frac{X^2-X-72}{X^2-13X+36}$
37) $\text{límite}_{X\to 2} \frac{X^2-3X+2}{X^2-15X+26}$
38) $\text{límite}_{X\to -5} \frac{X^2+3X-10}{X^2-25}$
39) $\text{límite}_{X\to 8} \frac{X^2-18X+80}{X^2-19X+88}$
40) $\text{límite}_{X\to -7} \frac{X^2+14X+49}{X^2+8X+7}$
41) $\text{límite}_{X\to 2} \frac{\sqrt{3X}-\sqrt{6}}{X-2}$
42) $\text{límite}_{X\to 5} \frac{13-\sqrt{4X^2+69}}{X-5}$
43) $\text{límite}_{X\to 3} \frac{10-\sqrt{7X^2+37}}{X-3}$
44) $\text{límite}_{X\to \sqrt{a}} \frac{a-X^2}{X-\sqrt{a}}$
45) $\text{límite}_{X\to \sqrt{2}} \frac{2-X^2}{3-\sqrt{X^2+7}}$
46) $\text{límite}_{X\to \sqrt{3}} \frac{3-X^2}{4-\sqrt{X^2+13}}$
47) $\text{límite}_{X\to -2} \frac{X^2-4}{X-2}$
48) $\text{límite}_{X\to -2\sqrt{3a}} \frac{X^4-1}{X^2-1}$

by DaL-0r para TARINGA!

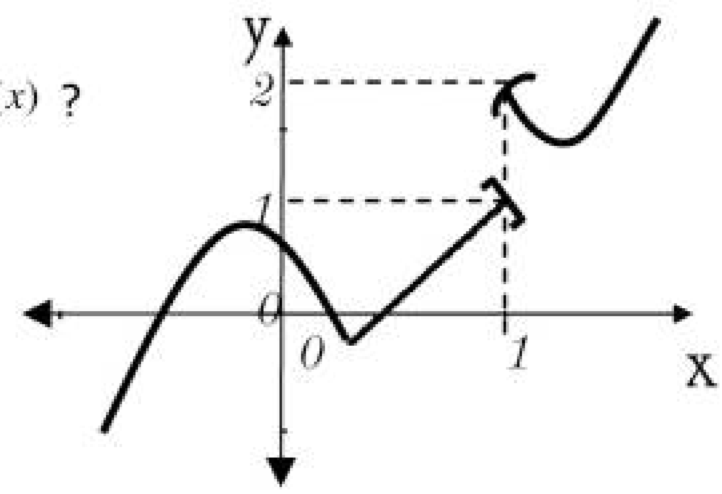
49) Dado el siguiente gráfico, que representa a la función $f(x)$

a) ¿Cuánto vale $\lim_{x\to 1} f(x)$?

b) ¿Cuánto vale $\lim_{x\to 1^+} f(x)$?

c) ¿Cuánto vale $\lim_{x\to 1^-} f(x)$?

d) ¿Cuánto vale $f(1)$?

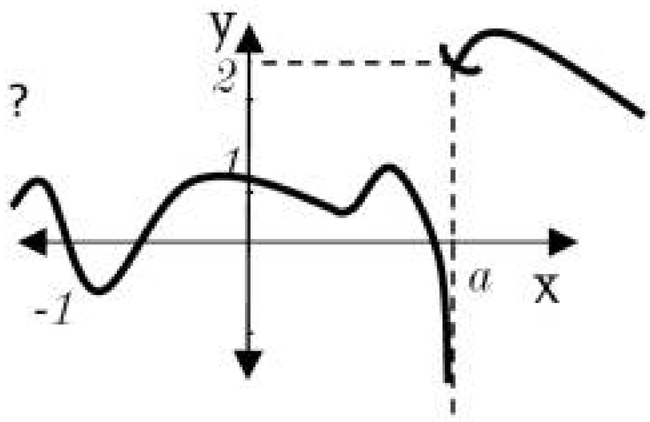


50) Dado el siguiente gráfico, que representa a la función $f(x)$

a) ¿Existe el $\lim_{x\to a} f(x)$?

b) ¿Cuánto vale $\lim_{x\to a^+} f(x)$?

c) ¿Cuánto vale $\lim_{x\to a^-} f(x)$?



Los últimos límites:

51) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^2-1}$

52) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-2x^2+7}{2x^2+7x+1}$

53) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3-5x^2+7x-3}{4x^3+5x^2+x-1}$

54) $\lim_{x\to -\infty} \frac{6x^2+9x-12}{3x^2+3x+3}$

55) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+3x^2+7x}{x^4-1}$

56) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+11x^2-3x+2}{x^3-7x^2-x}$

57) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2+5x+2}{x^3}$

58) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x^2+4x+1}{x^3}$

59) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{11}+13x^7-4x^3+3}{x^{12}-1}$

<u>Hallar el valor de la derivada o "tasa de cambio" de las siguientes funciones en los puntos pedidos</u>.

58) $f(x) = 5$ en $x=2$

59) $f(x) = -2$ en $x=3$

60) $f(x) = 2x$ en $x=-1$

61) $f(x) = 2x$ en $x=0$

62) $f(x) = 2x + 1$ en $x=3$

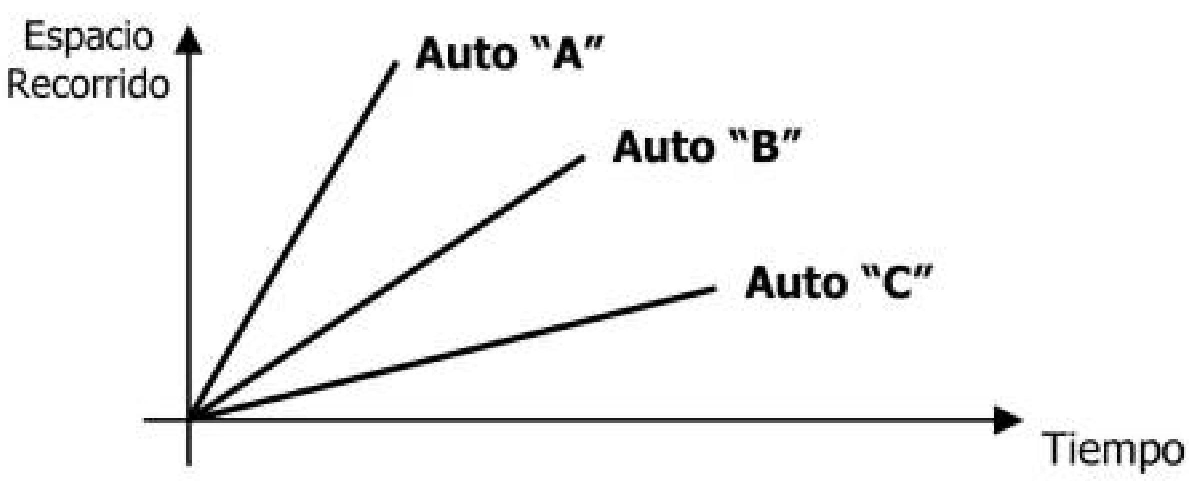
63) $f(x) = x + 2$ en $x=2$

64) $f(x) = -x + 3$ en $x=0$

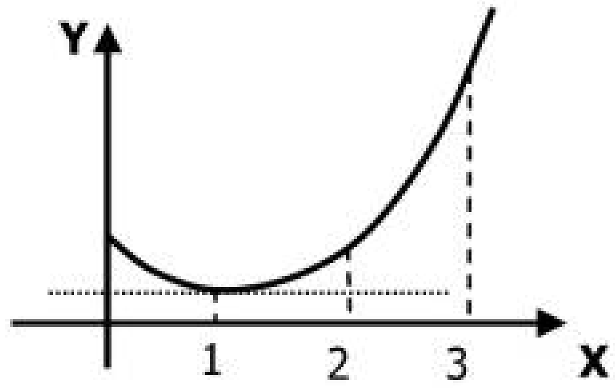
65) $f(x) = -2x + 1$ en $x=4$

66) En los ejercicios anteriores de derivadas, ¿Cambia el valor de la derivada de la función f(x), en distintos valores de x? ¿Por qué?

67) Dados los siguientes gráficos, que representan el espacio recorrido por distintos autos a través del tiempo. Podemos asociar la "velocidad" de cada auto a la "tasa de cambio" de la función "espacio-tiempo" o derivada de la función, ya que la derivada representa una "tasa de cambio" del espacio en función del tiempo, lo mismo que representa la velocidad. Por lo tanto, sabiendo que la derivada de cada función es su pendiente, ya que son funciones lineales ¿Cuál de los tres autos va más rápido? O ¿Cuál de ellos tiene mayor valor de su derivada?



68) Dado el siguiente gráfico de una función:



a) El valor de la derivada vale siempre lo mismo?
b) ¿En que valor de "x" la derivada es mayor, en x=2 o en x=3?
c) ¿Cuánto vale la derivada de la función en x=1, si se sabe que en ese punto la recta tangente a la curva es horizontal?

69) Calcular por definición, o sea aplicando el límite del cociente incremental, la derivada de $F(x) = 2x + 3$

Calcular las derivadas de las siguientes funciones en el punto que se pide en cada caso

70) $f_{(x)} = X^2 + 1$ Hallar: $f'_{(3)}$
71) $f_{(x)} = X^2 - 2$ Hallar: $f'_{(0)}$
72) $f_{(x)} = X^2 + 2x + 1$ Hallar: $f'_{(-2)}$
73) $f_{(x)} = X^2 - x$ Hallar: $f'_{(1)}$
74) $f_{(x)} = X^2 + x + 1$ Hallar: $f'_{(-1)}$
75) $f_{(x)} = X^2 - 3x$ Hallar: $f'_{(2)}$
76) $f_{(x)} = X^2 + 5x$ Hallar: $f'_{(0)}$

Responder Verdadero o Falso:

77) Toda función tiene siempre el mismo valor de derivada en todos sus puntos.
78) La derivada de cualquier función en X=0 vale siempre 0.
79) La derivada de una función en el punto que es tangente a una recta horizontal es 0.
80) Una función puede tener valores distintos de su derivada para sus diferentes valores de x.
81) Las funciones lineales tienen el mismo valor de su derivada en todos sus valores de x.
82) Las funciones constantes pueden tener derivadas negativas.
83) Las funciones lineales pueden tener derivadas negativas.
84) La derivada de una función nunca puede ser negativa.
85) La derivada de una función es en realidad un límite.
86) Puede pasar que la derivada de una función en un mismo punto, tenga varios valores.
87) Si yo sé cuánto vale la derivada de una función en un punto, puedo entonces decir qué función es.
88) Hay funciones que no tienen derivada en algún punto, ya que como la derivada es un límite, puede pasar que no exista ese límite.

Hallar la función primitiva a f(x):

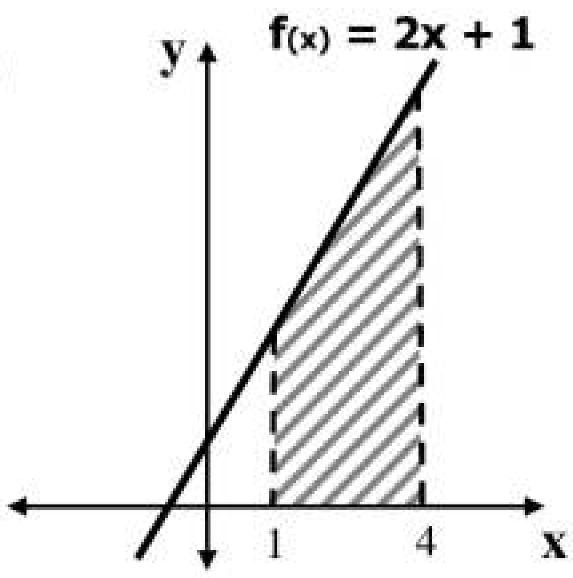
89) $f(x) = 3$
90) $f(x) = 2x + 1$
91) $f(x) = 2x - 3$
92) $f(x) = -1$
93) $f(x) = 0$

Calcular las siguientes integrales:

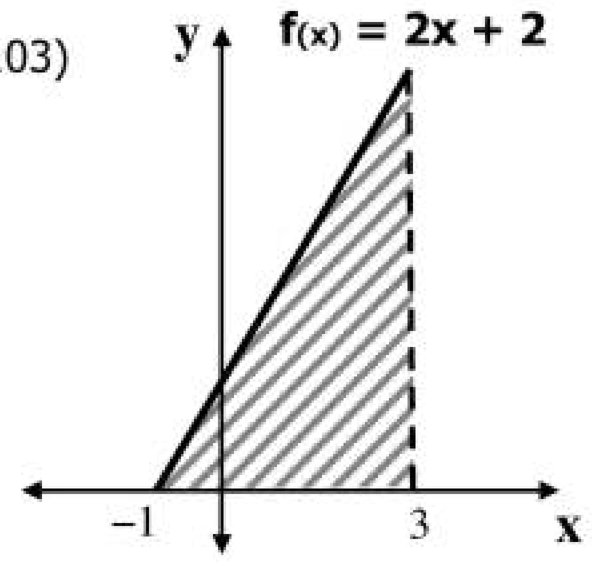
94) $\int 2.dx =$
95) $\int -1\,.\,dx =$
96) $\int 2x.\,dx =$
97) $\int (2x-2).\,dx =$
98) $\int (2x+5).\,dx =$
99) $\int dx =$
100) $\int_0^2 5\,dx =$
101) $\int_3^9 5\,dx =$

Mediante el uso de integrales, calcular el área debajo de las siguientes rectas y luego verificar utilizando las fórmulas de área del triángulo y rectángulo:

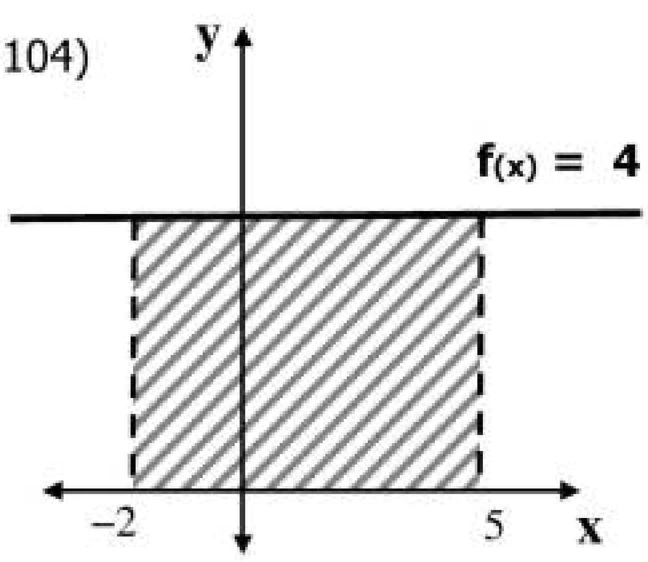
102)



103)



104)



by Dal-0r para TARINGA!

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Factoreo por Gauss

Número de Tema: **64 Bis**

Área: **Matemática**

<u>¿Qué significa factorizar?</u> Factorizar un polinomio significa expresar al polinomio como **<u>el producto</u>** de dos o varios monomios, binomios, trinomios, etc.

Antes de empezar a estudiar como se factorizan los polinomios repasemos como se factorizan los Números Naturales:

Supongamos que queremos factorizar el número 24:

Lo que hay que hacer es ir dividiendo al número que queremos factorizar por números primos (en este caso, divisores de 24).

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

<u>Luego escribimos</u>:

$24 = 2^3 \cdot 3$

En realidad lo que hicimos fue escribir 24 como un producto de "divisores". Cuando factorizamos un polinomio lo que hacemos es escribirlo como el producto de polinomios "divisores"

¿Cómo se factoriza un polinomio? <u>Hay varias maneras de factorizar un polinomio</u>, por un lado están los 6 casos de factoreo, por otro lado, hay también un método muy interesante desarrollado por el matemático F. Gauss, y lo veremos a continuación…

<u>Método de Gauss para encontrar las Raíces Enteras de un Polinomio</u>: Este es un método para factorizar polinomios que están en función de una sola variable. Es un poco largo, pero el procedimiento es muy mecánico, así que una vez que lo aprendan, les va a resultar re fácil de usar.

Gauss se dio cuenta de que los divisores enteros del término independiente (Divididos estos divisores por el coeficiente principal) de un polinomio son las posibles Raíces del mismo.
(como así también lo son los mismos números cambiados de signo)

¿Qué es la Raíz de un polinomio?

Si un número "α" es Raíz de un polinomio que llamamos P(X) ⇨ P(X) es divisible por $(X - \alpha)$

Entonces, si encontramos las Raíces α_1, α_2, α_3, etc. de un polinomio, sabremos cuales son los binomios por los que es divisible el polinomio ⇨ $(X - \alpha_1)$, $(X - \alpha_2)$, $(X - \alpha_3)$, etc.

Para factorizar el polinomio, lo vamos dividiendo por todos los binomios que encontramos, y lo escribimos como el producto de todos esos binomios por el resultado final de la última división.

<u>Pasos a seguir para factorizar un polinomio por el método de GAUSS</u>

- <u>Buscar las **"posibles"** Raíces del polinomio</u>: En este paso hay que buscar los divisores del coeficiente principal y del término independiente y hacer los cocientes de los segundos dividido los primeros, y recordar que son **"posibles"** Raíces todos esos números que hallamos, más esos mismos números cambiados de signo.
- Armar los binomios por los cuales es probable que sea divisible el polinomio a factorizar.
- <u>Ver cuáles de los binomios son efectivamente divisores del polinomio</u> (Teorema del Resto). En este paso vamos a verificar cuáles de todos esos binomios son realmente divisores del polinomio. Para ello usamos el Teorema del Resto para cada binomio. Si el resto da cero es porque el binomio es divisor, y si no da cero lo tachamos porque no nos sirve.
- <u>Empezar a dividir al polinomio por los binomios del punto anterior</u>.
- <u>Escribir el polinomio factorizado</u>: Por último escribimos el polinomio como el producto de todos los binomios por los cuales lo fuimos dividiendo, multiplicado el resultado de la última división.

Veamos un ejemplo para aclarar las dudas: Vamos a factorizar el polinomio $P(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$

❖ **Primer paso:** Buscar las posibles Raíces.

$P(X) = 1X^3 - 4X^2 + X + 6$

Término Independiente: 6
Divisores: 1, 2, 3 y 6

Coeficiente Principal: 1
Divisores: 1

Posibles Raíces: **1, –1, 2, –2, 3, –3, 6 y –6**

❖ **Segundo paso:**
Armamos los binomios que son posibles divisores.
(X+1) , (X–1) , (X+2) , (X–2) , (X+3) , (X–3) , (X+6) y (X–6)

❖ **Tercer Paso:** Ver cuales de los binomios son efectivamente divisores.
Aplicamos el Teorema del Resto para cada binomio, veamos:

$P(X) = 1\,X^3 - 4X^2 + X + 6$

Para (X+1) ⇨ Resto $= (-1)^3 - 4.(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$
Como el resto es cero, es divisible por (X + 1)
"–1 Es Raíz del polinomio"

Para (X–1) ⇨ Resto $= (1)^3 - 4.(1)^2 + (1) + 6 = 1 - 4 + 1 + 6 = 4$

Para (X+2) ⇨ Resto $= (-2)^3 - 4.(-2)^2 + (-2) + 6 = -8 - 16 - 2 + 6 = -20$

Para (X–2) ⇨ Resto $= (2)^3 - 4.(2)^2 + (2) + 6 = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$
Como el resto es cero, es divisible por (X – 2)
"X=2 Es Raíz del polinomio"

Para (X+3) ⇨ Resto $= (-3)^3 - 4.(-3)^2 + (-3) + 6 = -27 - 36 - 3 + 6 = -60$

Para (X–3) ⇨ Resto $= (3)^3 - 4.(3)^2 + (3) + 6 = 27 - 36 + 3 + 6 = 0$
Como el resto es cero, es divisible por (X – 3)
"X=3 Es Raíz del polinomio"

❖ **Cuarto Paso:**
Como ya sé que el polinomio $P(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$ es divisible por
(X + 1), (X – 2) y **(X – 3)** , ahora sólo resta dividirlo por estos binomios, en parte para verificar que efectivamente sean raíces y en parte para poder saber cuáles son todos sus factores primos.

Empezamos:
Vamos a empezar dividiéndolo por (X+1)

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & +1 & +6 \\ -1 & & -1 & +5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & +6 & 0 \end{array}$$

Me dio de resultado:
$X^2 - 5X + 6$

Ahora divido $X^2 - 5X + 6$
por el siguiente binomio (X– 2)

$$\begin{array}{r|rr|r} & 1 & -5 & +6 \\ 2 & & +2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

Me dio de resultado:
X – 3

Ahora divido X – 3 por el último binomio (X– 3)
Ya no hace falta hacer Ruffini. Como ya sabemos cualquier cosa dividida por si mismo da por resultado: 1

❖ **Quinto y último paso:** Escribo el polinomio factorizado: Esto significa escribirlo como el sucesivo producto de todos los binomios "$X - \alpha_n$" siendo α_n sus raíces.

$P(X) = 1\,X^3 - 4X^2 + X + 6 = (X + 1).(X - 2).(X - 3)$

Aclaración con respecto a esta manera de factorizar polinomios: Un polinomio de grado "n" tiene como máximo "n" raíces enteras, lo que no significa que tenga "n" raíces, sino que como máximo es así. Por lo tanto, por ejemplo en un polinomio de grado 5, puede que encontremos 5 raíces como máximo, pero puede que sólo encontremos por ejemplo 2 raíces y descompongamos al polinomio en tres factores primos en lugar de 5.

Aplicación de Ruffini para factorear polinomios de raíces no enteras:

Cuando queremos factorear por ruffini polinomios de raíces no enteras, el procedimiento es el mismo "pero" hay que hacer algunas aclaraciones así que veamos un ejemplo:

Vamos a factorear el polinomio: $9x^2 – 4$

1º Paso: Buscamos divisores del coeficiente principal y del término independiente:

Coeficiente Principal: 1 ; 3 ; 9
Término Independiente: 1 ; 2 ; 4

En este caso, como vemos los divisores del coeficiente principal incluyen números que no son solo el 1
Por lo tanto al hacer los cocientes entre ambos divisores, vamos a tener posibles raíces fraccionarias.

Paso 2: Posibles divisores del polinomio:
$(X \pm 1)$ $(X \pm 1/3)$ $(X \pm 1/9)$ $(X \pm 2)$ $(X \pm 2/3)$ $(X \pm 2/9)$ $(X \pm 4)$ $(X \pm 4/3)$ $(X \pm 4/9)$

3º Paso: Voy a verificar por teorema del resto cuáles pueden ser raíces del polinomio
Aquí simplifico este paso y pongo sólo el factor que ya sé que es raíz:

$P(X) \;=\; 9X^2 – 4$
Para poder aplicar teorema del resto en polinomios en los que el coeficiente principal es distinto de "1" debo hacer factor común del polinomio hasta que el coeficiente principal sea "1"
$P(X) \;=\; 9X^2 – 4 \;\Rightarrow\; P(X) \;=\; 9\,(X^2 – 4/9)$

Ahora sí, verifico:
Para $(X–2/3)$ ⇨ Resto $= 9 \,.\, [(2/3)^2 – 4/9] = 0$ ⇨ Como el resto es 0, es divisible por $(X–2/3)$ ⇨ $2/3$ es raíz

4º Paso: Como ya sé que el polinomio $P(X) = 9X^2 – 4$ es divisible por $(X–2/3)$, ahora sólo resta dividirlo por este binomio, en parte para verificar que efectivamente sea raíz y en parte para poder saber cuáles son sus factores primos.

Entonces: Vamos a dividirlo por $(X–2/3)$

Recordemos que debemos aplicar ruffini al polinomio que tiene coeficiente principal "1"

	1	0	– 4/9
2/3		2/3	+ 4/9
	1	2/3	+ 0

Me dio de resultado:
$X + 2/3$

5º Paso: Ahora sí, escribo el polinomio factorizado

Entonces $P(x) \;=\; 9X^2 – 4 \;=\; 9\,(X^2 – 4/3) \;=\; 9 \,.\, (X – 2/3) \,.\, (X + 2/3)$

<u>Caso Especial – Trinomios de la forma:</u> $x^{2n}+bx^n+c$

Este es un caso especial que merece tratamiento aparte: Si bien con estos polinomios podemos aplicar ruffini correctamente, hay un método un poco más sencillo y directo.

Debemos descomponer el coeficiente "b" en dos términos "b_1" y "b_2" que sumados den "b" y multiplicados den "c" Y luego escribimos un producto de binomios con los factores en los que descompusimos "b".
Los binomios serán entonces "x^n+b_1" y "x^n+b_2"

Ejemplo: $P(x) = x^{26} + 19x^{13} + 34$
Descomponemos "b" en: +17 + 2
Y escribimos el polinomio factorizado como: $P(x) = x^{26} + 19x^{13} + 34 = (x^{13} + 17) \,.\, (x^{13} + 2)$

Otro Ejemplo: $P(x) = x^2 + 2x – 15$
Como "c" es negativo Descomponemos "b" en un factor positivo y uno negativo: +5 y –3
Y escribimos el polinomio factorizado como: $P(x) = x^2 + 2x – 15 = (x + 5) \,.\, (x – 3)$

Factorear los siguientes polinomios, buscando los binomios por los cuáles son divisibles.
Aplicar el método de Gauss.

1) $2X^2+5X+3$
2) X^2-X-6
3) X^3+6X^2+3X-2
4) X^3+4X^2-7X+2
5) X^3+3X^2+X+3
6) X^3-2X^2+3X-6
7) $3X^2-4X-4$
8) $3X^2-7X-6$
9) X^3+X^2-4X-4
10) $X^3+6X^2+11X+6$
11) X^3-7X+6
12) X^3+2X^2-5X-6
13) $X^4+X^3-7X^2-X+6$
14) $X^4+4X^3-9X^2-16X+20$
15) $2X^5+5X^4-5X^3-16X^2-12X$
16) $X^4+7X^3-20X^2-75X-84$
17) $X^4+6X^3+3X^2-26X-24$
18) $X^4+10X^3+27X^2+2X-40$

Factorear los siguientes trinomios cuadrados perfectos utilizando ruffini:

19) X^2+6X+9
20) X^2-6X+9
21) $X^2-12X+36$
22) $X^2-6a+9a^2$
23) $4X^2+4x+1$
24) $4X^2-4x+1$
25) $X^2+10x+25$
26) $X^2-10x+25$
27) $9X^2-42x+49$

Factorear las siguientes diferencias de cuadrados utilizando ruffini:
(En los casos en que se pueda volver a factorear, es decir que se puedan extraer sucesivas raíces, hacerlo)

28) $9X^2-49$
29) X^2-1
30) X^4-1
31) $4X^2-9$
32) $9X^2-1$
33) X^4-16
34) $16X^4-1$
35) X^2-100

Factorear los siguientes cuadrinomios cubos perfectos, utilizando ruffini:

36) $X^3+6x^2+12x+8$
37) $X^3-6x^2+12x-8$
38) $X^3+6ax^2+12a^2x+8a^3$
39) $X^3-9x^2+27x-27$
40) $8X^3+12x^2+6x+1$
41) $8X^3-36x^2+54x-27$

Factorear los siguientes binomios, utilizando ruffini:

42) X^3+1
43) X^3-1
44) X^3-8
45) $8X^3-1$
46) X^5+1
47) X^5-1
48) X^5-32
49) $27X^3-1$

Factorear los siguientes polinomios de raíces múltiples, utilizando ruffini
(Ojo que con raíces múltiples, algunas raíces se repiten y otras no)

50) X^3+X^2-X-1
51) $X^3+7X^2+16X+12$
52) $X^3+X^2-8X-12$
53) $X^3-X^2-8X+12$
54) $X^3-7X^2+16X+12$
55) X^4+2X^3-2X-1

Factorear los siguientes polinomios, la regla práctica para estos casos:
(Si siguen apareciendo raíces racionales o enteras volver a factorizar)

56) $X^2+11X+28$
57) X^8+11X^4+28
58) $X^{20}+11X^{10}+28$
59) X^2+X-20
60) X^4+X^2-20
61) X^6+X^3-20
62) X^2-3X-4
63) X^4-3X^2-4
64) X^6+7X^3-8

Ediciones Logikamente

Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Vectores

Número de Tema: **82**

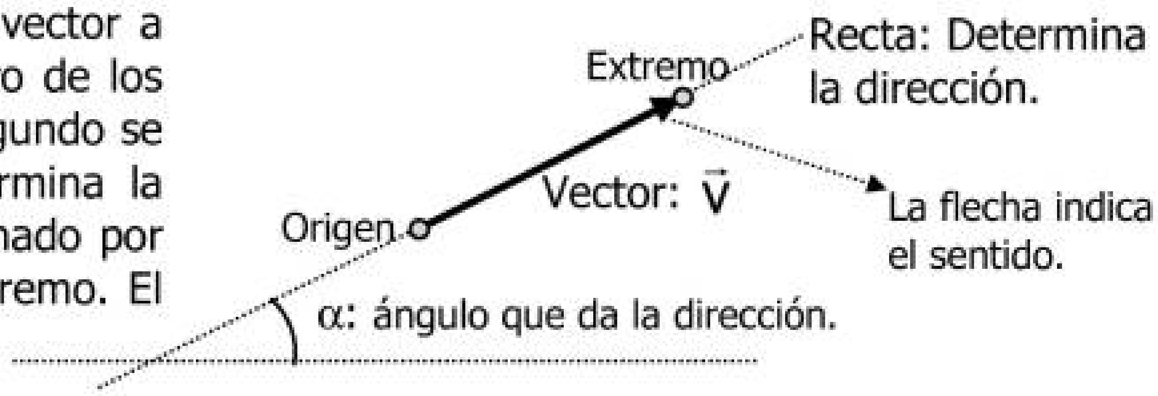
Área: **Matemática**

Vectores: Comenzaremos definiendo a los elementos del vector

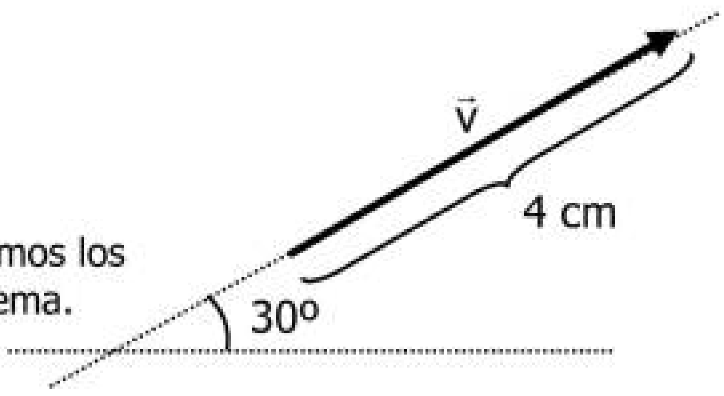
- ✓ Punto de aplicación: Es el punto de inicio del vector.
- ✓ Norma: También llamado módulo, es la longitud del vector.
- ✓ Dirección: Definida generalmente por un ángulo, define la recta de acción del vector.
- ✓ Sentido: Indica hacia qué lado de la recta de acción apunta el vector.

Desde el punto de vista físico, el vector es un tipo de magnitud, y de hecho, los vectores son muy utilizados en la física para definir muchas magnitudes que no son escalares y se definen mediante vectores, tal es el ejemplo de la fuerza, por ejemplo, la fuerza peso, tiene todos los elementos de un vector, el punto de aplicación es el centro de gravedad del cuerpo, la norma o módulo es el valor en sí, por ejemplo 60 kilogramos fuerza, la dirección es vertical respecto de la superficie de la tierra y el sentido es de atracción respecto también de la tierra, con esto definimos una magnitud vectorial a través justamente de un vector, este es el campo de aplicación más fuerte de los vectores, sin embargo en esta unidad nos vamos a concentrar en los movimientos en el plano, que también tienen grandes aplicaciones en las ramas de la física: cinemática y dinámica. Por ello vamos a definir a los vectores desde el punto de vista geométrico.

Definición Geométrica de Vector: Se llama vector a todo segmento orientado en el plano. El primero de los puntos que lo determina se llama origen y el segundo se llama extremo. La recta que lo contiene determina la dirección y por último el sentido queda determinado por la orientación sobre la recta según origen y extremo. El módulo es la distancia entre origen y extremo:

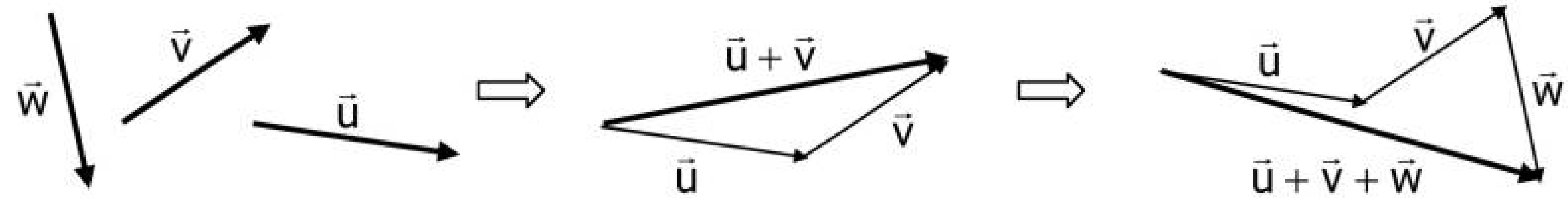


Ejemplo: Vemos a continuación un vector cuyo módulo es 4cm, y una inclinación de 30º con respecto a la horizontal.

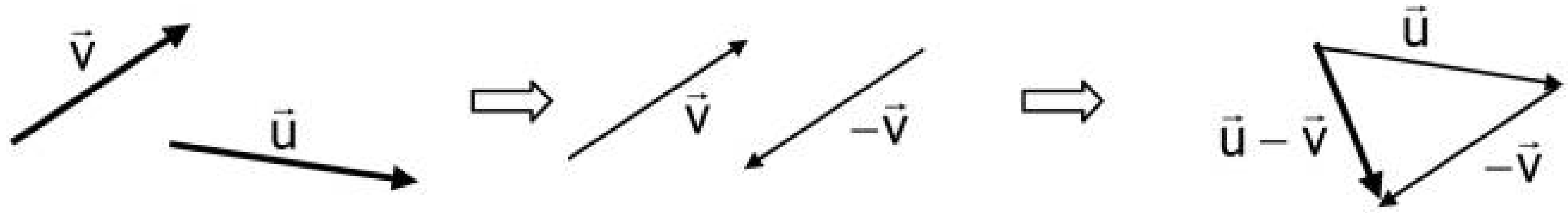


Comentario respecto del punto de aplicación: De ahora en adelante, obviaremos los detalles referidos al punto de aplicación para simplificar el estudio de cada tema.

Suma de vectores: Para sumar dos vectores, los dibujamos uno a continuación de otro, es decir en el extremo del primero lo unimos con el origen del segundo vector a sumar, y luego la resultante de la suma de ambos es el vector definido como el origen del primero hasta el extremo del segundo:

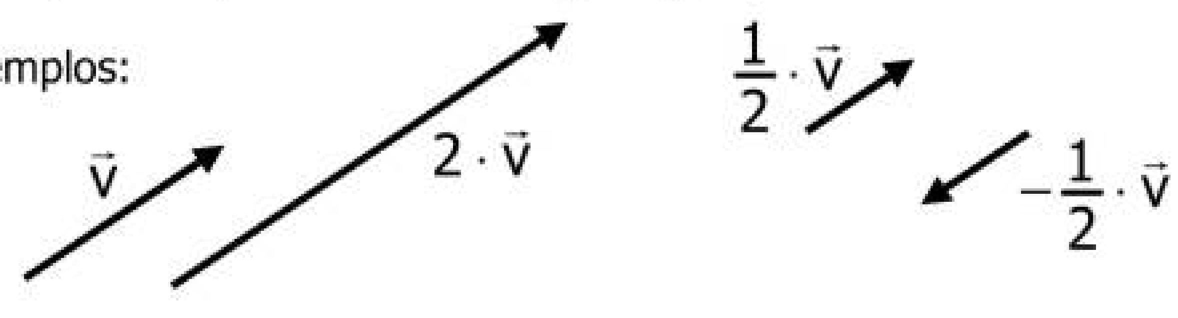


Resta de vectores: El proceso para restar vectores es muy similar al de la suma, es mas, plantearemos la resta como una suma algebraica, es decir que al elemento que está restando, en este caso al vector que está restando, lo cambiaremos de signo y lo sumamos. ¿Pero como "cambio de signo" a un vector? "Cambiar de signo a un vector" es cambiar su sentido, es decir cambiar la flecha, o cambiar origen con extremo del vector. Veamos un ejemplo:



Producto de un Vector por un escalar: Cuando multiplicamos a un vector por un escalar, lo único que se modifica de los elementos del vector, es el módulo, que resulta multiplicado por el escalar. Cuando multiplicamos por un escalar negativo, cambia también el sentido.

Ejemplos:



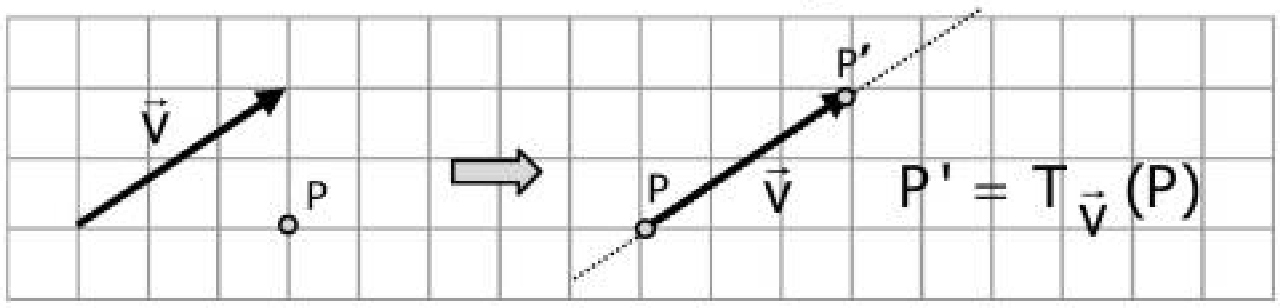
Aclaración: Escribimos todos los vectores separados del punto origen del primer vector para simplificar su visualización.

Movimientos en el Plano: **Traslación**

Traslación del punto en el plano: Se define como traslación de un punto en el plano, al movimiento de un punto de acuerdo a la dirección, módulo y sentido de un vector llamado vector traslación.

Ejemplo, aplicaremos al punto P una traslación según el vector $\vec{v}$

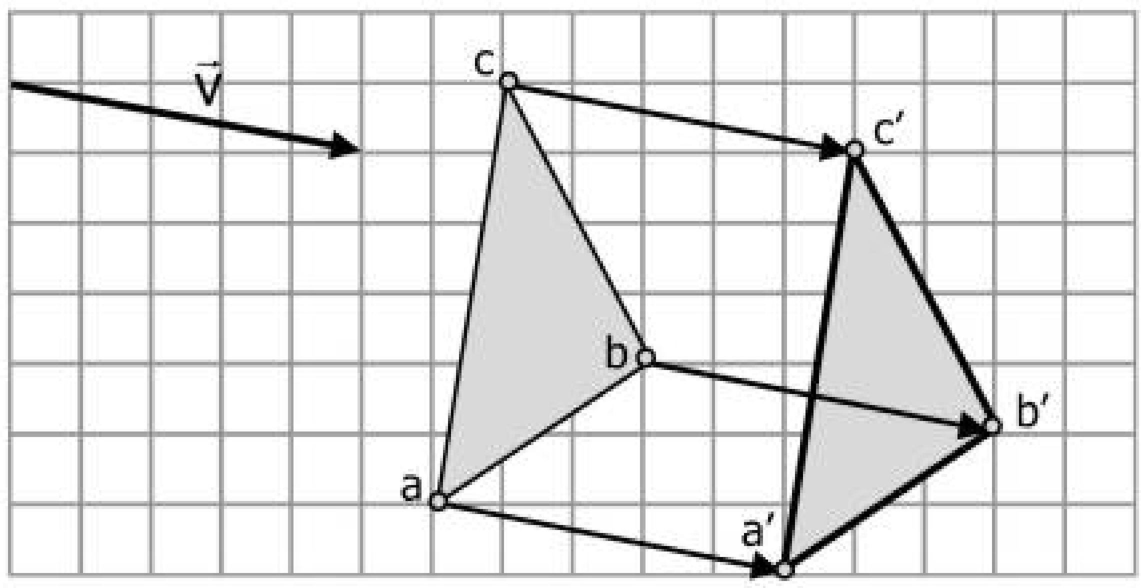
Notación, denominaremos a esta operación de traslación como: $T_{\vec{v}}(P)$



En este otro ejemplo, aplicamos la traslación a un triángulo abc, con lo cual, será suficiente aplicar la traslación a cada uno de los vértices del triángulo.

$$\overset{\triangle}{a'b'c'} = T_{\vec{v}}(\overset{\triangle}{abc})$$

En realidad se trasladan todos los puntos del triángulo, simplemente trasladamos sólo los vértices porque es suficiente para realizar gráficamente la traslación.



Rotación:

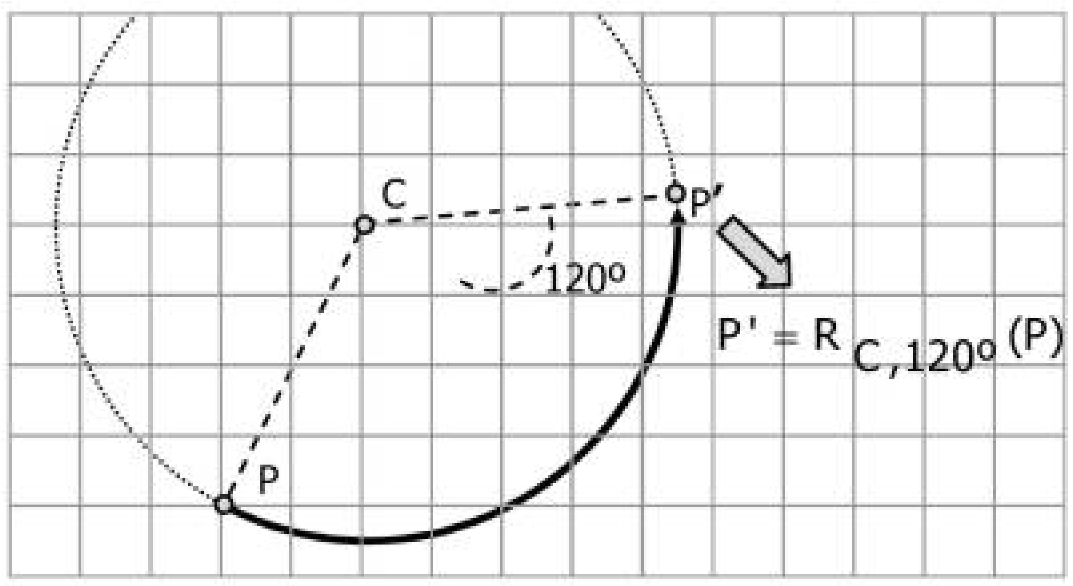
Rotación de un punto en el plano: Se define como rotación de un punto en el plano, al movimiento circular del punto respecto de un centro de giro y un ángulo de rotación.

Importante: Se toma como sentido de giro positivo al sentido Anti-Horario

Ejemplo: Aplicaremos al punto P una rotación con centro de giro en "C" con un ángulo de rotación de 120º

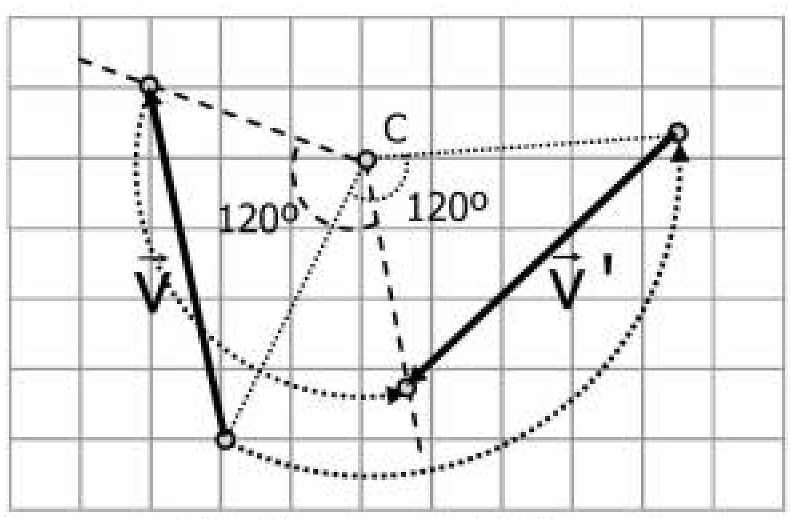
Y de la misma manera que rotamos un punto, podemos rotar, por ejemplo un cuadrado, será suficiente aplicando la misma rotación a los cuatro vértices del cuadrado.

O podemos rotar un vector, aplicando la rotación al punto origen y al punto extremo del vector, como vemos en el ejemplo a continuación.



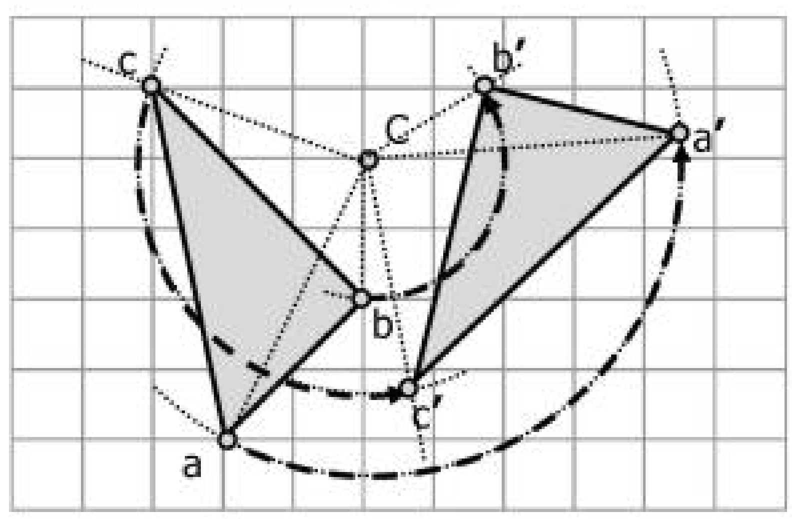
Más ejemplos:

Rotación de un vector:



$\vec{v}\,' = R_{C,120º}(\vec{v})$

Rotación de una figura



$$\overset{\triangle}{a'b'c'} = R_{C,120º}(\overset{\triangle}{abc})$$

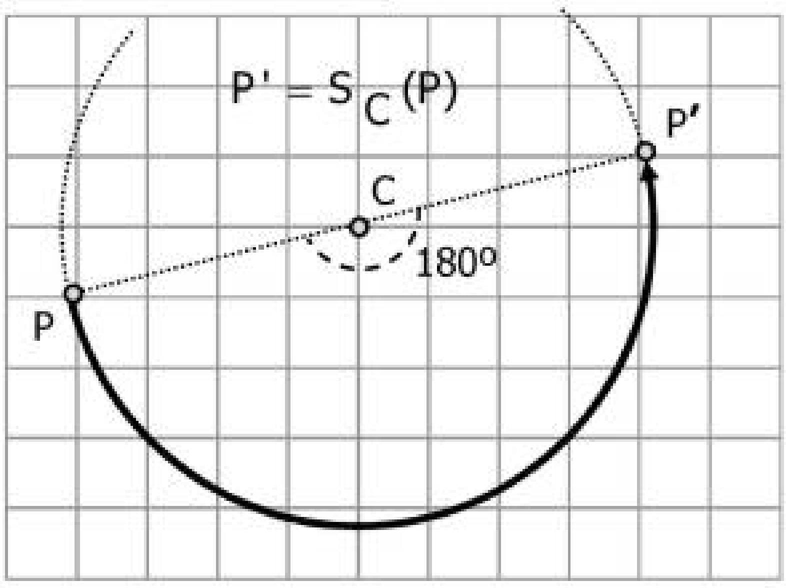
Simetría Central: Se llama así a la simetría respecto de un punto que se denomina "centro" de la simetría.

La Simetría Central como una Rotación: Realizar la simetría de un punto "P" respecto de un centro "C" es realizar una rotación del punto "P" respecto del centro "C" con un ángulo de rotación de 180º. Realizar la simetría central de una figura, es realizar la simetría central de todos los puntos que componen la figura.

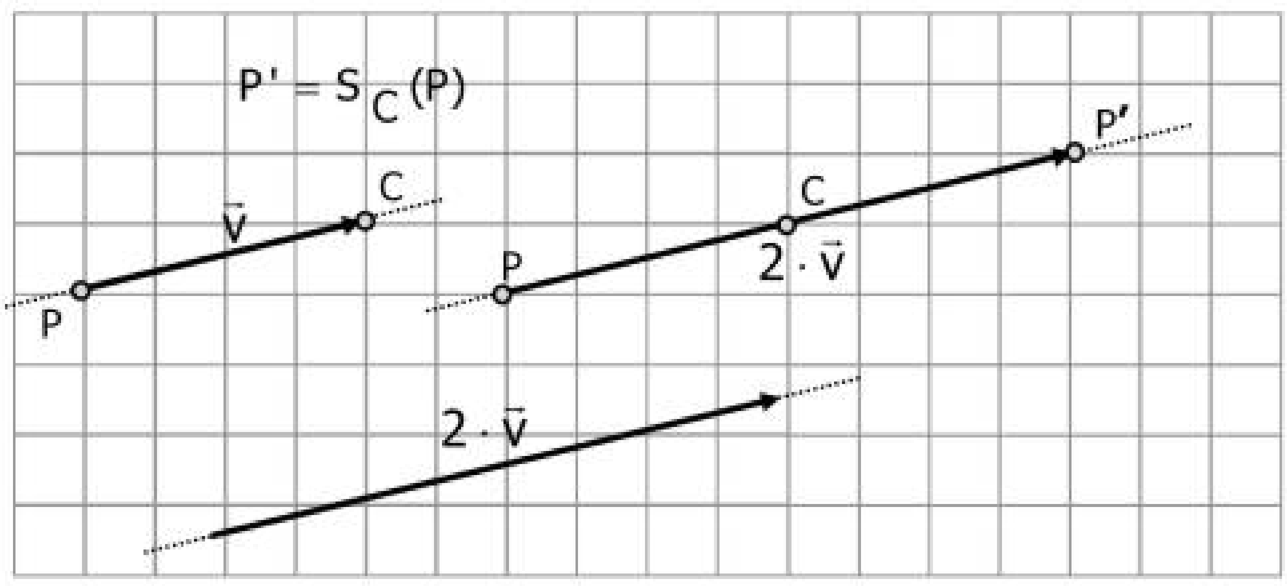
La Simetría Central de un punto como una Traslación: Realizar la simetría de un punto "P" respecto de un centro "C" es realizar una traslación del punto "P" respecto del vector "2 . **v**" siendo el vector "v" el que tiene origen en "P" y extremo en "C".

Ejemplo: Realicemos la simetría del punto "P" respecto del centro "C"

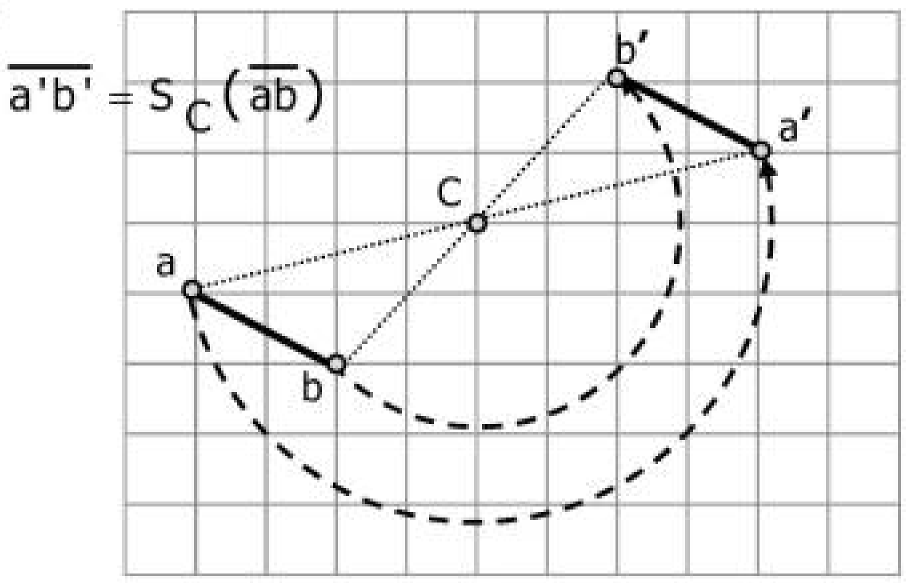
Como una rotación:

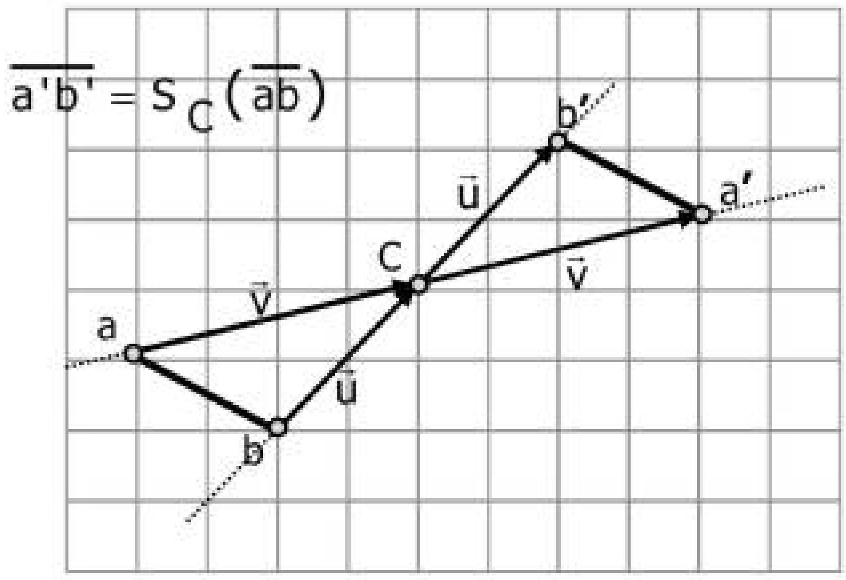


Como una Traslación:



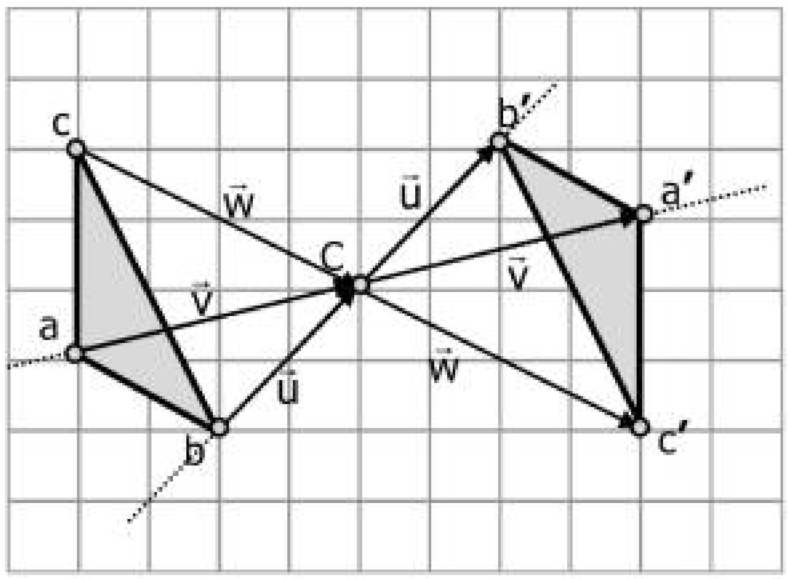
De la misma manera podemos realizar la Simetría de un segmento respecto de un centro "C"
En el caso de la simetría de un segmento, basta con realizar la simetría de los puntos extremos del segmento y luego redefinir al segmento imagen de esa simetría.
Ejemplo:





Veamos ahora como ejemplo, la simetría central respecto del centro "C", de una figura, en este caso un triángulo abc.

$$\overset{\triangle}{a'b'c'} = S_C(\overset{\triangle}{abc})$$



Simetría Axial: Se define la simetría axial, como la simetría respecto de un eje o una recta.

Definición de simetría axial de un punto: Dado un punto "P" y una recta "R", el punto " P ' " será simétrico axialmente a "P" respecto de la recta "R" si su distancia a la recta "R" es la misma que la distancia del punto "P" a dicha recta.

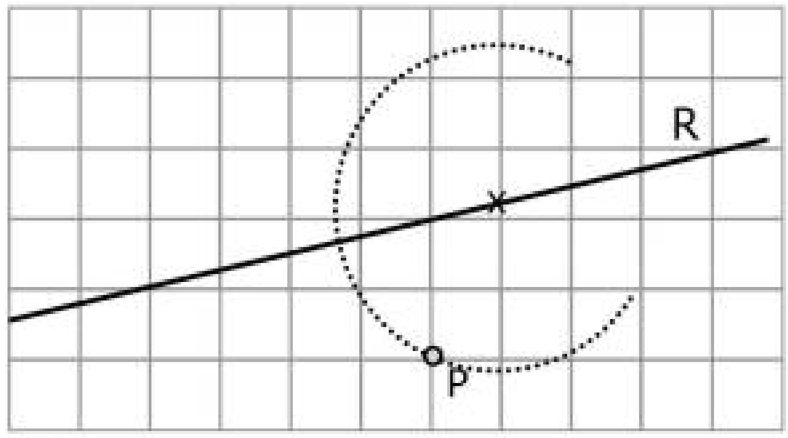
Método Geométrico de trazar puntos simétricos respecto de rectas: Hay muchas formas geométricas de realizar este procedimiento, pero veremos a continuación sólo la manera más directa de hacerlo que es mediante el uso del compás.

Método Geométrico de trazar puntos simétricos respecto de rectas

Para determinar el punto P ′ que sea simétrico al punto "P" respecto de la recta "R", debemos trazar una recta perpendicular a "R" que pase por el punto "P" y marcar el punto P ′ , del otro lado de la recta a la misma distancia que se encontraba el punto "P". Pero ¿Cómo hago todo eso?

Vamos a hacerlo por pasos

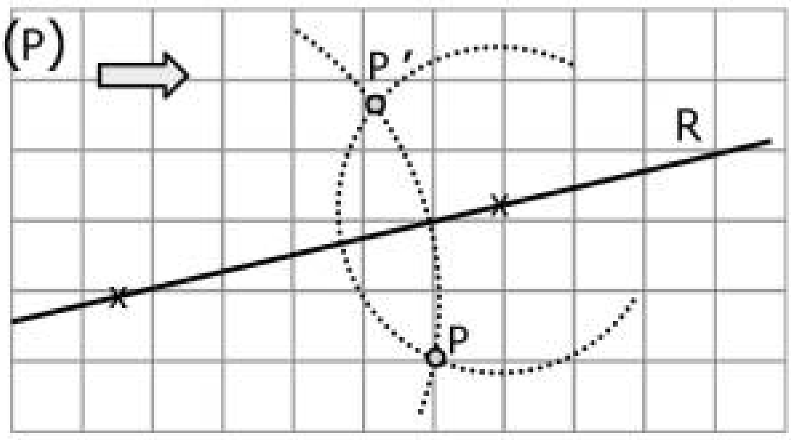
1) Debemos tomar un compás y apoyar como centro en cualquier punto de la recta "R" (lo marcamos como "x"), luego trazar un arco que pase de lado a lado de la recta.



2) Luego tomamos nuevamente el compás y apoyamos como centro en otro punto de la recta "R", y trazamos otro arco que pase de lado a lado de la recta.

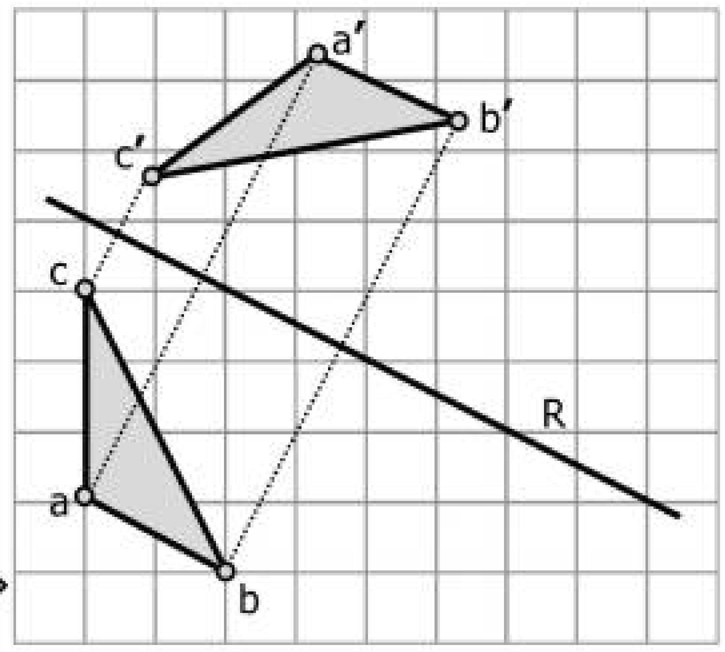
3) Una vez hechos los dos arcos, la intersección de ambos al otro lado de la recta es la ubicación del punto simétrico a "P" respecto de la recta "R" y lo podemos marcar.

$P' = S_R(P)$

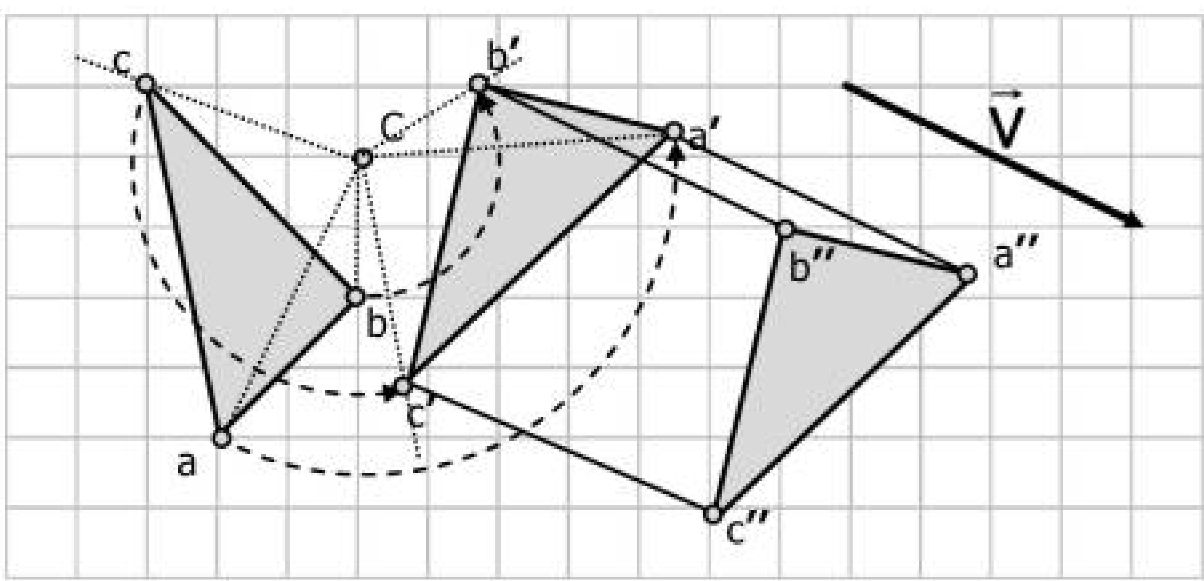


Análogamente a lo que venimos viendo con los otros movimientos, se puede hacer una simetría axial de una figura respecto de una recta, haciendo la simetría de los puntos que son vértices de la figura. Aunque tiene que seguir quedando claro que la simetría axial de una figura respecto de una recta es la simetría axial de TODOS sus puntos respecto de la recta. Veamos unos ejemplos de simetrías axiales de figuras respecto de rectas:

$\overset{\triangle}{a'b'c'} = S_R(\overset{\triangle}{abc})$

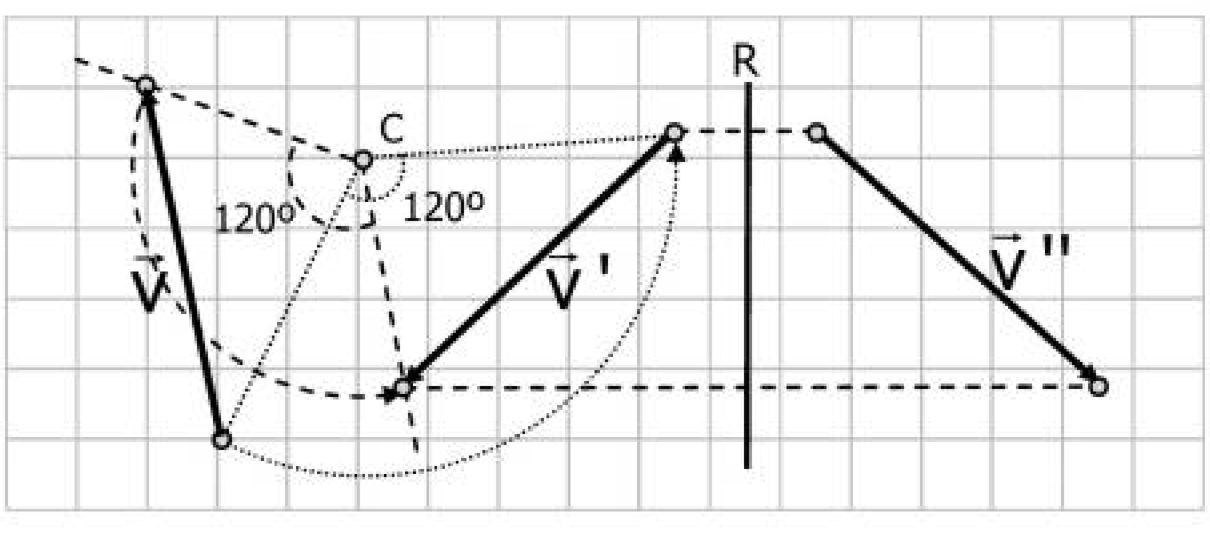


Movimientos Compuestos en el plano: Así como vimos cada movimiento del punto en el plano por separado, podemos combinar estos movimientos simples en movimientos compuestos, aplicando distintos tipos de movimientos sucesivos. A continuación veremos algunos ejemplos graficados y resueltos con su notación.



$$\begin{cases} \overset{\triangle}{a'b'c'} = R_{C,120^o}(\overset{\triangle}{abc}) \\ \overset{\triangle}{a''b''c''} = T_{\vec{v}}(\overset{\triangle}{a'b'c'}) \end{cases}$$

$$\overset{\triangle}{a''b''c''} = T_{\vec{v}} \circ R_{C,120^o}(\overset{\triangle}{abc})$$

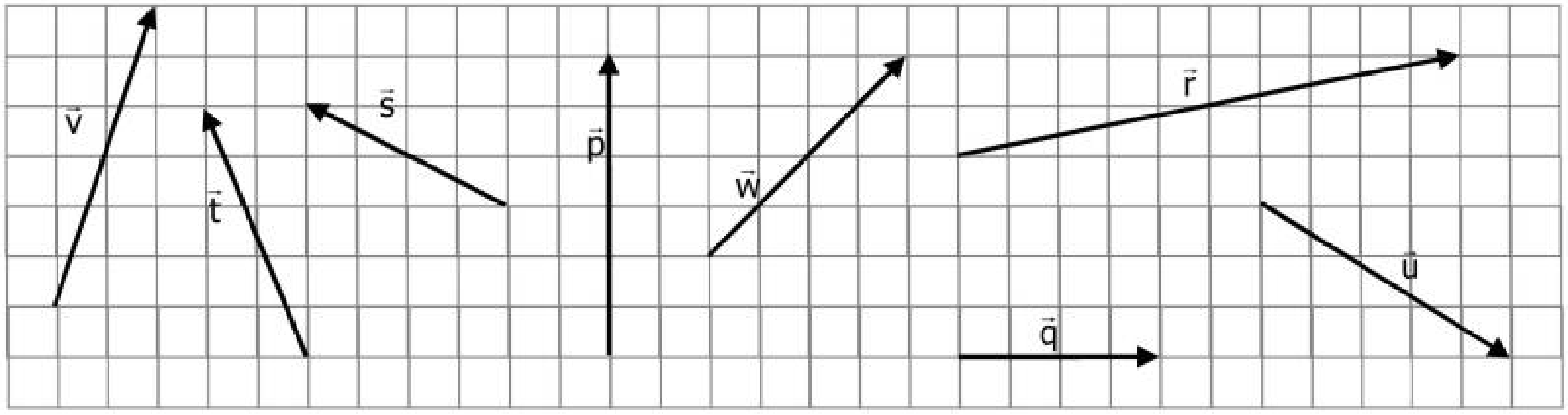


$$\begin{cases} \vec{v}'' = S_R(\vec{v}') \\ \vec{v}' = R_{C,120^o}(\vec{v}) \end{cases}$$

$$\vec{v}'' = S_R \circ R_{C,120^o}(\vec{v})$$

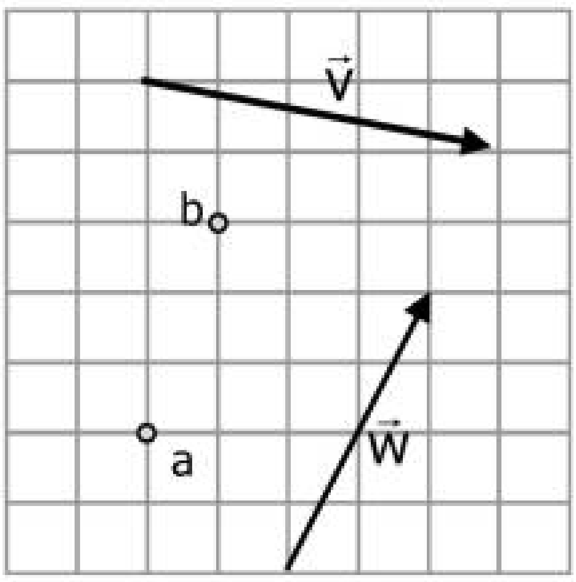
by Dal-Or
para
TARINGA!

Copiar a escala en hoja cuadriculada los vectores y realizar en gráficos separados las siguientes operaciones (Suponiendo que los vectores son concurrentes):

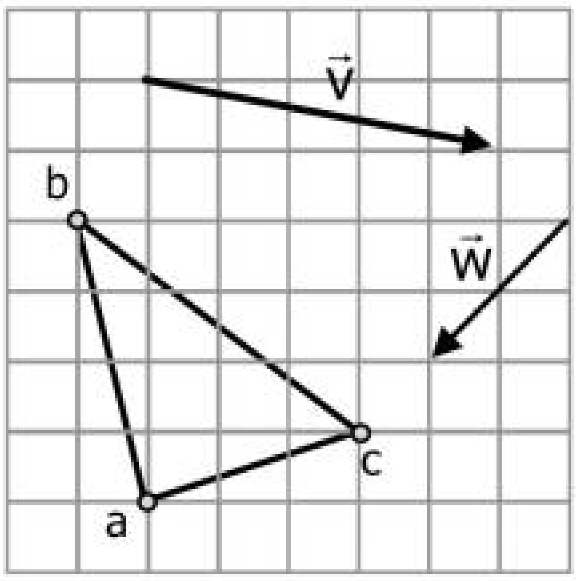


1) $\vec{v}+\vec{s}$
2) $\vec{v}+\vec{u}$
3) $\vec{v}+\vec{q}$
4) $\vec{v}+\vec{r}$
5) $\vec{s}+\vec{q}$
6) $\vec{p}+\vec{w}$
7) $\vec{p}+\vec{u}$
8) $\vec{p}-\vec{u}$
9) $\vec{w}-\vec{q}$
10) $\vec{s}-\vec{p}$
11) $\vec{v}-\vec{u}$
12) $\vec{u}-\vec{v}$
13) $\vec{r}-\vec{s}$
14) $\vec{s}-\vec{r}$
15) $2\cdot\vec{r}$
16) $3\cdot\vec{s}$
17) $3\cdot\vec{u}$
18) $-2\cdot\vec{u}$
19) $-\vec{q}$
20) $-2\cdot\vec{t}$
21) $-\cdot\vec{p}$
22) $\vec{v}+\vec{t}+\vec{r}$
23) $\vec{p}+\vec{r}+\vec{w}$
24) $\vec{s}+\vec{q}-\vec{r}$
25) $\vec{r}+\vec{w}-\vec{s}$
26) $-\vec{s}-\vec{v}+\vec{q}$
27) $-\vec{s}-(\vec{v}+\vec{q})$
28) $-(\vec{s}-\vec{v})+\vec{q}$
29) $-\vec{w}+\vec{s}+2\cdot\vec{r}$
30) $\vec{q}-3\cdot\vec{s}+2\cdot\vec{v}$
31) $-2\cdot\vec{s}+3\cdot(\vec{p}-\vec{r})$
32) $\vec{t}+\vec{u}-2\cdot\vec{s}+\vec{p}$
33) $\vec{v}+\vec{u}+\vec{s}+\vec{p}$
34) $(\vec{v}+\vec{u})-2\cdot\vec{w}$
35) $-\left(\vec{v}+2\cdot\vec{t}\right)-\vec{r}+3\cdot\vec{w}$

Copiar a escala en hoja cuadriculada los gráficos y realizar en gráficos separados las siguientes Traslaciones:

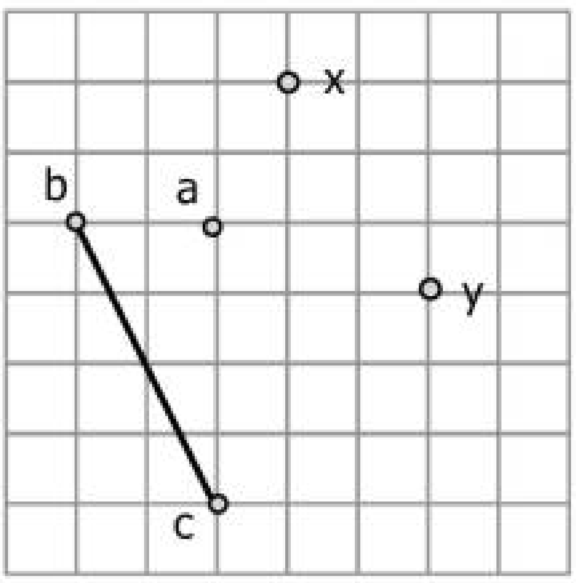


36) $T_{\vec{v}}(a)$
37) $T_{\vec{v}}(b)$
38) $T_{\vec{w}}(a)$
39) $T_{\vec{w}}(b)$
40) $T_{\vec{w}}(\vec{v})$
41) $T_{\vec{v}}(\vec{w})$

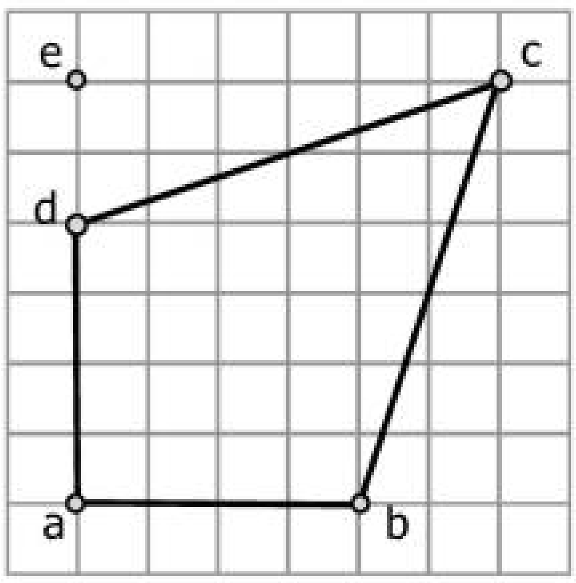


42) $T_{\vec{w}}(\overline{ab})$
43) $T_{\vec{v}}(\overline{bc})$
44) $T_{\vec{v}}(\overset{\triangle}{abc})$
45) $T_{\vec{w}}(\overset{\triangle}{abc})$
46) $T_{\vec{v}+\vec{w}}(\overset{\triangle}{abc})$

Copiar a escala en hoja cuadriculada los gráficos y realizar en gráficos separados las siguientes Rotaciones:



47) $R_{x,30^{o}}(a)$
48) $R_{x,180^{o}}(a)$
49) $R_{x,60^{o}}(\overline{bc})$
50) $R_{y,60^{o}}(\overline{bc})$
51) $R_{b,90^{o}}(\overline{bc})$



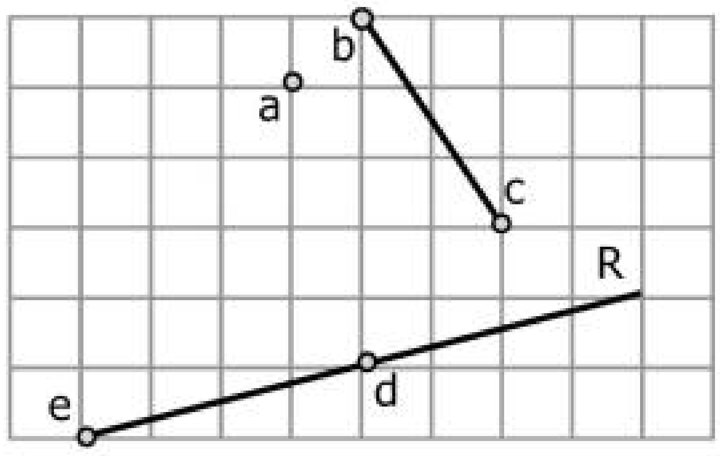
52) $R_{a,90^{o}}(\overset{\square}{abcd})$
53) $R_{c,90^{o}}(\overset{\square}{abcd})$
54) $R_{e,90^{o}}(\overset{\square}{abcd})$
55) $R_{d,180^{o}}(\overset{\square}{abcd})$

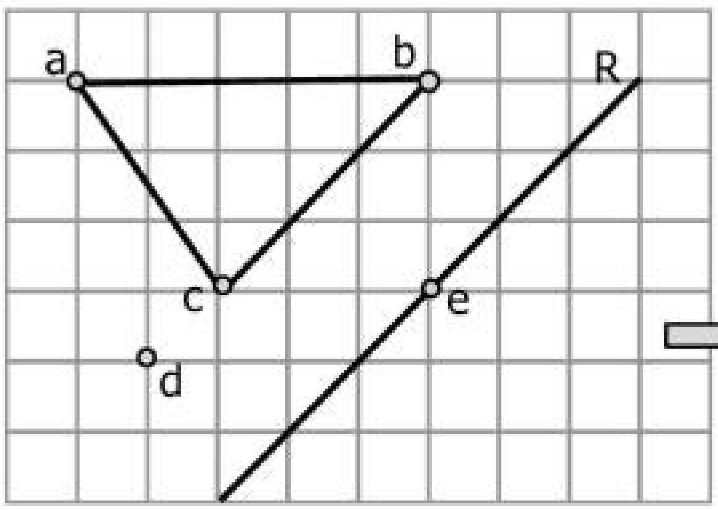
56) Si aplico una rotación a una determinada figura y tomo como centro de rotación uno de sus vértices ¿Se mueve el vértice que tomo como centro de rotación?

57) ¿Es cierto que si aplico a una figura una rotación, con un centro de rotación cualquiera fuera de la figura y un ángulo de rotación 360º la figura queda en el mismo lugar que al principio?

Copiar a escala en hoja cuadriculada los gráficos y realizar en gráficos separados las siguientes Simetrías:

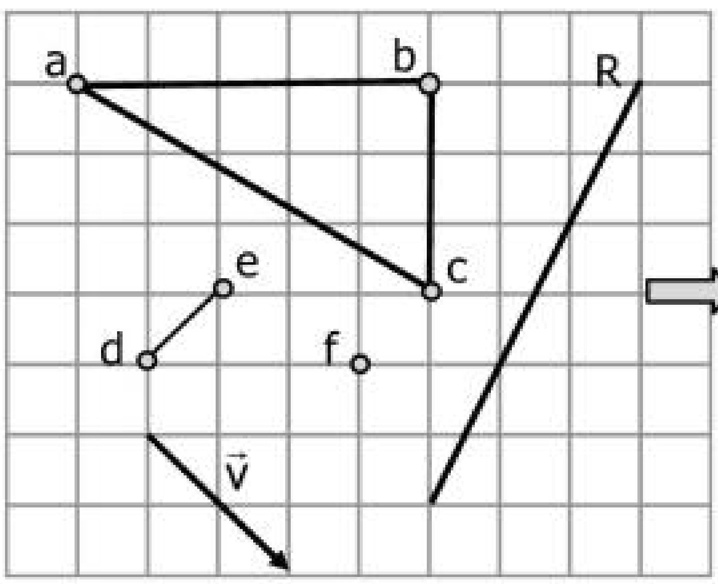
58) $S_d(a)$
59) $S_e(a)$
60) $S_R(a)$
61) $S_d(\overline{bc})$
62) $S_R(\overline{bc})$
63) $S_a(\overline{bc})$
64) $S_b(\overline{bc})$
65) $S_c(\overline{bc})$



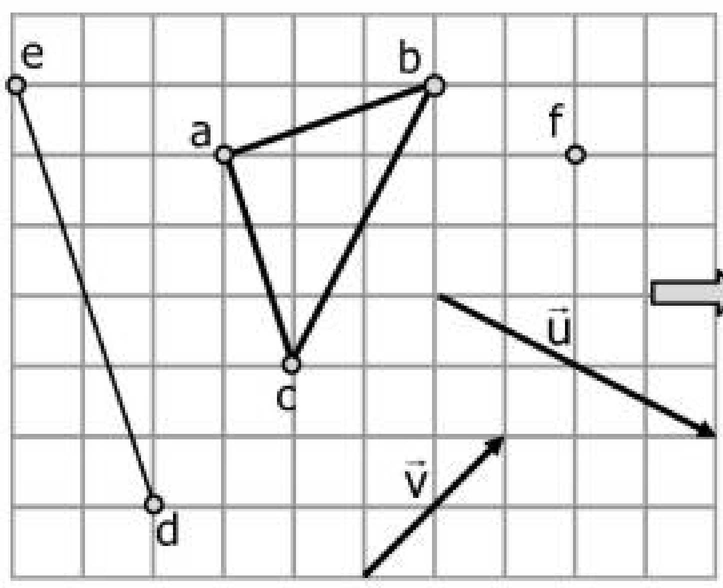


66) $S_e(d)$
67) $S_R(d)$
68) $S_e(c)$
69) $S_R(c)$
70) $S_d(\overset{\triangle}{abc})$
71) $S_c(\overset{\triangle}{abc})$
72) $S_e(\overset{\triangle}{abc})$
73) $S_e(\overset{\triangle}{abc})$
74) $S_e \circ S_c(d)$
75) $S_R \circ S_c(d)$
76) $S_R \circ S_c(a)$
77) $S_e \circ S_d(c)$

Copiar a escala en hoja cuadriculada los gráficos y realizar en gráficos separados los Movimientos:

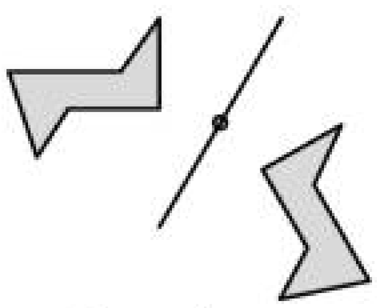


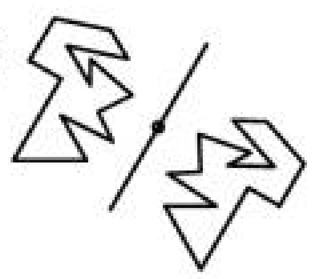
78) $T_{\vec v} \circ S_f(\overline{de})$
79) $T_{\vec v} \circ R_{f,30^\circ}(\overline{de})$
80) $S_f \circ T_{\vec v}(\overline{de})$
81) $R_{f,180^\circ} \circ T_{\vec v}(\overline{de})$
82) $T_{\vec v} \circ S_c(\overline{de})$
83) $T_{\vec v} \circ S_c(\overset{\triangle}{abc})$
84) $T_{\vec v} \circ R_{c,90^\circ}(\overset{\triangle}{abc})$
85) $R_{c,90^\circ} \circ T_{\vec v}(\overset{\triangle}{abc})$
86) $S_f \circ T_{\vec v}(\overset{\triangle}{abc})$
87) $T_{\vec v} \circ S_f(\overset{\triangle}{abc})$
88) $T_{\vec v} \circ S_a(\overset{\triangle}{abc})$
89) $S_a \circ T_{\vec v}(\overset{\triangle}{abc})$
90) $S_R \circ T_{\vec v}(\overline{de})$
91) $T_{\vec v} \circ S_R(\overset{\triangle}{abc})$
92) $S_c \circ S_R(\overset{\triangle}{abc})$

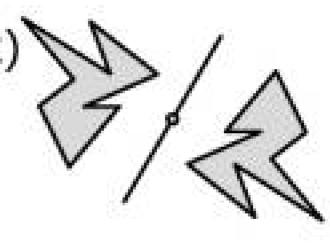


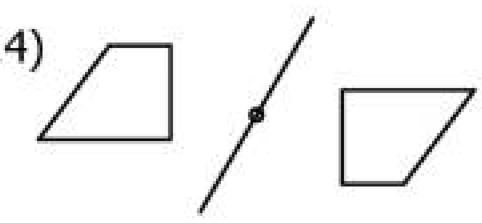
93) $T_{\vec v} \circ T_{\vec u}(\overline{de})$
94) $T_{\vec u} \circ R_{e,90^\circ}(\overline{de})$
95) $S_d \circ T_{\vec v}(\overline{de})$
96) $R_{f,90^\circ} \circ T_{\vec v}(\overline{de})$
97) $T_{\vec u} \circ S_c(\overline{de})$
98) $T_{\vec v} \circ S_a(\overset{\triangle}{abc})$
99) $T_{\vec u} \circ R_{c,60^\circ}(\overset{\triangle}{abc})$
100) $S_c \circ T_{\vec u}(\overset{\triangle}{abc})$
101) $S_f \circ T_{\vec u}(\overset{\triangle}{abc})$
102) $T_{\vec u} \circ T_{\vec v}(\overset{\triangle}{abc})$
103) $T_{\vec u} \circ S_a(\overset{\triangle}{abc})$
104) $S_a \circ T_{\vec u}(\overset{\triangle}{abc})$
105) $S_c \circ T_{\vec v}(\overline{de})$
106) $S_f \circ T_{\vec u}(\overset{\triangle}{abc})$
107) $S_f \circ T_{\vec v}(\overset{\triangle}{abc})$

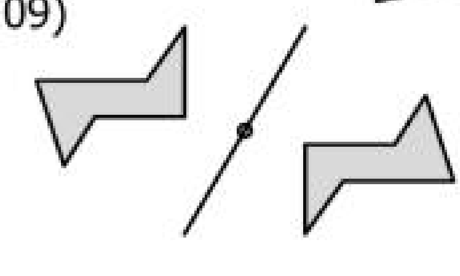
Decir cuáles de las siguientes representaciones corresponde a una simetría central respecto del punto marcado y cuáles a una simetría axial respecto de la recta:

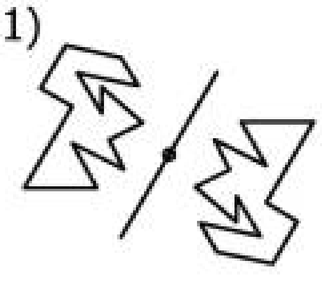
108) 

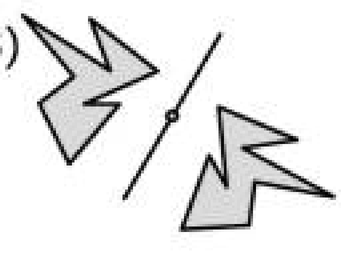
110) 

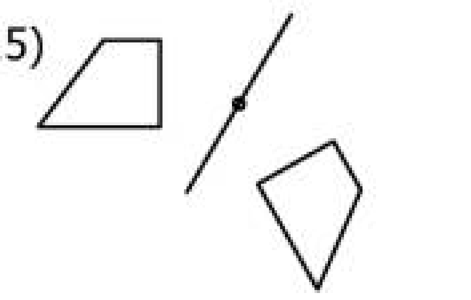
112) 

114) 

109) 

111) 

113) 

115) 

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Matrices

Número de Tema: **83**

Área: **Matemática**

★ Que es una matriz?

Llamaremos matriz de orden **m x n** a una "caja" o conjunto finito de valores numéricos independientes que están organizados en "**m**" cantidad de filas y "**n**" cantidad de columnas

Filas

$$\begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Columnas

El primer subíndice indica la fila y el segundo la columna.

<u>Veamos un ejemplo:</u> $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

Esta es una matriz de 2 filas y 3 columnas, se dice que es una matriz de 2x3

★ Igualdad de matrices

Se dice que dos matrices son iguales, cuando tienen igual cantidad de filas y columnas y cuando además el número que ocupa cada lugar en una matriz coincide con el que ocupa el lugar respectivo en la otra matriz.

O sea, dada una matriz A de orden mxn y una matriz B de orden mxn:

A=B siempre que para todo "i" y para todo "j" que $a_{ij} = b_{ij}$

Aclaración: Llamamos "i" al subíndice que indica el número de fila y "j" al subíndice que indica la columna.

★ Tipos de matrices

- **Matriz Fila**: Son las matrices de una sola fila y varias columnas
- **Matriz columna**: Son las matrices de una sola columna y varias filas
- **Matriz Nula**: Es una matriz de cualquier orden cuando todos sus elementos valen 0
- **Matriz Vertical**: Es una matriz que tiene mas filas que columnas $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
- **Matriz Horizontal**: En una matriz que tiene mas columnas que filas. $\longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **Matriz Cuadrada**: Tiene la misma cantidad de filas que de columnas: $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$
- **Matriz Opuesta**: Dada una matriz A, su matriz opuesta –A es aquella matriz del mismo orden cuyos elementos son iguales a los de A pero cambiados de signo

  Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

- **Matriz traspuesta**: Dada una matriz A_{ij} de orden mxn, la matriz traspuesta de A (llamémosla A^T) es una matriz para la cual se cumple $\mathbf{A^T = A_{ji}}$. Veámoslo en un ejemplo:

  $$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

  La traspuesta es una matriz que resulta de intercambiar filas por culmnas de la matriz original.

★ <u>Suma de Matrices</u>:

En primer lugar, aclaremos que se pueden sumar solamente matrices del mismo orden. Y la matriz que resulta de sumar dos matrices del mismo orden se forma en colocando en cada posición el número que resulta de sumar los números de ambas matrices en esa misma posición.

O sea, si: $\mathbf{A = (a_{(ij)})}$ **y** $\mathbf{B = (b_{(ij)})}$ $\quad \mathbf{A + B = (a_{(ij)} + b_{(ij)})}$

Ejemplo de Suma de Matrices: Dadas $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 1\\ 3 & 7\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}11 & 6\\ 5 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix} \Longrightarrow A+B=\begin{pmatrix}1+11 & 4+6\\ 2+5 & 1+1\\ 3+5 & 7+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 10\\ 7 & 2\\ 8 & 9\end{pmatrix}$

Propiedades de la suma de Matrices:

- Asociativa: A + (B + C) = (A+B) + C
- Conmutativa: A+B = B+A
- Existe elemento neutro: Y es la matriz nula
- Existe elemento opuesto: Dada una matriz A y su opuesta –A, la suma de ambas es igual a la matriz nula.

★ Resta de Matrices:

Es similar a la suma, solo que hay que restar los elementos de ambas matrices..

O esa, si: **A = (a $_{(ij)}$) y B = (b $_{(ij)}$)** **A - B = (a $_{(ij)}$ - b $_{(ij)}$)**

Ejemplo: Dadas $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 1\\ 3 & 7\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}11 & 6\\ 5 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix} \Longrightarrow A-B=\begin{pmatrix}1-11 & 4-6\\ 2-5 & 1-1\\ 3-5 & 7-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & -2\\ -3 & 0\\ -2 & 5\end{pmatrix}$

★ Producto de una Matriz por un escalar:

Cuando multiplico a una matriz por un valor numérico cualquiera, tengo que multiplicar a TODOS los elementos de la matriz por ese valor:
O sea, sea **A = (a $_{(ij)}$) = k . A = (k. a $_{(ij)}$)**

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 3 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow 3\,.\,A=\begin{pmatrix}(3\,.\,-1) & (3\,.\,4)\\ (3\,.\,3) & (3\,.\,-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -12\\ 9 & -6\end{pmatrix}$

★ Producto de Matrices:

- Producto de una matriz fila por una matriz columna

Este producto es posible siempre y cuando el número de columnas de la matriz fila sea igual al número de filas de la matriz columna.

Dadas las matrices
A -> Matriz fila, de orden mx1 A = (a(i))
B -> Matriz columna, de orden 1xm B = (b(j))

Se define al producto de ambas matrices AxB = $\sum_{i,j=1}^{n} a_i\, b_j$

Es la sumatoria de los productos de el primer elemento de A por el primer elemento de B, el segundo de A por el segundo de B, el tercero de A por el tercero de B... y así hasta terminar...

Ejemplo: Dadas A y B, vamos a calcular el producto AxB

$A = (2 \quad 5 \quad 8 \quad -1)$ $B=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 2\\ 5\end{pmatrix} \Longrightarrow AxB = 2\,.\,3 + 5\,.\,(-2) + 8\,.\,2 + (-1)\,.\,5 = 6-10+16-5 = 7$

> Por lo tanto el producto de una matriz fila y una matriz columna, cuyas cantidades de filas y columnas respectivamente sean iguales, da por resultado un número real.

Otro ejemplo:
$A = (1 \quad 0 \quad 2)$ $B=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix} \Longrightarrow AxB = 1\,.\,3 + 0\,.\,(-1) + 2\,.\,0 = 3+0+0 = 3$

- **Producto de una matriz mxn por otra matriz nxp**

Nota: Para multiplicar dos matrices, hay que tener en cuenta que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda, si no es así, no se pueden multiplicar.

La multiplicación de matrices, es engorrosa, en primer lugar el producto de una matriz mxn y una matriz nxp, va a dar por resultado una matriz mxp. Esta matriz mxp va a estar formada elementos que son el resultado de la sumatoria de los productos de "los elementos de las filas de la primera matriz por los elementos de las columnas de la segunda matriz"
De este modo si llamamos A a la primera matriz y B a la segunda matriz, la primera fila de AxB va a estar formada por los productos de la primera fila de A por cada una de las columnas de B. La segunda fila de AxB va a estar formada por los productos de la segunda fila de A por cada una de las columnas de B. LA tercera fila, por los productos de la tercera fila de A y cada columna de B, y así hasta terminar. Obviamente el número de filas de AxB va a ser igual al número de filas de A y el número de columnas de AxB va a ser igual al número de columnas de B.

Ejemplo, vamos a multiplicar una matriz A de 3x2 por otra matriz B de 2x4
El resultado va a ser una matriz de 3x4

Entonces:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \rightarrow \text{Fila 1} \\ \rightarrow \text{Fila 2} \\ \rightarrow \text{Fila 3} \end{array}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix} \Rightarrow B=\begin{array}{cccc} & \text{Columna 2} & & \text{Columna 4} \\ (B_1 & B_2 & B_3 & B_4) \\ \text{Columna 1} & & \text{Columna 3} & \end{array}$$

El producto de A por B va a ser igual a

$$AxB=\begin{pmatrix} A_1xB_1 & A_1xB_2 & A_1xB_3 & A_1xB_4 \\ A_2xB_1 & A_2xB_2 & A_2xB_3 & A_2xB_4 \\ A_3xB_1 & A_3xB_2 & A_3xB_3 & A_3xB_4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo con números:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow AxB=\begin{pmatrix} 12+12+10 & 27+2+40 \\ 4+42+0 & 9+7+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 69 \\ 46 & 16 \end{pmatrix}$$

★ **Matrices Cuadradas**

Dentro de las matrices cuadradas, vamos a encontrar algunas matrices "especiales" que vamos a clasificar aparte, por ahora vamos a ver los casos más simples:

- Diagonales: Son aquellas matrices en el que sus elementos son cero, excepto los elementos de su diagonal, que pueden ser cero o no. Ejemplos: $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

- Escalares: Son matrices en el que todos sus elementos, excepto los de las diagonales son cero y además se cumple que todos los elementos de las diagonales son iguales entre si. Ejemplos: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Matriz Identidad: son aquellas en las que los elementos de la diagonal son 1 y los demás cero. Esta matriz es muy especial y se usa mucho, por eso tiene nombre propio y se la llama I
  $I\ (2x2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I\ (3x3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Triangulares: Son las matrices en que todos los elementos que están "debajo" o "arriba" de la diagonal valen cero. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

- Simétricas: Son aquellas matrices para las que se cumple que sus traspuestas son iguales a ellas. O sea $A = A^t$
  Ejemplos: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A^t$ $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = B^t$

★ Propiedades Especiales de las matrices traspuestas:

- $(A^t)^t = A$ $\Longrightarrow$ **La traspuesta de la traspuesta de A es la misma matriz A**
- $(k.A)^t = k.\,A^t$ $\Longrightarrow$ **La traspuesta del producto de una matriz por un escalar, es igual al producto de la traspuesta de la matriz por el escalar.**
- $(A+B)^t = A^t + B^t$ $\Longrightarrow$ **La traspuesta de una suma de matrices es la suma de las traspuestas de dichas matrices.**
- $(A.B)^t = B^t\,.\,A^t$ $\Longrightarrow$ **La traspuesta de un producto de matrices es el producto de las traspuestas de dichas matrices, con el orden invertido.**

★ Determinante de una matriz Cuadrada:

- Determinante de una matriz de 2x2

En primer lugar vamos a estudiar que es el determinante de una matriz de 2x2 que es la mas fácil:

Dada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Determinante de la matriz A $\Rightarrow$ $|A| = a_{11}\,.\,a_{22} - a_{21}\,.\,a_{12}$

Es simple, hay que multiplicar cruzado y restar ambos valores..

- **Determinante de una matriz mxm**

Cuando tenemos una matriz de orden superior a 2x2, la manera de calcular el determinante es la siguiente:

1. Se toma la posición a_{11} y se elimina tanto el renglón como la columna de dicha posición
2. Se multiplica a_{11} por el determinante de la matriz que queda.
3. Y así sucesivamente con la posición a_{12} y luego con a_{13} hasta terminar con todas las columnas

__Nota__: Para la primera posición se toma a_{11} positiva, luego sería a_{12} negativa, a_{13} positiva y así alternadamente hasta terminar... En realidad las posiciones en las que la suma de sus subíndices (i+j) es par quedan positivas y las posiciones en las que esta suma es impar se multiplican por -1 o lo que es lo mismo se les cambia el signo. Por ejemplo A_{12} al ser 1+2=3 que es impar se multiplica por -1.

__Ejemplo__: Calculemos el determinante de A siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 2 & \cancel{6} & \cancel{-3} \\ \cancel{3} & -1 & 5 \\ \cancel{0} & 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \cancel{2} & 6 & \cancel{-3} \\ 3 & \cancel{-1} & 5 \\ 0 & \cancel{2} & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \cancel{2} & \cancel{6} & -3 \\ 3 & -1 & \cancel{5} \\ 0 & 2 & \cancel{1} \end{matrix}$$

$$|A| = +\ 2\,.\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} -\ 6\,.\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} +\ -3\,.\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow |A| = 2\cdot[\,(-1)\cdot 1 - 5\cdot 2\,] - 6\cdot[\,3\cdot 1 - 5\cdot 0\,] - 3\cdot[\,3\cdot 2 - (-1)\cdot 0\,]$$

$$\Longrightarrow |A| = 2\cdot[\,-1-10\,] - 6\cdot[\,3-0\,] - 3\cdot[\,6+0\,] = 2\cdot(-11) - 6\cdot 3 - 3\cdot 6 = -22-18-18$$

$$\Longrightarrow \boxed{|A| = -58}$$

➢ Hallar "k" Para que las Matrices A y B sean iguales:

1) $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ (k+1) & 5\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}1 & -k\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -2k+3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ (k+1)(k-1) & k\end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & -k\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

➢ Hallar "k" Para que las siguientes Matrices sean nulas:

5) $\begin{pmatrix}0 & k-3\end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix}k+1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix}k+2\\ k^2-4\end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix}0\\ k^2+2k+1\end{pmatrix}$

➢ Hallar "k" Para que las Matrices A y B sean opuestas:

9) $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & -(k-1)\\ k-2 & -2\end{pmatrix}$

10) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & k^2-6k-9\\ 13-2k & k^2-8k+9\end{pmatrix}$

➢ Hallar "k" Para que las Matrices A sea la traspuesta de B:

11) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & k+1 & 1\\ 3 & k-5 & k+2\end{pmatrix}$

12) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}k-2 & 4-k\\ k-1 & 5-k\end{pmatrix}$

➢ Hallar las Matrices traspuestas de:

13) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ 14) $\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$ 15) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ 16) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$

➢ Dadas las Matrices A B y C Hallar: $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

17) A + B
18) A – B
19) B – A
20) A – (B + C)
21) (A – B) + C
22) 3A + 2B
23) A + B – 3 C
24) 2A – B + 3C
25) 3B – 2A + C
26) 5A + 2B – 4C
27) –3A – 2B + 5C
28) 2A + B – 4C
29) 5A – 11B + 6C
30) A + 3B – C
31) 7A + 7B – 8C
32) A – B – C
33) 2A – 2B + 5C
34) 5A – 5B + 8C

35) ¿Qué deducción se puede sacar acerca de la propiedad conmutativa de la resta de matrices en función de las soluciones de los ejercicios número 18 y 19?

36) ¿Qué deducción se puede sacar acerca de la propiedad asociativa de la resta de matrices en función de las soluciones de los ejercicios número 20 y 21?

➢ Realizar los siguientes productos de Matrices:

37) $\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

38) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

39) $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

40) $\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$

41) $\begin{pmatrix}-1 & -2\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$

42) $\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}7 & 4 & 2\\ 2 & 5 & 2\end{pmatrix}$

43) $\begin{pmatrix}2 & -1\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

44) $\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$

45) $\begin{pmatrix}-3 & 2\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}5 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

- Más productos de Matrices:

46) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 48) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ 50) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 52) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

47) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 49) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 51) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 53) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

- Hallar "k" para que las siguientes matrices sean escalares:

54) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$ 55) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ k+1 & -3 \end{pmatrix}$ 56) $\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ k-7 & k^2-5k-3 \end{pmatrix}$ 57) $\begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ k & k+1 \end{pmatrix}$

- Hallar "k" para que las siguientes matrices sean triangulares:

58) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & k \\ -k^2 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 59) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2-1 \\ k^2 & 5 & k+1 \\ 2 & k & 1 \end{pmatrix}$ 60) $\begin{pmatrix} 2 & k & k \\ k^2-4 & 5 & k \\ k+2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 61) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 4 & 0 \\ -k & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Hallar "a" y "b" para que las siguientes matrices sean simétricas:

62) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 63) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ 64) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1-b & a \end{pmatrix}$ 65) $\begin{pmatrix} 2b+a & 5 \\ b+2 & a \end{pmatrix}$ 66) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 5 & 6 \\ 3 & b & 9 \end{pmatrix}$

67) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & a & b \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$ 68) $\begin{pmatrix} -1 & a+b & -1 \\ 2 & 2 & b-a \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 69) $\begin{pmatrix} a & a+b & a^2-1 \\ 3 & a & a \\ 3 & -2 & b \end{pmatrix}$ 70) $\begin{pmatrix} -a & -a^2 & a+b \\ -1 & a & -1 \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$

- Hallar X:

71) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ X & 4 \end{pmatrix}$ 72) $\begin{pmatrix} X-1 & 9 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}^t = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & X \end{pmatrix}$ 73) $\begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^t = X \cdot \begin{pmatrix} 7 & X \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

- 74) Verificar que se cumplan las siguientes propiedades con las matrices A y B dadas:

  - $(A+B)^t = A^t + B^t$
  - $(A.B)^t = B^t \cdot A^t$

$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

- Hallar el determinante de la matriz A:

75) $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ 78) $A = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ 81) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ 84) $A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

76) $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ 79) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$ 82) $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ 85) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

77) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$ 80) $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ 83) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ 86) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

- Hallar el determinante de las siguientes matrices de 3x3:

87) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ 90) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 93) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 8 & -3 & -7 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

88) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ 91) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 94) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

89) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & 7 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ 92) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -9 \end{pmatrix}$ 95) $\begin{pmatrix} -5 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

- 96) Hallar X sabiendo que el determinante de la matriz A vale 57:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -X & 8 \\ 6 & -7 & 5 \\ 7 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

- Sean A las siguientes matrices de 2x2, calcular el determinante de A y el determinante de A^2

97) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 99) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 101) $A = \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

98) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 100) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ 102) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

103) En función de lo calculado en el ejercicio anterior. ¿Se verifica que para las matrices de 2x2 el determinante de una matriz al cuadrado es el cuadrado del determinante de la matriz?

- Hallar el valor del determinante de las siguientes matrices de 4x4

104) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & 7 & 5 \\ -9 & 6 & -2 & 9 \\ -2 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ 108) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & -8 & 2 \\ 3 & -5 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ 112) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

105) $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & -2 & 7 \\ -8 & -3 & 9 & 4 \\ -3 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 109) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ 113) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & -6 & -4 & 3 \\ 1 & -7 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

106) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -4 & 5 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 9 & 7 \\ -5 & 9 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 110) $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 1 & 2 \\ 7 & 7 & 6 & 8 \\ 8 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ 114) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & -3 & -8 \\ 2 & 9 & -7 & 5 \\ 2 & -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

107) $\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & 3 \\ -4 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & 8 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ 111) $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 8 & 2 \\ -7 & -1 & -3 & -8 \\ 1 & 1 & -7 & 5 \\ 2 & -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ 115) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

116) Dada La Matriz "A" Hallar todos los valores de "**k**" para que el determinante "A^2" sea 1369

$$\left|A^2\right| = 1369 \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ \boldsymbol{k}-4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

117) Dada la matriz "A" y "A^2" Hallar "m" "n" "p" y "q" (Nota: Hay dos soluciones posibles)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} m+n & p\cdot q-n \\ p-q+n-m & m \end{pmatrix}$$

Hallar "x" con los datos dados en cada caso:

118) $A=\begin{pmatrix} 2 & x \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \quad |A| = -17$

119) $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ x & 2 \end{pmatrix} \quad |A| = 4$

120) $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \quad \frac{2}{5}|A| = 6$

121) $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \frac{-7}{13}|A| + x = 8$

122) $A^t=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ x & 4 \end{pmatrix} \quad \frac{5}{6}|A| - x = 12$

123) $A=\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 6 & x \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}\left|A^t\right| - x = 6$

124) $A=\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ x+3 & 2 \end{pmatrix} \quad |A| + 5x = 7$

125) $A=\begin{pmatrix} x+2 & -1 \\ x-4 & 3 \end{pmatrix} \quad |A| + \frac{1}{3}x = 2$

126) $A=\begin{pmatrix} x-7 & 6 \\ 2x+3 & -5 \end{pmatrix} \quad |A| + 13x = 1$

127) $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x+1 & x-2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad \frac{5}{13}|A| = x-8$

128) $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x-3 & \frac{1}{4}x+3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \frac{2}{7}|A| = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

129) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & x & -9 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{3}|A| = 3$

130) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & x \\ -2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}|A| = x$

131) $A=\begin{pmatrix} 5 & x & 7 \\ 4 & -2 & 6 \\ -5 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad 2|A| - \frac{1}{3}x = 9$

132) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 9 & 7 \\ -8 & 5 & 5 & 6 \\ -3 & 8 & 6 & \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad |A| = 4$

Decir cuales de las siguientes igualdades son ciertas y cuales son falsas:

133) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

134) $|A| = \left|A^t\right| \Leftrightarrow A \in \Re^{2x2}$

135) $|A| = \left|A^t\right| \Leftrightarrow A \in \Re^{3x3}$

136) $|5\cdot A| = 5\cdot|A| \Leftrightarrow A \in \Re^{2x2}$

137) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} d & e \\ f & g \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ c+f & d+g \end{pmatrix}^t$

138) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix}$

139) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} d & e \\ f & g \end{pmatrix}\right\}^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} d & e \\ f & g \end{pmatrix}^t$

En todos los casos las variables expresadas con letras minúsculas pertenecen al conjunto de los números reales.

Ediciones Logikamente
Libros de Matemática a medida

Título del Tema:

Cónicas

Número de Tema: **84**

Área: **Matemática**

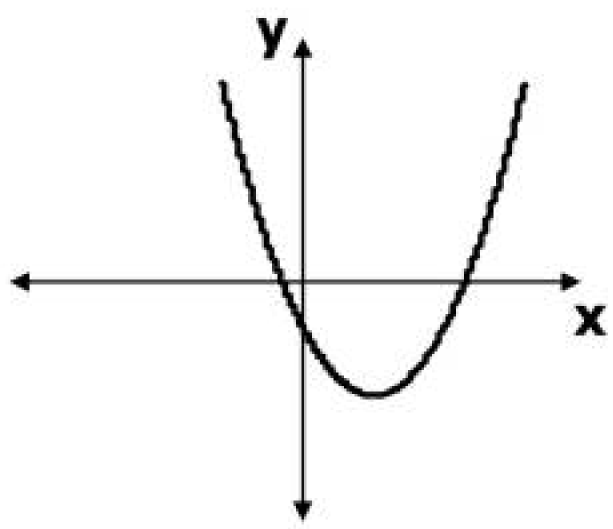
- **¿Qué es una cónica?** Se define como: *"El conjunto de puntos en el plano para los cuales la razón entre la distancia de los mismos a un punto (llamado FOCO) y la distnacia a una recta (llamada DIRECTRIZ) dan una constante (llamada "e" EXCENTRICIDAD)*

Vamos a verlo de otra manera:
Hay tres tipos de curvas que cumplen con la condición de las cónicas:

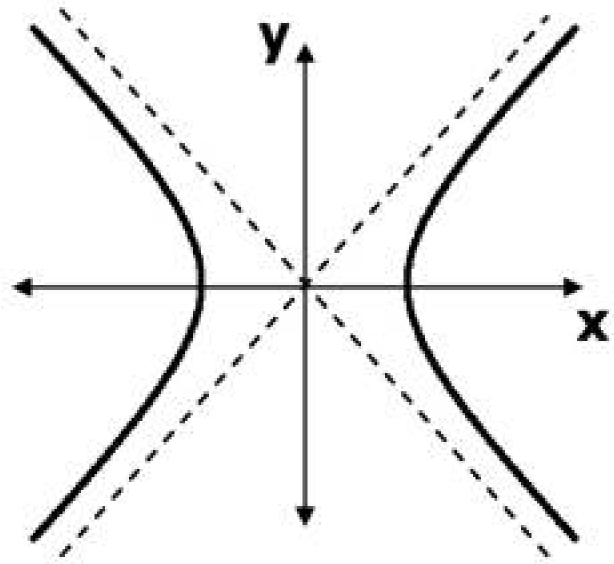
- **Parábola**
- **Hipérbola**
- **Elipse**

¿Y.... en qué se diferencian las cónicas?
Bueno en la EXCENTRICIDAD, veamos:

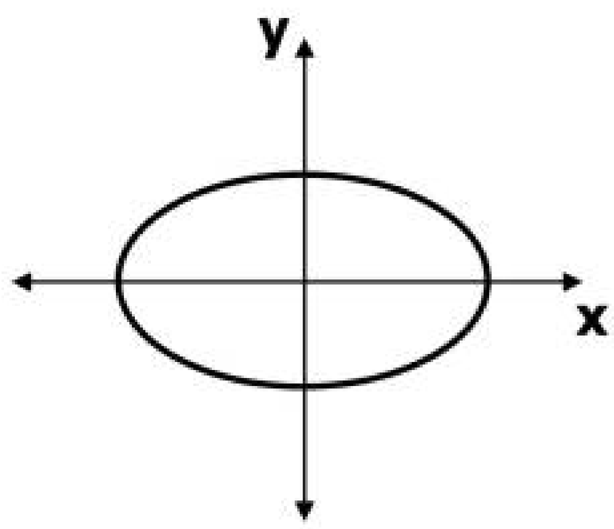
Parábola ⇓ **e = 1**



Hipérbola ⇓ **e > 1**



Elipse ⇓ **e < 1**



No se asusten, ahora las vamos a estudiar bien por separado.
(Nota: La Parábola no la tratamos en esta unidad porque hay una unidad entera de PARÁBOLAS)

Lo importante por ahora es que ya vayan sabiendo que *hay tres tipos de cónicas diferentes, que se llaman: "Parábola", "Hipérbola" y "Elipse".*
Y que una de las grandes diferencias entre ellas es el valor de su "Excentricidad"

✰ *Hipérbolas*

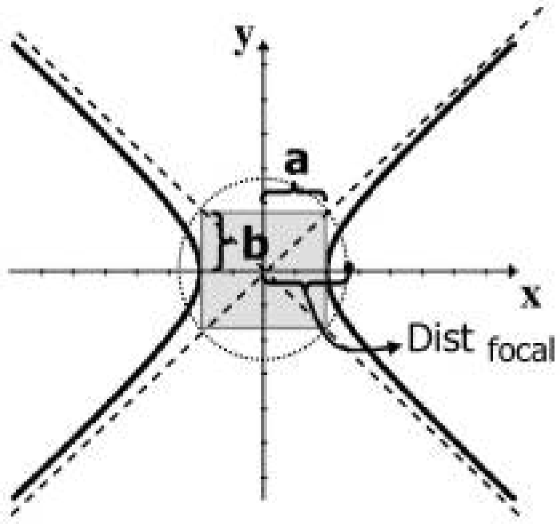
Fórmulas:

✰ *Eje Focal X*

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Dist}_{\text{focal}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$e = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}$$

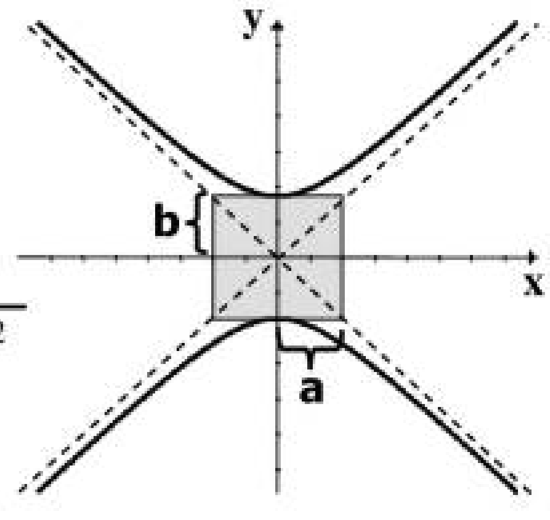


✰ *Eje Focal Y*

$$-\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Dist}_{\text{focal}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

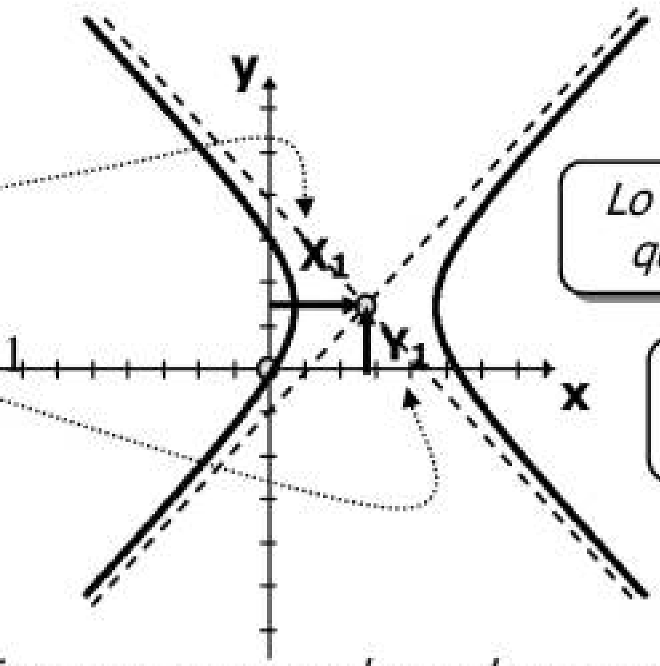
$$e = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}$$



✰ Traslación de la Hipérbola

Eje Focal // al eje X

$$\frac{(X - X_1)^2}{a^2} - \frac{(Y - Y_1)^2}{b^2} = 1$$



Lo que está **restando** a la "X", es lo que se desplaza para la DERECHA

Lo que está **restando** a la "Y", es lo que se desplaza para ARRIBA

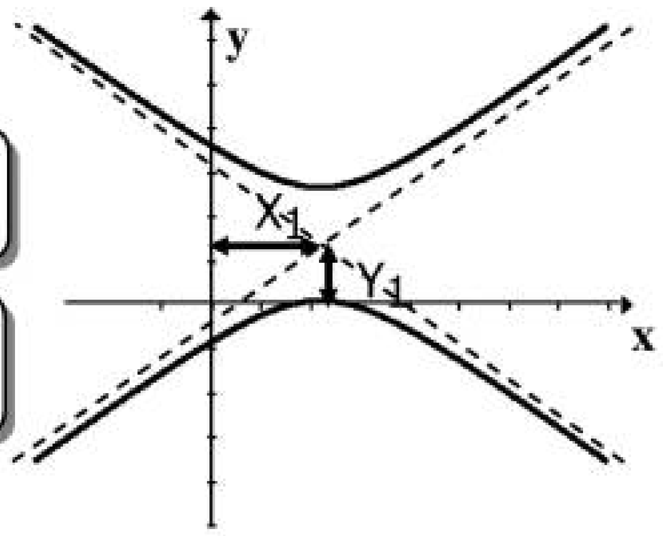
Nota: Si adentro del paréntesis hubiera una suma, en lugar de una resta, por ejemplo "(X+2)" –> La cónica se traslada 2 unidades hacia la IZQUIERDA. Y si en el otro paréntesis hubiera también una suma, como por ejemplo "(Y + 5)" –> La cónica se desplazaría 5 unidades hacia ABAJO.

Eje Focal // al eje Y

$$-\frac{(X - X_1)^2}{a^2} + \frac{(Y - Y_1)^2}{b^2} = 1$$

Lo que está **restando** a la "X", es lo que se desplaza para la DERECHA

Lo que está **restando** a la "Y", es lo que se desplaza para ARRIBA



✰ Elipses

Fórmulas:

Eje Focal X

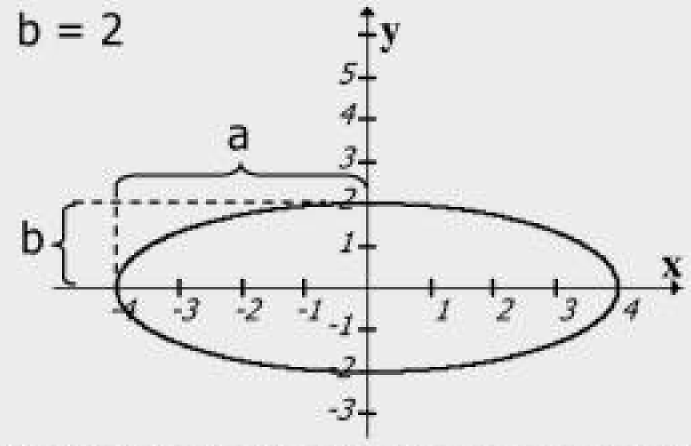
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

$$Dist_{focal} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Ejemplo, con a = 4 y b = 2

$$\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{4} = 1$$



Eje Focal Y

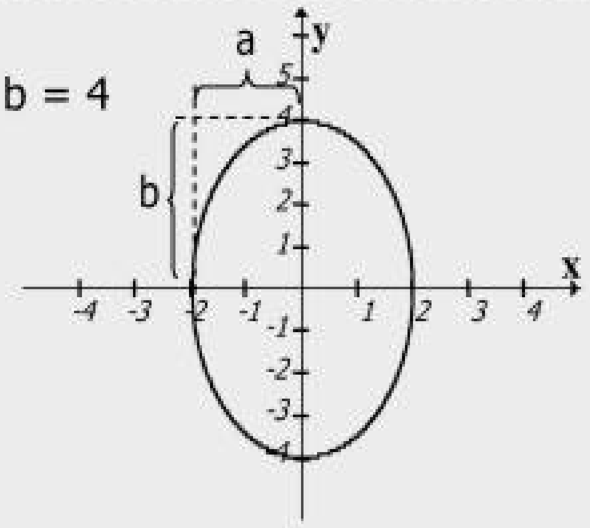
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$$

$$Dist_{focal} = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Ejemplo, con a = 2 y b = 4

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{16} = 1$$

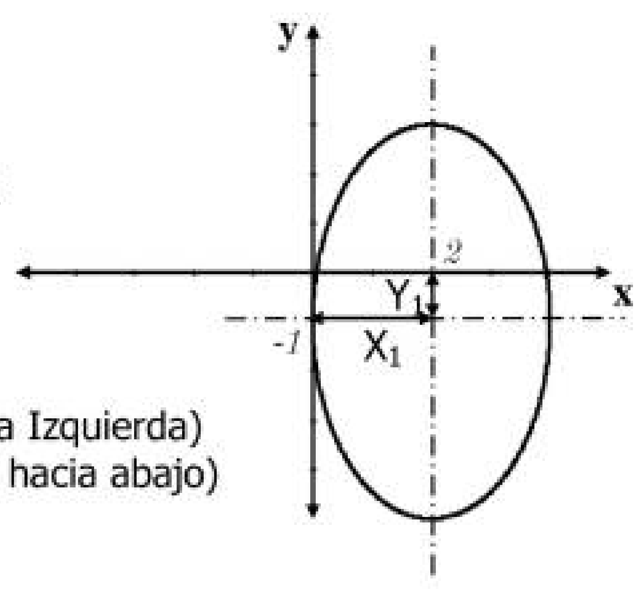


✰ Traslación del Elipse

Eje Focal // al eje Y

$$\frac{(X - X_1)^2}{a^2} + \frac{(Y - Y_1)^2}{b^2} = 1$$

Ejemplo: $\frac{(X-2)^2}{4} + \frac{(Y+1)^2}{16} = 1$



X1: Desplazamiento Hacia la Derecha (Si el término está sumando se desplaza a la Izquierda)
Y1: Desplazamiwento hacia Arriba (Cuando el término está sumando, se desplaza hacia abajo)

by Dal-0r para TARINGA!

Caso Especial del Elipse: La Circunferencia

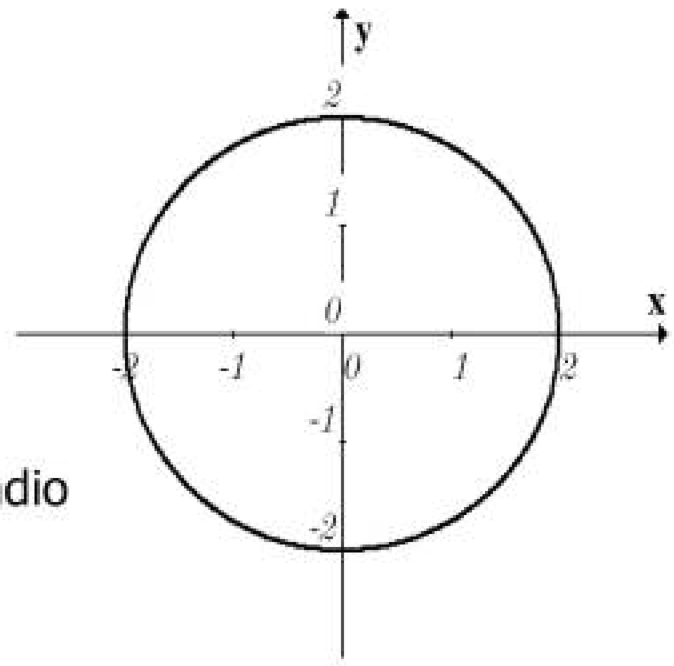
Cuando A = B El elipse es una circunferencia

Ejemplo

$$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{4}=1 \Longrightarrow X^2+Y^2=2^2$$

Radio

Estos dos números deben ser iguales para que sea una circunferencia.



✰ *Ecuación Canónica de la circunferencia*

$$\boxed{(X-X_c)^2+(Y-Y_c)^2=R^2}$$

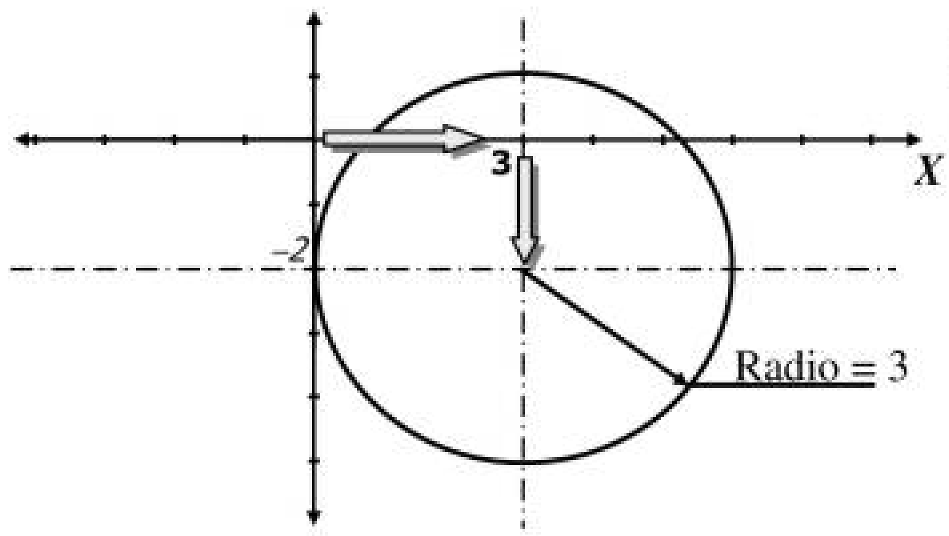
Siendo:

- X_c = Coordenada "X" del centro
- Y_c = Coordenada "Y" del centro
- **R = Radio de la circunferencia**

<u>Ejemplo:</u> $(X-3)^2+(Y+2)^2=9 \Longrightarrow (X-3)^2+(Y-(-2))^2=3^2$

Centro: (3 ; –2)

Radio: 3



✰ ***Formas Desarrollada y Canáonica de las cónicas:*** *Las cónicas, así como las vimos hasta ahora* ***> En su forma Canónica <*** *son muy fíciles de reconocer, es decir es fácil darse cuenta si la cónica es un elipse, una hipérbola, una circunferencia o una parábola.. Pero "lamentablemente" esta forma de escribir las cónicas no es la única, ahora vamos a ver la denominada > Forma desarrollada de las cónicas.*

Formas desarrolladas de las cónicas *La forma desarrollada de una cónica se obtiene, partiendo de la canónica desarrollando los cuadrados y las distributivas correspondientes y pasando todo del mismo lado.*

Por ejemplo: Si tenemos la ecuación del elipse $\frac{(X-2)^2}{4}+\frac{(Y+1)^2}{9}=1$

La podemos desarrollar......

$$\frac{(X-2)^2}{4}+\frac{(Y+1)^2}{9}=1 \Longrightarrow \frac{9\cdot(X-2)^2+4\cdot(Y+1)^2}{36}=1 \Longrightarrow \frac{9.(X^2-4X+4)+4\cdot(Y^2+2Y+1)}{36}=1$$

Denominador Común

Aplicamos el cuadrado de un binomio

Distributiva arriba y pasamos multiplicando el 36 $\Longrightarrow$ $9X^2-36X+36+4Y^2+8Y+4=36$

Pasamos todo de un lado y ya está la forma desarrollada: $\Longrightarrow$ $\boxed{9X^2-36X+4Y^2+8Y+4=0}$

Forma desarrollada de la cónica.

Lo que acabamos de hacer es pasar al elipse de la forma canónica a la forma implícita

Lo que es un poco más difícil es pasar de la forma implícita a la canónica:

Para pasar de la forma implícita a la canónica tenemos que aprender a completar cuadrados. El método de completar cuadrados consta de partir del desarrollo de un binomio elevado al cuadrado para llegar al binomio propiamente dicho sin desarrollar. Ahora vamos a ver en forma práctica este método.

Otra particualridad de la forma implícita o desarrollada, es que al mirar las ecuaciones no podemos reconocer de que tipo de cónica se trata, para ello es necesario pasar a la forma canónica.

Ejemplo: Pasar a la forma canónica la siguiente cónica Y decir de qué cónica se trata:

$$X^2 - 6X + 4Y^2 + 32Y + 69 = 0$$

$$X^2 - 6X + 4Y^2 + 32Y + 69 = 0 \Rightarrow (X^2 - 6X) + (4Y^2 + 32Y) + 69 = 0 \Rightarrow (X^2 - 6X) + 4(Y^2 + 8Y) + 69 = 0$$

Agrupamos las "X" y las "Y"

Sacamos factor común 4 en la parte de las "Y"

Completamos los términos independientes que faltan para completar los cuadrados de binomios

$$(X^2 - 6X + 9 - 9) + 4(Y^2 + 8Y + 16 - 16) + 69 = 0$$

Este paso es el mas importante. Acá tenemos que imaginarnos cuál es el número que falta para completar los cuadrados. También se pueden calcular estos números planteando una ecuación, pero ni hace falta.

Por ejemplo: en el caso de (X^2 –6X .....) nosotros sabemos que: $(X-3)^2 = X^2 - 6X + 9$

Por lo tanto si agregamos un +9 –9 en la ecuación, no afectamos en nada ya que tranquilamente se podrían anular entre sí. Pero en nuestro caso lo agregamos para poder luego juntar al "+9" con la parte incompleta que teníamos para armar el cuadrado del binomio de las "X" ... Lo mismo debemos hacer luego con las "Y"

$$[(X^2 - 6X + 9) - 9] + 4[(Y^2 + 8Y + 16) - 16] + 69 = 0$$

$$(X-3)^2 - 9 + 4[(Y+4)^2 - 16] + 69 = 0 \Leftarrow$$

Escribimos los términos de "X" y de "Y" como los cuadrados de binomios

$$(X-3)^2 + 4(Y+4)^2 = +9 + 64 - 69 \Leftarrow$$

Distributiva del 4 y pasamos los números para el otro lado

$$(X-3)^2 + 4(Y+4)^2 = 4$$

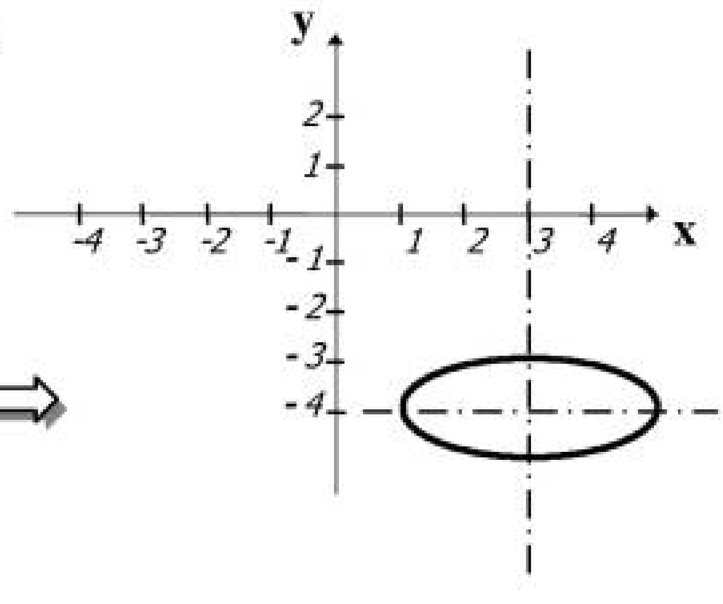
Paso el 4 "DIVIDIENDO"
Y me queda 1 porque es el elemento neutro del PRODUCTO

$$\frac{(X-3)^2 + 4(Y+4)^2}{4} = 1$$

$$\boxed{\frac{(X-3)^2}{4} + \frac{(Y+4)^2}{1} = 1}$$

Forma Canónica del Elipse

Gráfica del Elipse



Como podemos ver claramente, simplemente por comparación, esta ecuación corresponde a la ecuación de un ELIPSE, de centro (3;–4)
De Eje Focal X, con a=2 y b=1 ⇒

by Dal-0r para TARINGA!

Responder Verdadero o Falso

1) Todas las cónicas tienen las X y las Y elevadas al cuadrado

2) Si sólo la X o sólo la Y está elevada al cuadrado, entoces puedo asegurar que la cónica es una parábola.

3) Para que la siguiente ecuación corresponda a la ecuación de una circunferencia "n" tiene que ser igual a "m"

$$\frac{(X - X_1)^2}{m + 2} + \frac{(Y - Y_1)^2}{n + 2} = 1$$

4) La siguiente ecuación corresponde a un elipse de eje focal paralelo al eje X, valga lo que valga "m"

$$\frac{(X - 1)^2}{m^2 + 4} + \frac{(Y + 3)^2}{m^2} = 1$$

5) La siguiente ecuación corresponde a un elipse de eje focal paralelo al eje X, sólo cuando "m" es positiva.

$$\frac{(X - 1)^2}{m^2 + 4} + \frac{(Y + 3)^2}{m^2} = 1$$

6) Para que la siguiente ecuación corresponda a la de una hipérbol, "k" debe ser negativa.

$$\frac{(X - 1)^2}{1} - k \cdot \frac{(Y - 1)^2}{4k^2 + 1} = 1$$

7) Mirando la ecuación canónica de una cónica inmediatamente puedo distinguir si se trata de un elipse, una hipérbola o una parábola.

8) Para poder distinguir inmediatamente que tipo de cónica es, tengo que mirar la ecuación desarrollada.

9) Cualquier ecuación desarrollada que tenga X, X^2, Y e Y^2, siempre va a corresponder a la ecuación de una cónica, ya sea elipse, hipérbola o parábola.

10) Si se cumple la condición: "m = 2n + 1" La siguiente ecuación corresponde a la ecuación de una circunferencia.

$$\frac{(X - 5)^2}{(2n - 3)^2} + \frac{(Y + 7)^2}{m^2 - 16n + 8} = 1$$

Dadas las siguientes ecuaciones canónicas, graficar, en cada caso, las cónicas correspondientes y decir que tipo de cónica es cada una:

11) $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{36} = 1$

12) $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{100} = 1$

13) $-\frac{(X + 1)^2}{121} + \frac{Y^2}{1} = 1$

14) $\frac{X}{9} + \frac{Y^2}{36} = 1$

15) $-\frac{X}{4} + \frac{(Y - 3)^2}{25} = 1$

16) $(X + 2)^2 + (Y - 1)^2 = 16$

17) $X - \frac{Y^2}{9} = 1$

18) $\frac{(X - 2)^2}{4} + \frac{(Y + 1)^2}{25} = 1$

19) $(X - 1)^2 + Y^2 = 1$

20) $(X - 2)^2 + \left(Y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

Dadas las siguientes ecuaciones de elipses, dar, en cada caso, las coordenadas del centro, de los vértices, los focos, la ecuación del eje focal, y la excentricidad.

21) $\dfrac{(X+1)^2}{4}+\dfrac{(Y-2)^2}{9}=1$

22) $\dfrac{X^2}{4}+\dfrac{Y^2}{1}=1$

23) $+\dfrac{X^2}{16}+\dfrac{Y^2}{4}=1$

24) $X^2+4(Y-1)^2=1$

25) $\dfrac{(X+15)^2}{144}+\dfrac{(Y-10)^2}{169}=1$

Dadas las siguientes ecuaciones de hipérbolas, dar, en cada caso, las coordenadas del punto donde e cruzan las asíntotas, los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas y del eje focal.

26) $\dfrac{(X+1)^2}{4}-\dfrac{(Y-2)^2}{9}=1$

27) $\dfrac{Y^2}{4}-\dfrac{X^2}{36}=1$

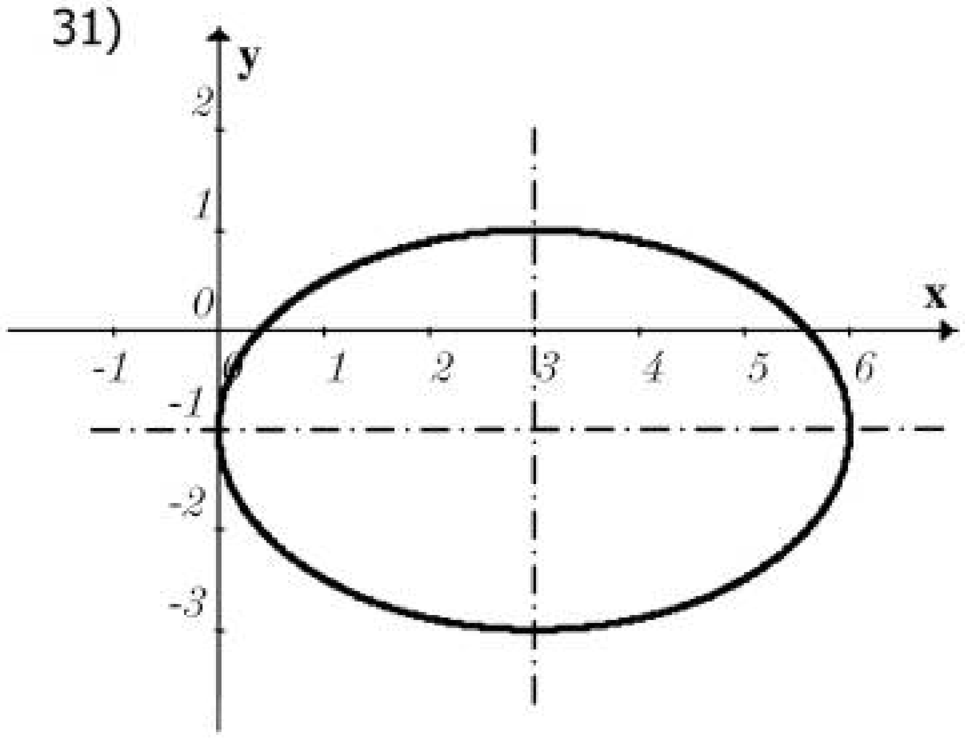
28) $\dfrac{X^2}{1}-\dfrac{Y^2}{9}=1$

29) $4(Y-1)^2-X^2=1$

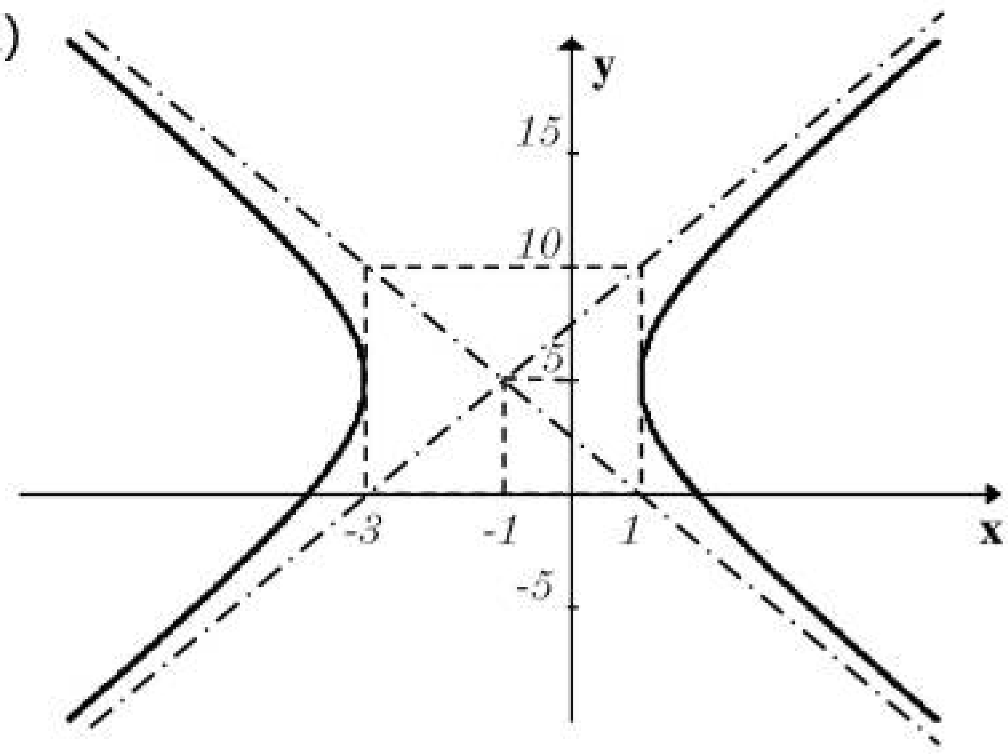
30) $\dfrac{(X-15)^2}{144}-\dfrac{(Y+10)^2}{169}=1$

Dados los siguientes gráficos, dar las ecuaciones canónicas de las cónicas correspondientes:

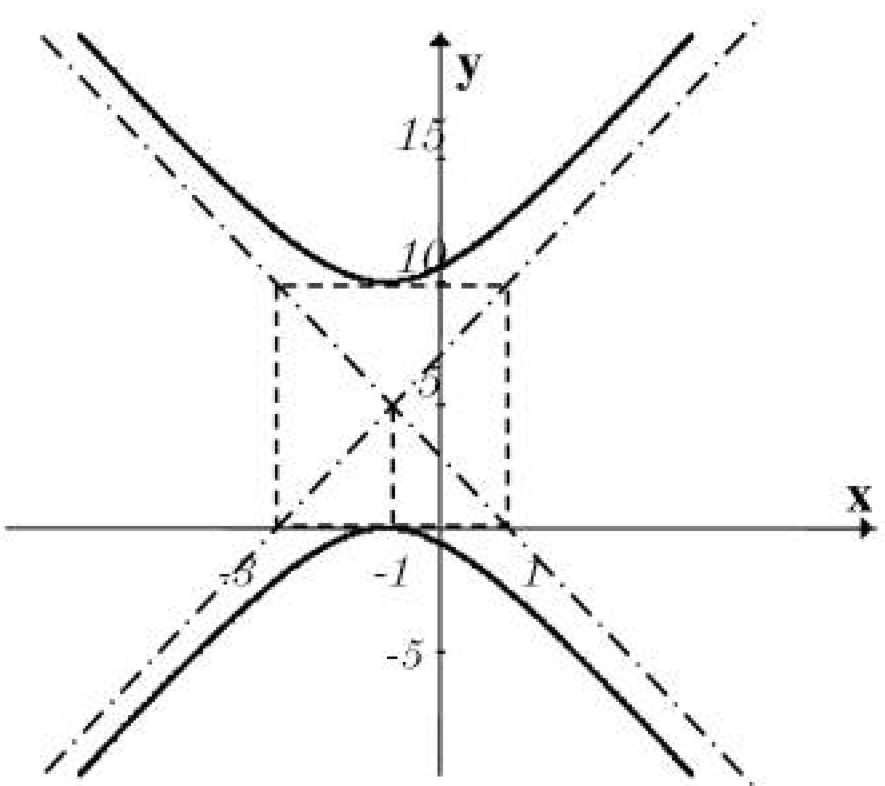
31)



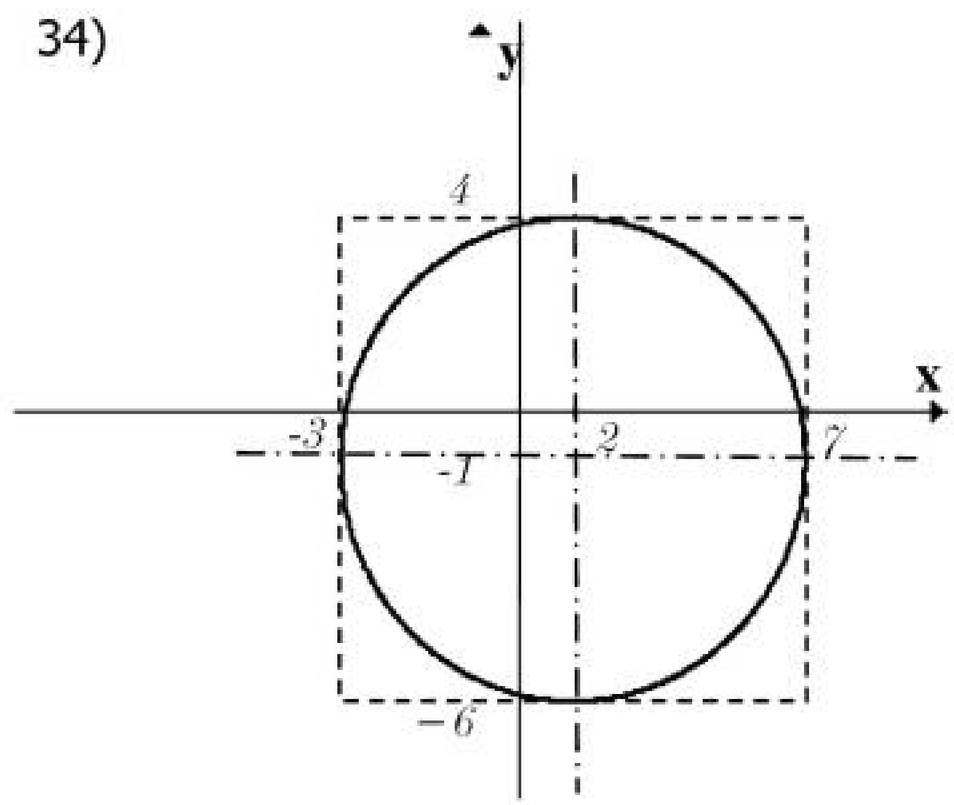
32)



33)



34)



by Dal-0r para TARINGA!

Completar cuadrados y expresar las siguientes cónicas en su forma canónica:

35) $Y^2 + 2Y - 4X^2 - 16X = 19$

36) $2Y^2 - 8Y + 3X^2 + 6X + 5 = 0$

37) $9Y^2 + X^2 + 2X = 8$

38) $25X^2 + 100X = 4Y^2$

39) $Y^2 - 2Y + 4X = 3$

40) $bX^2 + 2abX + 8Y + 4Y^2 = 4b - 4 - a^2b$

¿Cuánto tiene que valer "K" , perteneciente a los números naturales, para que las siguientes sean ecuaciones de circunferencias de Radio = 5 ?

41) $Y^2 + 4Y + X^2 + 2X = 14 + 2k$

42) $X^2 + 6X + Y^2 - 2Y = 7k - 13$

43) $Y^2 + (K + 5)Y + X^2 - 4X = K + 2$

44) $X^2 + (K - 2)X + Y^2 = 2K^2 - K - 4$

Hallar el o los valores de "K" (si es que existen) para que las siguientes ecuaciones correspondan a las ecuaciones de elipses de centro (0;0)

45) $5Y^2 + (K + 5)Y + 3X^2 = 15$

46) $X^2 + (K^2 - \frac{5}{3}K - 4)X + 2Y^2 = 2$

47) $Y^2 + (K^2 + 1)Y + \frac{3}{2}X^2 = 1$

48) $\frac{K}{2}X^2 + (K^2 - 4)X + 2(K^2 + 1)Y^2 = 2$

Hallar, si existen, el o los valores de "K", pertenecientes a los reales positivos, para que las siguientes ecuaciones correspondan a las ecuaciones de circunferencias:

49) $\frac{9\,(Y - 1)^2}{2K - 1} + \frac{(K + 4)\,X^2}{2} = 1$

50) $\frac{2K\,(X + 1)^2}{K + 1} + \frac{5(K - 3)\,Y^2}{3K - 1} = 1$

51) $\frac{(K + 5)\,(X + 1)^2}{2K + 1} + \frac{(7K - 3)\,Y^2}{K + 1} = 1$

52) $KX^2 + Y^2 = -2KX$

Armar la ecuación canónica de un elipse cuyos vértives sean:

53) $V_1 = (-3;2)$
$V_2 = (1;2)$
$V_3 = (-1;-1)$
$V_4 = (-1;5)$

54) $V_1 = (-5;1)$
$V_2 = (5;1)$
$V_3 = (-1;1)$
$V_4 = (1;1)$

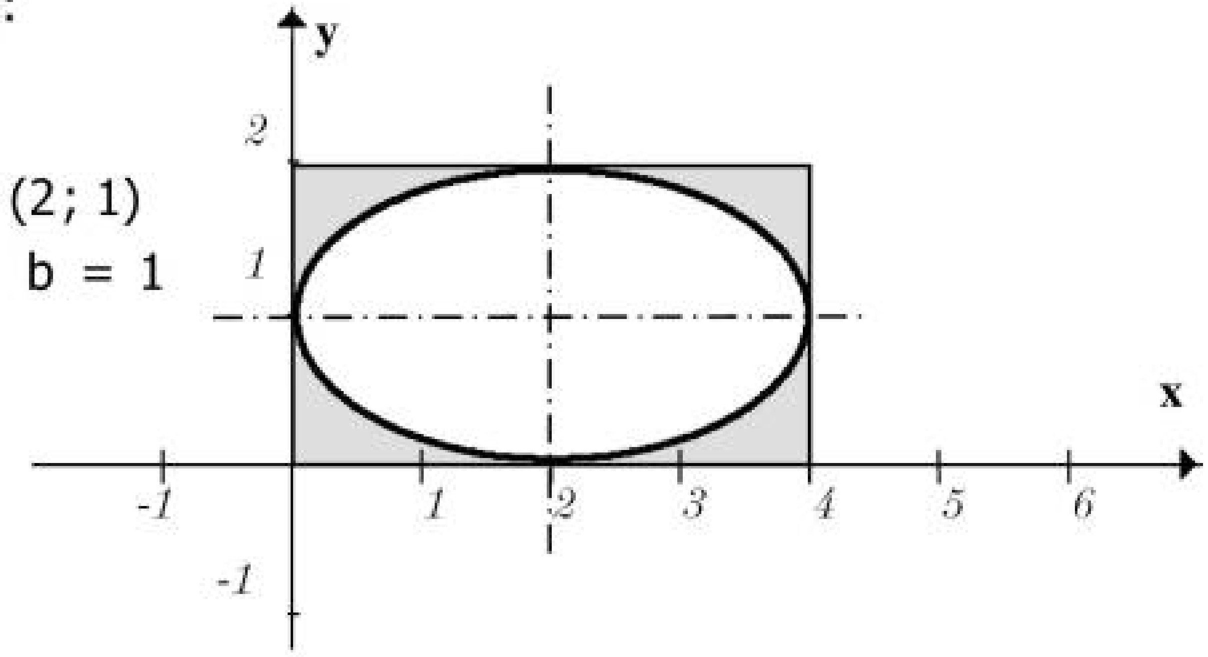
55) $V_1 = (0;6)$
$V_2 = (4;6)$
$V_3 = (2;0)$
$V_4 = (2;12)$

56) $V_1 = (1;-2)$
$V_2 = (-1;-2)$
$V_3 = (0;-2+\sqrt{2})$
$V_4 = (0;-2-\sqrt{2})$

Verificar Analíticamente cuáles de los siguientes puntos pertenecen y cuáles no perteneces a la cónica representada en la figura siguiente:

Elipse Desplazada

Datos $\begin{cases} \text{Centro} = (2;\,1) \\ a = 2 \qquad b = 1 \end{cases}$



57) $P=(0;0)$

58) $P=(0;2)$

59) $P=(0;\,-2)$

60) $P=(2;\,0)$

61) $P=(-2;\,0)$

62) $P=(2;\,2)$

63) $P=(-2;\,2)$

64) $P=(2;\,1)$

65) $P=(4;\,0)$

66) $P=(4;\,1)$

67) $P=(4;\,2)$

68) $P=(3;\,\sqrt{3})$

69) $P=(3;\,\frac{\sqrt{3}}{2})$

70) $P=(3;\,\frac{\sqrt{3}}{2}+1)$

71) $P=(3;\,\frac{-\sqrt{3}}{2}+1)$

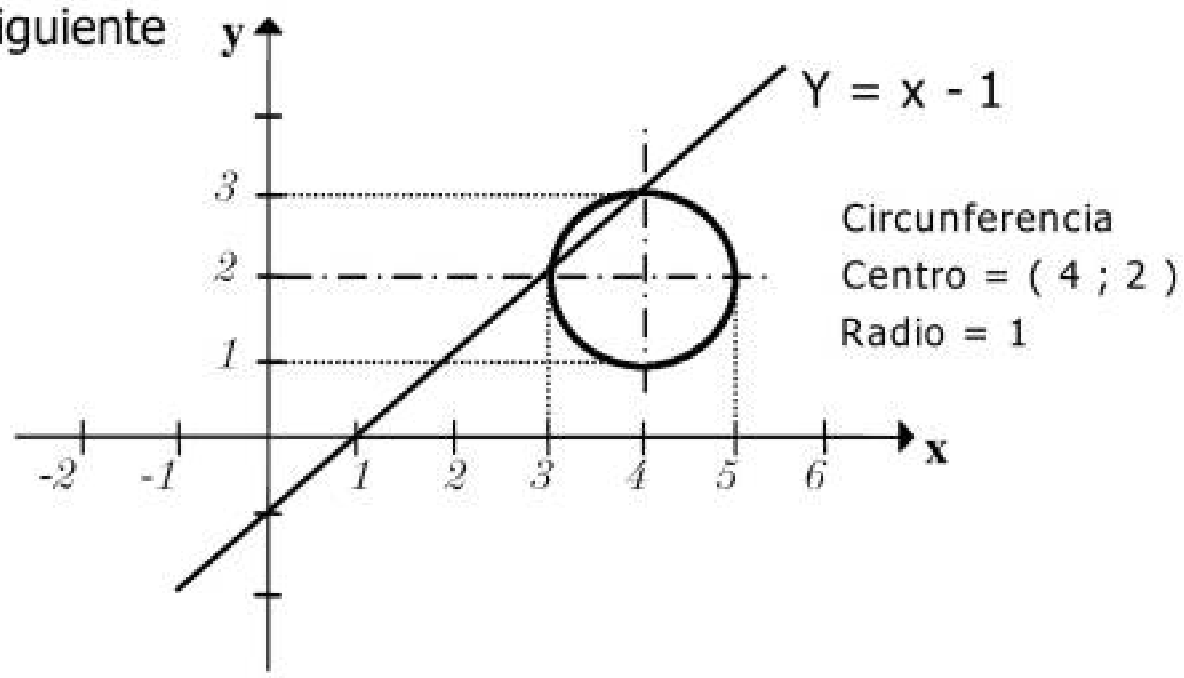
72) $P=(1;\,\frac{\sqrt{3}}{2}+1)$

73) $P=(\frac{3}{2};\,\frac{\sqrt{15}}{4}-1)$

74) $P=(\frac{3}{2};\,\frac{\sqrt{15}}{4}+1)$

75) $P=(\frac{5}{2};\,\frac{\sqrt{15}}{4}+1)$

76) Hallar Analíticamente las intersecciones entre la recta y la circunferencia del siguiente gráfico:
Corroborar las respuestas con el gráfico siguiente



77) Hallar Analíticamente las intersecciones entre la recta y el elipse del siguiente gráfico: