

Carlos Ivorra Castillo

---

**TOPOLOGÍA  
ALGEBRAICA**

CON APLICACIONES A LA  
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

---



*Si simplemente hace girar la rueda, es álgebra; pero  
si contiene una idea, es topología.*

SOLOMON LEFSCHETZ



# Índice General

Introducción	ix
<b>1 Topología</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo I: Preliminares topológicos</b>	<b>3</b>
1.1 Convexidad . . . . .	3
1.2 Variedades topológicas . . . . .	5
1.3 Espacios cociente . . . . .	13
1.4 Cocientes de polígonos . . . . .	16
1.5 Homotopías . . . . .	22
<b>Capítulo II: Homología singular</b>	<b>27</b>
2.1 Símplices afines . . . . .	27
2.2 Complejos de cadenas singulares . . . . .	30
2.3 Grupos de homología . . . . .	35
2.4 El teorema de homotopía . . . . .	41
2.5 Sucesiones exactas . . . . .	44
2.6 El teorema de escisión . . . . .	50
<b>Capítulo III: Aplicaciones de la homología singular</b>	<b>61</b>
3.1 La sucesión de Mayer-Vietoris . . . . .	61
3.2 La homología de las esferas . . . . .	65
3.3 El teorema de Brouwer . . . . .	66
3.4 El teorema de Jordan-Brouwer . . . . .	70
3.5 La homología de las superficies compactas . . . . .	75
<b>Capítulo IV: Complejos celulares</b>	<b>81</b>
4.1 Adjunciones . . . . .	81
4.2 Complejos celulares . . . . .	84
4.3 El teorema del homeomorfismo relativo . . . . .	88
4.4 La homología de los complejos celulares . . . . .	90
4.5 Los números de Betti y la característica de Euler . . . . .	100
4.6 Poliedros . . . . .	104

<b>Capítulo V: El álgebra homológica</b>	<b>113</b>
5.1 Categorías . . . . .	113
5.2 Equivalencias homotópicas . . . . .	117
5.3 Productos tensoriales . . . . .	119
5.4 Productos de torsión . . . . .	127
5.5 Cohomología . . . . .	138
<b>Capítulo VI: Productos</b>	<b>151</b>
6.1 El teorema de los modelos acíclicos . . . . .	151
6.2 La homología de un producto . . . . .	154
6.3 El producto exterior . . . . .	160
6.4 El producto mixto . . . . .	168
6.5 Productos relativos . . . . .	169
<b>Capítulo VII: Variedades topológicas</b>	<b>173</b>
7.1 Orientación . . . . .	173
7.2 La homología de las variedades topológicas . . . . .	183
7.3 Límites inductivos . . . . .	192
7.4 La dualidad de Poincaré . . . . .	195
7.5 La dualidad de Alexander . . . . .	204
<b>Capítulo VIII: Homotopía</b>	<b>213</b>
8.1 El grupo fundamental . . . . .	213
8.2 Cubrimientos . . . . .	218
8.3 Un criterio de elevación . . . . .	223
<b>2 Geometría diferencial</b>	<b>229</b>
<b>Capítulo IX: Variedades diferenciales</b>	<b>231</b>
9.1 Definición y hechos básicos . . . . .	232
9.2 Aplicaciones diferenciables . . . . .	235
9.3 El espacio tangente . . . . .	239
9.4 Subvariedades . . . . .	246
9.5 El fibrado de tangentes . . . . .	253
9.6 Tensores . . . . .	255
<b>Capítulo X: Variedades de Riemann</b>	<b>263</b>
10.1 Conexiones afines . . . . .	263
10.2 Métricas de Riemann . . . . .	276
10.3 La conexión de Levi-Civita . . . . .	282
10.4 Geodésicas . . . . .	286

<b>Capítulo XI: Homología y cohomología diferenciable</b>	<b>305</b>
11.1 Homología singular diferenciable . . . . .	305
11.2 Tensores antisimétricos . . . . .	310
11.3 Formas diferenciales . . . . .	313
11.4 La cohomología de De Rham . . . . .	318
11.5 El teorema de De Rham . . . . .	323
11.6 Cohomología con soportes compactos . . . . .	329
<b>Capítulo XII: La cohomología de De Rham</b>	<b>333</b>
12.1 Orientación de variedades diferenciales . . . . .	333
12.2 Integración de formas diferenciales . . . . .	342
12.3 La dualidad de Poincaré . . . . .	350
12.4 Los teoremas de Künneth . . . . .	354
12.5 El grado de una aplicación . . . . .	360
<b>Capítulo XIII: Fibrados</b>	<b>379</b>
13.1 Definición y propiedades básicas . . . . .	379
13.2 El fibrado de tangentes de un fibrado . . . . .	384
13.3 Orientación de fibrados . . . . .	391
13.4 Integración sobre fibras . . . . .	396
13.5 Fibrados de esferas . . . . .	408
<b>Capítulo XIV: La cohomología de los fibrados</b>	<b>417</b>
14.1 La clase de Euler . . . . .	417
14.2 Índices de secciones . . . . .	425
14.3 El isomorfismo de Thom . . . . .	433
14.4 Secciones en fibrados vectoriales . . . . .	440
14.5 La clase y la característica de Euler . . . . .	443
14.6 El teorema de punto fijo de Lefchetz . . . . .	449
<b>Apéndice A: Las superficies compactas</b>	<b>453</b>
A.1 Consecuencias del teorema de Jordan . . . . .	453
A.2 Triangulaciones . . . . .	454
A.3 La clasificación . . . . .	464
<b>Apéndice B: Variedades complejas</b>	<b>469</b>
B.1 Funciones complejas sobre variedades reales . . . . .	469
B.2 Estructuras analíticas . . . . .	471
B.3 Tensores complejos . . . . .	477
<b>Bibliografía</b>	<b>481</b>
<b>Índice de Materias</b>	<b>482</b>





# Introducción

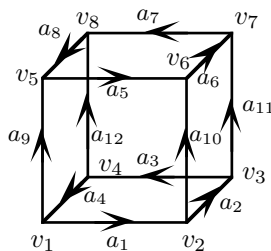
La topología algebraica proporciona técnicas capaces de analizar en profundidad los espacios topológicos que aparecen en geometría, tanto en geometría diferencial como en geometría algebraica, y en aquellas ramas del análisis directamente relacionadas con la geometría, como el cálculo diferencial e integral en variedades, o la teoría de funciones de variable compleja y —especialmente dentro de ésta— en la teoría de las superficies de Riemann. Además, sus resultados algebraicos subyacentes pueden desarrollarse en un contexto abstracto, puramente algebraico, con aplicaciones a la teoría de grupos y a la teoría de números.

Centrándonos en la topología, la topología algebraica asocia a cada espacio topológico una sucesión de grupos, los llamados grupos de homología, de modo que las aplicaciones continuas entre espacios inducen homomorfismos entre sus grupos de homología, y los homeomorfismos inducen isomorfismos. Por lo pronto, esto proporciona una técnica para probar que dos espacios dados no son homeomorfos. En general, si dos espacios son homeomorfos podemos tratar de probarlo construyendo un homeomorfismo explícito entre ambos, pero si no lo son, la topología algebraica resulta poco menos que indispensable. En efecto, si los grupos de homología de ambos espacios resultan ser no isomorfos —lo cual no es necesariamente cierto, pero sí lo más frecuente— entonces podemos asegurar que los espacios no son homeomorfos.

Aunque esto es ya de por sí más que suficiente para justificar el valor de toda la teoría, lo cierto es que ésta va mucho más allá. Los grupos de homología proporcionan información relevante sobre muchas características de la estructura topológica, o incluso diferencial, si es que la tienen, de los espacios a los que se aplica. Su potencia radica, entre otros motivos, a que sus conceptos son esencialmente globales, es decir, dependen de la totalidad del espacio, al contrario de lo que sucede con la mayoría de los conceptos del cálculo diferencial.

En lugar de ofrecer aquí una panorámica de los resultados generales que vamos a obtener, lo que haremos será mostrar algunos ejemplos concretos que ilustren los conceptos básicos que vamos a manejar y el modo en que intervienen en la teoría.

Para ello consideremos el caso de una esfera. Para estudiarla mediante técnicas algebraicas podemos identificarla con la superficie de un cubo. Ésta a su vez la podemos considerar descompuesta en ocho vértices, doce aristas y seis caras, tal y como muestra la figura de la página siguiente.



Es importante que las aristas y las caras las hemos de considerar orientadas. En el caso de las aristas, esto significa que hemos de determinar un extremo inicial y un extremo final. En la figura hemos indicado mediante flechas la orientación de cada arista. La orientación de una cara es un sentido de giro. Por ejemplo, podemos establecer que el sentido positivo en una cara será el sentido antihorario cuando la vemos de frente desde fuera del cubo.

Si  $S$  es el cubo, llamaremos  $C_0(S)$  al grupo abeliano libre generado por sus vértices, y a sus elementos los llamaremos *cadena*s de dimensión 0. Así pues, una cadena de dimensión 0 de  $S$  es una expresión algebraica de la forma

$$n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3 + n_4v_4 + n_5v_5 + n_6v_6 + n_7v_7 + n_8v_8, \quad n_i \in \mathbb{Z}.$$

Similarmente, definimos el grupo de las cadenas de dimensión 1 como el grupo abeliano libre  $C_1(S)$  generado por las aristas de  $S$ . Debemos pensar que la cadena  $-a_1$  representa la misma arista que  $a_1$  pero recorrida al revés, de modo que su origen es el vértice  $v_2$  y su extremo es  $v_1$ . La cadena  $-a_1 + a_9 - a_8$  representa el “camino” que parte de  $v_2$ , pasa por  $v_1$ , luego por  $v_5$  y acaba en  $v_8$ . La cadena  $2a_1 + 2a_{10} - 2a_5 - 2a_9$  representa dos vueltas en sentido antihorario alrededor de la cara frontal de la figura. Similarmente, definimos el grupo  $C_2(S)$  de las cadenas de dimensión 2, generado por las seis caras, digamos  $c_1, \dots, c_6$ .

Definimos la frontera de una arista como la diferencia de sus extremos. Por ejemplo,  $\partial_1 a_1 = v_2 - v_1 \in C_0(S)$ . El operador frontera se define extendiendo por linealidad esta definición sobre todo el grupo  $C_1(S)$ . Tenemos así un homomorfismo  $\partial_1 : C_1(S) \rightarrow C_0(S)$ .

Similarmente, la frontera de una cara  $c$  se define como la cadena formada por las aristas de su contorno con los signos necesarios para que el recorrido se haga según la orientación fijada en  $c$ . Por ejemplo, si convenimos que  $c_1$  es la cara central de la figura, cuya orientación hemos establecido como el giro antihorario, entonces

$$\partial_2 c_1 = a_1 - a_5 - a_9 + a_{10}.$$

Extendiendo esta definición por linealidad obtenemos un homomorfismo de grupos  $\partial_2 : C_2(S) \rightarrow C_1(S)$ . Por completitud definimos

$$\partial_0 : C_0(S) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \partial_3 : 0 \rightarrow C_2(S)$$

como homomorfismos nulos. Es inmediato comprobar que  $\partial_i \circ \partial_{i-1} = 0$ . En efecto, si  $c$  es una cadena de dimensión 1, la condición  $\partial_1 c = 0$  significa que los extremos de sus aristas componentes se cancelan mutuamente, lo que sólo puede

ocurrir si la cadena consta de uno o varios circuitos cerrados, como le ocurre, por ejemplo, a  $\partial_2 c_1$ :

$$\partial_1(\partial_2 c_1) = \partial_1 a_1 - \partial_1 a_5 - \partial_1 a_9 + \partial_1 a_{10} = v_2 - v_1 + v_5 - v_6 + v_1 - v_5 + v_6 - v_2 = 0$$

Lo mismo vale para las fronteras de las caras restantes (no por casualidad, sino por la propia definición de frontera de una cara), luego ciertamente  $\partial_2 \circ \partial_1 = 0$ , y éste era el único caso no trivial. Definimos el grupo de los *ciclos* de dimensión  $p$  como

$$Z_p(S) = \{c \in C_p(S) \mid \partial_p c = 0\}.$$

Así,  $Z_0(S) = C_0(S)$ , mientras que  $Z_1(S)$  es, como ya hemos comentado, el grupo formado por las cadenas que describen circuitos cerrados. No es difícil probar que

$$Z_2(S) = \langle c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 \rangle.$$

En efecto, ante todo,  $z = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6$  es un ciclo, pues al calcular su frontera cada arista aparece dos veces con signos opuestos. Por ejemplo, la arista  $a_{10}$  aparece con signo positivo en la frontera de la cara frontal de la figura y con signo negativo en la frontera de la cara de la derecha (recordemos que el signo ha de ser el necesario para que el recorrido de cada frontera se haga en sentido antihorario). Por otra parte, si  $z' \in Z_2(S)$  y  $c_1$  aparece con coeficiente  $n \neq 0$  en  $z'$ , entonces  $\partial c_1$  aporta a  $\partial z'$  un sumando  $na_{10}$ , que debe ser cancelado con otro término, pero sólo la cara derecha puede aportar otro término en  $a_{10}$ , luego el coeficiente de dicha cara ha de ser también  $n$ , y así sucesivamente llegamos a que todas las caras deben aparecer con coeficiente  $n$ , luego  $z' = nz$ .

Por otra parte, definimos el grupo de las *fronteras* de dimensión  $p$  como

$$F_p(S) = \{\partial_{p+1} c \mid c \in C_{p+1}(S)\}.$$

La propiedad  $\partial_{p+1} \circ \partial_p = 0$  hace que  $F_p(S) \leq Z_p(S)$ , es decir, toda frontera es un ciclo. Recíprocamente, todo 1-ciclo es una frontera. Para entender por qué es así, pensemos por ejemplo en el ciclo

$$z = a_1 + a_{10} + a_6 + a_7 + a_8 - a_9.$$

Vemos que  $z$  divide al cubo en dos regiones, una contiene a la cara frontal y a la cara superior del cubo. Llamemos  $c_1$  a la suma de estas dos caras y  $c_2$  a la suma de las caras restantes, es decir, las contenidas en la otra región. Es fácil ver entonces que  $\partial_2 c_1 = -\partial_2 c_2 = z$  (la clave está en que las aristas interiores de cada región se cancelan mutuamente al calcular la frontera). En general, todo ciclo es la suma de varios circuitos cerrados de aristas, cada uno de los cuales divide al cubo en dos regiones, de modo que la suma de las caras contenidas en una de ellas es una cadena cuya frontera es, salvo el signo, el ciclo considerado.

Así pues, el hecho de que todo 1-ciclo sea una 1-frontera está íntimamente relacionado con una propiedad peculiar de las esferas, a saber, que todo circuito cerrado las divide en dos componentes conexas, cada una de las cuales tiene por frontera al circuito dado. Esto es el teorema de Jordan.

Se define el *grupo de homología* de dimensión  $p$  como

$$H_p(S) = Z_p(S)/F_p(S).$$

Estos grupos son los invariantes principales que vamos a estudiar. Se dice que dos ciclos son *homólogos* si se diferencian en una frontera, de modo que los elementos de  $H_p(S)$  son las clases de equivalencia de ciclos homólogos, o clases de homología, de dimensión  $p$ .

Acabamos de observar que  $H_1(S) = 0$ , así como la conexión que tiene este hecho con el teorema de Jordan. Veamos ahora que  $H_0(S) \cong \mathbb{Z}$ . En efecto, un vértice sólo no es una frontera, pero si  $v_i \neq v_j$  entonces  $v_i - v_j$  es la frontera de cualquier 1-cadena que una  $v_j$  con  $v_i$ . Esto hace que dos vértices cualesquiera sean homólogos entre sí, por lo que todos generan la misma clase de homología  $[v_i]$ , la cual es un generador de  $H_0(S)$ .

Vemos, pues, que la estructura del grupo  $H_0(S)$  está relacionada con la conexión de  $S$ . En general, si dividimos un espacio topológico de forma similar a como hemos hecho con la esfera, dos vértices son homólogos si y sólo si pueden ser unidos por un camino de aristas. Para un espacio topológico  $X$ , se cumple que  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^r$ , donde  $r$  es el número de componentes conexas de  $X$ .

Por último, puesto que, por definición,  $F_2(S) = 0$ , tenemos que  $H_2(S) \cong \mathbb{Z}$ . No vamos a interpretar este hecho, pero lo cierto es que también refleja una propiedad topológica de la esfera: una variedad compacta  $V$  de dimensión  $n$  es orientable si y sólo si  $H_n(V) \cong \mathbb{Z}$ , y en caso contrario  $H_n(V) = 0$ .

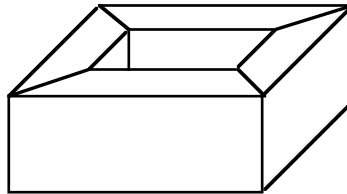
Todos estos razonamientos presuponen un hecho nada trivial, y es que los grupos de homología dependen únicamente del espacio topológico considerado, en este caso la esfera, y no de la división en celdas que hemos considerado. Por ejemplo, podríamos identificar la esfera con un dodecaedro y definir los correspondientes grupos de homología. El resultado sería el mismo. Más aún, no hay inconveniente en considerar casos “degenerados” mucho más simples para hacer los cálculos. Por ejemplo, hubiera bastado considerar un único vértice  $v$  (un punto cualquiera), ninguna arista y una única cara  $c$ , formada por todos los puntos de la esfera menos  $v$ . Entonces la situación sería  $C_2(S) = \langle c \rangle$ ,  $C_1(S) = 0$ ,  $C_0(S) = \langle v \rangle$ . Los operadores frontera serían todos nulos, con lo que

$$Z_2(S) = \langle c \rangle, \quad Z_1(S) = 0, \quad Z_0(S) = \langle v \rangle,$$

y al dividir entre los grupos de fronteras (nulos) llegamos igualmente a que

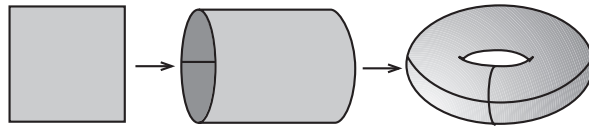
$$H_2(S) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(S) = 0, \quad H_0(S) \cong \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, podríamos considerar la homología de un toro, dividiéndolo como indica la figura:

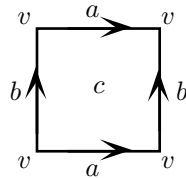


El lector puede estimar lo complicado que sería entrar en detalles. La topología algebraica nos proporciona técnicas para calcular grupos de homología sin caer en cálculos prolijos. No obstante observemos que en un toro hay 1-ciclos que no son fronteras. Por ejemplo, el cuadrado exterior de la parte superior de la figura. Si buscamos una cadena que lo tenga por frontera podríamos considerar la suma de las cuatro caras trapezoidales superiores, pero su frontera no es sólo el cuadrado que queremos, sino también el cuadrado interior. Para eliminar éste podríamos añadir los cuatro rectángulos interiores (debidamente orientados), pero entonces la frontera contiene también al cuadrado interior inferior (que no se ve en la figura), para eliminarlo podemos añadir las caras trapezoidales inferiores, etc., pero siguiendo así llegamos a la cadena formada por todas las caras (debidamente orientadas) y su frontera no es el cuadrado que perseguimos, sino que es nula.

No obstante, podemos calcular fácilmente la homología del toro usando una descomposición degenerada. La describiremos mejor si trabajamos con un “mapa” del toro. Es conocido que un toro puede obtenerse a partir de un cuadrado identificando sus lados opuestos como indica la figura:



Al pegar dos de los lados obtenemos un cilindro y al pegar los dos lados restantes obtenemos el toro. Esto se traduce en que podemos pensar que un cuadrado es un toro si convenimos en que el lado superior es el mismo que el inferior y que el lado izquierdo es el mismo que el derecho. Notemos que los cuatro vértices corresponden al mismo punto del toro. Según esto, una descomposición degenerada es la indicada en la figura:



Cumple los únicos requisitos necesarios: que las aristas sean homeomorfas a segmentos abiertos y las caras a discos abiertos (notemos que  $a$  es una circunferencia, pero la arista propiamente dicha no incluye a  $v$ , luego es homeomorfa a un segmento, y lo mismo vale para  $b$ ).

De este modo,  $\partial c = a + b - a - b = 0$ , luego  $c$  es un ciclo, como también lo son  $a$  y  $b$ . Ahora es fácil ver que, si llamamos  $T$  al toro,

$$H_2(T) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_0(T) \cong \mathbb{Z}.$$

En particular esto prueba que una esfera no es homeomorfa a un toro.

En las páginas que siguen introduciremos con rigor las ideas que hasta aquí hemos expuesto vagamente. Hay que advertir que la definición general que daremos de los grupos de homología no coincidirá con la que aquí hemos usado, aunque en el capítulo IV veremos que —sobre una amplia clase de espacios compactos— es equivalente. Anticipamos las diferencias para no desconcertar al lector:

- a) Los coeficientes de las cadenas no serán necesariamente enteros, sino que admitiremos que varíen en un anillo arbitrario  $\mathbb{A}$ . De este modo recogeremos —entre otros casos de interés— el caso  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ , que es el más natural en muchas ocasiones, el caso  $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ , que aparece en geometría diferencial y el caso  $\mathbb{A} = \mathbb{C}$ , más adecuado en el análisis complejo. Por lo tanto, los grupos de homología serán en realidad  $\mathbb{A}$ -módulos, espacios vectoriales si  $\mathbb{A}$  es un cuerpo.
- b) En lugar de considerar “caras” de forma arbitraria consideraremos únicamente el caso más simple, por ejemplo, en dimensión 2 trabajaremos con triángulos. Además admitiremos triángulos singulares, es decir, imágenes continuas (en un espacio  $X$ ) de triángulos en  $\mathbb{R}^2$ , no necesariamente inyectivas.
- c) No trabajaremos con caras incluidas en una descomposición particular de un espacio topológico, sino que, por ejemplo, el grupo de las 2-cadenas será el  $\mathbb{A}$ -módulo libre generado por todos los triángulos singulares en  $X$ .

En la segunda parte del libro veremos que el aparato algebraico que habremos desarrollado para entonces en el estudio de los grupos de homología de los espacios topológicos es aplicable en un contexto muy distinto, como es el estudio de las formas diferenciales en una variedad diferencial, las cuales permiten definir unos objetos formalmente similares: los grupos de cohomología de De Rham. La relación no es meramente formal, sino que el teorema de De Rham muestra que ambas teorías son “isomorfas” en un sentido que ahora sería difícil precisar. En realidad casi todos los resultados que veremos para variedades diferenciales pueden reformularse en términos de espacios topológicos arbitrarios. Nosotros dejaremos la topología y pasaremos a la geometría diferencial en el momento en que las técnicas puramente topológicas se hagan demasiado abstractas como para que puedan seguirse de forma razonable sin tener in mente como guía la situación en las variedades diferenciales.

Señalemos, por último, que los requisitos necesarios para seguir este libro son mínimos: tan sólo cierta familiaridad con la topología, el análisis y el álgebra elemental. La única excepción aparece en la prueba de que toda superficie compacta es triangulable, que requiere una versión fuerte del teorema de Jordan. No obstante, el papel de este teorema es marginal, pues afecta tan sólo a una de las aplicaciones de la teoría (la clasificación de las superficies compactas) y de hecho puede evitarse sin más que exigir la triangulabilidad en la definición de superficie. Todos los resultados de la geometría diferencial propiamente dicha se incluyen en los primeros capítulos de la segunda parte.

Primera parte

**Topología**





# Capítulo I

## Preliminares topológicos

Suponemos al lector familiarizado con la topología elemental, es decir, con los conceptos de espacio topológico, espacio conexo, compacto, de Hausdorff, métrico, aplicación continua, etc. No obstante recordaremos aquí algunos conceptos y resultados topológicos que aparecen con menos frecuencia en otras áreas de la matemática. Empezaremos con algunos resultados topológicos sobre conjuntos convexos.

### 1.1 Convexidad

Recordemos que un subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  es *convexo* si contiene al segmento que une a dos cualesquiera de sus puntos, es decir, si cuando  $a, b \in A$  y  $t \in [0, 1]$ , entonces  $ta + (1 - t)b \in A$ .

Más en general, se dice que un punto  $x$  es *combinación convexa* de  $a_0, \dots, a_m$  si es de la forma

$$x = t_0 a_0 + \dots + t_m a_m, \quad t_0 + \dots + t_m = 1, \quad t_i \geq 0.$$

Si  $A$  es convexo, entonces  $A$  contiene a todas las combinaciones convexas de sus puntos. En efecto, si  $t_0 = 1$  entonces  $x = a_0 \in A$ , mientras que si  $t_0 \neq 1$ , entonces

$$t_0 a_0 + \dots + t_m a_m = t_0 a_0 + (1 - t_0) \left( \frac{t_1}{1 - t_0} a_1 + \dots + \frac{t_m}{1 - t_0} a_m \right),$$

y basta razonar por inducción sobre  $m$ .

Dado un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , la *envoltura convexa* de  $A$  es el conjunto formado por todas las combinaciones convexas de puntos de  $A$ . Es claro que se trata del mínimo conjunto convexo en  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $A$ .

**Teorema 1.1** *La clausura de un conjunto convexo es convexa.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y tomemos  $x, y \in \overline{C}$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Si  $\{x_n\}_n$  e  $\{y_n\}_n$  son sucesiones en  $C$  que convergen a  $x$  e  $y$  respectivamente, entonces  $\{\lambda x_n + (1-\lambda)y_n\}_n$  es una sucesión en  $C$  que converge a  $\lambda x + (1-\lambda)y$ , luego  $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{C}$ . ■

Para los resultados siguientes conviene probar primero un resultado técnico general. Afirma que si nos movemos en línea recta desde un punto interior de un convexo hasta un punto de su frontera, entonces todos los puntos por los que pasamos, salvo quizá el último, están en el interior del convexo.

**Teorema 1.2** *Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo, sea  $x$  un punto de su interior e  $y$  un punto de su clausura. Entonces, si  $0 < \lambda \leq 1$ , el punto  $\lambda x + (1-\lambda)y$  está en el interior de  $C$ .*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos  $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ , de modo que  $x = \frac{1}{\lambda}z - \frac{1-\lambda}{\lambda}y$ . Para cada par de puntos  $z', y' \in \mathbb{R}^n$ , sea  $x' = \frac{1}{\lambda}z' - \frac{1-\lambda}{\lambda}y'$ . Así,

$$z' = \lambda x' + (1-\lambda)y'.$$

Si tomamos  $y', z'$  suficientemente próximos a  $y$  y  $z$  respectivamente, podemos conseguir que  $x'$  esté arbitrariamente próximo a  $x$ . Así, como  $x$  es un punto interior de  $C$ , podemos conseguir que  $x' \in C$ . Ahora bien, como  $y$  está en la clausura de  $C$ , podemos tomar puntos  $y' \in C$  arbitrariamente próximos a  $y$ , y si  $z$  no estuviera en el interior de  $C$ , tendríamos puntos  $z' \in \mathbb{R}^n \setminus C$  arbitrariamente próximos a  $z$ , con lo que obtendríamos una combinación convexa  $z'$  de dos puntos de  $C$  que no estaría en  $C$ , en contradicción con la convexidad de  $C$ . ■

Definimos

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}, \quad S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

Claramente la bola  $B^n$  es un compacto convexo (basta aplicar las propiedades de la norma euclídea en  $\mathbb{R}^n$ ), y la esfera  $S^{n-1}$  es la frontera de  $B^n$ .

**Teorema 1.3** *Todo espacio compacto convexo  $K \subset \mathbb{R}^n$  de interior no vacío es homeomorfo a  $B^n$ . Además el homeomorfismo hace corresponder  $\partial K$  con  $S^{n-1}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Aplicando una traslación si es preciso podemos suponer que  $0$  está en el interior de  $K$ . Para cada  $x \in S^{n-1}$ , llamemos

$$t_x = \sup\{t > 0 \mid tx \in K\}.$$

Como  $K$  está acotado y  $0$  está en su interior, es claro que  $t_x > 0$  está bien definido. Además es claro que  $g(x) = t_x x \in \partial K$ , luego tenemos definida una función  $g : S^{n-1} \rightarrow \partial K$ . Es fácil ver que es biyectiva. Concretamente, su inversa  $f : \partial K \rightarrow S^{n-1}$  es la dada por  $f(x) = x/\|x\|$ . Ciertamente,  $g \circ f = 1$ , lo que prueba que  $g$  es inyectiva. Falta probar que  $f \circ g = 1$ . Tomemos  $x \in \partial K$ , sea  $y = f(x)$  y  $t_0 = \|x\|$ . Por convexidad  $tx \in K$  para todo  $t \leq t_0$ , luego  $t_y \geq t_0$ . Si fuera  $t_y > t_0$  entonces,  $x$  sería combinación convexa de  $0$  y  $g(y)$ , y

por el teorema anterior  $x$  sería un punto interior de  $K$ , cuando tenemos que es un punto frontera. Así pues,  $t_y = t_0$ , luego  $g(f(x)) = g(y) = x$ .

Puesto que  $f$  es claramente continua, por compacidad es un homeomorfismo, luego  $g$  también lo es. Ahora podemos definir  $h : B^n \rightarrow K$  mediante

$$h(x) = \begin{cases} \|x\| g(x/\|x\|) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que  $h$  es un homeomorfismo. ■

Por ejemplo, es claro que el producto cartesiano de convexos es convexo, luego el cubo  $I^n$  es un compacto convexo de interior no vacío. Por el teorema anterior, es homeomorfo a  $B^n$ .

Necesitamos una caracterización similar de los abiertos convexos, que podemos obtener de este teorema usando lo siguiente:

**Teorema 1.4** *Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto convexo, entonces  $A$  coincide con el interior de su clausura.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $z$  un punto del interior de la clausura de  $A$  y sea  $x \neq z$  un punto de  $A$ . El segmento que une  $x$  con  $z$  puede prolongarse un poco sin salirse de la clausura de  $A$ , es decir, podemos expresar  $z$  como combinación convexa de  $x$  y un punto  $y \in \bar{A}$ . Por el teorema 1.2 concluimos que  $z \in A$ . ■

Como consecuencia obtenemos:

**Teorema 1.5** *Todo abierto convexo en  $\mathbb{R}^n$  es homeomorfo a una bola abierta.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un abierto convexo. Aplicando un homeomorfismo podemos suponer que está acotado, de modo que  $\bar{A}$  es un compacto convexo de interior no vacío. Por el teorema 1.3,  $\bar{A}$  es homeomorfo a  $B^n$ , y el homeomorfismo transforma  $\partial\bar{A}$  en  $S^{n-1}$ , luego transforma  $A$  (por el teorema anterior) en la bola abierta unitaria. ■

## 1.2 Variedades topológicas

El valor de la topología como herramienta matemática se debe principalmente a que permite aplicar las mismas ideas al estudio de los espacios con una interpretación geométrica clara (los espacios  $\mathbb{R}^n$  y sus subespacios, las variedades diferenciales, entre ellas las superficies de Riemann, etc.) y los espacios abstractos (espacios de funciones, espacios de medidas, etc.) La topología algebraica se aplica principalmente a los espacios que provienen de la geometría, y la mayoría de ellos son variedades topológicas, en el sentido siguiente:

**Definición 1.6** Una *variedad topológica* de dimensión  $n$  es un espacio topológico de Hausdorff en el que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$ .

Es frecuente exigir la conexión en la definición general de variedad, pero por motivos técnicos nos conviene no hacerlo, de modo que cuando queramos considerar variedades conexas lo indicaremos explícitamente. Notemos que las variedades son localmente arcoconexas, luego las variedades conexas son, de hecho, arcoconexas.

En una variedad topológica  $V$  de dimensión  $n$ , los abiertos homeomorfos a bolas abiertas de  $\mathbb{R}^n$  se llaman *abiertos coordinados*, y constituyen una base de  $V$ . En efecto, supongamos que  $x \in V$  y que  $U \subset V$  es un entorno abierto de  $x$  en  $V$ . Por definición de variedad  $x$  tiene un entorno coordinado  $U'$ . Sea, pues,  $B$  una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$  y  $f : U' \rightarrow B$  un homeomorfismo. Entonces  $U \cap U'$  es abierto en  $U'$ , luego  $f[U \cap U']$  es un abierto en  $B$ . Podemos tomar una bola abierta  $B'$  tal que  $f(x) \in B' \subset f[U \cap U']$ . Así  $f^{-1}[B']$  es un entorno coordinado de  $x$  contenido en  $U$ .

Las variedades más simples son los abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Obviamente todo punto de un abierto de  $\mathbb{R}^n$  tiene un entorno abierto homeomorfo (de hecho, igual) a una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$ , luego es una variedad de dimensión  $n$ . Más en general, cualquier abierto en una variedad es una variedad de la misma dimensión.

**Ejemplo** *La esfera  $S^n$  es una variedad topológica de dimensión  $n$ .*

En efecto, para probarlo tomamos un punto  $y \in S^n$  y consideramos un índice  $i$  tal que  $y_i \neq 0$ . Por simplicidad supondremos  $y_{n+1} > 0$ . La aplicación  $B^n \rightarrow S^n$  dada por  $x \mapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$  es claramente inyectiva y continua, luego un homeomorfismo en su imagen (porque  $B^n$  es compacto), y se restringe a un homeomorfismo entre la bola abierta unitaria de  $\mathbb{R}^n$  y el abierto

$$S_+^n = \{x \in S^n \mid x_{n+1} > 0\},$$

que es un entorno de  $y$ . En el caso  $y_{n+1} < 0$  tomamos la raíz cuadrada con signo negativo.

Una prueba alternativa de que las esferas son variedades se obtiene observando que si  $P \in S^n$  entonces  $S^n \setminus \{P\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . No perdemos generalidad si suponemos que  $P = (0, \dots, 0, 1)$ . Basta considerar la proyección estereográfica  $f : S^n \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$f(x) = \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

Su inversa es  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{P\}$ , dada por

$$g(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right).$$

Así pues, dado cualquier punto  $Q \in S^n$ , quitando a la esfera cualquier otro punto  $P \neq Q$  obtenemos un entorno de  $Q$  homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  y, por consiguiente, a una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$ .

Si añadimos un punto  $\infty$  a  $\mathbb{R}^n$ , podemos extender la proyección estereográfica hasta una biyección entre  $S^n$  y  $\mathbb{R}_\infty^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ . Es fácil ver que los entornos abiertos de  $P$  en  $S^n$  se corresponden entonces con los conjuntos  $\mathbb{R}_\infty^n \setminus K$ , donde  $K$  es compacto en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, la proyección estereográfica se extiende a un homeomorfismo entre  $S^n$  y la compactificación de Alexandroff de  $\mathbb{R}^n$ . ■

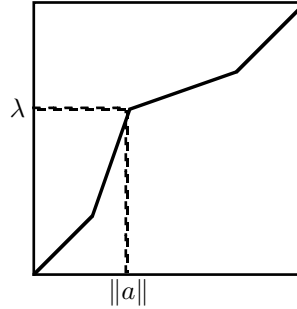
Vamos a probar ahora que las variedades topológicas son homogéneas, en el sentido de que existen homeomorfismos que transforman cualquier punto en cualquier otro. Para ello necesitamos primero demostrar lo siguiente:

**Teorema 1.7** *Sea  $B$  la bola abierta de radio 1 en  $\mathbb{R}^n$  y sean  $a$  y  $b$  dos puntos de  $B$ . Entonces existe un homeomorfismo  $f : B \rightarrow B$  tal que  $f(a) = b$  y además  $f$  coincide con la identidad en una corona  $\|x\| \geq r$ .*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que  $a \neq 0 \neq b$  y, a su vez, supongamos que  $a$  y  $b$  están sobre el mismo radio, es decir,  $b = \lambda a$ , con  $0 < \lambda < 1$ .

Consideremos  $r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  según la figura, es decir, un homeomorfismo que coincida con la identidad alrededor de 0 y 1 y tal que  $r(\|a\|) = \lambda$ .

Definimos  $f(x) = r(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}$ , y es claro que cumple lo pedido (se entiende que  $f(0) = 0$ ),  $f$  es continua en 0 porque en un entorno coincide con la identidad.



Ahora podemos suponer que  $\|a\| = \|b\|$ . Elijiendo un sistema de coordenadas adecuado podemos hacer que  $a$  y  $b$  tengan nulas todas las coordenadas distintas de las dos primeras, con lo que  $a$  se transforma en  $b$  mediante un giro de un ángulo  $\alpha_0$  adecuado. Consideramos ahora una función continua  $\alpha$  que valga 0 alrededor de 0 y de 1 y tal que  $\alpha(\|a\|) = \alpha_0$ . Basta definir

$$f(x) = (x_1 \cos \alpha(\|x\|) - x_2 \sin \alpha(\|x\|), x_1 \sin \alpha(\|x\|) + x_2 \cos \alpha(\|x\|), x_3, \dots, x_n).$$

Nuevamente es claro que  $f$  cumple lo pedido. Finalmente, si  $a = 0$  consideramos una bola  $B'$  de centro distinto de 0 que contenga a 0 y esté contenida en  $B$ . Es claro que la parte ya probada vale para  $B'$ , por lo que tenemos un homeomorfismo de  $B'$  en  $B'$  que transforma el 0 en un punto distinto de 0 y es la identidad en una corona, luego se extiende a un homeomorfismo  $g : B \rightarrow B$  dejando invariantes a los puntos de fuera de  $B'$ . Ahora basta componer este homeomorfismo con otro que transforme  $g(0)$  en  $b$ . ■

**Nota** En el capítulo IX usaremos que si las aplicaciones  $r$  y  $\alpha$  que hemos usado en la construcción del teorema anterior son de clase  $C^\infty$  (y  $r$  tiene inversa también  $C^\infty$ ) entonces el homeomorfismo  $f$  es en realidad un difeomorfismo de clase  $C^\infty$ .

**Teorema 1.8** *Si  $V$  es una variedad topológica,  $G \subset V$  es un abierto conexo y  $x, y$  son dos puntos de  $G$ , existe un homeomorfismo  $f : V \rightarrow V$  que fija a los puntos de  $V \setminus G$  y cumple  $f(x) = y$ .*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos un arco en  $G$  que une  $x$  con  $y$ , cubrimos cada punto de su imagen por un entorno coordenado contenido en  $G$  y extraemos un subcubrimiento finito por compacidad. De aquí es fácil obtener una sucesión finita de puntos  $x_0, \dots, x_n$  tal que  $x_0 = x$ ,  $x_n = y$  y dos cualesquiera consecutivos están contenidos en un mismo abierto coordenado. Es claro entonces que basta probar el teorema en el caso en que  $x$  e  $y$  estén en un mismo abierto coordenado  $U \subset G$ . Tomemos un homeomorfismo  $g : U \rightarrow B$ , donde  $B$  es una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$ . Por el teorema anterior existe un homeomorfismo de  $B$  en  $B$  que coincide con la identidad en una corona y que transforma  $g(x)$  en  $g(y)$ . Éste induce un homeomorfismo de  $U$  en  $U$  que transforma  $x$  en  $y$  y que coincide con la identidad fuera de un compacto contenido en  $U$ . Es claro entonces que podemos extenderlo a un homeomorfismo de  $V$  en sí misma que fija a los puntos de  $V \setminus U$ . ■

Puede probarse que toda variedad topológica metrizable es homeomorfa a un subespacio de un cierto  $\mathbb{R}^n$ . Nosotros nos limitaremos a demostrarlo para variedades compactas, donde la prueba es muy sencilla:

**Teorema 1.9** *Para toda variedad compacta  $V$  existe un natural  $m$  y una aplicación continua e inyectiva  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ .*

DEMOSTRACIÓN: Podemos cubrir a  $V$  con un número finito de abiertos  $U_1, \dots, U_r$  homeomorfos a bolas abiertas de  $\mathbb{R}^n$ . Tomemos homeomorfismos  $f_i : U_i \rightarrow S^n \setminus \{N\}$ , donde  $N$  es el polo norte. Todos ellos se extienden a aplicaciones continuas  $f_i : V \rightarrow S^n$  de modo que los puntos de  $V \setminus U_i$  tienen imagen  $N$ . A su vez, estas aplicaciones definen  $f : V \rightarrow (S^n)^r$  mediante  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x))$ . Claramente, la aplicación  $f$  es inyectiva y continua, y  $(S^n)^r \subset \mathbb{R}^{r(n+1)}$ . ■

En el estudio de la homología de las variedades necesitaremos una propiedad nada trivial de las variedades compactas. Para introducirla conviene recordar antes que un espacio de Hausdorff  $X$  se dice *normal* si para todo par de cerrados disjuntos  $A_1$  y  $A_2$  de  $X$  existen abiertos disjuntos  $U_1$  y  $U_2$  en  $X$  tales que  $A_i \subset U_i$ . Más brevemente, se dice entonces que los abiertos  $U_i$  *separan* a los cerrados  $A_i$ .

Aunque los resultados que vamos a probar seguidamente se cumplen para espacios normales cualesquiera, nos bastará saber que son válidos para espacios metrizable. Ante todo notemos lo siguiente:

**Teorema 1.10** *Todo espacio metrizable es normal.*

DEMOSTRACIÓN: En efecto, si  $X$  es un espacio metrizable y  $A_1, A_2$  son dos cerrados disjuntos en  $X$ , consideramos la función continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \frac{d(x, A_1)}{d(x, A_1) + d(x, A_2)},$$

donde  $d$  es cualquier distancia que induzca la topología de  $x$ . Notemos que el denominador no se anula porque los cerrados son disjuntos. Claramente,  $f$  toma el valor 0 sobre  $A_1$  y el valor 1 sobre  $A_2$ , luego un par de abiertos que separan a los cerrados dados son las antiimágenes de los intervalos  $] -\infty, 1/2[$  y  $]1/2, +\infty[$ . ■

**Definición 1.11** Un espacio de Hausdorff  $X$  es un *retracto absoluto* si cuando  $Y$  es un espacio metrizable<sup>1</sup>,  $C \subset Y$  es un cerrado y  $f : C \rightarrow X$  es una aplicación continua, entonces existe una aplicación continua  $F : Y \rightarrow X$  que extiende a  $f$ .

Para explicar el nombre de “retracto absoluto” conviene recordar que si  $X$  es un subespacio de un espacio de Hausdorff  $Y$ , entonces una *retracción* de  $Y$  en  $X$  es una aplicación continua  $r : Y \rightarrow X$  que deja fijos a todos los puntos de  $X$ . En tal caso se dice que  $X$  es un *retracto* de  $Y$ .

Observemos que si  $X$  es un retracto de  $Y$ , entonces  $X$  es cerrado en  $Y$ , pues  $X$  es el conjunto de puntos donde la retracción  $r$  coincide con la identidad en  $X$ . Recíprocamente, si  $X$  es un retracto absoluto, entonces  $X$  es un retracto de cualquier espacio métrico que lo contenga como subespacio cerrado. Más concretamente, si  $Y$  es un espacio métrico y  $C \subset Y$  es un subespacio cerrado homeomorfo a  $X$ , entonces  $C$  es un retracto de  $Y$ . Basta extender un homeomorfismo  $f : C \rightarrow X$  para obtener una aplicación continua  $F : Y \rightarrow X$  y luego considerar la retracción  $r = F \circ f^{-1}$ .

El teorema de Tietze afirma que el intervalo unidad  $I = [0, 1]$  es un retracto absoluto:

**Teorema 1.12 (Teorema de Tietze)** Si  $Y$  es un espacio metrizable y  $C \subset Y$  es un cerrado, entonces toda aplicación continua  $f : C \rightarrow I$  se extiende a  $Y$ .

DEMOSTRACIÓN: Veamos que

$$F(x) = \begin{cases} \inf_{c \in C} \left( f(c) + \frac{d(x,c)}{d(x,C)} - 1 \right) & \text{si } x \in Y \setminus C \\ f(x) & \text{si } x \in C \end{cases}$$

es una extensión continua de  $f$ .

Para cada  $c \in C$  y cada  $x \in Y \setminus C$  llamemos

$$p_c(x) = f(c) + \frac{d(x,c)}{d(x,C)} - 1.$$

Notemos que para cada  $x \in Y \setminus C$  y cada  $\epsilon > 0$  siempre podemos encontrar un punto  $c \in C$  que haga

$$\frac{d(x,c)}{d(x,C)} - 1 < \epsilon,$$

<sup>1</sup>Es habitual exigir que  $Y$  sea normal en lugar de metrizable.

por lo que  $F : Y \rightarrow [0, 1]$ . Para probar que  $F$  es continua en  $Y \setminus C$  basta ver que lo es en cada bola abierta  $B$  cuya clausura no corte a  $C$ . Fijada  $B$ , sea  $\eta_0 = d(C, B) > 0$  y sea  $\eta_1 = \sup_{x \in B} d(x, C) < +\infty$ .

Tomemos  $x, y \in B$  y  $c \in C$  con  $d(x, c) \leq 3\eta_0$ . Entonces

$$\begin{aligned} |p_c(x) - p_c(y)| &= \left| \frac{d(x, c)}{d(x, C)} - \frac{d(y, c)}{d(y, C)} \right| \\ &\leq \frac{d(x, C)|d(y, C) - d(x, C)| + d(x, C)|d(x, c) - d(y, c)|}{d(x, C)d(y, C)} \\ &\leq \frac{3\eta_0 + \eta_1}{\eta_0^2} d(x, y) = Kd(x, y). \end{aligned}$$

Dado  $x \in B$ , para todo  $0 < \epsilon < 1$  existe un  $c \in C$  tal que  $|F(x) - p_c(x)| < \epsilon/2$ . Ha de ser  $d(x, c) \leq 3\eta_0$ , pues en caso contrario  $p_c(x) \geq (3\eta_0)/\eta_0 - 1 \geq 2$ .

Fijemos  $\delta = \epsilon/2K$ . Así si  $d(x, y) < \delta$  se cumple  $|p_c(x) - p_c(y)| < \epsilon/2$ , luego  $|F(x) - p_c(y)| < \epsilon$  y por consiguiente  $F(y) \leq p_c(y) \leq F(x) + \epsilon$ .

Tomemos ahora  $c' \in C$  tal que  $|F(y) - p_{c'}(y)| < \epsilon/2$ . Como antes concluimos que  $d(y, c) \leq 3\eta_0$ , luego  $|p_{c'}(x) - p_{c'}(y)| < \epsilon/2$  y así  $F(x) \leq p_{c'}(x) \leq F(y) + \epsilon$ .

En resumen, si  $d(x, y) < \delta$  entonces  $|F(x) - F(y)| < \epsilon$ . Esto prueba que  $F$  es continua en  $x$ .

Veamos ahora que  $F$  es continua en todo punto  $c_0 \in C$ . Dado  $\epsilon > 0$  sea  $\delta > 0$  tal que si  $c \in C$  cumple  $d(c, c_0) < 4\delta$  entonces  $|f(c) - f(c_0)| < \epsilon/2$ . Basta probar que si  $x \in Y \setminus C$  cumple  $d(x, c_0) < \delta$  entonces  $|F(x) - f(c_0)| < \epsilon$ .

Tomemos  $c \in C$  tal que

$$d(x, c) \leq d(x, c_0) < \delta \quad \text{y} \quad |d(x, c) - d(x, C)| < (\epsilon/2)d(x, C).$$

Así

$$\frac{d(x, c)}{d(x, C)} - 1 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como  $d(c, c_0) < 2\delta$  tenemos  $F(x) \leq p_c(x) \leq f(c_0) + \epsilon$ . Por otro lado, para todo  $c \in C$ , si  $d(x, c) \geq 2\delta$  entonces

$$p_c(x) \geq \frac{2\delta}{\delta} - 1 = 1 \geq f(c_0) - \epsilon,$$

y si  $d(x, c) < 2\delta$  entonces  $d(c, c_0) < 4\delta$ , luego  $p_c(x) \geq f(c) \geq f(c_0) - \epsilon$ .

Por consiguiente  $F(x) \geq f(c_0) - \epsilon$  y en total  $|F(x) - f(c_0)| \leq \epsilon$ . ■

Es inmediato comprobar que un producto de retracts absolutos es un retracto absoluto (basta extender por separado cada función coordenada). Por consiguiente, los  $I^n$  son retracts absolutos y, por consiguiente, las bolas  $B^n$  también lo son.

En general, las variedades compactas no son retracts absolutos. Por ejemplo, el teorema 3.8 muestra que las esferas  $S^n$  no lo son. Sin embargo, sí cumplen una propiedad ligeramente más débil:



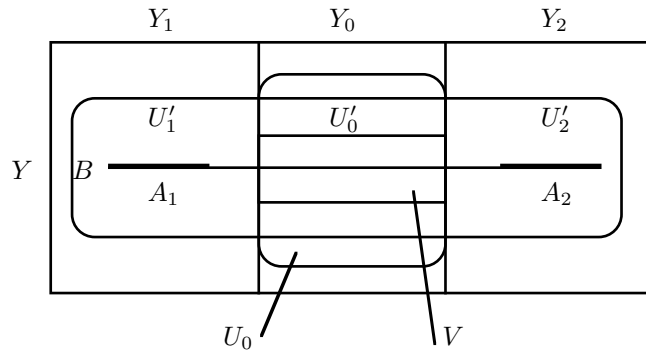
**Definición 1.13** Un espacio de Hausdorff  $X$  es un *retracto absoluto de entornos* si cuando  $Y$  es un espacio metrizable,  $C$  es un subespacio cerrado y  $f : C \rightarrow X$  es una aplicación continua, entonces existe un entorno  $V$  de  $C$  en  $Y$  (es decir, un abierto en  $Y$  que contiene a  $C$ ) tal que  $f$  se extiende a una función continua  $F : V \rightarrow X$ .

En particular, es claro que si un subespacio cerrado  $C$  de un espacio metrizable  $X$  es un retracto absoluto de entornos, entonces existe una retracción de un entorno de  $C$  en  $C$ . Observemos que todo retracto absoluto es *a fortiori* un retracto absoluto de entornos, así como que todo abierto  $A$  en un retracto absoluto de entornos  $X$  es un retracto absoluto de entornos. En efecto, si  $C$  es cerrado en  $Y$  y  $f : C \rightarrow A$  es una aplicación continua, entonces existe un entorno  $W$  de  $C$  en  $Y$  tal que  $f$  se extiende a una aplicación continua  $G : W \rightarrow X$ . Basta tomar  $V = G^{-1}[A]$  y  $F = G|_V$ .

Así pues, dado que  $B^n$  es un retracto absoluto, concluimos que las bolas abiertas en  $\mathbb{R}^n$  son retractsos absolutos de entornos. Del teorema siguiente se sigue inmediatamente que todas las variedades compactas son retractsos absolutos de entornos:

**Teorema 1.14** Sean  $X_1$  y  $X_2$  dos abiertos en un espacio  $X$  tales que ambos son retractsos absolutos de entornos. Entonces  $X_1 \cup X_2$  también lo es.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que  $X = X_1 \cup X_2$ . Sea  $Y$  un espacio metrizable,  $B \subset Y$  un cerrado y  $f : B \rightarrow X$  una aplicación continua. Llamemos  $A_1 = B \setminus f^{-1}[X_2]$  y  $A_2 = B \setminus f^{-1}[X_1]$ . Claramente  $A_1$  y  $A_2$  son cerrados disjuntos en  $B$ . Como  $Y$  es normal existen abiertos disjuntos  $Y_1, Y_2$  tales que  $A_i \subset Y_i$ . Llamemos  $Y_0 = Y \setminus (Y_1 \cup Y_2)$ . Sea  $B_i = Y_i \cap B$ , para  $i = 0, 1, 2$ . De este modo  $f[B_1] \subset X_1$ ,  $f[B_2] \subset X_2$ ,  $f[B_0] \subset X_1 \cap X_2$ .



Como  $X_1 \cap X_2$  es un retracto absoluto de entornos,  $f|_{B_0}$  se extiende a una función  $g_0 : U_0 \rightarrow X_1 \cap X_2$ , donde  $U_0$  es un entorno de  $B_0$  en  $Y_0$ . Notemos que  $U_0 = (U_0 \cup B) \cap Y_0$  es cerrado en  $U_0 \cup B$ , por lo que  $f$  y  $g_0$  determinan una función continua  $g : U_0 \cup B \rightarrow X$ .

Ahora usamos que  $B_0$  e  $Y_0 \setminus U_0$  son cerrados disjuntos en  $Y_0$ , por lo que existen abiertos disjuntos  $V$  y  $W$  (en  $Y_0$ ) tales que  $B_0 \subset V$  e  $Y_0 \setminus U_0 \subset W$ . Entonces,  $U'_0 = Y_0 \setminus W$  es cerrado y  $V \subset U'_0 \subset U_0$ .

Se cumple que  $U'_0 \cup B_i$  es cerrado en  $Y$ , y  $g[U'_0 \cup B_i] \subset X_i$ , para  $i = 1, 2$ , luego, al ser  $X_i$  un retracto absoluto de entornos, la aplicación  $g|_{U'_0 \cup B_i}$  se extiende a una aplicación continua  $G_i : U_i \rightarrow X_i$ , donde  $U_i$  es un abierto en  $Y$ . Sea  $U'_i = U_i \cap (U'_0 \cup Y_i)$  y sea  $U = U'_1 \cup U'_2$ . Se cumple que cada  $U'_i$  es cerrado en  $U$ , pues  $U \setminus U'_1 = U \cap Y_2$ , y análogamente para  $U'_2$ . Además  $U'_0 = U'_1 \cap U'_2$ . Por consiguiente, las dos funciones  $G_i$  determinan una función continua  $F : U \rightarrow X$  que extiende a  $f$ .

Finalmente observamos que  $U$  contiene a  $E = (U_1 \cap (V \cup Y_1)) \cup (U_2 \cap (V \cup Y_2))$ , que a su vez contiene a  $B$  y además es abierto en  $Y$ . En efecto, podemos expresar  $V = Y_0 \cap V'$ , donde  $V'$  es abierto en  $Y$ , y podemos suponer además que  $V' \subset U_1 \cap U_2$ . Entonces  $E = (U_1 \cap (V' \cup Y_1)) \cup (U_2 \cap (V' \cup Y_2))$ . ■

Como ya habíamos anunciado, ahora tenemos:

**Teorema 1.15** *Toda variedad topológica compacta es un retracto absoluto de entornos.*

DEMOSTRACIÓN: Toda variedad topológica compacta puede cubrirse por un número finito de abiertos homeomorfos a bolas abiertas de  $\mathbb{R}^n$ . Cada uno de ellos es un retracto absoluto de entornos, y basta aplicar el teorema anterior. ■

Una propiedad útil de las variedades topológicas es la paracompacidad. En general no toda variedad es paracompacta, pero una condición suficiente es que tenga una base numerable. Uniendo esto a la compacidad local podemos aplicar los teoremas siguientes:

**Teorema 1.16** *Si  $V$  es un espacio topológico localmente compacto con una base numerable, entonces existe una familia de abiertos  $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$  de modo que  $\overline{G}_n$  es compacto,  $\overline{G}_n \subset G_{n+1}$  y  $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$ .*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos una base numerable de  $V$ . Todo punto tiene un entorno de clausura compacta, el cual contiene un abierto básico de clausura compacta. Por consiguiente, podemos partir de una base numerable formada por abiertos con clausura compacta. Digamos  $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ . Definimos  $G_0 = B_0$ . Entonces  $\overline{G}_0$  es compacta, luego existe un número natural  $j_1 > 1$  tal que

$$\overline{G}_0 \subset \bigcup_{i=0}^{j_1} B_i = G_1.$$

Claramente,  $\overline{G}_1$  es compacta, luego existe un  $j_2 > 2$  tal que

$$\overline{G}_1 \subset \bigcup_{i=0}^{j_2} B_i = G_2.$$

Continuando de este modo obtenemos la familia de abiertos buscada. ■

Se dice que un cubrimiento abierto  $\mathcal{U}$  de un espacio topológico *refina* a otro  $\mathcal{V}$  si todo abierto de  $\mathcal{U}$  está contenido en un abierto de  $\mathcal{V}$ . Una familia de conjuntos

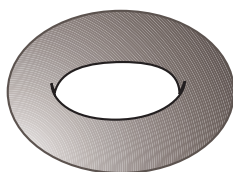
en un espacio topológico es *localmente finita* si todo punto del espacio tiene un entorno que corta únicamente a un número finito de conjuntos de la familia. El teorema anterior nos permite probar la siguiente propiedad de paracompacidad:

**Teorema 1.17** *Sea  $V$  un espacio topológico localmente compacto con una base numerable y sea  $\mathcal{B}$  una base cualquiera de  $V$ . Entonces todo cubrimiento abierto de  $V$  tiene un refinamiento localmente finito formado por abiertos de  $\mathcal{B}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\{G_n\}_{n=0}^\infty$  una familia de abiertos según el teorema anterior. Convenimos que  $G_i = \emptyset$  si  $i < 0$ . El compacto  $\overline{G_n} \setminus G_{n-1}$  puede cubrirse por un número finito de abiertos de  $\mathcal{B}$  contenidos en  $G_{n+1} \setminus \overline{G_{n-2}}$  y en alguno de los abiertos del cubrimiento dado. Si llamamos  $\mathcal{V}_n$  al conjunto de estos abiertos, es claro que la unión de todos los  $\mathcal{V}_n$  es un cubrimiento de  $V$  que refina al cubrimiento dado, y es localmente finito porque un abierto de  $\mathcal{V}_n$  corta a lo sumo a los abiertos de  $\mathcal{V}_i$  para  $i = n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$ . ■

### 1.3 Espacios cociente

La formación de cocientes es un método de obtener (o describir) espacios más complejos a partir de otros más simples. Veamos primeramente un ejemplo a nivel intuitivo y después introduciremos la teoría formal. Pensemos en un toro, es decir, en la superficie que muestra la figura siguiente:



El toro puede ser “construido” a partir de un cuadrado “pegando” sus lados dos a dos: si primero pegamos dos lados opuestos obtenemos un cilindro, de modo que los otros dos lados se han convertido en circunferencias. Si ahora pegamos estos dos lados obtenemos el toro.



De este modo, trabajar (en topología) con un toro es equivalente a trabajar con un cuadrado con el convenio de que los cuatro vértices son en realidad un mismo punto y que cada punto de un lado es el mismo que el correspondiente en el lado opuesto.

Para formalizar estas ideas hemos de definir este concepto de identificar puntos en un espacio topológico. La forma más general de hacerlo es la siguiente:

**Definición 1.18** Sea  $X$  un espacio topológico y  $R$  una relación de equivalencia en  $X$ . Sea  $X/R$  el conjunto cociente (formado por las clases de equivalencia) y sea  $p : X \rightarrow X/R$  la proyección canónica que a cada punto le asocia su clase. La *topología cociente* en  $X/R$  es la que tiene por abiertos a los conjuntos  $A \subset X/R$  tales que  $p^{-1}[A]$  es abierto en  $X$ .

Es fácil ver que la topología cociente, así definida, es realmente una topología en  $X/R$ . De la definición se sigue inmediatamente que  $p : X \rightarrow X/R$  es continua y suprayectiva. Conviene tener presente que  $X/R$  no es necesariamente un espacio de Hausdorff aunque  $X$  lo sea. No obstante, en todos los casos que vamos a considerar será fácil comprobar que sí lo es. En este sentido es útil el teorema siguiente:

**Teorema 1.19** a) *Un espacio topológico  $X$  es de Hausdorff si y sólo si la diagonal  $\Delta = \{(x, x) \mid X \in X\}$  es cerrada en  $X \times X$ .*

b) *Si  $K$  es un espacio compacto y  $R$  es una relación de equivalencia en  $K$  que, como subespacio de  $K \times K$ , es cerrada, entonces el cociente  $K/R$  es un espacio de Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN: a) es inmediato: si  $\Delta$  es cerrado y  $x, y$  son puntos distintos en  $X$ , entonces  $(x, y) \notin \Delta$ , luego existe un abierto básico tal que  $(x, y) \in U \times V$ ,  $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ . Esto último implica que  $U \cap V = \emptyset$ . La implicación contraria es similar.

b) Basta observar que la diagonal  $\Delta$  de  $(K/R) \times (K/R)$  es  $(p \times p)[R]$ , donde  $p : K \rightarrow K/R$  es la proyección canónica. ■

Una aplicación continua y suprayectiva  $f : X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos es una *identificación* si un conjunto  $A \subset Y$  es abierto en  $Y$  cuando y sólo cuando  $f^{-1}[A]$  es abierto en  $X$ .

En estos términos, las proyecciones en los cocientes son identificaciones. Notar que en la definición de identificación podemos sustituir “abierto” por “cerrado”.

La relación entre cocientes e identificaciones es más profunda. Dada una aplicación continua y suprayectiva  $f : X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos, podemos considerar la relación de equivalencia  $R_f$  en  $X$  dada por  $x R_f y$  si y sólo si  $f(x) = f(y)$ . Tenemos entonces una biyección natural  $g : X/R_f \rightarrow Y$  tal que  $p \circ g = f$ . Claramente  $g$  es continua y es un homeomorfismo si y sólo si  $f$  es una identificación.

Otro hecho útil es que una aplicación continua y suprayectiva  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios topológicos que sea abierta o cerrada es una identificación. En efecto, si  $A \subset Y$  cumple que  $f^{-1}[A]$  es abierto (resp. cerrado) en  $X$ , entonces  $A = f[f^{-1}[A]]$  es abierto (resp. cerrado) en  $Y$ . En particular, si  $X$  es compacto, toda aplicación continua y suprayectiva de  $X$  en otro espacio (de Hausdorff)  $Y$  es una identificación.

**Ejemplo** La aplicación  $f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$f(\phi, \theta) = (R \cos \theta + r \cos \phi \cos \theta, R \sin \theta + r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi),$$

donde  $0 < r < R$ , es continua y su imagen es un toro. Como el cuadrado es compacto, tenemos que el toro es homeomorfo al espacio que resulta de identificar en el cuadrado los puntos con la misma imagen por  $f$ , y es claro que cada punto se identifica únicamente con el correspondiente del lado opuesto, excepto los cuatro vértices, que se identifican a un solo punto. ■

Un tipo particular de cocientes son los que “pegan” dos espacios a través de un subespacio. Para reducir la situación a la definición general de cociente que hemos dado, hemos de definir la suma topológica:

**Definición 1.20** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y sea

$$X \oplus Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}.$$

Podemos identificar de forma natural a  $X$  con  $X \times \{0\}$  y a  $Y$  con  $Y \times \{1\}$ , de modo que ahora  $X \cap Y = \emptyset$ . Consideraremos a  $X \oplus Y$  con la topología para la cual un conjunto  $A$  es abierto si y sólo si  $A \cap X$  es abierto en  $X$  y  $A \cap Y$  es abierto en  $Y$ . Al espacio  $X \oplus Y$  lo llamaremos *suma topológica* de  $X$  e  $Y$ .

Es inmediato comprobar que, considerando a  $X$  e  $Y$  como subespacios de  $X \oplus Y$ , su topología original coincide con la que heredan de la suma. Así mismo es claro que  $X$  e  $Y$  son abiertos disjuntos en  $X \oplus Y$ .

Consideremos ahora dos espacios topológicos  $X_1$  y  $X_2$ , junto con dos subespacios cerrados homeomorfos  $C_1$  y  $C_2$ . Sea  $h : C_1 \longrightarrow C_2$  un homeomorfismo. Definimos la *suma amalgamada*  $X_1 \oplus_h X_2$  como el cociente de  $X_1 \oplus X_2$  determinado por la relación de equivalencia  $R_h$  dada por

$$x R_h y \text{ si y sólo si } x = y \text{ o } x \in C_1, y = h(x) \text{ o } y \in C_1, x = h(y).$$

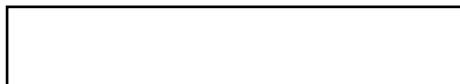
Para cada  $i$ , si componemos la inclusión natural  $X_i \longrightarrow X_1 \oplus X_2$  con la proyección  $p : X_1 \oplus X_2 \longrightarrow X_1 \oplus_h X_2$  obtenemos una aplicación continua, y es fácil ver que es un homeomorfismo en su imagen. En efecto, si  $C \subset X_1$  es cerrado, entonces  $C$  es también cerrado en  $X_1 \oplus X_2$ , y  $p[C]$  es cerrado en  $X_1 \oplus_h X_2$  porque  $p^{-1}[p[C]] = C \cup h[C \cap C_1]$ , que es cerrado en  $X_1 \oplus X_2$ .

Así pues, podemos identificar a cada  $X_i$  con un subespacio de  $X_1 \oplus_h X_2$ . Además cada  $X_i$  es cerrado, pues, por ejemplo,  $p^{-1}[X_1] = X_1 \cup C_2$ , que es cerrado en  $X_1 \oplus X_2$ .

Si llamamos  $C = p[C_1] = p[C_2]$ , tenemos que  $C$  es cerrado en  $X_1 \oplus_h X_2$  y, considerados como subespacios de  $X_1 \oplus_h X_2$ , se cumple que  $X_1 \cap X_2 = C$ .

## 1.4 Cocientes de polígonos

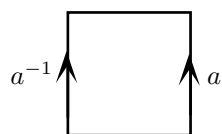
Consideremos el rectángulo de la figura:



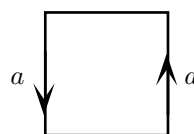
Si identificamos los puntos del lado izquierdo con los del derecho obtenemos una cinta. Ahora bien, hay dos formas esencialmente distintas de realizar esta identificación: si a cada punto del lado izquierdo le hacemos corresponder el que está a su misma altura en el lado derecho obtenemos una cinta normal, una superficie cilíndrica; pero si identificamos los lados de modo que el vértice superior izquierdo se corresponda con el inferior derecho y viceversa, obtenemos una cinta de Möbius, con una sola cara y un solo borde, homeomorfo a una circunferencia:



Para distinguir ambas formas de identificar los los lados del rectángulo usaremos la notación siguiente:



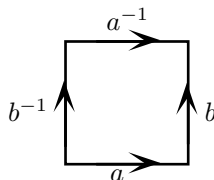
Cinta normal



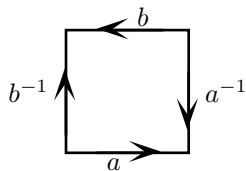
Cinta de Möbius

Las flechas indican que, en el cuadrado de la izquierda, identificamos los lados de modo que recorrer el izquierdo de abajo hacia arriba equivale a recorrer el derecho también de abajo hacia arriba, mientras que en el cuadrado de la derecha al recorrer el lado derecho de abajo hacia arriba estamos recorriendo el izquierdo de arriba hacia abajo. En el primer caso los recorridos tienen sentidos opuestos (horario en el lado izquierdo, antihorario en el derecho), mientras que en el segundo ambos tienen el mismo sentido. Por eso también usaremos la notación  $a^{-1}a$  para la primera identificación y  $aa$  para la segunda. El exponente negativo indica el cambio de sentido.

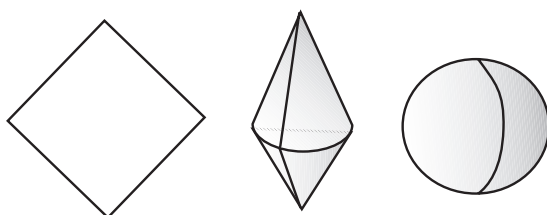
Con estos convenios podemos representar sin ambigüedad cualquier identificación de los lados de un polígono. Por ejemplo, en la sección anterior hemos visto que identificando los lados opuestos de un cuadrado obtenemos un toro. Dicho así, esto es ambiguo, pues hay que especificar la forma en que identificamos los lados. Con la notación que acabamos de introducir la identificación se representa así:



Podemos representar más brevemente la identificación sin más que escribir  $aba^{-1}b^{-1}$ . Veamos ahora el resultado que producen otros tipos de identificación. Por ejemplo



Gráficamente, al identificar los lados contiguos obtenemos dos conos unidos por la base. “Hinchando” el resultado obtenemos una esfera:



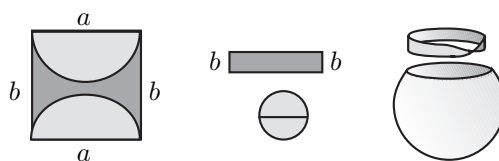
No es difícil obtener expresiones explícitas para el homeomorfismo. Partamos, por ejemplo, del cuadrado  $C$  de vértices  $(\pm 1, 0)$  y  $(0, \pm 1)$ . La aplicación  $f : C \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$f(x, z) = \left( (1 - |z|) \cos \frac{\pi x}{1 - |z|}, (1 - |z|) \sin \frac{\pi x}{1 - |z|}, z \right), \quad f(0, \pm 1) = (0, 0, \pm 1),$$

es un homeomorfismo entre el cuadrado y los conos (es biyectiva y continua, y  $C$  es compacto). Componiendo con la aplicación  $x \mapsto x/\|x\|$  tenemos un homeomorfismo en la esfera.

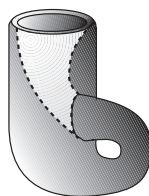
Consideremos ahora la identificación  $abab$ . Es fácil ver que el espacio cociente es homeomorfo al que se obtiene al identificar los puntos opuestos de la frontera de un disco cerrado. El lector familiarizado con la geometría proyectiva reconocerá este espacio como el *plano proyectivo real*, con su topología usual. Sin entrar en detalles formales, vamos a describir gráficamente este espacio. Llamémoslo  $P$ .

En primer lugar cortamos dos semicírculos del cuadrado de partida. De este modo,  $P$  es el espacio que se obtiene al identificar las tres piezas por los lados  $a$  y  $b$  y por las dos semicircunferencias, ahora bien, es fácil ver que no importa el orden en que hacemos las identificaciones. Si empezamos identificando los dos semicírculos por el lado  $a$  obtenemos un círculo, cuya frontera es una circunferencia que ha de unirse a la otra pieza. También podemos verlo como una esfera truncada. La otra pieza es homeomorfa a un rectángulo, y al identificar los lados  $b$  obtenemos una cinta de Möbius, cuya frontera es una circunferencia que hemos de pegar a la esfera.

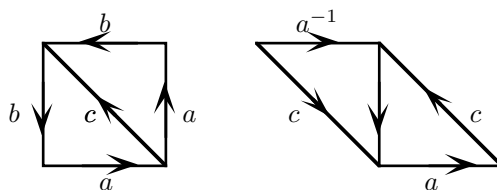


Así,  $P$  puede verse como el espacio que se obtiene al hacer un agujero a una esfera y cerrarlo “cosiéndole” el borde completo de una cinta de Möbius. Esta operación no puede hacerse en  $\mathbb{R}^3$ , pues la superficie esférica corta necesariamente a la cinta en puntos no fronterizos.

Pensemos ahora en el cociente  $aba^{-1}b$ . Al identificar los lados  $a$  obtenemos un cilindro, pero ahora hemos de identificar sus dos extremos “al revés” de como haríamos para formar un toro, es decir, un extremo ha de pegarse al otro “por dentro” en lugar de por fuera. Esto no puede hacerse tampoco en  $\mathbb{R}^3$ , la única forma de llegar “por dentro” a un extremo sin cortar la superficie es doblando el cilindro en la cuarta dimensión. La figura muestra una aproximación tridimensional al resultado: se trata de la *botella de Klein*, una superficie sin borde y con una sola cara.



Consideremos seguidamente el caso  $aabb$ . Resulta que este espacio es homeomorfo a la botella de Klein. Para probarlo partimos el cuadrado por la diagonal e identificamos primero los lados  $b$ , como indica la figura:

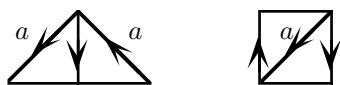


El resultado es ciertamente una botella de Klein. Esta nueva representación nos proporciona una nueva imagen de este espacio. Para llegar a ella hemos de observar este hecho: si realizamos la identificación siguiente en un triángulo:

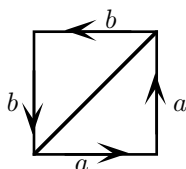


el resultado es una cinta de Möbius. En efecto, basta dividir el triángulo por la mitad e identificar primero los lados  $a$ , como indica el esquema siguiente:

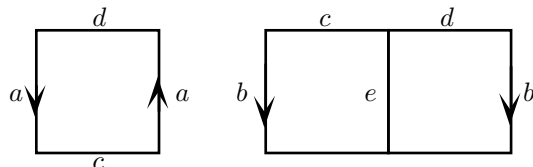




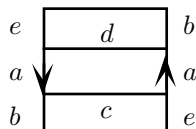
Ahora, si partimos de la botella de Klein en la forma  $aabb$ , podemos partir el cuadrado por la diagonal como indica la figura:



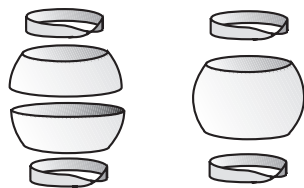
Vemos así que tenemos dos cintas de Möbius identificadas por su único borde. Podemos hacernos una idea más clara del resultado si observamos un hecho más: si a un cilindro le pegamos una cinta de Möbius por un extremo, el resultado es homeomorfo a una cinta de Möbius. Para comprobarlo representamos el cilindro y la cinta como dos rectángulos con sendos pares de lados identificados:



Si partimos el rectángulo por la mitad  $e$  e identificamos primero los lados  $c$  y  $d$  obtenemos el esquema siguiente:



Por consiguiente estamos ante una cinta de Möbius. En lugar de un cilindro podemos pensar en una semiesfera truncada, lo que nos da la siguiente representación de la botella de Klein:



Se trata de dos cintas de Möbius identificadas por su borde o, equivalentemente, de dos cintas de Möbius identificadas a dos semiesferas truncadas identificadas por su ecuador o, equivalentemente, de una esfera a la que hemos hecho dos agujeros circulares y les hemos cosido dos cintas de Möbius. Teniendo en cuenta que una esfera con una cinta de Möbius es un plano proyectivo, la botella

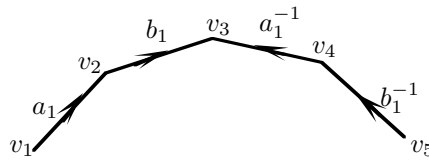
de Klein se obtiene también al agujerear dos planos proyectivos e identificar los bordes de los agujeros.

Después de esto queda claro que el problema de si dos espacios cociente son o no homeomorfos no es trivial. El cálculo de los grupos de homología — que todavía no hemos definido— suele ser suficiente para resolver el problema cuando la solución es negativa.

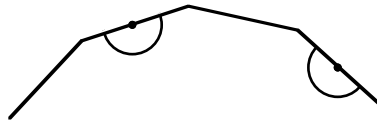
**Definición 1.21** Para cada número natural  $g \geq 1$  definimos  $M_g$  como el espacio topológico que se obtiene al identificar los lados de un polígono de  $4g$  lados en la forma  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ . Convenimos también que  $M_0$  es el espacio obtenido a partir de un cuadrado mediante la identificación  $aa^{-1}bb^{-1}$ , es decir, la esfera.

Para cada número natural  $h \geq 2$  definimos  $N_h$  como el cociente obtenido a partir de un polígono de  $2h$  lados identificando sus lados en la forma  $a_1 a_1 \cdots a_h a_h$ . Llamaremos  $N_1$  al espacio obtenido a partir de un cuadrado por la identificación  $abab$ , es decir, al plano proyectivo.

Enseguida interpretaremos geoméricamente estos espacios, pero antes conviene que observemos algunos hechos elementales sobre ellos. En primer lugar, todos los vértices del polígono se identifican a un único punto. En efecto, (ver la figura) en el caso de  $M_g$ , la identificación  $a_1 a_1^{-1}$  hace que  $v_1 = v_4$  y  $v_2 = v_3$ . La identificación  $b_1 b_1^{-1}$  hace que  $v_2 = v_5$  y  $v_3 = v_4$ , de donde los cinco vértices (cuatro si  $v_1 = v_5$ ) se correspondan con el mismo punto. Si hay más vértices razonamos con el siguiente bloque de cuatro identificaciones que hace que  $v_5$  se identifique con los cuatro vértices siguientes, etc. Con  $N_h$  se razona análogamente.



Como consecuencia obtenemos que los espacios  $M_g$  y  $N_h$  son espacios de Hausdorff. Basta tener presente qué forma tienen los entornos básicos de cada punto. Si consideramos un punto  $x$  interior del polígono, sus entornos básicos son los discos abiertos de centro  $x$  y radio suficientemente pequeño. Si  $x$  está en un lado (pero no es un vértice), entonces  $x$  está identificado con un único punto  $y$  de otro lado. Un entorno básico de  $x$  está formado por dos semidiscos, uno de centro  $x$  y otro de centro  $y$ , de radio suficientemente pequeño. Su imagen por la proyección en el cociente es abierta y es homeomorfa a un disco abierto en  $\mathbb{R}^2$  (el que resulta de identificar los dos semidiscos).

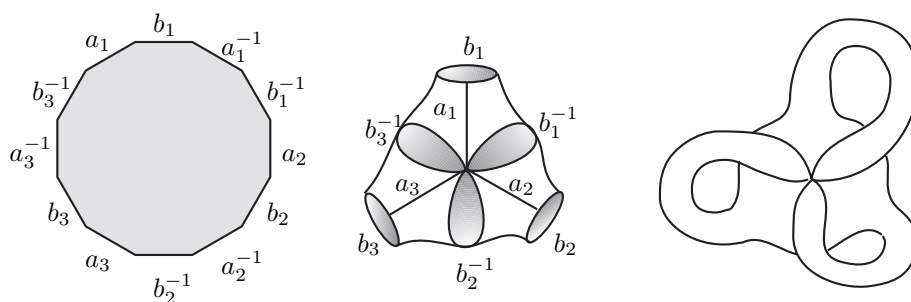


Por último, los entornos básicos del único punto que se corresponde con los vértices del polígono (digamos de  $n$  lados) son los que resultan de identificar  $n$  sectores circulares de radio suficientemente pequeño, que se pegan formando un disco completo.

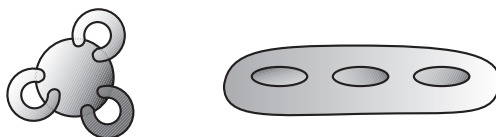
Teniendo en cuenta esta descripción, es fácil ver que dos puntos distintos tienen entornos disjuntos. Más aún, hemos probado que todo punto de  $M_g$  y  $N_h$  tiene un entorno homeomorfo a un disco abierto en  $\mathbb{R}^2$ , es decir, son variedades topológicas bidimensionales. Conviene introducir el término siguiente:

**Definición 1.22** Una *superficie* es una variedad topológica conexa bidimensional.

Los espacios  $M_g$  y  $N_h$  son imágenes continuas de polígonos (compactos y conexos), luego son superficies compactas. Veamos ya qué aspecto tienen. Por definición  $M_0$  es la esfera y es claro que  $M_1$  es el toro. Para hacernos una idea general de los espacios  $M_g$  consideremos el caso  $g = 3$ . Partimos de un polígono de 12 lados.



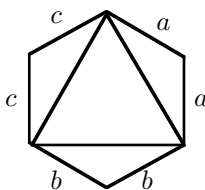
Al identificar los lados  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  formamos tres tubos que acaban en tres agujeros correspondientes a los lados  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$ . Si unimos los vértices que quedan al extremo opuesto de los tubos se forman otros tres agujeros, correspondientes a  $b_1^{-1}$ ,  $b_2^{-1}$  y  $b_3^{-1}$ . Ahora “estiramos” los tubos para realizar las identificaciones que faltan. El resultado es una esfera con tres asas. La figura siguiente muestra otras imágenes de este espacio.



Observemos que el hecho de que en la construcción que hemos hecho los tres tubos se toquen en un punto es anecdótico: dicho punto tiene un entorno homeomorfo a un disco (o a un casquete esférico), que en nuestra construcción aparece “ondulado”, sin más que “aplanarlo” estamos separando los puntos de conexión de las asas con la esfera. La figura de la derecha puede verse como una esfera con tres agujeros o como tres toros pegados. La topología algebraica nos proporcionará técnicas para justificar formalmente todos estos homeomorfismos.

En general, es claro que  $M_g$  es una esfera con  $g$  asas, o con  $g$  agujeros, o bien  $g$  toros pegados. Esto justifica que hayamos convenido llamar  $M_0$  a la esfera sin agujeros.

Consideremos ahora los espacios  $N_h$ . Por definición  $N_1$  es el plano proyectivo, que puede verse como una esfera a la que hemos “cosido” una cinta de Möbius, y  $N_2$  es la botella de Klein, que puede verse como una esfera con dos cintas de Möbius. En general,  $N_h$  es una esfera con  $h$  cintas de Möbius. Para convencernos de ello pensemos en  $N_3$ :



Al identificar los vértices del triángulo interior obtenemos una esfera con tres agujeros en los que hemos de pegar el resultado de identificar los tres triángulos exteriores. Ahora bien, éstos dan lugar a tres cintas de Möbius, luego, efectivamente, tenemos una esfera con tres cintas.

Podría pensarse en definir superficies más complicadas que éstas, por ejemplo combinando asas y cintas de Möbius, sin embargo no dan lugar a nuevos espacios: en el apéndice A probamos que toda superficie compacta es homeomorfa a una de las superficies  $M_g$  o  $N_h$ .

## 1.5 Homotopías

Probar que toda superficie compacta es homeomorfa a una de las superficies canónicas que hemos definido en la sección anterior no resuelve completamente el problema de la clasificación, sino que falta justificar que éstas no son homeomorfas dos a dos. La topología algebraica nos permitirá probarlo, al mismo tiempo que nos proporcionará técnicas para decidir a cuál de todas las superficies canónicas es homeomorfa una superficie dada. Todo ello se basará en el cálculo de los grupos de homología de las superficies  $M_g$  y  $N_h$ . Según explicábamos en la introducción, espacios homeomorfos tienen grupos de homología isomorfos, luego bastará probar que las superficies canónicas se distinguen por sus grupos de homología.

Sin embargo, sucede que para que dos espacios topológicos tengan la misma homología no es necesario que sean homeomorfos, sino que basta con que satisfagan una relación más general: la homotopía. El hecho de que espacios homotópicos tengan los mismos grupos de homología hace que el concepto de homotopía sea fundamental en la topología algebraica, por lo que dedicamos esta sección a su estudio.

Para empezar introducimos el concepto de homotopía entre aplicaciones. En lo sucesivo  $I$  representará al intervalo unidad  $[0, 1]$  con la topología usual.

**Definición 1.23** Dos aplicaciones continuas  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  entre espacios topológicos son *homotópicas* si existe una aplicación continua  $F : I \times X \rightarrow Y$  tal que para todo  $x \in X$  se cumple  $F(0, x) = f_0(x)$  y  $F(1, x) = f_1(x)$ . Se dice que  $F$  es una *homotopía* entre  $f_0$  y  $f_1$ . Escribiremos también  $f_t(x) = F(t, x)$ .

De este modo, cuando fijamos  $x$  y hacemos variar  $t$ , tenemos que  $f_t(x)$  es un arco que une  $f_0(x)$  con  $f_1(x)$ . Informalmente podemos decir que una homotopía “mueve” la imagen de cada punto de  $X$  por  $f_0$  a través de un camino en  $Y$  que la lleva hasta la imagen del mismo punto por  $f_1$ , de forma que la transformación es “globalmente” continua.

**Ejemplo** Sea  $f_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la inclusión de la circunferencia unidad en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $f_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función constante 0. Una homotopía entre ambas es la dada por  $f_t(x) = (1-t)x$ . Geométricamente, lo que hacemos es contraer paulatinamente la circunferencia hasta reducirla a un punto. Aunque aún no estamos en condiciones de probarlo formalmente, lo cierto es que si consideramos a  $f_0$  con imagen en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , entonces  $f_0$  no es homotópica a ninguna función constante. Intuitivamente ello es debido a que para reducir la circunferencia a un punto de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  es necesario que el camino seguido por alguno de sus puntos pase por el 0. ■

La homotopía entre aplicaciones continuas de un espacio  $X$  en un espacio  $Y$  es claramente una relación de equivalencia: una homotopía de una aplicación  $f$  a ella misma es la dada por  $f_t = f$ , para todo  $t \in I$ ; si  $f_0$  es homotópica a  $f_1$  entonces una homotopía de  $f_1$  a  $f_0$  viene dada por  $g_t = f_{1-t}$ ; finalmente, si  $F$  es una homotopía de  $f_0$  a  $f_1$  y  $G$  es una homotopía de  $f_1$  a  $f_2$ , podemos definir una homotopía de  $f_0$  a  $f_2$  mediante

$$H(t, x) = \begin{cases} F(2t, x) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ G(2t - 1, x) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La aplicación  $H$  es continua porque lo son sus restricciones a los cerrados  $[0, \frac{1}{2}] \times X$  y  $[\frac{1}{2}, 1] \times X$ .

El teorema siguiente proporciona un criterio sencillo para probar que dos aplicaciones son homotópicas:

**Teorema 1.24** Sean  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas de un espacio topológico  $X$  en un subespacio  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si para todo  $x \in X$  se cumple que el segmento de extremos  $f_0(x)$  y  $f_1(x)$  está contenido en  $Y$ , entonces  $f_0$  y  $f_1$  son homotópicas.

DEMOSTRACIÓN: Basta considerar  $F(t, x) = tf_0(x) + (1-t)f_1(x)$ . ■

En particular, dos aplicaciones continuas cualesquiera de un espacio  $X$  en  $\mathbb{R}^n$  son homotópicas. No es cierto que cualquier par de aplicaciones de un espacio  $X$  en la esfera  $S^n$  sean homotópicas (aunque no estamos en condiciones de probarlo), pero del teorema anterior se sigue una condición suficiente para que lo sean:

**Teorema 1.25** Sean  $f_0, f_1 : X \rightarrow S^n$  dos aplicaciones continuas tales que para todo  $x \in X$  se cumpla que  $f_0(x) \neq -f_1(x)$ . Entonces  $f_0$  y  $f_1$  son homotópicas.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior son homotópicas si las consideramos como aplicaciones en  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , pues el segmento que une cada par de puntos  $f_0(x), f_1(x)$  no pasa por el origen. Consideramos la composición de una homotopía entre ambas con la aplicación  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$  dada por  $x \mapsto x/\|x\|$ . Como es continua y deja fijos a los puntos de  $S^n$ , es fácil ver que dicha composición es una homotopía  $G : I \times X \rightarrow S^n$  entre  $f_0$  y  $f_1$ . ■

**Definición 1.26** Dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  son *homotópicos* si existen aplicaciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $f \circ g$  es homotópico a la identidad en  $X$  y  $g \circ f$  es homotópico a la identidad en  $Y$ .

Ciertamente, dos espacios homeomorfos son homotópicos, pues si  $f$  es un homeomorfismo la definición de homotopía se cumple con  $f$  y  $f^{-1}$ . El recíproco no es cierto pues, por ejemplo,  $\mathbb{R}^n$  es homotópico a un punto. Basta considerar la inclusión  $i : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\}$  la aplicación constante. Entonces  $i \circ f$  es ya la identidad en  $\{0\}$  y  $f \circ i$  es homotópica a la identidad porque, según hemos visto, todas las aplicaciones en  $\mathbb{R}^n$  son homotópicas.

Veamos ahora que la homotopía de espacios topológicos es una relación de equivalencia. Antes conviene probar lo siguiente:

**Teorema 1.27** Si  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  y  $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$  son dos pares de aplicaciones homotópicas, entonces  $f_0 \circ g_0$  es homotópica a  $f_1 \circ g_1$ .

DEMOSTRACIÓN: Consideremos homotopías  $f_t$  y  $g_t$ . Entonces es claro que  $f_t \circ g_0$  es una homotopía entre  $f_0 \circ g_0$  y  $f_1 \circ g_0$ , pero  $f_1 \circ g_t$  es una homotopía entre  $f_1 \circ g_0$  y  $f_1 \circ g_1$ , luego por transitividad  $f_0 \circ g_0$  es homotópica a  $f_1 \circ g_1$ . ■

**Teorema 1.28** La homotopía es una relación de equivalencia entre espacios topológicos.

Claramente la homotopía es reflexiva y simétrica. Para probar que es transitiva suponemos que un espacio  $X$  es homotópico a otro  $Y$  y que éste a su vez es homotópico a  $Z$ . Sean  $f_0 : X \rightarrow Y$ ,  $g_0 : Y \rightarrow X$ ,  $f_1 : Y \rightarrow Z$ ,  $g_1 : Z \rightarrow Y$  aplicaciones según la definición de homotopía. Según el teorema anterior,  $f_0 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_0$  es homotópica a  $f_0 \circ g_0$ , que a su vez es homotópica a la identidad en  $X$ . Similarmente al revés. ■

Un caso especialmente simple de espacios homotópicos es aquel en el que una de las aplicaciones consideradas es la inclusión:

**Definición 1.29** Sea  $C$  un subespacio de un espacio topológico  $X$ . Diremos que  $C$  es un *retracto por deformación* de  $X$  si existe una retracción  $r : X \rightarrow C$  homotópica a la identidad en  $X$ .

Notemos que si  $C$  es un retracto por deformación de  $X$  entonces  $C$  es homotópico a  $X$ , pues la definición de homotopía se cumple con la retracción  $r : X \rightarrow C$  y la inclusión  $i : C \rightarrow X$ .

De este modo, un retracto  $C$  es un retracto por deformación si cada punto de  $X$  se puede llevar continuamente hasta su imagen en  $C$ .

Un espacio topológico  $X$  es *contractible* si la identidad en  $X$  es homotópica a una función constante. Si, concretamente, la identidad es homotópica a la función que toma constantemente el valor  $P \in X$ , entonces  $\{P\}$  es un retracto por deformación de  $X$  (la función constante es una retracción). Así pues, un espacio contractible es homotópico a un punto.

El recíproco es cierto: si  $X$  es homotópico a un espacio puntual  $\{P\}$  y  $f : \{P\} \rightarrow X$ ,  $g : X \rightarrow \{P\}$  son funciones que verifican la definición de homotopía entre espacios, entonces la identidad en  $X$  es homotópica a la función constante igual a  $f(P)$ .

Así pues, dos espacios contractibles son homotópicos. El teorema 1.24 muestra que  $\mathbb{R}^n$  es contractible, al igual que cualquier subespacio convexo de  $\mathbb{R}^n$ . En particular  $\mathbb{R}^n$  es homotópico a  $\mathbb{R}^m$  para valores cualesquiera de  $m$  y  $n$ .

**Ejemplos** Veremos más adelante que la esfera  $S^n$  no es contractible. En cambio, sí que lo es la esfera menos un punto. Concretamente, si  $P \in S^n$ , la identidad en  $S^n \setminus \{P\}$  es homotópica a la función constante  $-P$ . Basta considerar la homotopía construida en el teorema 1.25, que no es sino la dada por

$$H_t(x) = \frac{t(-P) + (1-t)x}{\|t(-P) + (1-t)x\|}.$$

Ciertamente,  $H_t(x)$  no toma nunca el valor  $P$ , luego es una homotopía en  $S^n \setminus \{P\}$ . En realidad esto se debe a que, como ya hemos comentado, la esfera menos un punto es homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ .

Consideremos ahora la esfera  $S^n$  menos dos puntos. Qitemos, por ejemplo, los “polos”  $N = (0, \dots, 0, 1)$  y  $S = (0, \dots, 0, -1)$ . El espacio resultante, es decir,  $S^n \setminus \{N, S\}$ , resulta ser homotópico al “ecuador”

$$\tilde{S}^{n-1} = \{x \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}.$$

Éste es, de hecho, un retracto por deformación de  $S^n \setminus \{N, S\}$ . Una retracción es la aplicación  $r : S^n \setminus \{N, S\} \rightarrow \tilde{S}^{n-1}$  dada por

$$r(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n, 0)}{\|(x_1, \dots, x_n, 0)\|},$$

y la homotopía es

$$H_t(x) = \frac{tr(x) + (1-t)x}{\|tr(x) + (1-t)x\|}.$$

Obviamente  $\tilde{S}^{n-1}$  es homeomorfo a  $S^{n-1}$ . Es fácil ver que la esfera  $S^n$  menos dos cualesquiera de sus puntos es homotópica a  $S^{n-1}$ . Por ejemplo, podemos

usar que una traslación en  $\mathbb{R}^n$  se extiende a un homeomorfismo de  $\mathbb{R}_\infty^n$  en sí mismo que deja invariante a  $\infty$  y hace corresponder cualquier punto de  $\mathbb{R}^n$  con otro prefijado, lo que a través de la proyección estereográfica se traduce en que existen homeomorfismos de  $S^n$  en sí mismo que dejan fijo al polo norte  $N$  y transforman cualquier punto  $Q \in S^n$ ,  $Q \neq N$  en el polo sur  $S$ .



## Capítulo II

# Homología singular

En este capítulo definiremos y comenzaremos el estudio de los grupos de homología singular de un espacio topológico. El primer paso será estudiar el concepto de “símplice singular”, que generaliza a dimensiones superiores la noción de arco en un espacio topológico. Así como un arco es un segmento deformado, un 2-símplice será un triángulo deformado, un 3-símplice un tetraedro deformado, etc. Los grupos de homología de un espacio dependerán del modo en que es posible ensamblar los símlices de cada dimensión para formar ciclos y fronteras.

### 2.1 Símlices afines

Los resultados de esta sección dependen de la estructura afín de  $\mathbb{R}^n$ . Pueden formularse literalmente en cualquier espacio afín real de dimensión finita. Recordemos brevemente los conceptos básicos de la geometría afín (particularizados a  $\mathbb{R}^n$ ).

Una *variedad afín* es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  de la forma  $A = x + V$ , donde  $V$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$ . Notemos que  $V = A - x$ , donde  $x$  es cualquier punto de  $A$ , luego  $V$  está completamente determinado por  $A$  y se llama su *espacio director*. La dimensión de  $V$  se llama *dimensión* de  $A$ .

La intersección de variedades afines es una variedad afín, luego podemos hablar de la *envoltura afín* de un conjunto de puntos  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ , definida como la menor variedad afín  $A$  que los contiene. Claramente, su espacio director ha de contener a los vectores  $a_1 - a_0, \dots, a_m - a_0$ , luego ha de ser

$$A = a_0 + \langle a_1 - a_0, \dots, a_m - a_0 \rangle.$$

De este modo,  $x \in A$  si y sólo si  $x = a_0 + t_1(a_1 - a_0) + \dots + t_m(a_m - a_0)$ , para ciertos escalares  $t_i$ . Llamando  $t_0 = 1 - t_1 - \dots - t_m$  resulta que

$$x = t_0 a_0 + \dots + t_m a_m, \quad t_0 + \dots + t_m = 1. \quad (2.1)$$

Un punto  $x$  en estas condiciones se llama *combinación afín* de  $a_0, \dots, a_m$ . Recíprocamente, es fácil ver que toda combinación afín de  $a_0, \dots, a_m$  ha de estar

en  $A$ , luego tenemos que la envoltura afín de un conjunto finito de puntos está formada por sus combinaciones afines.

Dados  $m + 1$  puntos  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ , diremos que son *afínmente independientes* si su envoltura afín tiene dimensión  $m$ , es decir, si los vectores  $a_1 - a_0, \dots, a_m - a_0$  son linealmente independientes.

De este modo, dos puntos distintos son siempre afínmente independientes, tres puntos son independientes si no están alineados, cuatro puntos son independientes si no están en el mismo plano, etc.

Si los puntos  $a_0, \dots, a_m$  son afínmente independientes, todo punto  $x$  de su envoltura afín se expresa de forma única como combinación afín (2.1) de  $a_0, \dots, a_m$ , pues los coeficientes  $t_i$  para  $i \neq 0$  son las coordenadas de  $x - a_0$  en la base  $a_i - a_0$  del espacio director y  $t_0$  está determinado por la ecuación de la derecha en (2.1). Dichos coeficientes reciben el nombre de *coordenadas baricéntricas* de  $x$  respecto a  $a_0, \dots, a_m$ .

Todo conjunto de puntos afínmente independientes en  $\mathbb{R}^n$  se puede extender hasta un conjunto de  $n + 1$  puntos afínmente independientes.

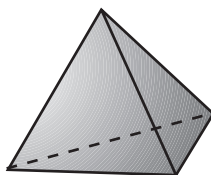
Una aplicación  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es *afín* si es de la forma  $f(x) = a + \vec{f}(x)$ , donde  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una aplicación lineal. La aplicación  $\vec{f}$  está determinada por  $f$ , pues  $\vec{f}(x) = f(x) - f(0)$ .

Es fácil ver que si  $t_0 + \dots + t_m = 1$  entonces

$$f(t_0 a_0 + \dots + t_m a_m) = t_0 f(a_0) + \dots + t_m f(a_m).$$

En particular, una aplicación afín  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  está determinada por los valores que toma sobre  $n + 1$  puntos afínmente independientes. Recíprocamente, cualquier aplicación definida sobre tales  $n + 1$  puntos con valores en  $\mathbb{R}^m$  se extiende a una única aplicación afín.

**Definición 2.1** Un *p-símplice afín* en  $\mathbb{R}^n$  es la envoltura convexa  $S$  de  $p + 1$  puntos  $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$  afínmente independientes. Los puntos  $a_i$  se llaman *vértices* de  $S$ , los símplexes generados por cada  $r + 1$  vértices de  $S$  se llaman *r-caras* de  $S$ . Representaremos el símplex de vértices  $a_0, \dots, a_p$  mediante  $[a_0, \dots, a_p]$ .



Podemos identificar los vértices con las 0-caras de  $S$ . Las 1-caras se llaman también *aristas* de  $S$ . Notemos que los 0-símplexes son los puntos, los 1-símplexes son los segmentos, los 2-símplexes son los triángulos y los 3-símplexes son los tetraedros. La figura muestra un 3-símplice.

**Teorema 2.2** *Un  $p$ -símplice está generado por un único conjunto de vértices. En particular dos  $p$ -símplices son iguales si y sólo si tienen los mismos vértices.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $S = [a_0, \dots, a_p]$ . Basta probar que estos vértices están determinados por  $S$ . Concretamente, vamos a ver que un punto  $x \in S$  es un vértice si y sólo si no puede expresarse como  $x = tu + (1-t)v$ , con  $u, v \in S$ ,  $u \neq v$ ,  $0 < t < 1$ .

En efecto, si  $a_j$  pudiera expresarse de esta forma con

$$u = \sum_{i=0}^p t_i a_i, \quad v = \sum_{i=0}^p t'_i a_i,$$

entonces,

$$a_j = \sum_{i=0}^p (tt_i + (1-t)t'_i) a_i,$$

y los coeficientes de esta expresión son no negativos y suman 1, luego por la unicidad de las coordenadas baricéntricas ha de ser  $tt_i + (1-t)t'_i = 0$ , para  $i \neq j$ , luego  $t_i = t'_i = 0$ , luego  $u = v = a_j$ , contradicción.

Si un punto  $x \in S$  no es un vértice, es fácil expresarlo de la forma indicada a partir de su expresión como combinación convexa de los vértices. ■

Por el teorema anterior podemos llamar *dimensión* de un símplice a su número de vértices menos 1, es decir, la dimensión de un  $p$ -símplice es  $p$ .

Es fácil ver que un  $p$ -símplice es un subespacio compacto convexo de interior no vacío en  $\mathbb{R}^p$ , por lo que el teorema 1.3 nos da que todos ellos son homeomorfos entre sí. Vamos a estudiar esto con más detalle:

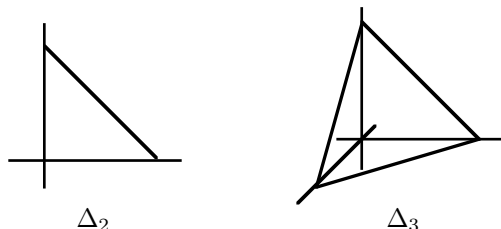
**Definición 2.3** Llamaremos  *$p$ -símplice canónico* al  $p$ -símplice afín  $\Delta_p \subset \mathbb{R}^p$  determinado por los vértices

$$x_0 = (0, \dots, 0), \quad x_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad x_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots \quad x_p = (0, \dots, 1).$$

Observemos que las coordenadas baricéntricas de un punto  $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$  respecto de los vértices de  $\Delta_p$  son  $\left(1 - \sum_i a_i, a_1, \dots, a_p\right)$ . Así,

$$\Delta_p = \{(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p \mid a_i \geq 0, \sum a_i \leq 1\}.$$

Claramente  $\Delta_0 = \{0\}$ ,  $\Delta_1 = [0, 1]$ , mientras que  $\Delta_2$  y  $\Delta_3$  son el triángulo y el tetraedro representados en la figura.



Un  $p$ -símplice arbitrario  $[a_0, \dots, a_p]$  es la imagen del  $p$ -símplice canónico  $\Delta_p = [x_0, \dots, x_p]$  por la aplicación afín  $f$  determinada por  $f(x_i) = a_i$ . Es fácil ver que  $f$  es biyectiva (pues conserva las coordenadas baricéntricas) y claramente es continua. Por otro lado, también es fácil ver que  $\Delta_p$  es compacto, luego  $f$  determina un homeomorfismo entre  $\Delta_p$  y el símplice dado.

**Definición 2.4** Llamaremos *interior* de un  $p$ -símplice  $S$  al conjunto de los puntos cuyas coordenadas baricéntricas (respecto de sus vértices) son todas estrictamente positivas, es decir los puntos de  $S$  que no pertenecen a ninguna de las caras de  $S$  distintas del propio  $S$ . La frontera de  $S$  está formada por los puntos de  $S$  que no pertenecen a su interior.

Observemos que el interior y la frontera de un símplice en este sentido no coinciden con el interior y la frontera en el sentido topológico usual. Por ejemplo, el interior de un segmento en  $\mathbb{R}^2$  es todo el segmento menos sus extremos, cuando su interior topológico es vacío. Es fácil ver que el interior y la frontera de un símplice coinciden con su interior y su frontera topológica respecto a la topología relativa de su envoltura afín. También es fácil ver que un símplice es la clausura topológica de su interior.

Notemos también que una cara  $C$  de un símplice  $S$  está formada por los puntos cuyas coordenadas baricéntricas respecto a los vértices de  $S$  toman el valor 0 en los vértices que no corresponden a  $C$ . De aquí se sigue inmediatamente que la intersección de dos caras de  $S$  es vacía o bien es otra cara.

## 2.2 Complejos de cadenas singulares

**Definición 2.5** Un  *$p$ -símplice singular* en un espacio topológico  $X$  es una aplicación continua  $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ .

Observemos que, como todos los  $p$ -símplices afines son homeomorfos, en lugar del símplice canónico  $\Delta_p$  podríamos considerar cualquier  $p$ -símplice afín. Puesto que  $\Delta_0$  se reduce a un punto, podemos identificar los 0-símplices singulares de un espacio  $X$  con sus puntos. Los 1-símplices singulares son las aplicaciones continuas de  $\Delta_1 = [0, 1]$  en  $X$ , es decir, los arcos en  $X$ .

A cada símplice afín le podemos asociar un símplice singular. Más en general, dados  $p + 1$  puntos  $y_0, \dots, y_p \in \mathbb{R}^n$ , definimos  $[y_0, \dots, y_p] \subset \mathbb{R}^n$  como su envoltura convexa (de modo que si los puntos son afinmente independientes entonces  $[y_0, \dots, y_p]$  es el símplice afín que generan, de acuerdo con la sección anterior). Representaremos por

$$(y_0, \dots, y_p) : \Delta_p \rightarrow [y_0, \dots, y_p]$$

a la restricción de la única aplicación afín que cumple  $x_i \mapsto y_i$ .

En particular  $(x_0, \dots, x_p)$  es la identidad en  $\Delta_p$ . Observemos que  $[y_0, \dots, y_p]$  no depende de la ordenación de los vértices, pero  $(y_0, \dots, y_p)$  sí. A los símplices de esta forma los llamaremos *símplices singulares afines*.

Siguiendo las ideas esbozadas en la introducción, definimos ahora los grupos de cadenas. Como advertíamos allí, vamos a permitir que los coeficientes varíen en un anillo arbitrario, que en lo sucesivo representaremos por  $\mathbb{A}$ . El caso más importante será  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ , aunque la teoría se simplifica levemente si tomamos como  $\mathbb{A}$  un cuerpo, especialmente  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

**Definición 2.6** Para cada número natural  $p \geq 0$ , llamaremos módulo de las  $p$ -cadenas singulares de un espacio topológico  $X \neq \emptyset$  al  $\mathbb{A}$ -módulo libre  $C_p(X)$  que tiene por base al conjunto de todos los  $p$ -símplices singulares en  $X$ .

De este modo, una  $p$ -cadena singular no nula se expresa de forma única como

$$c = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i, \quad a_i \in \mathbb{A}, \quad a_i \neq 0.$$

No debemos ver en estas sumas ninguna operación geométrica entre los símplices. Las  $p$ -cadenas son simplemente una forma útil de seleccionar un conjunto finito de símplices y asignar a cada uno un coeficiente, usualmente un número entero. Conviene definir el *soporte* de la  $p$ -cadena  $c$  como

$$|c| = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i[\Delta_p].$$

Convenimos que  $|0| = \emptyset$ . Notemos que el soporte de una  $p$ -cadena singular es siempre un subespacio compacto de  $X$ .

En este punto la teoría presenta dos variantes: si definimos  $C_p(X) = 0$  para  $p < 0$  tenemos la *homología completa*, mientras que la *homología reducida* se obtiene considerando que  $\Delta_{-1} = \emptyset$ , con lo que en todo espacio topológico  $X$  no vacío existe un único símplice singular de dimensión  $-1$ , al que, por conveniencia, representaremos por  $(\cdot) : \emptyset \rightarrow X$ . Consecuentemente,  $C_{-1}(X)$  es el  $\mathbb{A}$ -módulo libre de base  $(\cdot)$ . Los módulos  $C_p(X)$  para  $p < -1$  se definen también como 0.

Por completitud conviene definir  $C_p(\emptyset) = 0$  para todo  $p \in \mathbb{Z}$ .

Ahora hemos de introducir un poco de álgebra:

**Definición 2.7** Sea  $\mathbb{A}$  un anillo conmutativo y unitario. Un  $\mathbb{A}$ -módulo graduado es una suma directa de  $\mathbb{A}$ -módulos  $C = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p$ . Los elementos de cada  $\mathbb{A}$ -submódulo  $C_p$  se llaman elementos *homogéneos* de grado  $p$ . Un *submódulo graduado* de  $C$  es un módulo  $D = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} D_p$ , donde  $D_p = C_p \cap D$ .

Así, a cada espacio topológico  $X$  le podemos asociar el módulo graduado

$$C(X) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p(X).$$

Tampoco hemos de buscar ninguna interpretación a la suma de  $p$ -cadenas de dimensiones distintas. Tomar la suma directa es simplemente un modo cómodo de reducir los infinitos módulos de cadenas a un único objeto algebraico.

Si  $U \subset X$  son espacios topológicos, es claro que podemos identificar a cada  $C_p(U)$  con un submódulo de  $C_p(X)$ . Concretamente,  $C_p(U)$  está formado por las  $p$ -cadenas de  $X$  cuyo soporte está contenido en  $U$ . De este modo,  $C(U)$  es un submódulo graduado de  $C(X)$ .

Un *homomorfismo graduado*  $f : C \rightarrow D$  (de grado  $d$ ) entre dos  $\mathbb{A}$ -módulos graduados es un homomorfismo tal que  $f_p = f|_{C_p} : C_p \rightarrow D_{p+d}$  para todo entero  $p$ .

Por ejemplo, si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua entre espacios topológicos, para cada  $p$ -símplice  $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$  en  $X$  podemos definir  $f_p^\#(\sigma) = \sigma \circ f$ , que es un  $p$ -símplice en  $Y$ . Definimos  $f_p^\# : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  como el homomorfismo de módulos que extiende linealmente a la aplicación  $f_p^\#$  que acabamos de definir, es decir, el homomorfismo dado por

$$f_p^\#(\sum a_i \sigma_i) = \sum a_i f_p^\#(\sigma_i).$$

Esta definición vale también para  $p = -1$  en la homología reducida, y entonces  $f_{-1}^\#$  es la identidad, es decir,  $f_{-1}^\#(\cdot) = (\cdot)$ . Para  $p = -1$  en la homología completa y para  $p < -1$  en ambos casos, definimos  $f_p^\# = 0$ .

Los homomorfismos  $f_p^\#$  se extienden a un único homomorfismo de grado 0

$$f^\# : C(X) \rightarrow C(Y)$$

entre los módulos de cadenas de  $X$  e  $Y$ . Es fácil ver que  $(f \circ g)^\# = f^\# \circ g^\#$ . Así mismo, si  $f$  es la identidad en  $X$ , entonces  $f^\#$  es la identidad en  $C(X)$ .

Ahora vamos a definir la frontera de una cadena singular. De acuerdo con las ideas esbozadas en la introducción, la frontera de un  $p$ -símplice singular será una  $p - 1$ -cadena en la que estará reflejada su orientación. En primer lugar definimos la frontera de los símlices canónicos:

En  $[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p]$ , el circunflejo indica que no aparece  $x_i$ . Se trata, pues, de una cara del símplex canónico  $\Delta_p$ . De este modo, los símlices singulares  $(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p)$  son las " $p - 1$ -caras" del  $p$ -símplice singular  $(x_0, \dots, x_p)$ . Definimos la *frontera* del  $p$ -símplice  $(x_0, \dots, x_p)$  como la  $p - 1$ -cadena

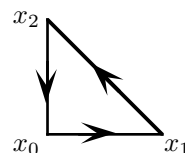
$$\partial_p(x_0, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) \in C_{p-1}(\Delta_p).$$

Para  $p = 0$  en la homología completa definimos  $\partial_0(x_0) = 0$ , mientras que en la homología reducida la fórmula anterior sigue siendo válida, y nos da que  $\partial_0(x_0) = (\cdot)$ . Para  $p < 0$  definimos  $\partial_p = 0$ .

Según esta definición,

$$\partial_1(x_0, x_1) = (x_1) - (x_0),$$

$$\partial_2(x_0, x_1, x_2) = (x_1, x_2) - (x_0, x_2) + (x_0, x_1).$$



Ahora definimos la frontera de un  $p$ -símplice singular  $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$  como

$$\partial_p \sigma = \sigma^\#(\partial_p(x_0, \dots, x_p)).$$

La interpretación es clara: la frontera de  $\sigma$  es la  $p$ -cadena formada por las imágenes por  $\sigma$  de los símplices que forman la frontera de  $\Delta_p$ , con los mismos coeficientes. Definimos el operador frontera  $\partial_p : C_p(X) \longrightarrow C_{p-1}(X)$  como el homomorfismo de módulos que extiende linealmente a la aplicación frontera que ya tenemos definida. Explícitamente:  $\partial_p(\sum a_i \sigma_i) = \sum a_i \partial_p \sigma_i$ .

Los homomorfismos  $\partial_p$  se extienden a un único homomorfismo de grado  $-1$

$$\partial : C(X) \longrightarrow C(X)$$

del módulo de cadenas de  $X$  en sí mismo. Observemos que por definición  $\partial$  conmuta con  $\sigma^\#$  para todo  $p$ -símplice  $\sigma$ . Más en general, tenemos:

**Teorema 2.8** *Sea  $f : X \longrightarrow Y$  una aplicación continua entre espacios topológicos. Entonces  $\partial \circ f^\# = f^\# \circ \partial$ . Equivalentemente, el diagrama siguiente es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} C_p(X) & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1}(X) \\ f_p^\# \downarrow & & \downarrow f_{p-1}^\# \\ C_p(Y) & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1}(Y) \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN: Los casos  $p \leq 0$  se comprueban fácilmente. Para  $p > 0$  basta ver que ambas aplicaciones actúan igual sobre un  $p$ -símplice  $\sigma$  en  $X$ :

$$\begin{aligned} f_{p-1}^\#(\partial_p(\sigma)) &= f_{p-1}^\#(\sigma_{p-1}^\#(\partial_p(x_0, \dots, x_p))) = (\sigma \circ f)_{p-1}^\#(\partial_p(x_0, \dots, x_p)) \\ &= \partial_p(\sigma \circ f) = \partial_p(f_p^\#(\sigma)). \end{aligned}$$

■

La fórmula que hemos usado para definir la frontera del símplice  $(x_0, \dots, x_p)$  es válida de hecho para cualquier símplice singular afín:

**Teorema 2.9** *Sea  $(y_0, \dots, y_p)$  un  $p$ -símplice afín en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces*

$$\partial_p(y_0, \dots, y_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_p).$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos  $\sigma = (y_0, \dots, y_p)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \partial_p(y_0, \dots, y_p) &= \sigma_{p-1}^\#(\partial_p(x_0, \dots, x_p)) = \sigma_{p-1}^\# \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) \right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma_{p-1}^\#(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_p). \end{aligned}$$

■

Ahora probamos el resultado fundamental sobre los operadores frontera:

**Teorema 2.10** Sea  $X$  un espacio topológico y  $p \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $\partial^2 = 0$  o, más explícitamente,  $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$ .

DEMOSTRACIÓN: Dejando aparte los casos triviales, basta calcular la acción de la composición sobre un símplice  $\sigma$ . Tenemos que

$$\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma)) = \sigma_{p-2}^\sharp(\partial_{p-1}(\partial_p(x_0, \dots, x_p))),$$

luego basta ver que  $\partial_{p-1}(\partial_p(x_0, \dots, x_p)) = 0$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \partial_{p-1}(\partial_p(x_0, \dots, x_p)) &= \partial_{p-1} \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) \right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1}(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) = \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p) \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) + \sum_{j < i} (-1)^{i+j-1} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema 2.9. ■

El lector debería visualizar este teorema para el caso del tetraedro  $\sigma = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ . Lo que sucede es que cada arista forma parte de dos caras, y es recorrida en sentidos opuestos cuando aparece en la frontera de cada una de ellas.

**Definición 2.11** Un *complejo* es un par  $\mathcal{C} = (\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p, \partial)$ , donde la primera componente es un  $\mathbb{A}$ -módulo graduado y  $\partial$  es un homomorfismo de grado  $-1$  tal que  $\partial \circ \partial = 0$ . Entonces tenemos

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

de manera que  $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$ .

De este modo, si  $X$  es un espacio topológico, tenemos que  $C(X)$  es un complejo con el operador frontera que hemos construido.

Un *homomorfismo de complejos*  $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  es un homomorfismo de grado 0 tal que  $\phi \circ \partial' = \partial \circ \phi$  o, equivalentemente, tal que los diagramas siguientes conmutan:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \phi_{p+1} & & \downarrow \phi_p & & \downarrow \phi_{p-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C'_p & \xrightarrow{\partial'_p} & C'_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$



Así, el teorema 2.8 prueba que si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua entre espacios topológicos, entonces  $f^\sharp : C(X) \rightarrow C(Y)$  es un homomorfismo de complejos.

Diremos que un complejo  $\mathcal{D} = \bigoplus_p D_p$  es un *subcomplejo* de otro complejo  $\mathcal{C} = \bigoplus_p C_p$  si para cada  $p$  se cumple que  $D_p$  es un submódulo de  $C_p$  y el operador frontera de  $\mathcal{D}$  es la restricción del operador frontera de  $\mathcal{C}$ .

Por ejemplo, es fácil ver que si  $U \subset X$  son espacios topológicos, entonces  $C(U)$  es un subcomplejo de  $C(X)$ .

Si  $\mathcal{D}$  es un subcomplejo de  $\mathcal{C}$ , entonces el módulo cociente  $\mathcal{C}/\mathcal{D} = \bigoplus_p C_p/D_p$  es un módulo graduado y el operador frontera de  $\mathcal{C}$  induce un operador frontera en  $\mathcal{C}/\mathcal{D}$  mediante  $\partial[c] = [\partial c]$ . De este modo, todo cociente de complejos adquiere estructura de complejo de forma natural.

## 2.3 Grupos de homología

Los resultados de la sección anterior nos permiten introducir con rigor los conceptos de ciclos, fronteras y grupos de homología de un espacio topológico, de acuerdo con lo que vimos en la introducción. Damos la definición en términos de un complejo algebraico abstracto:

**Definición 2.12** Sea  $\mathcal{C} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p$  un complejo de  $\mathbb{A}$ -módulos. Los elementos de  $C_p$  se llaman *cadena* de dimensión  $p$ . Los elementos de  $Z_p = N(\partial_p)$  se llaman *ciclos* de dimensión  $p$ . Los elementos de  $F_p = \text{Im } \partial_{p+1}$  se llaman *fronteras* de dimensión  $p$ . La condición  $\partial_{p+1} \circ \partial_p = 0$  implica que  $F_p \leq Z_p$ .

El módulo  $H_p(\mathcal{C}) = Z_p/F_p$  se llama *grupo de homología* de dimensión  $p$  de  $\mathcal{C}$ . Dos ciclos son *homólogos* si pertenecen a la misma clase de homología.

En particular esto se aplica al complejo de cadenas  $C(X)$  de un espacio topológico  $X$ . Representaremos por  $Z_p(X)$  al módulo de los  $p$ -ciclos de  $X$ , por  $F_p(X)$  al módulo de las  $p$ -fronteras y por  $H_p(X)$  al grupo de homología de dimensión  $p$ .

Por razones técnicas conviene definir unos grupos de homología más generales: Si  $U \subset X$ , definimos  $C(X, U) = C(X)/C(U)$ . A los elementos de  $C_p(X, U)$  los llamaremos *p-cadenas* de  $X$  módulo  $U$ . A sus grupos de homología los llamaremos grupos de *homología relativa* de  $X$  módulo  $U$ , y los representaremos por

$$H_p(X, U) = Z_p(X, U)/F_p(X, U).$$

Observemos que  $H_p(X) = H_p(X, \emptyset)$ , con lo que la homología relativa generaliza a la absoluta.

Veamos ahora algunos hechos elementales que ilustren los conceptos que acabamos de introducir. Nos centraremos en cadenas de dimensión 1.

**Símplices constantes** Veamos en primer lugar que todo 1-símplice constante es una frontera. En efecto, si  $\sigma : I \rightarrow X$  es un 1-símplice que toma constantemente el valor  $x \in X$ , entonces consideramos el 2-símplice  $c : \Delta_2 \rightarrow X$  que toma el mismo valor constante. Su frontera es

$$\partial c = c^\#(x_1, x_2) - c^\#(x_0, x_2) + c^\#(x_0, x_1) = \sigma - \sigma + \sigma = \sigma.$$

**Símplices opuestos** Sea  $\sigma : I \rightarrow X$  un 1-símplice y definamos  $\tau : I \rightarrow X$  mediante  $\tau(t) = \sigma(1-t)$ , es decir,  $\tau$  es el mismo arco que  $\sigma$  pero recorrido al revés. Entonces  $\sigma + \tau$  es una frontera. No podemos decir que  $\sigma$  y  $-\tau$  sean homólogos a menos que sean ciclos, pero esto nos garantiza que si en un ciclo sustituimos  $\sigma$  por  $-\tau$ , o viceversa, obtenemos un ciclo homólogo.

Definimos  $c : \Delta_2 \rightarrow X$  mediante  $c(x, y) = \sigma(x)$ . Como antes:

$$\partial c = c^\#(x_1, x_2) - c^\#(x_0, x_2) + c^\#(x_0, x_1).$$

Pero

$$c^\#(x_0, x_1)(t) = c((x_0, x_1)(t)) = c(t, 0) = \sigma(t),$$

luego  $c^\#(x_0, x_1) = \sigma$ . Similarmente se prueba que  $c^\#(x_1, x_2) = \tau$  y que  $c^\#(x_0, x_2)$  es la constante  $\sigma(0)$ , luego es una frontera por el ejemplo anterior. En total tenemos

$$\partial c = \sigma + \tau + \partial c',$$

como queríamos probar.

**Concatenación** Sea  $\sigma : I \rightarrow X$  un 1-símplice singular, sea  $0 < r < 1$  y sean  $\sigma_1, \sigma_2 : I \rightarrow X$  los símlices dados por

$$\sigma_1(t) = \sigma(tr), \quad \sigma_2(t) = \sigma(r + t(1-r)).$$

Entonces, la 1-cadena  $\sigma - \sigma_1 - \sigma_2$  es una frontera. Como antes, esto significa que si en un ciclo sustituimos  $\sigma$  por  $\sigma_1 + \sigma_2$ , o viceversa, obtenemos un ciclo homólogo.

Consideremos el 2-símplice  $c : \Delta_2 \rightarrow X$  dado por  $c(x, y) = \sigma(x + ry)$ . Su frontera es

$$\partial c = c^\#(x_1, x_2) - c^\#(x_0, x_2) + c^\#(x_0, x_1).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} c^\#(x_1, x_2)(t) &= c((x_1, x_2)(t)) = c((1-t)x_1 + tx_2) = c(1-t, t) \\ &= \sigma(1-t + rt) = \sigma_2(1-t). \end{aligned}$$

Según el ejemplo anterior,  $c^\#(x_1, x_2) = -\sigma_2 + \partial c'$ , para una cierta cadena  $c'$ .

Similarmente se prueba que  $c^\#(x_0, x_2) = \sigma_1$  y  $c^\#(x_0, x_1) = \sigma$ . De este modo tenemos que

$$\partial c = -\sigma_2 + \partial c' - \sigma_1 + \sigma,$$

como queríamos probar.

**Ejercicio:** Probar que si  $\sigma : I \rightarrow X$  es un 1-símplice y  $\theta : I \rightarrow I$  es una aplicación continua tal que  $\theta(0) = 1$  y  $\theta(1) = 0$ , entonces  $\sigma + \theta \circ \sigma$  es una frontera.

Volviendo a la teoría, para conectar los complejos relativos necesitamos aplicaciones entre pares de espacios. Escribiremos  $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$  para indicar que  $U \subset X$ ,  $V \subset Y$ ,  $f : X \rightarrow Y$  y  $f[U] \subset V$ .

En estas condiciones, si la aplicación  $f$  es continua, cada homomorfismo  $f_p^\# : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  induce un homomorfismo  $f_p^\# : C_p(X, U) \rightarrow C_p(Y, V)$ , y éstos se extienden a un vez a un homomorfismo de complejos

$$f^\# : C(X, U) \rightarrow C(Y, V).$$

Sigue cumpliéndose que  $(f \circ g)^\# = f^\# \circ g^\#$ , así como que la identidad induce la identidad.

En general, si  $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  es un homomorfismo de complejos, es claro que envía ciclos a ciclos y fronteras a fronteras, luego induce homomorfismos

$$\overline{\phi}_p : H_p(\mathcal{C}) \rightarrow H_p(\mathcal{C}').$$

La composición de homomorfismos de complejos es un homomorfismo de complejos, y  $\overline{\phi_p \circ \psi_p} = \overline{\phi}_p \circ \overline{\psi}_p$ . Además la identidad  $1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  induce la identidad en cada grupo de homología. De estos hechos se sigue inmediatamente que si  $\phi$  es un isomorfismo entonces los homomorfismos que induce también lo son.

Para el caso de los grupos de homología singular, si  $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$  es una aplicación continua entre pares de espacios, representaremos por

$$f_{*p} : H_p(X, U) \rightarrow H_p(Y, V)$$

a los homomorfismos inducidos por el homomorfismo de complejos  $f^\#$ . Se comprueba sin dificultad que  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ , así como que la identidad induce a la identidad.

Por lo tanto, si  $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$  es un homeomorfismo entre pares (es decir, si  $f : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo y  $f[U] = V$ ), entonces los homomorfismos  $f_{*p} : H_p(X, U) \rightarrow H_p(Y, V)$  son isomorfismos de módulos. Tenemos, pues, que los grupos de homología son invariantes topológicos.

Para evitar subíndices innecesarios conviene definir

$$H(X, U) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(X, U)$$

y reunir todos los homomorfismos  $f_{*p}$  en uno solo

$$f_* : H(X, U) \rightarrow H(Y, V).$$

Dedicamos el resto de la sección a probar algunos resultados elementales sobre los grupos de homología. Para empezar, observamos que la diferencia entre la homología completa y la reducida es mínima:

**Teorema 2.13** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $U \subset X$ . Entonces los grupos de homología completa  $H_p(X, U)$  coinciden con los de homología reducida salvo a lo sumo en el caso  $p = 0$ ,  $X \neq \emptyset$ ,  $U = \emptyset$ .*

DEMOSTRACIÓN: Los operadores frontera son los mismos para ambas homología salvo a lo sumo  $\partial_0$ . Esto hace que todos los grupos de homología coincidan salvo a lo sumo  $H_0(X, U)$  y  $H_{-1}(X, U)$ . Ahora bien, si  $U \neq \emptyset$ , entonces  $C_{-1}(X) = C_{-1}(U)$ , pues ambos coinciden con el  $\mathbb{A}$ -módulo generado por  $(\cdot)$ . Por consiguiente  $C_{-1}(X, U) = 0$ , de donde  $H_{-1}(X, U) = 0$  para ambas homología. Además entonces  $\partial_0 = 0$  necesariamente, luego también coinciden los dos grupos  $H_0(X, U)$ .

Falta probar que si  $U = \emptyset$  también coinciden los grupos  $H_{-1}(X, U) = H_{-1}(X)$ . Podemos suponer  $X \neq \emptyset$ . Para la homología completa tenemos trivialmente que  $H_{-1}(X) = 0$ , y para la reducida tenemos que  $Z_{-1}(X) = C_{-1}(X)$ , porque  $\partial_{-1} = 0$  y  $F_{-1}(X) = C_{-1}(X)$ , pues  $(\cdot)$  es la frontera de cualquier  $x \in X$ . Así pues,  $H_{-1}(X) = 0$  también en este caso. ■

El teorema siguiente es ahora trivial:

**Teorema 2.14** *Si  $X$  es un espacio topológico,  $U \subset X$  y  $p < 0$ , entonces se cumple  $H_p(X, U) = 0$ .*

Enseguida calcularemos los grupos  $H_0(X, U)$ , pero antes probaremos un resultado general:

**Teorema 2.15** *Sea  $X = \bigcup_k X_k$  un espacio topológico descompuesto en una unión disjunta de subespacios tales que cada uno de ellos sea unión de componentes arcoconexas de  $X$ . Sea  $U \subset X$  y sea  $U_k = U \cap X_k$ . Sean*

$$i_k : (X_k, U_k) \longrightarrow (X, U)$$

las inclusiones. Entonces

$$\bigoplus_k i_{*k} : \bigoplus_k H_p(X_k, U_k) \longrightarrow H_p(X, U)$$

es un isomorfismo de módulos para la homología completa.

DEMOSTRACIÓN: Si  $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$  es un  $p$ -símplice singular, entonces su imagen es arcoconexa, luego está contenida en un  $X_k$ . De aquí se sigue que

$$C_p(X) = \bigoplus_k C_p(X_k), \quad C_p(U) = \bigoplus_k C_p(U_k), \quad \text{para } p \geq 0.$$

Esto mismo es trivialmente cierto si  $p < 0$  (podría ser falso para  $p = -1$  con la homología reducida). Es claro entonces que

$$\bigoplus_k i_k^\# : \bigoplus_k C_p(X_k, U_k) \longrightarrow C_p(X, U)$$

es un isomorfismo.

Una comprobación directa nos da que este isomorfismo se restringe a otro

$$\bigoplus_k i_k^\# : \bigoplus_k Z_p(X_k, U_k) \longrightarrow Z_p(X, U)$$

que además transforma la suma de los módulos de fronteras en  $F_p(X, U)$ . Por consiguiente los cocientes son isomorfos, es decir,

$$\bigoplus_k i_{*k} : \bigoplus_k H_p(X_k, U_k) \longrightarrow H_p(X, U)$$

es un isomorfismo. ■

En particular el teorema anterior es aplicable cuando los subespacios  $X_k$  son las componentes arcoconexas de  $X$ , lo que reduce cualquier cálculo de grupos de homología al caso de espacios arcoconexos. Ahora estamos en condiciones de calcular  $H_0(X, U)$ .

**Teorema 2.16** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $U \subset X$ . Sea  $r$  el número de componentes arcoconexas de  $X$  que no cortan a  $U$  (el cardinal  $r$  puede ser finito o infinito). Entonces  $H_0(X, U)$  es un  $\mathbb{A}$ -módulo libre de rango  $r$  excepto para la homología reducida con  $U = \emptyset$ , en cuyo caso el rango es  $r - 1$ .*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos primero el caso de la homología completa. Por el teorema anterior, basta probar que si  $X$  es arcoconexo, entonces

$$H_0(X, U) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } U \neq \emptyset, \\ \mathbb{A} & \text{si } U = \emptyset. \end{cases}$$

Si  $U \neq \emptyset$ , tomemos  $x \in U$ . Cada  $y \in X$  puede unirse con  $x$  mediante un arco  $\sigma$ . Notemos que  $\sigma$  es un 1-símplice y  $\partial\sigma = y - x$ . Por lo tanto la clase de homología de  $y$  es la misma que la de  $x$ , que es nula módulo  $U$ , luego  $H_0(X, U) = 0$ .

Supongamos ahora que  $U = \emptyset$  y sea  $\alpha = \sum a_i \sigma_i \in C_1(X)$ . Sean  $x_i, y_i$  los extremos de  $\sigma_i$ . Entonces

$$\partial\alpha = \sum a_i (y_i - x_i).$$

De aquí se sigue inmediatamente que una condición necesaria para que una 0-cadena  $\beta = \sum b_i z_i$  sea una frontera es que  $\sum b_i = 0$ . La condición es también suficiente, pues basta tomar un punto  $x \in X$  y arcos  $\sigma_i$  que unan  $x$  con cada  $z_i$ . Entonces la 1-cadena  $\sum b_i \sigma_i$  tiene frontera  $\sum b_i (z_i - x) = \beta$ .

Por consiguiente, el homomorfismo  $C_0(X) \longrightarrow \mathbb{A}$  dado por  $\sum b_i z_i \mapsto \sum b_i$  es obviamente suprayectivo y su núcleo es  $F_0(X)$ . Como  $Z_0(X) = C_0(X)$ , tenemos que  $H_0(X) \cong \mathbb{A}$ .

Según el teorema 2.13, el resultado es válido igualmente para la homología reducida si  $U \neq \emptyset$ . Nos falta calcular  $H_0(X)$  para la homología reducida.

Tomemos representantes  $x_i$  de cada una de las componentes arcoconexas de  $X$ . Fijemos una de ellas  $x_{i_0}$ . Una 0-cadena  $\alpha = \sum_{x \in X} a_x x$  es un ciclo si y sólo si

$$\partial\alpha = \sum_{x \in X} a_x (\cdot) = 0,$$

es decir, si  $\sum_{x \in X} a_x = 0$ . En tal caso

$$\alpha = \sum_{x \in X} a_x (x - x_{i_0}).$$

Para cada  $x \in X$ , existe un  $x_{i_x}$  en su misma componente arcoconexa, luego existe un arco  $\sigma_i$  que une  $x_{i_x}$  con  $x$ . Entonces  $\partial\sigma_i = x_{i_x} - x$ . Por consiguiente, la clase de homología de  $\alpha$  es

$$[\alpha] = \sum_{x \in X} a_x [x_{i_x} - x_{i_0}] = \sum_{i \neq i_0} b_i [x_i - x_{i_0}].$$

Esto prueba que los  $r-1$  elementos  $[x_i - x_{i_0}]$  generan  $H_0(X)$ . Basta probar que son independientes. Supongamos que

$$\sum_{i \neq i_0} b_i [x_i - x_{i_0}] = 0,$$

para ciertos coeficientes (casi todos nulos)  $b_i \in \mathbb{A}$ . Entonces

$$\sum_{i \neq i_0} b_i (x_i - x_{i_0}) = \partial \sum_k c_k \sigma_k = \sum_k c_k (z_k - y_k),$$

donde  $z_k$  e  $y_k$  son los extremos de cada arco  $\sigma_k$ . Ahora bien, si  $c_k \neq 0$ , entonces  $z_k$  ha de ser un  $x_i$  (quizá  $i = i_0$ ), pero  $y_k$  está en la misma componente conexa que  $z_k$ , luego ha de ser también  $x_i$  (porque en la izquierda no aparecen dos puntos distintos en la misma componente). Pero entonces el sumando  $c_k(z_k - y_k)$  es nulo, luego todo el miembro derecho es nulo, luego todo  $b_i$  es nulo. ■

Para terminar, calculamos los grupos de homología de un espacio  $X = \{x\}$  formado por un único punto. Ya sabemos que  $H_0(X) \cong \mathbb{A}$  para la homología completa y  $H_0(X) = 0$  en la reducida. El teorema siguiente se ocupa de las demás dimensiones:

**Teorema 2.17** *Sea  $X = \{x\}$  un espacio topológico formado por un punto. Entonces, para  $p \neq 0$ , se cumple  $H_p(X) = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN: Para  $p > 0$ , sólo hay un  $p$ -símplice singular en  $X$ , digamos  $\sigma_p : \Delta_p \rightarrow X$ . Entonces  $\partial\sigma_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma_{p-1}$ . De este modo,

$$\partial\sigma_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ es impar,} \\ \sigma_{p-1} & \text{si } p \text{ es par.} \end{cases}$$

Por consiguiente, si  $p$  es impar  $Z_p(X) = F_p(X) = C_p(X)$ , mientras que si  $p$  es par entonces  $Z_p(X) = F_p(X) = 0$ . En ambos casos,  $H_p(X) = 0$ . ■

## 2.4 El teorema de homotopía

En esta sección probaremos que dos espacios homotópicos tienen los mismos grupos de homología. Para tratar con la homología relativa hemos de introducir las homotopías relativas:

**Definición 2.18** Diremos que dos aplicaciones  $f, g : (X, U) \rightarrow (Y, V)$  son *homotópicas* si existe una aplicación continua  $h : (I \times X, I \times U) \rightarrow (Y, V)$  tal que, para todo  $x \in X$ , se cumple  $h(0, x) = f(x)$ ,  $h(1, x) = g(x)$ .

La definición de homotopía de espacios topológicos se generaliza de forma natural a pares de espacios. El teorema principal es el siguiente:

**Teorema 2.19 (Teorema de homotopía)** Si  $f, g : (X, U) \rightarrow (Y, V)$  son aplicaciones homotópicas, entonces  $f_* = g_*$ .

De aquí se sigue inmediatamente lo que afirmábamos:

**Teorema 2.20** Si los pares  $(X, U)$  e  $(Y, V)$  son homotópicos entonces, para todo  $p \in \mathbb{Z}$ , se cumple  $H_p(X, U) \cong H_p(Y, V)$ .

DEMOSTRACIÓN: Sean  $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$  y  $g : (Y, V) \rightarrow (X, U)$  tales que  $f \circ g$  sea homotópica a la identidad en  $(X, U)$  y  $g \circ f$  a la identidad en  $(Y, V)$ .

Entonces,  $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = 1$  y  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 1$ , luego  $f_*$  es un isomorfismo de módulos y  $g_*$  es su inverso. ■

Comencemos la prueba del teorema de homotopía. Para ello consideramos el espacio  $I \times \Delta_p \subset \mathbb{R}^{p+1}$ . Identificaremos los vértices  $x_i$  de  $\Delta_p$  con los puntos  $(0, x_i)$  y llamaremos  $y_i = (1, x_i)$ . Definimos el *prisma canónico* como

$$P_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, x_1, \dots, x_i, y_i, y_{i+1}, \dots, y_p) \in C_{p+1}(I \times \Delta_p).$$

El lector debería dibujar  $P_2$  y  $P_3$ . La idea subyacente en esta definición es que hemos tomado el prisma —en el sentido geométrico usual— de base  $\Delta_p$  y altura 1 y lo hemos dividido en símlices orientados de tal modo que cada cara compartida es compartida exactamente por dos símlices y con orientaciones opuestas.

Para cada  $p$ -símlice  $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ , definimos  $\sigma' : I \times \Delta_p \rightarrow I \times X$  mediante  $\sigma'(t, x) = (t, \sigma(x))$ . Definimos el *prisma* sobre  $\sigma$  como

$$P(\sigma) = \sigma'^{\#}(P) \in C_{p+1}(I \times X).$$

La interpretación de  $P(\sigma)$  es la misma que la del prisma canónico, sólo que ahora estamos en un espacio arbitrario, la base es un símlice deformado y el prisma hereda las deformaciones de su base. Extendemos linealmente esta aplicación hasta un homomorfismo

$$P : C_p(X) \rightarrow C_{p+1}(I \times X).$$

Para cada aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$ , definimos  $f' : I \times X \rightarrow I \times Y$  mediante  $f'(t, x) = (t, f(x))$ . Veamos que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_p(X) & \xrightarrow{P} & C_{p+1}(I \times X) \\ f^\# \downarrow & & \downarrow f'^\# \\ C_p(Y) & \xrightarrow{P} & C_{p+1}(I \times Y) \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN: Basta probarlo sobre un  $p$ -símplice  $\sigma$ :

$$f'^\#(P(\sigma)) = f'^\#(\sigma'^\#(P)) = (\sigma' \circ f')^\#(P) = (\sigma \circ f)'^\#(P) = f^\#(\sigma)'^\#(P) = P(f^\#(\sigma)).$$

■

Tomemos ahora un  $p$ -símplice afín  $[u_0, \dots, u_p] \subset \mathbb{R}^n$ , formemos el prisma geométrico  $I \times [u_0, \dots, u_p] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , identifiquemos cada vértice  $u_i$  con el punto  $(0, u_i)$  y sea  $v_i = (1, u_i)$ . Veamos que

$$P(u_0, \dots, u_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (u_0, \dots, u_i, v_i, v_{i+1}, \dots, v_p). \quad (2.2)$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos  $\sigma = (u_0, \dots, u_p)$ . Entonces

$$P(\sigma) = \sigma'^\#(P) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma'^\#(x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, y_p).$$

Ahora bien,  $\sigma$  es una aplicación afín, y es fácil ver que  $\sigma'$  también lo es, así como la composición  $\sigma'^\#(x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, y_p)$ . Esta aplicación, es un  $p+1$ -símplice determinado por las imágenes que toma sobre los vértices canónicos  $x_0, \dots, x_{p+1}$  (que no hemos de confundir con los vértices de dimensión  $p$  a los que damos el mismo nombre). Calculando estas imágenes concluimos que

$$\sigma'^\#(x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, y_p) = (u_0, \dots, u_i, v_i, \dots, v_p).$$

Esto prueba la fórmula. ■

Comprobemos ahora la relación:

$$\partial P = (y_0, \dots, y_p) - (x_0, \dots, x_p) - P(\partial(x_0, \dots, x_p)). \quad (2.3)$$

Geoméricamente afirma que, dejando de lado las orientaciones, la frontera de un prisma está formada por sus dos bases más el prisma de la frontera de su base inferior.

DEMOSTRACIÓN: Calculamos:

$$\begin{aligned} \partial P &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial(x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, y_p) \\ &= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_i, y_i, \dots, y_p) \\ &\quad + \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j+1} (x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_p). \end{aligned}$$



Separamos el término  $(y_0, \dots, y_p)$  del primer sumando y  $-(x_0, \dots, x_p)$  del segundo. Los demás términos con  $j = i$  se cancelan entre sí. Por lo tanto nos quedamos con

$$\begin{aligned} \partial P &= (y_0, \dots, y_p) - (x_0, \dots, x_p) + \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_i, y_i, \dots, y_p) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} (x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_p). \end{aligned}$$

Hemos de comprobar que los dos últimos sumandos coinciden con la expresión  $-P(\partial(x_0, \dots, x_p))$ . En efecto, usamos la fórmula (2.2):

$$\begin{aligned} P(\partial(x_0, \dots, x_p)) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j P(x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p) \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (x_0, \dots, x_i, y_i \dots \hat{y}_j, \dots, y_p) \\ &\quad + \sum_{j < i} (-1)^{i+j-1} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_i, y_i, \dots, y_p). \end{aligned}$$

■

Ahora extendemos esta relación a un símlice arbitrario  $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$ . Para ello definimos las aplicaciones  $f', g' : X \longrightarrow I \times X$  mediante  $f'(x) = (0, x)$ ,  $g'(x) = (1, x)$ . Veamos que

$$\partial P(\sigma) = g'^{\#}(\sigma) - f'^{\#}(\sigma) - P(\partial\sigma). \quad (2.4)$$

En efecto, sea  $\sigma'(t, x) = (t, \sigma(x))$  y apliquemos  $\sigma'^{\#}$  a ambos miembros de la fórmula (2.3). Así

$$\sigma'^{\#}(\partial P) = \sigma'^{\#}(y_0, \dots, y_p) - \sigma'^{\#}(x_0, \dots, x_p) - \sigma'^{\#}(P(\partial(x_0, \dots, x_p))).$$

Es inmediato que  $\sigma'^{\#}(y_0, \dots, y_p) = g'^{\#}(\sigma)$  y  $\sigma'^{\#}(x_0, \dots, x_p) = f'^{\#}(\sigma)$ . Por otra parte, como  $\sigma'^{\#}$  conmuta con  $\partial$  y con  $P$ , llegamos a la fórmula buscada.

■

Todas las aplicaciones que aparecen en (2.4) son homomorfismos, luego de hecho tenemos probada la relación

$$g^{\#} - f^{\#} = P \circ \partial + \partial \circ P.$$

En realidad debemos comprobar explícitamente esta fórmula para 0-símlices con la homología completa, pues entonces  $\partial_0 = 0$  no está definida por la fórmula válida para dimensiones superiores. La comprobación no ofrece dificultad alguna. Así mismo, si extendemos  $P$  a los módulos  $C_p(X)$  con  $p < 0$  como el homomorfismo nulo, la relación sigue siendo válida para ambas homologías.

Consideremos finalmente dos aplicaciones  $f, g : (X, U) \longrightarrow (Y, V)$  y una homotopía  $h$  entre ellas. Entonces  $f = f' \circ h$  y  $g = g' \circ h$ , luego componiendo con  $h^{\#}$  y llamando  $P_h = P \circ h^{\#}$ , tenemos que

$$g^{\#} - f^{\#} = P_h \circ \partial + \partial \circ P_h.$$

Observemos que el homomorfismo  $P : C(X) \rightarrow C(I \times X)$  transforma los elementos de  $C(U)$  en elementos de  $C(I \times U)$ , por lo que induce un homomorfismo  $P : C(X, U) \rightarrow C(I \times X, I \times U)$ , luego podemos considerar que  $P_h : C(X, U) \rightarrow C(Y, V)$  es un homomorfismo de módulos de grado 1.

En este punto conviene introducir una definición general:

**Definición 2.21** Diremos que dos homomorfismos de complejos  $\phi, \psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  son *homotópicos*, si existe un homomorfismo  $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  de grado 1 tal que  $\phi - \psi = P\partial' + \partial P$  o, equivalentemente, tal que  $\phi_p - \psi_p = P_p\partial'_{p+1} + \partial_p P_{p+1}$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \searrow^{P_p} & \downarrow^{\phi_p - \psi_p} & \swarrow_{P_{p-1}} & & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C'_p & \xrightarrow{\partial'_p} & C'_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Entonces  $\phi - \psi$  envía  $p$ -ciclos a  $p$ -fronteras, por lo que se cumple  $\overline{\phi_p} = \overline{\psi_p}$  para todo entero  $p$ . Diremos que  $P$  es una *homotopía* entre  $\phi$  y  $\psi$ .

En estos términos hemos probado que toda homotopía  $h$  entre dos aplicaciones  $f, g : (X, U) \rightarrow (Y, V)$  induce una homotopía  $P_h$  entre los homomorfismos  $f^\#$  y  $g^\#$ , luego concluimos, como queríamos probar, que  $f_* = g_*$ . ■

Como consecuencia del teorema de homotopía, si un espacio  $X$  es contractible, entonces sus grupos de homología son los mismos que los de un punto, es decir, son todos nulos salvo  $H_0(X)$  para la homología completa, que es libre de rango 1.

## 2.5 Sucesiones exactas

No podremos sacar partido a la homología singular hasta que no dispongamos de ciertos resultados básicos. Dos de ellos ya están a nuestra disposición: la homología de un punto y el teorema de homotopía, pero nos faltan dos más. En esta sección nos ocuparemos del teorema de la sucesión exacta de homología, que nos permitirá relacionar los grupos de homología de distintos espacios, de modo que podremos calcular unos a partir de otros. El último será el teorema de escisión, del que nos ocuparemos en la sección siguiente.

Introduzcamos en primer lugar el concepto de sucesión exacta:

**Definición 2.22** Una cadena de homomorfismos de módulos

$$\cdots \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} R \longrightarrow \cdots$$

es *exacta* en  $N$  si cumple  $\text{Im } \alpha = \text{N}(\beta)$ . La sucesión completa es *exacta* si lo es en todos sus módulos.

Notar que una sucesión  $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} N$  es exacta en  $M$  si y sólo si  $\alpha$  es inyectiva, mientras que una sucesión  $M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$  es exacta en  $N$  si y sólo si  $\alpha$  es suprayectiva.

Las sucesiones exactas de la forma

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

se llaman *sucesiones exactas cortas*. Las sucesiones exactas infinitas (por ambos lados) se llaman *sucesiones exactas largas*.

Uno de los ejemplos más importantes de sucesiones exactas con que vamos a tratar es el siguiente:

**Teorema 2.23** Sean  $V \subset U \subset X$  espacios topológicos, sean

$$i : (U, V) \longrightarrow (X, V), \quad j : (X, V) \longrightarrow (X, U)$$

la inclusión y la identidad, respectivamente. Entonces la sucesión siguiente es exacta:

$$0 \longrightarrow C(U, V) \xrightarrow{i^\#} C(X, V) \xrightarrow{j^\#} C(X, U) \longrightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Observemos que la exactitud de la sucesión indicada equivale a la exactitud de cada sucesión

$$0 \longrightarrow C_p(U, V) \xrightarrow{i_p^\#} C_p(X, V) \xrightarrow{j_p^\#} C_p(X, U) \longrightarrow 0.$$

Distingamos varios casos:

- a) Si  $X = \emptyset$  todos los módulos son nulos, y la exactitud es trivial.
- b) Si  $X \neq \emptyset$  y  $U = V = \emptyset$ , entonces  $C_p(U, V) = 0$ , luego  $i^\# = 0$ . Por otra parte,  $C_p(X, U) = C_p(X, V) = C_p(X)$  y  $j^\# = 1$  (i.e. es la identidad). De nuevo la conclusión es trivial.
- c) Si  $X \neq \emptyset \neq U, V = \emptyset$ , entonces tenemos

$$0 \longrightarrow C_p(U) \xrightarrow{i_p^\#} C_p(X) \xrightarrow{j_p^\#} C_p(X, U) = C_p(X)/C_p(U) \longrightarrow 0.$$

Para  $p < -1$  todos los módulos son triviales, luego la conclusión es obvia. Lo mismo sucede si  $p = -1$  y la homología es completa. Para  $p = -1$  en la homología reducida tenemos que  $i_{-1}^\# = 1, j_{-1}^\# = 0$  (pues  $C_{-1}(X, U) = 0$ ). La conclusión es clara. Finalmente, si  $p \geq 0$ , tenemos que  $i_p^\#$  es la inclusión y  $j_p^\#$  es la proyección en el cociente, luego la sucesión también es exacta en este caso.

d) Si  $V \neq \emptyset$ , para  $p < 0$  todos los módulos son nulos y la conclusión es trivial. Para  $p \geq 0$  tenemos

$$0 \longrightarrow C_p(U)/C_p(V) \xrightarrow{i_p^\#} C_p(X)/C_p(V) \xrightarrow{j_p^\#} C_p(X)/C_p(U) \longrightarrow 0.$$

Los homomorfismos son los naturales, es decir, los dados por  $[c] \mapsto [c]$ . La exactitud se comprueba sin ninguna dificultad. ■

El interés de las sucesiones exactas es que, como vamos a probar, una sucesión exacta de este tipo da lugar a una sucesión exacta entre los grupos de homología. Para verlo demostramos primero un resultado auxiliar:

**Teorema 2.24** Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de módulos y suponemos que sus filas son exactas.

$$\begin{array}{ccccccc} & & Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 \\ 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 \end{array}$$

Entonces existe un homomorfismo  $\delta_* : N(\partial_3) \longrightarrow Z_1/\text{Im } \partial_1$  tal que la sucesión

$$N(\partial_1) \xrightarrow{\phi''} N(\partial_2) \xrightarrow{\psi''} N(\partial_3) \xrightarrow{\delta_*} Z_1/\text{Im } \partial_1 \xrightarrow{\bar{\phi}} Z_2/\text{Im } \partial_2 \xrightarrow{\bar{\psi}} Z_3/\text{Im } \partial_3$$

es exacta, donde  $\phi''$  y  $\psi''$  son las restricciones de  $\phi'$  y  $\psi'$  a  $N(\partial_1)$  y  $N(\partial_2)$  y  $\bar{\phi}$ ,  $\bar{\psi}$  son los homomorfismos inducidos de forma natural.

DEMOSTRACIÓN: Es fácil comprobar que las aplicaciones  $\phi''$ ,  $\psi''$ ,  $\bar{\phi}$  y  $\bar{\psi}$  están bien definidas, así como la exactitud de la sucesión en  $N(\partial_2)$  y  $Z_2/\text{Im } \partial_2$ .

Para definir  $\delta_*$  tomamos  $c'_3 \in N(\partial_3)$ . Entonces existe  $c'_2 \in Z'_2$  tal que  $c'_3 = \psi'(c'_2)$ . Como  $\psi(\partial_2 c'_2) = \partial_3(\psi'(c'_2)) = \partial_3 c'_3 = 0$ , existe un  $c_1 \in Z_1$  tal que  $\phi(c_1) = \partial_2 c'_2$ .

Es claro que  $c'_2$  es único módulo  $N(\psi') = \text{Im } \phi'$ , luego  $\partial_2 c'_2$  es único módulo  $\phi[\text{Im } \partial_1]$ , luego  $c_1$  es único módulo  $\text{Im } \partial_1$ .

Por lo tanto podemos definir  $\delta_*(c'_3) = c_1 + \text{Im } \partial_1$ . Es claro que, así definido, es un homomorfismo de  $G$ -módulos. (Observar que en definitiva  $\delta_*$  se calcula eligiendo una antiimagen por  $\psi'$ , su imagen por  $\partial_2$  y una antiimagen por  $\psi$ .)

Es claro que  $\text{Im } \psi'' \subset N(\delta_*)$ . Si  $c'_3 \in N(\delta_*)$  entonces  $c_1 = \partial_1 c'_1$ , para un cierto  $c'_1 \in Z'_1$ , luego  $\partial_2 c'_2 = \phi(c_1) = \phi(\partial_1 c'_1) = \partial_2(\phi'(c'_1))$ , con lo que tenemos  $c'_2 - \phi'(c'_1) \in N(\partial_2)$  y así

$$c'_3 = \psi'(c'_2) = \psi'(c'_2 - \phi'(c'_1)) + \psi'(\phi'(c'_1)) = \psi'(c'_2 - \phi'(c'_1)) \in \text{Im } \psi''.$$

También es claro que  $\text{Im } \delta_* \subset N(\bar{\phi})$ . Si  $c_1 + \text{Im } \partial_1 \in N(\bar{\phi})$  entonces tenemos que  $\phi(c_1) \in \text{Im } \partial_2$ , digamos  $\phi(c_1) = \partial_2(c'_2)$ , con  $c'_2 \in Z'_2$ . Sea  $c'_3 = \psi'(c'_2)$ . Es claro que  $c'_3 \in N(\partial_3)$  y por construcción  $\delta_*(c'_3) = c_1 + \text{Im } \partial_1$ , luego concluimos que  $c_1 + \text{Im } \partial_1 \in \text{Im } \delta_*$ . ■

De aquí deducimos:

**Teorema 2.25** Si  $0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \longrightarrow 0$  es una sucesión exacta de complejos entonces existen homomorfismos

$$\delta_{*p} : H_p(\mathcal{C}) \longrightarrow H_{p-1}(\mathcal{A})$$

tales que la sucesión siguiente es exacta:

$$\cdots \longrightarrow H_p(\mathcal{A}) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(\mathcal{B}) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(\mathcal{B}) \longrightarrow \cdots$$

DEMOSTRACIÓN: La hipótesis significa que las sucesiones

$$0 \longrightarrow C_p(\mathcal{A}) \xrightarrow{\phi_p} C_p(\mathcal{B}) \xrightarrow{\psi_p} C_p(\mathcal{C}) \longrightarrow 0,$$

son exactas para todo  $p \in \mathbb{Z}$ .

Basta comprobar que el diagrama siguiente se encuentra en las hipótesis del teorema anterior.

$$\begin{array}{ccccccc} C_p(\mathcal{A})/F_p(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\phi_p} & C_p(\mathcal{B})/F_p(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\psi_p} & C_p(\mathcal{C})/F_p(\mathcal{C}) & \longrightarrow & 0 \\ \partial_p \downarrow & & \partial_p \downarrow & & \partial_p \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_{p-1}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\phi_{p-1}} & Z_{p-1}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\psi_{p-1}} & Z_{p-1}(\mathcal{C}) \end{array}$$

(donde  $Z$  y  $F$  representan los grupos de ciclos y fronteras de los complejos.)

Ciertamente la fila superior está bien definida,  $\psi_p$  es suprayectiva y se cumple  $\text{Im } \phi_p \subset \text{N}(\psi_p)$ .

Si  $\psi_p(u + F_p(\mathcal{B})) = 0$  entonces  $\psi_p(u) \in F_p(\mathcal{C})$ , luego  $\psi_p(u) = \partial_{p-1}v$ , para un cierto  $v \in C_{p-1}(\mathcal{C})$ , que a su vez es de la forma  $v = \psi_{p-1}(w)$  con  $w \in C_{p-1}(\mathcal{B})$ . Así pues,  $\psi_p(u) = \partial_{p-1}(\psi_{p-1}(w)) = \psi_p(\partial_{p-1}w)$ , con lo que  $u - \partial_{p-1}w \in \text{N}(\psi_p)$ . Por tanto hay un  $x \in C_p(\mathcal{A})$  tal que  $u - \partial_{p-1}w = \phi_p(x)$ , luego  $u + F_p(\mathcal{B}) = \phi_p(x + F_p(\mathcal{A}))$ .

Esto prueba la exactitud de la fila superior. Es obvio que el diagrama conmuta, que  $\phi_{p-1}$  es inyectiva y que  $\text{Im } \phi_{p-1} \subset \text{N}(\psi_{p-1})$ .

Supongamos por último que  $x \in \text{N}(\psi_{p-1})$ . Entonces  $x = \phi_{p-1}(y)$  para un  $y \in C_{p-1}(\mathcal{A})$  y hay que probar que  $y \in Z_{p-1}(\mathcal{A})$ . Ahora bien,  $\phi_{p-2}(\partial_{p-1}y) = \partial_{p-1}(\phi_{p-1}(y)) = \partial_{p-1}x = 0$  (pues  $x$  es un ciclo). Como  $\phi_{p-2}$  es inyectiva resulta que  $\partial_{p-1}y = 0$ , luego  $y$  es un ciclo. ■

Los homomorfismos  $\delta_{*p}$  reciben el nombre de *homomorfismos de conexión* de la sucesión exacta dada. Conviene recordar cómo actúan: dado un ciclo de  $\mathcal{C}$  de dimensión  $p-1$ , tomamos cualquier antiimagen por  $\psi$ , calculamos la frontera de ésta, calculamos su antiimagen por  $\phi$  y la clase del ciclo resultante es la imagen por  $\delta_{*p}$  de la clase del ciclo de partida.

Combinando este teorema con 2.23 obtenemos:

**Teorema 2.26** Sean  $V \subset U \subset X$  espacios topológicos, sean

$$i : (U, V) \longrightarrow (X, V), \quad j : (X, V) \longrightarrow (X, U)$$

la inclusión y la identidad, respectivamente. Entonces tenemos una sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow H_p(U, V) \xrightarrow{i_{*p}} H_p(X, V) \xrightarrow{j_{*p}} H_p(X, U) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(U, V) \xrightarrow{i_{*p-1}} \dots$$

A la sucesión exacta que proporciona este teorema se la suele llamar *sucesión de homología* de la terna  $(X, U, V)$ . Si  $V = \emptyset$  tenemos la *sucesión de homología del par*  $(X, U)$ .

**Ejemplo** Consideremos el espacio  $X = ]0, 3[$  y el subespacio  $U = ]0, 1[ \cup ]2, 3[$ . Vamos a estudiar la sucesión de homología del par  $(X, U)$ . Consideraremos la homología reducida. El teorema 2.15 nos reduce la homología de  $U$  a la de sus componentes conexas, que es trivial porque ambas son contractibles. Así pues,  $H_p(U) = 0$  salvo si  $p = 0$ , en cuyo caso el teorema 2.16 nos da que  $H_0(U) \cong \mathbb{A}$ . Más concretamente, la prueba nos muestra que (para la homología reducida), una base de  $H_0(U)$  como  $\mathbb{A}$ -módulo es  $b - a$ , donde  $a \in ]0, 1[$  y  $b \in ]2, 3[$ .

Por otra parte, los grupos de homología de  $X$  son todos triviales, porque es contractible. Para  $p > 1$  la sucesión de homología del par es

$$0 = H_p(X) \longrightarrow H_p(X, U) \longrightarrow H_{p-1}(U) = 0,$$

de donde se sigue que  $H_p(X, U) = 0$ . Sin embargo, para  $p = 0$  tenemos

$$0 = H_1(X) \longrightarrow H_1(X, U) \xrightarrow{\delta_*} H_0(U) \longrightarrow H_0(X) = 0.$$

Esto significa que  $\delta_*$  es un isomorfismo. Sea  $\sigma : I \longrightarrow X$  el 1-símplice dado por  $\sigma(t) = (1-t)a + tb$ , es decir, el segmento que une  $a$  con  $b$ . Observemos que  $[\sigma]$  es un ciclo en  $H_1(X, U)$ , pues su frontera es  $\partial[\sigma] = [b] - [a] = 0 - 0 = 0$ , ya que  $a, b \in U$ .

Calculemos  $\delta_*([\sigma])$ . Recordemos que  $\delta_*$  es el homomorfismo de conexión de la sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow C(U) \longrightarrow C(X) \longrightarrow C(X, U) \longrightarrow 0.$$

Según la observación posterior al teorema 2.25, para calcular  $\delta_*([\sigma])$  hemos de dar los pasos siguientes:

- Tomamos cualquier antiimagen de  $\sigma$  en  $C_1(X)$ , por ejemplo  $\sigma$ .
- Calculamos la frontera:  $\partial\sigma = b - a \in C_0(X)$ .
- Tomamos cualquier antiimagen en  $C_0(U)$ , por ejemplo  $b - a$ .

Entonces,  $\delta_*([\sigma]) = [b] - [a]$ , que es, según hemos observado, una base de  $H_0(U)$ . Como  $\delta_*$  es un isomorfismo  $[\sigma]$  ha de ser una base de  $H_1(X, U)$ . Más en general, es claro que la clase de cualquier arco que una un punto de  $]0, 1[$  con un punto de  $]2, 3[$  es una base de  $H_1(X, U)$ . ■

Para terminar la sección necesitamos un resultado sobre la relación entre las sucesiones de homología y los homomorfismos de complejos. Lo enunciaremos primero en general:

**Teorema 2.27** Consideremos el siguiente diagrama de complejos y homomorfismos de complejos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{i} & \mathcal{B} & \xrightarrow{j} & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \xrightarrow{i'} & \mathcal{B}' & \xrightarrow{j'} & \mathcal{C}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde las filas son exactas y cada cuadrado es conmutativo. Entonces en el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_p(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\bar{i}} & H_p(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\bar{j}} & H_p(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & & \downarrow \bar{f} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_p(\mathcal{A}') & \xrightarrow{\bar{i}'} & H_p(\mathcal{B}') & \xrightarrow{\bar{j}'} & H_p(\mathcal{C}') & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(\mathcal{A}') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

cada cuadrado es conmutativo.

DEMOSTRACIÓN: Probaremos únicamente la conmutatividad del cuadrado de la derecha. Los otros son inmediatos. Tomemos una clase  $[c] \in H_p(\mathcal{C})$ . Para calcular  $\delta_*([c])$  tomamos  $b \in C_p(\mathcal{B})$  tal que  $c = j(b)$  y  $a \in Z_{p-1}(\mathcal{A})$  tal que  $i(a) = \partial b$ . Entonces  $\delta_*([c]) = [a]$ . Por consiguiente  $\bar{f}(\delta_*([c])) = [f(a)]$ .

Por otra parte, calculamos  $\delta_*(\bar{h}([c])) = \delta_*([h(c)])$ . Necesitamos  $b' \in C_p(\mathcal{B}')$  tal que  $j'(b') = h(c)$ , pero sirve  $b' = g(b)$ . Ahora necesitamos un  $a' \in Z_{p-1}(\mathcal{A}')$  tal que  $i'(a') = \partial g(b) = g(\partial b)$ , pero sirve  $a' = f(a)$ , luego  $\delta_*(\bar{h}([c])) = [f(a)]$ . ■

Al aplicar esto a la homología singular obtenemos el teorema siguiente:

**Teorema 2.28** Sean  $V \subset U \subset X$  y  $V' \subset U' \subset X'$  espacios topológicos y  $f : (X, U, V) \longrightarrow (X', U', V')$  una aplicación continua. Entonces los cuadrados del diagrama siguiente son conmutativos:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & H_p(U, V) & \xrightarrow{i_*} & H_p(X, V) & \xrightarrow{j_*} & H_p(X, U) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(U, V) & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & H_p(U', V') & \xrightarrow{i'_*} & H_p(X', V') & \xrightarrow{j'_*} & H_p(X', U') & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(U', V') & \cdots \end{array}$$

donde las flechas verticales representan los homomorfismos inducidos por  $f$  y su restricción a  $U$ .

DEMOSTRACIÓN: Aunque nunca habíamos considerado hasta aquí aplicaciones entre ternas, se entiende que la hipótesis sobre  $f$  es que  $f : X \longrightarrow X'$ ,  $f[U] \subset U'$  y  $f[V] \subset V'$ . El resultado es consecuencia inmediata del teorema anterior una vez comprobado que los cuadrados del diagrama siguiente son conmutativos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_p(U, V) & \xrightarrow{i^\#} & C_p(X, V) & \xrightarrow{j^\#} & C_p(X, U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_p(U', V') & \xrightarrow{i'^\#} & C_p(X', V') & \xrightarrow{j'^\#} & C_p(X', U') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La prueba requiere, como es habitual, tratar aparte los casos triviales. El caso principal es consecuencia inmediata de las definiciones. ■

## 2.6 El teorema de escisión

Nos ocupamos ahora del último resultado básico de la homología singular. El teorema de escisión se probará sin dificultad en cuanto hayamos demostrado un hecho intuitivamente evidente pero cuya prueba formal requiere algún trabajo. Se trata de que un símlice puede ser subdividido en símlices arbitrariamente pequeños que formen una cadena con el mismo soporte que el símlice de partida.

Empezamos introduciendo los conceptos necesarios para definir la subdivisión de un símlice.

**Definición 2.29** Sea  $\sigma = (y_0, \dots, y_p)$  un  $p$ -símlice singular afín en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $z \in \mathbb{R}^n$ . Representaremos por  $z\sigma$  al  $p+1$ -símlice singular afín  $(z, y_0, \dots, y_p)$ . Si  $\alpha = \sum_i a_i \sigma_i$  es una  $p$ -cadena formada por símlices afines en  $\mathbb{R}^n$ , llamaremos

$$z\alpha = \sum_i a_i (z\sigma_i).$$

La interpretación del teorema siguiente es clara:

**Teorema 2.30** Sea  $\alpha$  una cadena singular en  $\mathbb{R}^n$  formada por símlices afines y sea  $z \in \mathbb{R}^n$ . Entonces  $\partial(z\alpha) = \alpha - z\partial\alpha$ .

DEMOSTRACIÓN: Puesto que ambos miembros son lineales, basta probar que es cierto cuando  $\alpha = \sigma = (y_0, \dots, y_p)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \partial(z\sigma) &= \partial(z, y_0, \dots, y_p) = (y_0, \dots, y_p) - \sum_{i=0}^p (-1)^i (z, y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_p) \\ &= \sigma - z \sum_{i=0}^p (-1)^i (y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_p) = \sigma - z\partial\sigma. \end{aligned}$$

■

**Definición 2.31** El *baricentro* de un  $p$ -símlice singular afín  $(y_0, \dots, y_p)$  es el punto

$$b = \sum_{i=0}^p \frac{1}{p+1} y_i.$$

Es fácil ver que el baricentro de un segmento es su punto medio, el de un triángulo es el punto donde se cortan sus medianas.

Definimos ahora la subdivisión de una  $p$ -cadena singular afín  $\alpha$  en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, una  $p$ -cadena formada por símlices singulares afines. Observemos que por el teorema 2.9, la frontera de una cadena afín es una cadena afín. La definición es por inducción sobre  $p$ :

- a) Si  $\alpha$  es una 0-cadena, definimos  $S(\alpha) = \alpha$ .



b) Si  $\sigma$  es un  $p$ -símplice singular afín, definimos

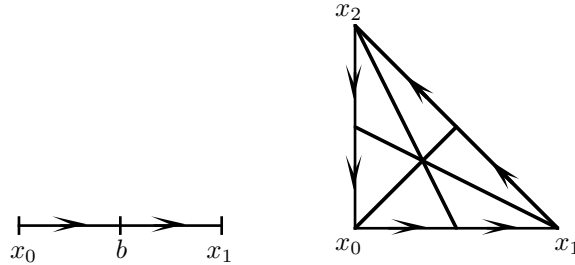
$$S(\sigma) = bS(\partial\sigma),$$

donde  $b$  es el baricentro de  $\sigma$ .

c) Si  $\alpha = \sum_i a_i \sigma_i$  es una  $p$ -cadena singular afín en  $\mathbb{R}^n$ , definimos

$$S(\alpha) = \sum_i a_i S(\sigma_i).$$

En particular tenemos definida la subdivisión  $S(x_0, \dots, x_p)$  del símplice canónico. Concretamente,  $S(x_0) = (x_0)$ ,  $S(x_0, x_1) = (b, x_1) - (b, x_0)$ , donde  $b$  es el punto medio del segmento,  $S(x_0, x_1, x_2)$  se forma dividiendo en dos cada lado del triángulo y adjuntando el baricentro a cada uno de los seis segmentos que obtenemos.



El lector puede calcular las orientaciones de los segmentos interiores del triángulo, y comprobará que se cancelan mutuamente, de modo que la frontera de la subdivisión resulta ser la subdivisión de la frontera del triángulo completo.

Definimos ahora la subdivisión de un  $p$ -símplice arbitrario  $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$  como  $S(\sigma) = \sigma^\#(S(x_0, \dots, x_p))$ . Como es habitual, extendemos la definición a cadenas arbitrarias por linealidad, con lo que tenemos definidos homomorfismos

$$S : C_p(X) \rightarrow C_p(X).$$

Hemos de notar que tenemos dos definiciones distintas de la subdivisión de un símplice singular afín. Llamando  $S'$  a la subdivisión que hemos definido inductivamente, vamos a probar que  $S(\sigma) = \sigma^\#(S'(x_0, \dots, x_p))$  coincide con  $S'(\sigma)$ .

Más en general, vamos a probar que si  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación afín, entonces  $S' \circ f^\# = f^\# \circ S'$ , pues aplicando esto a  $f = \sigma$  obtenemos que

$$S(\sigma) = \sigma^\#(S'(x_0, \dots, x_p)) = S'(f^\#(x_0, \dots, x_p)) = S'(\sigma).$$

Basta comprobar que  $S' \circ f^\#$  y  $f^\# \circ S'$  coinciden sobre un  $p$ -símplice singular afín  $\sigma$ . Razonaremos por inducción sobre  $p$ .

Si  $p = 0$  tenemos que  $S'(f^\#(\sigma)) = f^\#(\sigma) = f^\#(S'(\sigma))$ . Supongamos que la igualdad es cierta para  $p - 1$ -símplices, y por consiguiente para  $p - 1$ -cadenas

afines. En particular esta hipótesis de inducción implica que  $f^\sharp(S'(\partial\sigma)) = S'(f^\sharp(\partial\sigma))$ . Notemos también que  $f(b)$  es el baricentro de  $f^\sharp(\sigma)$ .

$$f^\sharp(S'(\sigma)) = f^\sharp(bS'(\partial\sigma)) = f(b)f^\sharp(S'(\partial\sigma)) = f(b)S'(\partial(f^\sharp(\sigma))) = S'(f^\sharp(\sigma)).$$

De este modo, ya no necesitamos distinguir entre  $S$  y  $S'$ . No enunciamos como teorema la igualdad que hemos probado porque el teorema siguiente la incluye como caso particular:

**Teorema 2.32** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua entre espacios topológicos entonces  $f^\sharp \circ S = S \circ f^\sharp$ .*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que ambas aplicaciones coinciden sobre un  $p$ -símplice  $\sigma$  en  $X$ .

$$\begin{aligned} f^\sharp(S(\sigma)) &= f^\sharp(\sigma^\sharp(S(x_0, \dots, x_p))) = (\sigma \circ f)^\sharp(S(x_0, \dots, x_p)) \\ &= S(\sigma \circ f) = S(f^\sharp(\sigma)). \end{aligned}$$

■

Aunque no hemos usado subíndices explícitamente, en realidad tenemos definidos homomorfismos  $S_p : C_p(X) \rightarrow C_p(X)$  para  $p \geq 0$ . Completamos la definición estableciendo que  $S_p$  es la identidad cuando  $p < 0$ , con lo que tenemos un homomorfismo graduado

$$S : C(X) \rightarrow C(X).$$

Veamos ahora que es un homomorfismo de complejos, es decir, que conmuta con el operador frontera, tal y como mostraba la figura del triángulo.

**Teorema 2.33** *Si  $X$  es un espacio topológico, el operador de subdivisión*

$$S : C(X) \rightarrow C(X)$$

*es un homomorfismo de complejos.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que  $S_p$  conmuta con la frontera si  $p \leq 0$ , tanto para la homología reducida como para la completa. Razonando por inducción, podemos suponer que  $S_{p-1} \circ \partial_{p-1} = \partial_{p-1} \circ S_{p-2}$ . Ahora, si  $\sigma$  es un  $p$ -símplice arbitrario y  $b$  es el baricentro de  $(x_0, \dots, x_p)$ ,

$$\begin{aligned} \partial_p(S_p(\sigma)) &= \partial_p(S_p(\sigma^\sharp(x_0, \dots, x_p))) = \sigma^\sharp(\partial_p(S_p(x_0, \dots, x_p))) \\ &= \sigma^\sharp(\partial_p(bS_{p-1}(\partial_p(x_0, \dots, x_p)))) \quad \text{y por 2.30} \\ &= \sigma^\sharp(S_{p-1}(\partial_p(x_0, \dots, x_p)) - b\partial_{p-1}(S_{p-1}(\partial_p(x_0, \dots, x_p)))) \\ &= S_{p-1}(\partial_p(\sigma)) - \sigma^\sharp(bS_{p-1}(\partial_{p-1}(\partial_p(x_0, \dots, x_p)))) \\ &= S_{p-1}(\partial_p(\sigma)). \end{aligned}$$

■

En cierto sentido, al subdividir una cadena obtenemos la misma cadena, sólo que construida con piezas más pequeñas. Esto se plasma en el teorema siguiente:

**Teorema 2.34** *Para la homología completa, el operador subdivisión  $S$  es homotópico a la identidad.*

DEMOSTRACIÓN: Dado un espacio topológico, hemos de construir una homotopía de  $C(X)$  en sí mismo, compuesta por homomorfismos

$$H_p : C_p(X) \longrightarrow C_{p+1}(X)$$

de modo que, para todo entero  $p$  y todo  $\alpha \in C_p(X)$ , se cumpla

$$S(\alpha) - \alpha = \partial H_p(\alpha) + H_{p-1}(\partial\alpha). \quad (2.5)$$

Además lo construiremos de manera que si  $f : X \longrightarrow Y$  es una aplicación continua, entonces

$$f^\# \circ H_p = H_p \circ f^\#.$$

Construiremos estos homomorfismos inductivamente. Si tomamos  $H_p = 0$  para  $p \leq 0$  ambas relaciones se cumplen trivialmente. Supongamos definido  $H_{p-1}$  de modo que se cumplan ambas igualdades.

En primer lugar definiremos  $H_p(x_0, \dots, x_p)$ . Según (2.5), debe cumplir

$$\partial H_p(x_0, \dots, x_p) = S(x_0, \dots, x_p) - (x_0, \dots, x_p) - H_{p-1}(\partial(x_0, \dots, x_p)). \quad (2.6)$$

Veamos que el miembro derecho es un ciclo en  $C_p(\Delta_p)$ . En efecto, su frontera es

$$\begin{aligned} & \partial S(x_0, \dots, x_p) - \partial(x_0, \dots, x_p) - \partial(H_{p-1}(\partial(x_0, \dots, x_p))) \\ &= S(\partial(x_0, \dots, x_p)) - \partial(x_0, \dots, x_p) \\ & - (S(\partial(x_0, \dots, x_p)) - \partial(x_0, \dots, x_p) - H_{p-1}(\partial^2(x_0, \dots, x_p))) = 0. \end{aligned}$$

Ahora bien,  $\Delta_p$  es convexo, luego es contractible, luego sus grupos de homología coinciden con los del punto, con lo que  $H_p(\Delta_p) = 0$  (para la homología completa), lo que significa que todos los  $p$ -ciclos son  $p$ -fronteras. Por consiguiente, podemos definir  $H_p(x_0, \dots, x_p)$  eligiendo una  $p+1$ -cadena en  $C_{p+1}(\Delta_p)$  cuya frontera sea el miembro derecho de (2.6), de manera que (2.5) se cumple para  $(x_0, \dots, x_p)$ .

Para un  $p$ -símplice singular  $\sigma$  en un espacio topológico arbitrario  $X$ , definimos

$$H_p(\sigma) = \sigma^\#(H_p(x_0, \dots, x_p)),$$

y extendemos linealmente esta aplicación a un homomorfismo en  $C_p(X)$ .

Hemos de comprobar que cumple las dos relaciones. En primer lugar:

$$\begin{aligned} \partial H_p(\sigma) &= \partial(\sigma^\#(H_p(x_0, \dots, x_p))) = \sigma^\#(\partial H_p(x_0, \dots, x_p)) \\ &= \sigma^\#(S(x_0, \dots, x_p) - (x_0, \dots, x_p) - H_{p-1}(\partial(x_0, \dots, x_p))) \\ &= S(\sigma) - \sigma - H_{p-1}(\partial\sigma). \end{aligned}$$

Respecto a la segunda relación:

$$\begin{aligned} f^\#(H_p(\sigma)) &= f^\#(\sigma^\#(H_p(x_0, \dots, x_p))) \\ &= (\sigma \circ f)^\#(H_p(x_0, \dots, x_p)) = H_p(\sigma \circ f) = H_p(f^\#(\sigma)). \end{aligned}$$

■

Si  $X$  es un espacio topológico y  $U \subset X$ , entonces, el hecho de que la subdivisión  $S$  conmute con  $i^\#$ , donde  $i : U \rightarrow X$  es la inclusión, se traduce en que  $S$  induce un homomorfismo  $S : C(X, U) \rightarrow C(X, U)$  con las mismas propiedades que  $S$ . Similarmente, el hecho de que la homotopía construida en el teorema anterior conmute con  $i^\#$  significa que induce una homotopía en  $C(X, U)$  entre  $S$  y la identidad. La observación tras la definición 2.21 nos da ahora el teorema siguiente:

**Teorema 2.35** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $U \subset X$ . Entonces, en la homología completa,  $S_{*p} : H_p(X, U) \rightarrow H_p(X, U)$  es la identidad.*

Ahora vamos a comprobar que, subdividiendo una cadena un número suficiente de veces, podemos conseguir que sus símlices sean arbitrariamente pequeños. Supongamos primeramente que  $\sigma = (y_0, \dots, y_p)$  es un  $p$ -símlice singular afín en  $\mathbb{R}^n$ . Representaremos por  $\|\cdot\|$  a la norma euclídea en  $\mathbb{R}^n$  y por  $d(|\sigma|)$  al diámetro del soporte  $|\sigma|$  respecto a dicha norma.

Si  $u, v \in |\sigma|$ , entonces  $u = \sum_{i=0}^p a_i y_i$ ,  $v = \sum_{i=0}^p b_i y_i$  donde los coeficientes son no negativos y suman 1. Por lo tanto

$$\|u - v\| = \left\| \sum_{i=0}^p a_i (y_i - v) \right\| \leq \sum_{i=0}^p a_i \|y_i - v\| \leq \max_i \|y_i - v\|.$$

Repitiendo el argumento con cada término de la última expresión llegamos a que

$$\|u - v\| \leq \max_{i,j} \|y_i - y_j\|,$$

luego claramente

$$d(|\sigma|) = \max_{i,j} \|y_i - y_j\|. \quad (2.7)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \|y_i - v\| &= \left\| \sum_{j=0}^p b_j (y_i - y_j) \right\| \leq \sum_{j \neq i} b_j \|y_i - y_j\| \\ &\leq (1 - b_i) \max_{i,j} \|y_i - y_j\| = (1 - b_i) d(|\sigma|). \end{aligned}$$

En particular, si  $v = b_\sigma = \sum_{i=0}^p \frac{1}{p+1} y_i$ , tenemos que

$$\|y_i - b_\sigma\| \leq \frac{p}{p+1} d(|\sigma|).$$

luego, por (2.7),

$$\|u - b_\sigma\| \leq \frac{p}{p+1} d(|\sigma|), \quad \text{para todo } u \in |\sigma|. \quad (2.8)$$

Con esto podemos probar:

**Teorema 2.36** *Sea  $\sigma$  un  $p$ -símplice singular afín en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, cada  $p$ -símplice  $\tau$  de  $S(\sigma)$  cumple*

$$d(|\tau|) \leq \frac{p}{p+1} d(|\sigma|).$$

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos por inducción sobre  $p$ . Para  $p = 0$  es trivialmente cierto, pues todos los diámetros son nulos. Supongámoslo cierto para  $p - 1$ . Como  $S(\sigma) = b_\sigma S(\partial\sigma)$ , el símplice  $\tau$  es de la forma  $b_\sigma \tau'$ , donde  $\tau'$  es uno de los símplices de  $S(\partial\sigma)$ . Más exactamente, es uno de los símplices de  $S(\rho)$ , donde  $\rho$  es uno de los símplices de  $\partial\sigma$ . Es claro que  $|\rho| \subset |\sigma|$ , luego  $d(|\rho|) \leq d(|\sigma|)$ . Por hipótesis de inducción

$$d(|\tau'|) \leq \frac{p-1}{p} d(|\sigma|) \leq \frac{p}{p+1} d(|\sigma|).$$

Hemos de estimar la distancia entre dos vértices de  $\tau$ . Si ambos están en  $\tau'$  sirve la cota anterior. En caso contrario uno es  $b_\sigma$  y el otro está en  $|\tau'| \subset |\sigma|$ , luego nos sirve (2.8). En cualquier caso tenemos la cota del enunciado. ■

Ahora es claro que subdividiendo un símplice singular afín podemos obtener cadenas con símplices de diámetro arbitrariamente pequeño. Para un símplice en un espacio topológico arbitrario no podemos hablar de diámetro, pero podemos exigir que los símplices estén dominados por un cubrimiento abierto arbitrario. Para ello necesitamos el teorema de Lebesgue:

**Teorema 2.37 (Teorema del cubrimiento de Lebesgue)** *Dado un cubrimiento abierto en un espacio métrico compacto  $M$ , existe un  $\epsilon > 0$  tal que todo subconjunto de  $M$  de diámetro menor que  $\epsilon$  está contenido en uno de los abiertos del cubrimiento.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada  $x \in M$ , tomamos una bola abierta  $B(x, r_x)$  contenida en un abierto del cubrimiento. Las bolas  $B(x, r_x/2)$  forman un cubrimiento de  $M$  del que podemos extraer un subcubrimiento finito. Tomamos  $\epsilon$  igual al mínimo radio de las bolas de este subcubrimiento. Así, si un conjunto  $A$  tiene diámetro menor que  $\epsilon$ , está contenido en una de las bolas  $B(x, r_x)$ , luego está contenido en uno de los abiertos del cubrimiento. ■

El teorema definitivo sobre el tamaños de los símplices de las subdivisiones es el siguiente:

**Teorema 2.38** *Sea  $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$  un  $p$ -símplice singular en un espacio topológico  $X$  y sea  $\mathcal{U}$  un cubrimiento abierto de  $X$ . Entonces existe un número natural  $n$  tal que cada símplice de  $S^n(\sigma)$  está contenido en un abierto de  $\mathcal{U}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Las antiimágenes por  $\sigma$  de los abiertos de  $\mathcal{U}$  forman un cubrimiento abierto de  $\Delta_p$ . Sea  $\epsilon > 0$  según el teorema de Lebesgue. Del teorema 2.36 se sigue que existe un número natural  $n$  tal que cada símplice de  $S^n(x_0, \dots, x_n)$  tiene diámetro menor que  $\epsilon$ , luego está contenido en un abierto del cubrimiento. Como  $S^n(\sigma) = \sigma^\#(S^n(x_0, \dots, x_p))$ , es claro que  $n$  cumple lo pedido. ■

Finalmente estamos en condiciones de demostrar el teorema de escisión. Su enunciado es sencillo: si  $V \subset U \subset X$ , los grupos de homología  $H_p(X, U)$  se forman despreciando los símplices contenidos en  $U$ , por lo que es razonable esperar que no se alteren al eliminar  $V$ , es decir, que sean isomorfos a los grupos  $H_p(X \setminus V, U \setminus V)$ . En realidad es necesaria una hipótesis topológica:

**Teorema 2.39 (Teorema de escisión)** Sean  $V \subset U \subset X$  espacios topológicos tales que  $\bar{V} \subset \overset{\circ}{U}$ . Entonces la inclusión

$$i : (X \setminus V, U \setminus V) \longrightarrow (X, U)$$

induce isomorfismos

$$i_* : H_p(X \setminus V, U \setminus V) \longrightarrow H_p(X, U)$$

para la homología completa.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que  $i_*$  es suprayectiva. Sea  $[\alpha] \in H_p(X, U)$ . Consideremos el cubrimiento de  $X$  formado por los dos abiertos  $X \setminus \bar{V}$  y  $\overset{\circ}{U}$ . Por el teorema anterior existe un  $n$  tal que cada símplice en  $S^n(\alpha)$  está contenido en uno de estos dos abiertos. Por el teorema 2.35,  $[S^n(\alpha)] = S_*^n([\alpha]) = [\alpha]$ . Esto significa que podemos suponer que  $\alpha$  está formada por símplices contenidos en  $X \setminus \bar{V}$  o  $\overset{\circ}{U}$ , pero los que están en  $\overset{\circ}{U}$  podemos eliminarlos, porque son nulos módulo  $U$ .

En definitiva, toda clase de  $H_p(X, U)$  tiene un representante formado por símplices contenidos en  $X \setminus \bar{V}$ , luego la clase tiene antiimagen en  $H_p(X \setminus V, U \setminus V)$ .

Supongamos ahora que  $i_*([\alpha]) = 0$ . Esto significa que  $\alpha = \partial\beta + \gamma$ , donde  $\beta \in C_{p+1}(X)$  y  $\gamma \in C_p(U)$ . Podemos aplicar repetidas veces el operador  $S$  a esta igualdad sin cambiar por ello la clase  $[\alpha]$ . Con ello podemos exigir que  $\beta = \beta_1 + \beta_2$ , donde  $\beta_1 \in C_{p+1}(\overset{\circ}{U})$  y  $\beta_2 \in C_{p+1}(X \setminus \bar{V})$ . Así

$$\alpha - \partial\beta_2 = \partial\beta_1 + \gamma.$$

Pero el miembro izquierdo está en  $C_p(X \setminus V)$  y el miembro derecho en  $C_p(U)$ , luego ambos están en  $C_p(U \setminus V)$ . Así pues,  $\alpha - \partial\beta_2 \in C_p(U \setminus V)$ , luego  $[\alpha] = 0$ , como queríamos probar. ■

**Nota** El teorema de escisión es también válido por lo general para la homología reducida. En efecto, esto es trivialmente cierto si  $X = \emptyset$  o  $U = \emptyset$ . Si no es así, el teorema 2.13 nos da que los grupos  $H_n(X, U)$  son los mismos para ambas homologías, y lo mismo ocurre con  $H_n(X \setminus V, U \setminus V)$  salvo si  $U = V$ . Así, si  $U \neq V$ , todos los grupos que aparecen en el teorema de escisión son independientes de la homología considerada, y claramente lo mismo sucede con los homomorfismos  $i_*$ , luego el teorema se cumple igualmente. Notemos que en el caso excepcional  $U$  ha de ser abierto y cerrado en  $X$ . Usando el teorema 2.16 es fácil encontrar ejemplos de esta situación en los que no se cumple el teorema de escisión. ■

Los resultados que hemos obtenido hasta aquí son suficientes para obtener algunas aplicaciones notables de la homología singular, pero, en lugar de obtenerlas directamente, lo haremos con mucha más comodidad a través de un teorema nada trivial que probaremos en la sección siguiente. La prueba de dicho teorema no requiere el teorema de escisión, pero éste es imprescindible para aplicarlo. Concretamente, intervendrá a través del resultado siguiente:

**Teorema 2.40** Sean  $U_1$  y  $U_2$  abiertos en un espacio topológico. Entonces la inclusión  $i : (U_1, U_1 \cap U_2) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, U_2)$  induce isomorfismos

$$i_* : H_p(U_1, U_1 \cap U_2) \longrightarrow H_p(U_1 \cup U_2, U_2)$$

(para la homología reducida hemos de exigir que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ ).

DEMOSTRACIÓN: Consideremos en primer lugar la homología completa. Tomemos  $V = U_2 \setminus U_1$ . Claramente  $V$  es cerrado en  $U_1 \cup U_2$ . El teorema de escisión aplicado al espacio  $U_1 \cup U_2$  nos da que la inclusión

$$i : ((U_1 \cup U_2) \setminus V, U_2 \setminus V) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, U_2)$$

induce isomorfismos entre los grupos de homología, y ésta es la inclusión indicada en el enunciado.

Para la homología reducida observamos que si  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , entonces todos los grupos de homología que estamos considerando son grupos de homología relativa respecto a conjuntos no vacíos, luego el teorema 2.13 nos da que son los mismos para las dos homologías, y obviamente lo mismo vale para los homomorfismos inducidos por las inclusiones, así que el teorema sigue siendo cierto. ■

Más en general, podemos introducir el concepto siguiente:

**Definición 2.41** Una *tríada* es una terna  $(X, U_1, U_2)$ , donde  $X$  es un espacio topológico y  $U_1, U_2$  son subespacios arbitrarios. La tríada es *exacta* si las inclusiones

$$i : (U_1, U_1 \cap U_2) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, U_2), \quad i : (U_2, U_1 \cap U_2) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, U_1)$$

inducen isomorfismos en los grupos de homología.

Hemos probado que cualquier par de abiertos determina una tríada exacta en un espacio topológico (para la homología reducida hemos de exigir que su intersección sea no vacía).

**Ejemplo** Vamos a calcular la homología de la circunferencia  $S^1$ . Para ello la cubrimos con dos arcos abiertos  $S^1 = U_1 \cup U_2$  cuyos extremos se solapen, de modo que  $V = U_1 \cap U_2$  es la unión de dos pequeños arcos abiertos disjuntos  $V = V_1 \cup V_2$ . Tenemos que la triada  $(S^1, U_1, U_2)$  es exacta para la homología reducida, lo que se traduce en que la inclusión  $i : (U_1, V) \rightarrow (S^1, U_2)$  induce isomorfismos

$$H_p(U_1, V) \xrightarrow{i_*} H_p(S^1, U_2).$$

Ahora bien,  $U_2$  es contractible, luego la sucesión de homología del par  $(S^1, U_2)$  prueba que la proyección  $j : (S^1, \emptyset) \rightarrow (S^1, U_2)$  induce isomorfismos

$$0 = H_p(U_2) \rightarrow H_p(S^1) \xrightarrow{j_*} H_p(S^1, U_2) \rightarrow H_{p-1}(U_2) = 0.$$

Por otro lado, es claro que el par  $(U_1, V)$  es homeomorfo al par  $(X, U)$  que consideramos en el ejemplo tras el teorema 2.26, de modo que conocemos sus grupos de homología (reducida): son todos triviales excepto  $H_1(U_1, V) \cong \mathbb{A}$ . Concretamente, hemos visto que una base de este grupo la forma la clase de cualquier arco  $\sigma$  en  $U_1$  que una un punto  $a \in V_1$  con un punto  $b \in V_2$ .

Combinando todo esto tenemos:

$$H_p(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{si } p \neq 1. \end{cases}$$

La homología completa se diferencia únicamente en que  $H_0(S^1) \cong \mathbb{A}$ .

Ahora vamos a calcular una base de  $H_1(S^1)$ . Para ello basta calcular la imagen de la base  $[\sigma] \in H_1(U_1, V)$  a través de los dos isomorfismos que hemos considerado. Su imagen en  $H_1(S^1, U_2)$  es simplemente  $[\sigma]$ . Ahora hemos de calcular la antiimagen de  $[\sigma]$  por  $j_*$  en  $H_p(S^1)$ . No podemos tomar  $[\sigma]$  porque  $\sigma$  no es un ciclo en  $S^1$ . Consideremos un arco  $\sigma'$  que una  $b$  con  $a$  en  $U_2$ . Entonces  $\sigma + \sigma'$  sí es un ciclo en  $S^1$ , pues  $\partial(\sigma + \sigma') = b - a + a - b = 0$ .

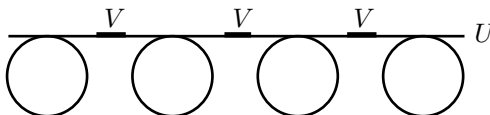
Por consiguiente tiene sentido calcular

$$j_*([\sigma + \sigma']) = [\sigma + \sigma'] = [\sigma] + [\sigma'] = [\sigma],$$

donde hemos usado que  $\sigma'$  es nulo módulo  $U_2$ .

Así pues,  $[\sigma + \sigma']$  es la base buscada. Más en general, si  $\tau$  es cualquier arco en  $S^1$  que dé exactamente una vuelta completa, podemos partir de  $a = \tau(0)$ ,  $b = \tau(1/2)$  y elegir  $U_1$  y  $U_2$  adecuadamente para que  $a \in V_1$ ,  $b \in V_2$ , de modo que  $\tau$  sea homológico a  $\sigma + \sigma'$ . En definitiva: una base de  $H_1(S^1)$  la forma la clase de cualquier arco que de una vuelta completa a  $S^1$ . ■

**Ejemplo** Vamos a calcular la homología del espacio  $G_r$  formado por un segmento  $U$  con  $r$  circunferencias tangentes, como indica la figura. Llamamos  $V$  a la unión de  $r-1$  segmentos cerrados en  $U$  situados entre los puntos de tangencia.





Como  $U$  es contractible, la sucesión de homología del par  $(G_r, U)$  nos da que (para la homología reducida)  $H_p(G_r) \cong H_p(G_r, U)$ . Como  $\bar{V} = V \subset \overset{\circ}{U}$ , podemos aplicar el teorema de escisión, que nos da los isomorfismos

$$H_p(G_r, U) \cong H_p(G_r \setminus V, U \setminus V).$$

Pero  $G_r \setminus V$  es unión de  $r$  componentes conexas  $A_i$ . La intersección de  $U \setminus V$  con cada una de ellas es un segmento  $U_i$ . Como es contractible,  $H_p(A_i, U_i) \cong H_p(A_i) \cong H_p(S^1)$ , pues la circunferencia correspondiente es un retracto por deformación de  $A_i$ . Por los teoremas 2.15 y 2.16 concluimos que

$$H_p(G_r) \cong \begin{cases} \mathbb{A}^r & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{si } p \neq 1. \end{cases}$$

Como es habitual, para la homología completa sólo cambia que  $H_0(G_r) \cong \mathbb{A}$ . ■

La técnica que hemos empleado para probar el teorema de escisión nos permite probar un resultado de interés por sí mismo. Necesitamos algunas definiciones:

**Definición 2.42** Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  un cubrimiento abierto de  $X$ . Llamaremos  $C_p(X; \mathcal{U})$  al submódulo de  $C_p(X)$  generado por los  $p$ -símplices cuyo soporte está contenido en un abierto de  $\mathcal{U}$ . Para  $p \leq 0$ , tomamos  $C_p(X; \mathcal{U}) = C_p(X)$ . Es claro que la frontera de una  $p$ -cadena de  $C_p(X; \mathcal{U})$  está en  $C_{p-1}(X; \mathcal{U})$ . Por lo tanto los módulos  $C_p(X; \mathcal{U})$  forman un complejo con la restricción del operador frontera. Representaremos por  $H_p(X; \mathcal{U})$  a los grupos de homología de este complejo.

**Teorema 2.43** Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  un cubrimiento abierto de  $X$ . Entonces, la inclusión  $i : C(X; \mathcal{U}) \longrightarrow C(X)$  induce isomorfismos

$$i_* : H_p(X; \mathcal{U}) \longrightarrow H_p(X).$$

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 2.38, para cada  $p$ -símplice  $\sigma \in C_p(X)$ , podemos definir  $m(c)$  como el menor natural tal que  $S^{m(c)}(c) \in C_p(X; \mathcal{U})$ . Por (2.5), para cada natural  $k$  tenemos la relación

$$S^k(c) - S^{k-1}(c) = \partial H(S^{k-1}(c)) + H(S^{k-1}(\partial c)).$$

Sumando estas igualdades resulta

$$S^{m(\sigma)}(\sigma) - \sigma = \partial H((1 + S + \dots + S^{m(\sigma)-1})(\sigma)) + H((1 + S + \dots + S^{m(\sigma)-1})(\partial\sigma)).$$

Para cada  $p$ -símplice  $\sigma$ , definimos

$$T(\sigma) = H((1 + S + \dots + S^{m(\sigma)-1})(\sigma)).$$

Entendemos que si  $m(\sigma) = 0$  entonces  $T(\sigma) = 0$ . Por linealidad,  $T$  se extiende a un homomorfismo  $T : C_p(X) \longrightarrow C_{p+1}(X)$ . Definimos  $T_p = 0$  para  $p < 0$ .

Por abreviar, llamemos  $\sigma_i = \sigma^\sharp(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p)$ , de manera que  $\partial\sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma_i$ . Observemos que  $m(\sigma_i) \leq m(\sigma)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \partial T(\sigma) + T(\partial\sigma) &= \partial H((1 + S + \dots + S^{m(\sigma)-1})(\sigma)) + \sum_{i=0}^p (-1)^p T(\partial_i \sigma) \\ &= S^{m(\sigma)}(\sigma) - \sigma - \sum_{i=0}^p (-1)^p H((1 + S + \dots + S^{m(\sigma)-1})(\partial_i \sigma)) \\ &\quad + \sum_{i=0}^p (-1)^p H((1 + S + \dots + S^{m(\partial_i \sigma)-1})(\partial_i \sigma)) \\ &= S^{m(\sigma)}(\sigma) - \sigma - \sum_{i=0}^p (-1)^i H(S^{m(\partial_i \sigma)} + \dots + S^{m(\sigma)-1})(\partial_i \sigma). \end{aligned}$$

Ahora definimos

$$\Phi(\sigma) = S^{m(\sigma)}(\sigma) - \sum_{i=0}^p (-1)^i H(S^{m(\partial_i \sigma)} + \dots + S^{m(\sigma)-1})(\partial_i \sigma),$$

siempre entendiendo que el segundo sumando es nulo si  $m(\sigma) = 0$ . Extendemos la definición hasta un homomorfismo  $\Phi : C_p(X) \rightarrow C_p(X; \mathcal{U})$ . Es inmediato comprobar que se trata de un homomorfismo de complejos (es decir, que conmuta con las fronteras), y hemos probado la relación

$$T \circ \partial + \partial \circ T = \Phi \circ i - 1.$$

(Notemos que se cumple trivialmente para  $p \leq 0$ ). Así pues, el homomorfismo  $\Phi \circ i$  es homotópico a la identidad, y claramente  $i \circ \Phi = 1$ , luego  $i_*$  es un isomorfismo, inverso de  $\Phi_*$ . ■

## Capítulo III

# Aplicaciones de la homología singular

En este capítulo calcularemos explícitamente los grupos de homología de diversos espacios topológicos, al tiempo que mostraremos las primeras aplicaciones de la homología singular. Para ello demostramos primero un potente resultado teórico que se obtiene algebraicamente a partir de los resultados que hemos obtenido en el capítulo anterior.

### 3.1 La sucesión de Mayer-Vietoris

Si  $(X, U_1, U_2)$  es una tríada exacta, el teorema de Mayer-Vietoris relaciona los grupos de homología de  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_1 \cup U_2$  y  $U_1 \cap U_2$ . En muchos casos esto es suficiente para reducir el cálculo de la homología de un espacio a la de otros más simples.

Por ejemplo, en la esfera  $S^2$  podemos considerar los abiertos  $U_1$  y  $U_2$  resultantes de eliminar el polo norte y el polo sur respectivamente. Entonces  $U_1 \cup U_2 = S^2$  y  $U_1 \cap U_2$  es la esfera menos los dos polos. Ahora bien,  $U_1$  y  $U_2$  son homeomorfos a discos abiertos y, por consiguiente, homotópicos a un punto, luego conocemos sus grupos de homología, mientras que  $U_1 \cap U_2$  es homotópico a  $S^1$ , luego la sucesión de Mayer-Vietoris nos reducirá el cálculo de la homología de  $S^2$  a la homología de  $S^1$ . Un razonamiento similar reduce la homología de  $S^1$  a la de cuatro espacios puntuales. En general, así podemos calcular la homología de todos los espacios  $S^n$ . Daremos los detalles en la sección siguiente.

**Teorema 3.1 (Lema de los cinco)** *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccccccccc} M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 \\ \downarrow h_5 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_1 \\ N_5 & \xrightarrow{g_5} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1 \end{array}$$

donde las filas son exactas. Si  $h_1, h_2, h_4$  y  $h_5$  son isomorfismos, entonces  $h_3$  también lo es.

DEMOSTRACIÓN: Es una comprobación rutinaria. Supongamos en primer lugar que  $h_3(m_3) = 0$ . Entonces  $h_2(f_3(m_3)) = g_3(h_3(m_3)) = 0$ , luego  $f_3(m_3) = 0$ , luego existe un  $m_4 \in M_4$  tal que  $f_4(m_4) = m_3$ . Entonces  $g_4(h_4(m_4)) = h_3(f_4(m_4)) = h_3(m_3) = 0$ , luego existe un  $n_5 \in N_5$  tal que  $h_4(m_4) = g_5(n_5)$ . Sea  $m_5 \in M_5$  tal que  $n_5 = h_5(m_5)$ . Así  $h_4(f_5(m_5)) = h_4(m_4)$ , luego  $f_5(m_5) = m_4$  y concluimos que  $m_3 = f_4(f_5(m_5)) = 0$ . Esto prueba que  $h_3$  es inyectivo.

Tomemos ahora  $n_3 \in N_3$ . Existe  $m_2 \in M_2$  tal que  $h_2(m_2) = g_3(n_3)$ . Entonces  $h_1(f_2(m_2)) = g_2(h_2(m_2)) = g_2(g_3(n_3)) = 0$ , luego  $f_2(m_2) = 0$ . Por consiguiente existe un  $m_3 \in M_3$  tal que  $f_3(m_3) = m_2$ . Ahora,  $g_3(n_3 - h_3(m_3)) = 0$ , luego existe un  $n_4 \in N_4$  tal que  $g_4(n_4) = n_3 - h_3(m_3)$ . Sea  $m_4 \in M_4$  tal que  $h_4(m_4) = n_4$ . Entonces  $h_3(m_3 + f_4(m_4)) = h_3(m_3) + g_4(n_4) = n_3$ . Con esto tenemos que  $h_3$  es suprayectivo. ■

Observemos que si  $(X, U_1, U_2)$  es una tríada de espacios topológicos, podemos considerar a  $C(U_1 \cap U_2) = C(U_1) \cap C(U_2)$  como subcomplejo de cada  $C(U_i)$ , a cada  $C(U_i)$  como subcomplejo de  $C(X)$  y también a  $C(U_1) + C(U_2)$  como subcomplejo de  $C(X)$  (la suma es la suma como submódulos de  $C(X)$ ).

**Teorema 3.2** Sean  $(X, U_1, U_2)$  y  $(X, V_1, V_2)$  dos tríadas exactas de espacios topológicos tales que  $V_i \subset U_i$ . Entonces el homomorfismo inducido por la inclusión

$$(C(U_1) + C(U_2)) / (C(V_1) + C(V_2)) \longrightarrow C(U_1 \cup U_2) / C(V_1 \cup V_2)$$

induce a su vez isomorfismos

$$H_p((C(U_1) + C(U_2)) / (C(V_1) + C(V_2))) \longrightarrow H_p(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2).$$

DEMOSTRACIÓN: Las inclusiones inducen el siguiente diagrama conmutativo de homomorfismos de complejos:

$$\begin{array}{ccc} C(U_1, U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & C(U_1 \cup U_2, U_2) \\ \downarrow & \nearrow & \\ (C(U_1) + C(U_2)) / C(U_2) & & \end{array}$$

Teniendo en cuenta que  $C(U_1, U_1 \cap U_2) = C(U_1) / (C(U_1) \cap C(U_2))$ , uno de los teoremas de isomorfía de módulos nos da que la flecha vertical es un isomorfismo, luego induce isomorfismos entre los grupos de homología de ambos complejos. Lo mismo sucede con la flecha horizontal debido a la exactitud de la tríada. Por consiguiente, la flecha oblicua también induce isomorfismos

$$H_p((C(U_1) + C(U_2)) / C(U_2)) \longrightarrow H_p(U_1 \cup U_2, U_2). \quad (3.1)$$

Lo mismo es válido para  $V_1$  y  $V_2$ . Consideramos ahora el diagrama conmutativo de complejos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C(U_1)/C(V_1) & \longrightarrow & (C(U_1) + C(U_2))/C(V_1) & \longrightarrow & (C(U_1) + C(U_2))/C(U_1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C(U_1, V_1) & \longrightarrow & C(U_1 \cup U_2, V_1) & \longrightarrow & C(U_1 \cup U_2, U_1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Todos los homomorfismos son los inducidos por las inclusiones. Las filas son exactas. El teorema 2.27 nos da un diagrama conmutativo entre los grupos de homología de estos complejos, al que podemos aplicar el teorema anterior. Observemos que los homomorfismos inducidos por la flecha vertical de la izquierda son identidades, y acabamos de probar que los inducidos por la flecha de la derecha son isomorfismos. El teorema anterior nos da que la inclusión induce isomorfismos

$$H_p((C(U_1) + C(U_2))/C(V_1)) \longrightarrow H_p(U_1 \cup U_2, V_1). \quad (3.2)$$

Ahora consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (C(V_1) + C(V_2))/C(V_1) & \longrightarrow & (C(U_1) + C(U_2))/C(V_1) & \longrightarrow & (C(U_1) + C(U_2))/(C(V_1) + C(V_2)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C(V_1 \cup V_2, V_1) & \longrightarrow & C(U_1 \cup U_2, V_1) & \longrightarrow & C(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La situación es idéntica a la anterior. Ahora la flecha vertical de la izquierda induce los isomorfismos (3.1) y la del centro los isomorfismos (3.2). El teorema anterior nos da entonces los isomorfismos buscados. ■

Con esto ya es fácil obtener el teorema que perseguíamos. Lo probamos primero en su forma más general, para la homología relativa, si bien después veremos el caso de más interés en la práctica.

**Teorema 3.3 (Teorema de Mayer-Vietoris)** Sean  $(X, U_1, U_2)$  y  $(X, V_1, V_2)$  dos tríadas exactas tales que  $V_i \subset U_i$ . Sean

$$\begin{aligned} \phi_p &: H_p(U_1, V_1) \oplus H_p(U_2, V_2) \longrightarrow H_p(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2), \\ \psi_p &: H_p(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2) \longrightarrow H_p(U_1, V_1) \oplus H_p(U_2, V_2) \end{aligned}$$

los homomorfismos dados por

$$\phi_p(c_1, c_2) = i_{1*}(c_1) + i_{2*}(c_2), \quad \psi_p(c) = (j_{1*}(c), -j_{2*}(c)),$$

donde las aplicaciones  $i_*$ ,  $j_*$  son las inducidas por las inclusiones correspondientes. Entonces existen homomorfismos

$$\Delta_p : H_p(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2) \longrightarrow H_{p-1}(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2)$$

tales que la sucesión siguiente es exacta:

$$\begin{aligned} \cdots & \longrightarrow H_{p+1}(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2) \xrightarrow{\Delta} H_p(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2) \\ & \xrightarrow{\psi} H_p(U_1, V_1) \oplus H_p(U_2, V_2) \xrightarrow{\phi} H_p(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2) \xrightarrow{\Delta} \cdots \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos  $C(U_1, V_1) \oplus C(U_2, V_2)$ , que tiene estructura de complejo de forma natural, es decir, el módulo de las  $p$ -cadenas es la suma directa de los módulos correspondientes de cada sumando y la frontera se define componente a componente. Formamos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2) \xrightarrow{f} C(U_1, V_1) \oplus C(U_2, V_2) \\ \xrightarrow{g} (C(U_1) + C(U_2)) / (C(V_1) + C(V_2)) \longrightarrow 0,$$

donde  $f([c]) = ([c], -[c])$  y  $g([c_1], [c_2]) = [c_1 + c_2]$ . La sucesión de Mayer-Vietoris es la sucesión de homología asociada a esta sucesión exacta, salvo por el hecho de que en ella aparecen los grupos  $H_p((C(U_1) + C(U_2)) / (C(V_1) + C(V_2)))$  en lugar de  $H_p(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2)$ , pero el teorema anterior nos permite identificarlos de forma natural. ■

Según advertíamos, habitualmente necesitaremos únicamente un caso particular del teorema anterior, el que se obtiene al hacer  $V_1 = V_2 = \emptyset$  (observemos que la tríada  $(X, \emptyset, \emptyset)$  es claramente exacta). El enunciado es el siguiente:

**Teorema 3.4 (Teorema de Mayer-Vietoris)** *Sea  $(X, U_1, U_2)$  una tríada exacta tal que  $X = U_1 \cup U_2$  y llamemos  $V = U_1 \cap U_2$ . Sean*

$$\phi_p : H_p(U_1) \oplus H_p(U_2) \longrightarrow H_p(X), \quad \psi_p : H_p(V) \longrightarrow H_p(U_1) \oplus H_p(U_2)$$

los homomorfismos dados por

$$\phi_p(c_1, c_2) = i_{*1}(c_1) + i_{*2}(c_2), \quad \psi_p(c) = (j_{1*}(c), -j_{2*}(c)),$$

donde las aplicaciones  $i_*$ ,  $j_*$  son las inducidas por las inclusiones correspondientes. Entonces existen homomorfismos

$$\Delta_p : H_p(X) \longrightarrow H_{p-1}(V)$$

tales que la sucesión siguiente es exacta:

$$\cdots \longrightarrow H_{p+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_p(V) \xrightarrow{\psi} H_p(U_1) \oplus H_p(U_2) \xrightarrow{\phi} H_p(X) \xrightarrow{\Delta} \cdots$$

Terminamos con un par de hechos adicionales. El primero es el teorema siguiente, que se prueba sin dificultad teniendo en cuenta 2.27.

**Teorema 3.5** *Consideremos dos tríadas exactas  $(X, U_1, U_2)$ ,  $(X', U'_1, U'_2)$  tales que  $X = U_1 \cup U_2$ ,  $X' = U'_1 \cup U'_2$ . Sean  $V = U_1 \cap U_2$ ,  $V' = U'_1 \cap U'_2$ . Sea*

$$f : (X, U_1, U_2) \longrightarrow (X', U'_1, U'_2)$$

una aplicación continua. Entonces los homomorfismos inducidos por  $f$  hacen conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} H_p(V) & \xrightarrow{\psi} & H_p(U_1) \oplus H_p(U_2) & \xrightarrow{\phi} & H_p(X) & \xrightarrow{\Delta} & H_{p-1}(V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_p(V') & \xrightarrow{\psi} & H_p(U'_1) \oplus H_p(U'_2) & \xrightarrow{\phi} & H_p(X') & \xrightarrow{\Delta} & H_{p-1}(V') \end{array}$$

Por último observamos que si  $(X, U_1, U_2)$  es una tríada exacta, entonces también lo es  $(X, U_2, U_1)$ , pero los homomorfismos de conexión en las correspondientes sucesiones de Mayer-Vietoris no son iguales. Concretamente, vamos a ver que se diferencian en el signo. Mantenemos la notación de la prueba del teorema de Mayer-Vietoris (si bien todo se simplifica al considerar el caso  $V_1 = V_2 = \emptyset$ .)

Tomamos una clase  $[z] \in H_p(X)$ . Buscamos una antiimagen por el isomorfismo  $i_* : H_p(C(U_1) + C(U_2)) \rightarrow H_p(X)$ , que será una clase  $[z_1 + z_2]$ , con  $z_i \in C(U_i)$ . Ahora tomamos una antiimagen de  $z_1 + z_2$  por el homomorfismo  $g : C(U_1) \oplus C(U_2) \rightarrow C(U_1) + C(U_2)$ . Nos sirve el par  $(z_1, z_2)$ . Seguidamente calculamos la frontera:  $(\partial z_1, \partial z_2)$  y buscamos  $z' \in Z_{p-1}(V)$  tal que  $f(z') = (\partial z_1, \partial z_2)$ , es decir, tal que  $\partial z_1 = z'$  y  $\partial z_2 = -z'$ . Entonces,  $\Delta([z]) = [z']$ .

Si consideramos la tríada  $(X, U_2, U_1)$  y partimos de la misma clase  $[z]$ , podemos pasar al mismo  $[z_1 + z_2]$ , de aquí al par  $(z_2, z_1)$ , luego a  $(\partial z_2, \partial z_1)$  y por último nos sirve  $-z'$ , luego ahora  $\Delta([z]) = -[z']$ , como queríamos probar. ■

## 3.2 La homología de las esferas

Como primera aplicación calcularemos la homología de las esferas. Recordemos que  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ , donde la norma considerada es la norma euclídea. Naturalmente no hay inconveniente en llamar también  $S^n$  a cualquier espacio homeomorfo. La técnica que seguiremos para calcular los grupos  $H_p(S^n)$  la hemos esbozado como introducción al teorema de Mayer-Vietoris. Calculamos primero la homología reducida.

Observemos ante todo que  $S^0 = \{\pm 1\}$ , luego los teoremas 2.15, 2.16 y 2.17 nos dan su homología:

$$H_p(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

(Recordemos que  $\mathbb{A}$  es el anillo de coeficientes).

Ahora, la sucesión de Mayer-Vietoris nos reduce la homología de  $S^n$  a la de  $S^{n-1}$ . Para ello consideramos los abiertos  $U_1 = S^n \setminus \{N\}$  y  $U_2 = S^n \setminus \{S\}$ , donde  $N$  y  $S$  son los polos de la esfera:

$$N = (0, \dots, 0, 1), \quad S = (0, \dots, 0, -1).$$

En el capítulo I vimos que  $U_1$  y  $U_2$  son contractibles, luego tenemos que  $H_p(U_i) = 0$  para todo  $p$ . También vimos que la intersección  $U_1 \cap U_2$  es homotópica al ecuador  $\tilde{S}^{n-1} = \{x \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$ , con lo que  $H_p(U_1 \cap U_2) \cong H_p(S^{n-1})$ .

El teorema de Mayer-Vietoris nos da la sucesión exacta

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H_p(S^{n-1}) \longrightarrow H_p(U_1) \oplus H_p(U_2) \longrightarrow H_p(S^n) \longrightarrow \\ &H_{p-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{p-1}(U_1) \oplus H_{p-1}(U_2) \longrightarrow H_{p-1}(S^n) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Más concretamente, tenemos

$$0 \longrightarrow H_p(S^n) \longrightarrow H_{p-1}(S^{n-1}) \longrightarrow 0,$$

y la exactitud se traduce en que  $H_p(S^n) \cong H_{p-1}(S^{n-1})$ . Aplicando esta relación  $n$  veces llegamos a que  $H_p(S^n) \cong H_{p-n}(S^0)$ , luego tenemos probado el teorema siguiente:

**Teorema 3.6** *La homología reducida de  $S^n$  viene dada por*

$$H_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = n, \\ 0 & \text{si } p \neq n. \end{cases}$$

Por último, el teorema 2.13 nos da que la homología completa es idéntica salvo para  $p = 0$ . Para este caso aplicamos 2.16 y el resultado es el siguiente:

**Teorema 3.7** *La homología completa de  $S^n$  viene dada por*

$$H_p(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{A} \oplus \mathbb{A} & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0, \end{cases}$$

$$H_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 0 \text{ o } p = n, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad \text{si } n > 0.$$

En particular tenemos que dos esferas de dimensiones distintas no son homeomorfas (ni siquiera homotópicas).

### 3.3 El teorema de Brouwer

El teorema del punto fijo de Brouwer forma parte de un grupo de teoremas topológicos estrechamente relacionados, en el sentido de que es fácil probar unos a partir de otros, pero ninguno de ellos admite una demostración sencilla. Así, por ejemplo, nosotros lo probaremos mediante consideraciones geométricas elementales a partir del resultado siguiente:

**Teorema 3.8** *La esfera  $S^n$  no es un retracto de la bola unidad cerrada  $B^{n+1}$  o de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

Esto es consecuencia inmediata de la siguiente observación:

**Teorema 3.9** *Si  $X$  es un espacio topológico y  $U$  es un retracto de  $X$ , entonces la inclusión  $i : U \longrightarrow X$  induce monomorfismos  $i_* : H_p(U) \longrightarrow H_p(X)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $r : X \longrightarrow U$  una retracción, entonces  $i \circ r = 1$ , luego  $i_* \circ r_* = 1$ , luego  $i_*$  es inyectiva. ■

Así, como  $H_n(S^n) \neq 0$ , mientras que  $H_n(B^{n+1}) = H_n(\mathbb{R}^{n+1}) = 0$ , tenemos probado 3.8. De hecho, por el mismo motivo tenemos también:



**Teorema 3.10** Si  $U \subset S^n$  es un subespacio homeomorfo a  $S^m$ , con  $m < n$ , entonces  $U$  no es un retracto de  $S^n$ .

Según comentábamos, una vez disponemos de 3.8 la prueba del teorema de Brouwer se vuelve elemental:

**Teorema 3.11 (Teorema de Brouwer)** Sea  $B^n$  la bola unidad cerrada en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces toda aplicación continua  $f : B^n \rightarrow B^n$  tiene un punto fijo, es decir, existe  $x \in B^n$  tal que  $f(x) = x$ .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existe  $f : B^n \rightarrow B^n$  sin puntos fijos. Entonces podemos definir una retracción  $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$ . Tomaremos como  $r(x)$  el único punto donde la semirrecta de origen  $f(x)$  que pasa por  $x$  corta a  $S^{n-1}$ . Veamos que, efectivamente, hay un único punto en estas condiciones, al tiempo que vemos que  $r$  así definida es continua.

La semirrecta está formada por los puntos  $y \in \mathbb{R}^n$  de la forma

$$y = f(x) + t(x - f(x)) \quad t > 0. \quad (3.3)$$

Llamemos  $b = f(x)$  y  $a = x - f(x)$ . Entonces,  $y \in S^{n-1}$  si y sólo si

$$y^2 = t^2 a^2 + 2t a \cdot b + b^2 = 1.$$

Por lo tanto, ha de ser

$$t(x) = \frac{1}{a^2} (-a \cdot b + \sqrt{(a \cdot b)^2 + a^2(1 - b^2)})$$

El discriminante es positivo porque  $b^2 \leq 1$ . Si  $b^2 < 1$  es claro que  $t(x) > 0$ . Esto también es cierto si  $b^2 = 1$ , pues entonces tenemos

$$t(x) = \frac{-a \cdot b + |a \cdot b|}{a^2},$$

y la alternativa a  $t(x) > 0$  es  $t(x) = 0$ , que se dará si  $a \cdot b \geq 0$ . Ahora bien, como  $a = x - b$ , esto equivale a que  $x \cdot b - b^2 = x \cdot b - 1 \geq 0$ , pero entonces

$$(x - f(x))^2 = (x - b)^2 = x^2 + b^2 - 2x \cdot b \leq 2 - 2 = 0,$$

lo cual es imposible.

Tenemos, pues, que  $r(x) = f(x) + t(x)(x - f(x))$  está bien definida, es continua y fija a los puntos de  $S^{n-1}$ , ya que si  $x \in S^{n-1}$  entonces  $y = x$  es de la forma (3.3) con  $t = 1$ , luego por la unicidad que hemos probado ha de ser  $r(x) = x$ . ■

Recíprocamente, el teorema 3.8 se prueba fácilmente a partir del teorema de Brouwer: si existiera una retracción  $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$ , entonces la aplicación  $f : B^n \rightarrow B^n$  dada por

$$f(x) = \frac{x - r(x)}{2}$$

no tendría puntos fijos.

Otro camino posible para demostrar el teorema de Brouwer es a través de un famoso teorema conocido coloquialmente —entre otras formas— como el “teorema de la esfera peluda”, porque puede interpretarse como que no es posible “peinar” una esfera, es decir, si de cada punto de la esfera sale un pelo, es imposible disponerlos todos tangentemente a la esfera de forma continua. Cualquier “peinado” de la esfera ha de tener una “raya” o, al menos, una “coronilla” (cuyo pelo central no está peinado).

En términos de la geometría diferencial, lo que afirma este teorema es que una variedad difeomorfa a  $S^{2n}$  no tiene campos vectoriales continuos que no se anulen en ningún punto. Aquí daremos una definición particular de campo de vectores tangentes que no requiera explícitamente conceptos de la geometría diferencial, pero el resultado que de hecho probaremos es equivalente al que acabamos de enunciar (ver el ejemplo de la página 259).

**Definición 3.12** Un *campo tangente* a  $S^n$  es una aplicación  $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  continua tal que para todo  $x \in S^n$  el vector  $v(x)$  es no nulo y ortogonal a  $x$  (esto equivale a decir que es tangente a  $S^n$  en  $x$ ).

Observar que cambiando  $v$  por el campo  $v(x)/\|v(x)\|$  podemos exigir que  $v : S^n \rightarrow S^n$ .

El teorema del que estamos hablando es el siguiente:

**Teorema 3.13**  $S^n$  tiene un campo tangente si y sólo si  $n$  es impar.

Observemos, ante todo, que una parte es trivial: si  $n = 2k - 1$  es impar, un campo tangente en  $S^n$  es el dado por

$$v(x_1, \dots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1}).$$

Para el recíproco, la prueba que vamos a ver se basa en la observación siguiente: a partir de un campo tangente  $v : S^n \rightarrow S^n$  podemos construir la aplicación  $H : I \times S^n \rightarrow S^n$  dada por

$$H_t(x) = \cos(\pi t)x + \operatorname{sen}(\pi t)v(x).$$

Es inmediato comprobar que  $H_t(x) \cdot H_t(x) = 1$ , por lo que ciertamente la imagen de  $H$  está en  $S^n$ . Además  $H_0$  es la identidad y  $H_1$  es la aplicación *antipodal*, dada por  $\alpha(x) = -x$ . Así pues, si existe un campo tangente en  $S^n$ , la aplicación antipodal es homotópica a la identidad.

Probaremos que esto sólo puede ocurrir si  $n$  es impar. Para ello estudiaremos, más en general, las aplicaciones ortogonales en  $S^n$ . Recordemos que una aplicación lineal  $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  es *ortogonal* si conserva la norma. En particular  $g$  se restringe a una aplicación continua de  $g : S^n \rightarrow S^n$ . Cuando hablemos de una aplicación ortogonal en  $S^n$  nos referiremos a la restricción de una aplicación ortogonal en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . No distinguiremos entre una y otra.

El determinante de la matriz de una aplicación lineal  $g$  en una base cualquiera es independiente de la base, y lo representaremos por  $\det g$ . es conocido que si

$g$  es ortogonal, necesariamente  $\det g = \pm 1$ . La aplicación antipodal  $\alpha$  en  $S^n$  es ortogonal, y su determinante es  $\det \alpha = (-1)^{n+1}$ .

Vamos a estudiar los homomorfismos que las aplicaciones ortogonales inducen en los grupos de homología de  $S^n$ . Para ello estudiaremos primero una aplicación más sencilla que la antipodal, la aplicación  $f : S^n \rightarrow S^n$  dada por

$$f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1}). \quad (3.4)$$

Conservando la notación introducida en la sección anterior, tenemos que el ecuador  $\tilde{S}^{n-1}$  de la esfera  $S^n$  es un retracto por deformación de  $U_1 \cap U_2$ , lo que significa que la inclusión  $i : \tilde{S}^{n-1} \rightarrow U_1 \cap U_2$  induce un isomorfismo  $i^* : H_p(\tilde{S}^{n-1}) \rightarrow H_p(U_1 \cap U_2)$ .

Notemos que  $f : (S^n, U_1, U_2) \rightarrow (S^n, U_2, U_1)$ , por lo que induce homomorfismos en todos los grupos de homología que estamos considerando (y es importante que intercambia  $U_1$  con  $U_2$ ). En particular tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_p(\tilde{S}^{n-1}) & \xrightarrow{i^*} & H_p(U_1 \cap U_2) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ H_p(\tilde{S}^{n-1}) & \xrightarrow{i^*} & H_p(U_1 \cap U_2) \end{array}$$

es conmutativo, pero la restricción de  $f$  a  $\tilde{S}^{n-1}$  es la identidad, luego también lo es  $f_*$  sobre  $H_p(\tilde{S}^{n-1})$  y, por el diagrama, también lo es  $f_*$  en  $H_p(U_1 \cap U_2)$ .

Ahora aplicamos el teorema 3.5, (para la homología reducida) que nos da la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_p(S^n) & \xrightarrow{\Delta} & H_{p-1}(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & f_* \downarrow & & \downarrow f_* & & \\ 0 & \longrightarrow & H_p(S^n) & \xrightarrow{-\Delta} & H_{p-1}(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde el punto crucial es advertir que la aplicación  $\Delta$  para la tríada  $(S^n, U_2, U_1)$  es la opuesta de la correspondiente a  $(S^n, U_1, U_2)$ , según observamos al final de la sección primera. Es claro entonces que  $f_*$  resulta ser la multiplicación por  $-1$ , es decir, para todo  $c \in H_p(S^n)$ , se cumple  $f_*(c) = -c$ .

Este hecho se generaliza ahora fácilmente.

**Teorema 3.14** *Si  $g : S^n \rightarrow S^n$  es ortogonal, el isomorfismo que induce en cada grupo de homología es la multiplicación por  $\det g$ .*

DEMOSTRACIÓN: Es conocido que si  $\det g = 1$ , entonces  $g$  es una composición de giros, y es fácil ver que todo giro es homotópico a la identidad (si el ángulo de giro es  $\alpha$ , la homotopía se forma considerando los giros de ángulo  $t\alpha$ ). Por consiguiente  $g$  es homotópica a la identidad y  $g_* = 1$ .

Supongamos ahora que  $\det g = -1$  y sea  $f$  la aplicación dada por (3.4). Entonces  $g \circ f$  es ortogonal y tiene determinante 1 (pues  $\det f = -1$ ), luego sabemos que  $g \circ f$  es homotópica a la identidad. Así pues,  $g_* \circ f_* = 1$  y, puesto que  $f_*$  es la multiplicación por  $-1$ , lo mismo vale para  $g_*$ . ■

Ahora ya es inmediato el teorema 3.13: tras su enunciado hemos visto que la existencia de un campo tangente a  $S^n$  implica que la aplicación antipodal  $\alpha$  es homotópica a la identidad, luego  $\alpha_* = 1$ , pero por otra parte sabemos que  $\alpha_*$  es la multiplicación por  $\det \alpha = (-1)^{n+1}$ , luego  $n$  ha de ser impar. ■

**Ejercicio:** Probar que si  $f : B^n \rightarrow B^n$  es una función continua sin puntos fijos y  $n$  es par, entonces

$$v(x) = (x_{n+1}(f(\bar{x}) - \bar{x}), -(f(\bar{x}) - \bar{x}) \cdot \bar{x}),$$

es un campo tangente a  $S^n$  (donde  $\bar{x}$  denota el vector de las  $n$  primeras componentes de  $x$ ). Deducir el teorema de Brouwer a partir de 3.13.

### 3.4 El teorema de Jordan-Brouwer

Los espacios  $\mathbb{R}^n$  son homotópicos entre sí, pues todos son homotópicos a un punto. Por consiguiente todos tienen los mismos grupos de homología. Sin embargo no son homeomorfos, aunque no es fácil probarlo. En esta sección demostraremos varios resultados que nos permiten distinguir topológicamente los espacios  $\mathbb{R}^n$ , entre ellos una generalización del teorema de Jordan a dimensiones superiores. Todos ellos se apoyan en el teorema siguiente:

**Teorema 3.15** *Sea  $n \geq 0$  y  $\tilde{B}^r \subset S^n$  un subespacio homeomorfo a la bola unidad cerrada en  $\mathbb{R}^r$ , para cierto  $r \geq 0$ . Entonces, considerando la homología reducida, se cumple que*

$$H_p(S^n \setminus \tilde{B}^r) = 0.$$

**DEMOSTRACIÓN:** Lo probamos por inducción sobre  $r$ . En primer lugar, si  $r = 0$  (en cuyo caso se entiende que  $\tilde{B}^0$  es un punto) tenemos que  $S^n \setminus \tilde{B}^0$  es contractible (incluso si  $n = 0$ ), por lo que el teorema es trivial. Supongámoslo cierto para  $r - 1$ .

Sea  $I^r$  el cubo unitario (el producto cartesiano de  $r$  veces  $I = [0, 1]$ ). Por el teorema 1.3, existe un homeomorfismo  $f : I^r \rightarrow B^r$ , con el que podemos formar a su vez un homeomorfismo  $\phi : I^r \rightarrow \tilde{B}^r$ .

Tomamos un ciclo  $c \in Z_p(S^n \setminus \tilde{B}^r)$ . Hemos de probar que es una frontera. Para cada  $t \in I$ , sea  $\tilde{B}_t^{r-1} = \phi(\{t\} \times I^{r-1})$ . Como  $S^n \setminus \tilde{B}^r \subset S^n \setminus \tilde{B}_t^{r-1}$ , podemos considerar a  $c$  como un ciclo en  $S^n \setminus \tilde{B}_t^{r-1}$ . Por hipótesis de inducción es una frontera, es decir, existe un  $b_t \in C_{p+1}(S^n \setminus \tilde{B}_t^{r-1})$  tal que  $c = \partial b_t$ .

Sea  $|b_t|$  el soporte de  $b_t$ . Se trata de un subespacio compacto de  $S^n \setminus \tilde{B}_t^{r-1}$ . Llamemos  $\epsilon_t > 0$  a la distancia de  $|b_t|$  a  $\tilde{B}_t^{r-1}$ . Como  $\phi$  es uniformemente continua, existe  $\delta_t > 0$  tal que si  $u, v \in I^r$  distan menos de  $\delta_t$ , entonces  $\phi(u)$  y  $\phi(v)$  distan menos de  $\epsilon_t$ .

Tomemos un intervalo  $I'_t \subset I$  abierto en  $I$  que contenga a  $t$  y de diámetro menor que  $\delta_t$ . Por el teorema de Lebesgue 2.37, existe un  $\rho > 0$  tal que todo intervalo de longitud menor que  $\rho$  está contenido en un  $I'_t$ . Tomemos un número natural  $m > 1/\rho$  y consideremos concretamente los intervalos

$$I_i = \left[ \frac{i}{m}, \frac{i+1}{m} \right], \quad \text{para } i = 0, \dots, m-1.$$

Tenemos así que cada  $I_i$  está contenido en un cierto  $I'_t$ , luego si llamamos  $\tilde{B}_i^r = \phi[I_i \times I^{r-1}]$ , tenemos que  $|b_t| \cap \tilde{B}_i^r = \emptyset$ , pues cada punto de  $\tilde{B}_i^r$  dista de uno de  $\tilde{B}_t^{r-1}$  menos de  $\epsilon_t$ . Llamemos  $b_i = b_t$ , con lo que  $b_i$  es una cadena en  $S^n \setminus \tilde{B}_i^r$  tal que  $\partial b_i = c$ .

El teorema quedará probado en cuanto justifiquemos lo siguiente:

*Si  $J_1$  y  $J_2$  son intervalos cerrados en  $I$  tales que  $J_1 \cap J_2 = \{t\}$ , llamamos  $\tilde{B}_i = \phi[J_i \times I^{r-1}]$  y existen cadenas  $b_i \in C_{p+1}(S^n \setminus \tilde{B}_i)$  tales que  $c = \partial b_i$ , entonces existe una cadena  $b \in C_{p+1}(S^n \setminus (\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2))$  tal que  $c = \partial b$ .*

En efecto, aplicando este hecho  $m-1$  veces llegamos a una cadena

$$b \in C_{p+1}\left(S^n \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} \tilde{B}_i^r\right) = C_{p+1}(S^n \setminus \tilde{B}^r)$$

tal que  $c = \partial b$ , como queremos probar.

Llamemos  $\tilde{B}_t^{r-1} = \phi[\{t\} \times I^{r-1}] = \tilde{B}_1 \cap \tilde{B}_2$ . Sea  $X = S^n \setminus \tilde{B}_t^{r-1}$ , sea  $U_i = S^n \setminus \tilde{B}_i$  y sea  $V = U_1 \cap U_2 = S^n \setminus (\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$ .

El espacio  $\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2$  es homeomorfo a un cubo, luego es homotópico a un punto, luego es distinto de  $S^n$ . Por consiguiente  $V \neq \emptyset$ . Esto hace que la tríada  $(X, U_1, U_2)$  sea exacta para la homología reducida, por lo que podemos aplicar el teorema de Mayer-Vietoris.

Por hipótesis de inducción,  $H_{p+1}(X) = H_{p+1}(S^n \setminus \tilde{B}_t^{r-1}) = 0$ . Consideramos el fragmento siguiente de la sucesión de Mayer-Vietoris:

$$0 = H_{p+1}(X) \longrightarrow H_p(V) \xrightarrow{\psi} H_p(U_1) \oplus H_p(U_2).$$

Ahora bien,  $\psi([c]) = (j_{*1}([c]), -j_{*2}([c]))$ , donde  $j_1$  y  $j_2$  son las inclusiones de  $V$  en  $U_1$  y  $U_2$ . Estamos suponiendo que  $c$  es una frontera en cada  $U_i$ , pero esto significa que  $\psi([c]) = 0$ , y la sucesión muestra que  $\psi$  es inyectiva, luego  $[c] = 0$  en  $H_p(V)$ , es decir,  $c$  es una frontera en  $S^n \setminus (\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$ . ■

Consideremos ahora un subespacio  $\tilde{S}^r \subset S^n$  homeomorfo a  $S^r$ , con  $r \leq n$ . Si  $n = r$  supondremos además que  $\tilde{S}^n \neq S^n$  (vamos a ver que no puede existir tal  $\tilde{S}^n$ ).

Fijemos un homeomorfismo entre  $S^r$  y  $\tilde{S}^r$  y llamemos  $\tilde{B}_+^r$  y  $\tilde{B}_-^r$  a los subespacios de  $\tilde{S}^r$  correspondientes a los hemisferios cerrados de  $S^r$ , de modo que  $\tilde{S}^{r-1} = \tilde{B}_+^r \cap \tilde{B}_-^r$  es la imagen del ecuador. Tomemos

$$X = S^n \setminus \tilde{S}^{r-1}, \quad U_1 = S^n \setminus \tilde{B}_+^r, \quad U_2 = S^n \setminus \tilde{B}_-^r, \quad V = U_1 \cap U_2 = S^n \setminus \tilde{S}^r.$$

Para probar que la tríada  $(X, U_1, U_2)$  es exacta para la homología reducida hemos de justificar que  $V \neq \emptyset$ , es decir, que  $\tilde{S}^r \neq S^n$ . Si  $r = n$  esto es cierto por hipótesis, mientras que si  $r < n$  es consecuencia de que  $H^r(\tilde{S}^r) \not\cong H^n(S^n)$ .

El teorema anterior nos da que  $H_p(U_i) = 0$  para todo  $p$ . La sucesión de Mayer-Vietoris es, entonces

$$0 = H_{p+1}(U_1) \oplus H_{p+1}(U_2) \longrightarrow H_{p+1}(X) \longrightarrow H_p(V) \longrightarrow H_p(U_1) \oplus H_p(U_2) = 0,$$

luego

$$H_{p+1}(S^n \setminus \tilde{S}^{r-1}) \cong H_p(S^n \setminus \tilde{S}^r).$$

Aplicando esto  $r$ -veces concluimos que  $H_p(S^n \setminus \tilde{S}^r) \cong H_{p+r}(S^n \setminus \tilde{S}^0)$ . Ahora bien,  $\tilde{S}^0$  está formado por dos puntos. Vimos en el capítulo I que  $S^n$  menos dos puntos es homotópico a  $S^{n-1}$ , luego  $H_{p+r}(S^n \setminus \tilde{S}^0) \cong H_{p+r}(S^{n-1})$ . Por consiguiente hemos llegado a la relación

$$H_p(S^n \setminus \tilde{S}^r) \cong H_{p+r}(S^{n-1}).$$

Si  $r = n$  esto es contradictorio, pues nos da que

$$H_{-1}(S^n \setminus \tilde{S}^n) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{A},$$

cuando, por otra parte, el miembro izquierdo ha de ser trivial. Esta contradicción viene de suponer que  $S^n$  contenía un subespacio propio homeomorfo. En total hemos probado lo siguiente:

**Teorema 3.16** Sean  $n$  y  $r$  números naturales. Entonces:

- a) Si  $r > n$ , entonces  $S^n$  no contiene copias homeomorfas de  $S^r$ .
- b) La única copia homeomorfa de  $S^n$  en  $S^n$  es él mismo.
- c) Si  $r < n$  y  $\tilde{S}^r$  es cualquier copia homeomorfa de  $S^r$  en  $S^n$ , entonces la homología reducida de  $S^n \setminus \tilde{S}^r$  es

$$H_p(S^n \setminus \tilde{S}^r) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = n - r - 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El apartado a) se debe a que si  $r > n$  entonces  $S^r$  contiene (propriadamente) una copia homeomorfa de  $S^n$ . Teniendo en cuenta que podemos identificar a  $S^n$  con la compactificación de Alexandroff de  $\mathbb{R}^n$ , los apartados a) y b) nos dan inmediatamente:

**Teorema 3.17** Si  $r \geq n$ , entonces  $\mathbb{R}^n$  no contiene copias de  $S^r$ . En particular  $\mathbb{R}^m$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  si y sólo si  $m = n$ .

Este resultado puede ser refinado notablemente. Para ello probamos primero el teorema de Jordan-Brouwer. Observemos que del apartado c) de 3.16 se desprende que  $S^n \setminus \tilde{S}^r$  es arcoconexo excepto si  $r = n - 1$ , en cuyo caso se cumple  $H_0(S^n \setminus \tilde{S}^{n-1}) = \mathbb{A}$  (para la homología reducida), lo que significa (teorema 2.16) que  $S^n \setminus \tilde{S}^{n-1}$  tiene exactamente dos componentes arcoconexas. Esto es la mitad del teorema de Jordan-Brouwer:

**Teorema 3.18 (Teorema de Jordan-Brouwer)** *Si  $n \geq 1$ , toda copia  $\tilde{S}^{n-1}$  de  $S^{n-1}$  contenida en  $S^n$  divide a  $S^n$  en dos componentes conexas, ambas con frontera igual a  $\tilde{S}^{n-1}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Acabamos de justificar que ha de haber exactamente dos componentes arcoconexas, llamémoslas  $U_1$  y  $U_2$ . Puesto que la esfera  $S^n$  es localmente arcoconexa, las componentes  $U_1$  y  $U_2$  son abiertas, luego son también las componentes conexas de  $S^n \setminus \tilde{S}^{n-1}$  y es claro que  $\partial U_i \subset \tilde{S}^{n-1}$ .

Tomemos ahora  $x \in \tilde{S}^{n-1}$  y un entorno  $G$  en  $S^n$ . Hemos de probar que  $G$  corta a  $U_1$  y  $U_2$ . De este modo  $x$  estará en la frontera de ambos. Fijemos un homeomorfismo  $\phi : S^{n-1} \rightarrow \tilde{S}^{n-1}$ , sea  $\phi(x_0) = x$ . Sea  $H$  un entorno de  $x_0$  homeomorfo a una bola abierta en  $\mathbb{R}^{n-1}$  y tal que  $\tilde{H} = \phi[H] \subset G$ .

Es claro que  $S^{n-1} \setminus H$  es homeomorfo a una bola cerrada  $B^{n-1}$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$ , luego  $\tilde{B}^{n-1} = \phi[S^{n-1} \setminus H]$  es homeomorfo a la bola unidad cerrada de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Podemos aplicar el teorema 3.15 y concluir que (para la homología reducida)  $H_0(S^n \setminus \tilde{B}^{n-1}) = 0$ . Por consiguiente, el espacio  $S^n \setminus \tilde{B}^{n-1}$  es arcoconexo.

Tomemos puntos  $y_i \in U_i$ . Existe un arco  $\gamma$  en  $S^n \setminus \tilde{B}^{n-1}$  que une  $y_1$  con  $y_2$ . Necesariamente,  $\gamma$  ha de cortar a  $\tilde{S}^{n-1}$  y, como no corta a  $\tilde{B}^{n-1}$ , ha de ser  $\gamma^* \cap \tilde{H} \neq \emptyset$  (donde  $\gamma^*$  es la imagen de  $\gamma$ ). Puesto que esta intersección es cerrada en  $\gamma^*$ , su antiimagen por  $\gamma$  ha de ser un cerrado con un mínimo y un máximo elemento,  $t_0$  y  $t_1$ , respectivamente. Así, si llamamos  $s_i = \gamma(t_i) \in \gamma^* \cap \tilde{H} \subset G$ , tenemos que  $G$  contiene puntos  $\gamma(t_0 - \epsilon) \in U_1$  y  $\gamma(t_1 + \epsilon) \in U_2$ . ■

Por el teorema 3.16,

$$H_p(S^n \setminus \tilde{S}^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Para la homología completa sólo hemos de cambiar que  $H_0(S^n \setminus \tilde{S}^{n-1}) \cong \mathbb{A} \oplus \mathbb{A}$ . Por el teorema 2.15, los grupos de homología completa de las componentes conexas de  $S^n \setminus \tilde{S}^{n-1}$  son

$$H_p(U_i) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Los grupos de homología reducida son todos nulos. Así pues, las componentes  $U_i$  tienen los mismos grupos de homología que las bolas abiertas. Cabe preguntarse si son, de hecho, homeomorfas a bolas. Esto es cierto si  $n = 2$  (teorema A.2), pero en dimensiones superiores hay contraejemplos.

Supongamos ahora que tenemos  $\tilde{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ . El teorema de Jordan-Brouwer vale para la compactificación de Alexandroff de  $\mathbb{R}^n$ , pues es homeomorfa a  $S^n$ , luego  $\mathbb{R}_\infty^n \setminus \tilde{S}^{n-1}$  tiene dos componentes conexas,  $U_1$  y  $U_2$ , ambas con frontera  $\tilde{S}^{n-1}$ . Digamos que  $\infty \in U_1$ . Es claro entonces que  $U_1 \setminus \{\infty\}$  sigue siendo conexo, luego concluimos que  $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{S}^{n-1}$  tiene también dos componentes conexas, ambas con frontera  $\tilde{S}^{n-1}$ . Recogemos esto en el teorema siguiente.

**Teorema 3.19** *Si  $n \geq 1$ , toda copia  $\tilde{S}^{n-1}$  de  $S^{n-1}$  contenida en  $\mathbb{R}^n$  divide a  $\mathbb{R}^n$  en dos componentes conexas, ambas con frontera igual a  $\tilde{S}^{n-1}$ .*

Continuando con la notación previa al teorema, es claro que  $U_1 \setminus \{\infty\}$  no está acotado en  $\mathbb{R}^n$  (pues contiene un entorno reducido de  $\infty$ , es decir, el complementario de un compacto), mientras que  $U_2$  sí lo está. De este modo, de las dos componentes conexas que una copia de  $S^{n-1}$  determina en  $\mathbb{R}^n$ , una está acotada y la otra no. Podemos llamar *interior* de  $\tilde{S}^{n-1}$  a la componente acotada y *exterior* a la componente no acotada. Esto se interpreta como que  $\tilde{S}^{n-1}$  es siempre una hipersuperficie cerrada que “encierra” una porción de espacio, pero no debemos olvidar que el interior de  $\tilde{S}^{n-1}$  no es necesariamente homeomorfo a una bola abierta de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 3.20** *Para  $n \geq 2$ , sea  $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua e inyectiva. Sea  $\tilde{S}^{n-1} = f[S^{n-1}]$  y sea  $A$  el interior de  $\tilde{S}^{n-1}$ . Entonces  $f[\overset{\circ}{B}^n] = A$ .*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que como  $S^{n-1}$  es compacto y la restricción de  $f$  es inyectiva y continua, de hecho es un homeomorfismo, luego tiene sentido hablar del interior de  $\tilde{S}^{n-1}$ . Sea  $\tilde{B}^n = f[B^n]$ . Podemos considerar  $\mathbb{R}^n \subset S^n$ , identificando  $S^n$  con la compactificación de Alexandroff de  $\mathbb{R}^n$ . Por el teorema 3.15 tenemos que  $S^n \setminus \tilde{B}^n$  es arcoconexo, luego  $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{B}^n$  también lo es. Como  $\tilde{S}^{n-1} \subset \tilde{B}^n$ , tenemos también que  $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{B}^n$  no corta a  $\tilde{S}^{n-1}$  y, como no es acotado, ha de estar contenido en el exterior  $E$  de  $\tilde{S}^{n-1}$ .

Así pues,  $A \cup \tilde{S}^{n-1} = \mathbb{R}^n \setminus E \subset \tilde{B}^n = f[\overset{\circ}{B}^n] \cup \tilde{S}^{n-1}$ . Como  $f$  es inyectiva,  $f[\overset{\circ}{B}^n] \cap \tilde{S}^{n-1} = \emptyset$ , luego  $A \subset f[\overset{\circ}{B}^n]$ .

Ahora bien,  $f[\overset{\circ}{B}^n]$  es un conjunto arcoconexo que no corta a  $\tilde{S}^{n-1}$ . Por la maximalidad de  $A$ , ha de ser  $A = f[\overset{\circ}{B}^n]$ . ■

En realidad esto es un caso particular del teorema siguiente:

**Teorema 3.21** *Sea  $G$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación continua e inyectiva. Entonces  $f$  es abierta, luego en particular es un homeomorfismo en su imagen.*

DEMOSTRACIÓN: Basta ver que es abierta, pues entonces restringida a su imagen es biyectiva, continua y abierta, luego es un homeomorfismo.

Si  $U \subset G$  es un abierto e  $y \in f[U]$ , entonces  $y = f(x)$ , para cierto  $x \in U$ . Tomemos una bola cerrada  $B^n$  tal que  $x \in \overset{\circ}{B}^n \subset B^n \subset U$ . Entonces tenemos que  $f(x) \in f[\overset{\circ}{B}^n] \subset f[U]$  y  $f[\overset{\circ}{B}^n]$  es abierto por el teorema anterior. Así pues,  $f[U]$  es entorno de  $y$ . ■

En particular:

**Teorema 3.22** *Si  $m \neq n$ , entonces ningún abierto (no vacío) de  $\mathbb{R}^m$  es homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $m < n$ , podemos identificar a  $\mathbb{R}^m$  con el subespacio de  $\mathbb{R}^n$  formado por los puntos cuyas últimas  $n - m$  coordenadas sean nulas. Entonces  $\mathbb{R}^m$  tiene interior vacío en  $\mathbb{R}^n$ . Si un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  fuera homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^m$  tendríamos una aplicación  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$  continua



e inyectiva, pero la imagen debería ser abierta en  $\mathbb{R}^n$  por el teorema anterior, cuando por otra parte es claro que tiene interior vacío. ■

De aquí se sigue a su vez que la dimensión de una variedad topológica es un invariante, es decir, que dos variedades homeomorfas han de tener la misma dimensión o, equivalentemente, que un mismo espacio topológico no puede ser a la vez una variedad de dimensión  $m$  y de dimensión  $n$  para  $m \neq n$ . En efecto, si así fuera, un punto cualquiera tendría un entorno abierto homeomorfo a una bola abierta en  $\mathbb{R}^m$  y otro entorno abierto homeomorfo a una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$ . La intersección de ambos entornos sería un espacio homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^m$  y a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . El teorema anterior implica entonces que  $m = n$ .

Trivialmente, todo abierto no vacío en una variedad topológica es una variedad topológica de la misma dimensión. El teorema 3.22 nos da un recíproco que generaliza a 3.17:

**Teorema 3.23** *En una variedad topológica  $n$ -dimensional, las únicas subvariedades de dimensión  $n$  son los abiertos. En particular, una variedad conexa no puede tener subvariedades compactas propias de la misma dimensión.*

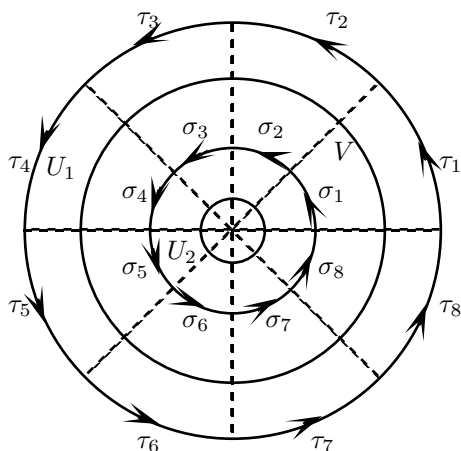
DEMOSTRACIÓN: Sea  $V$  una variedad y  $W$  una subvariedad de la misma dimensión (por *subvariedad* entendemos un subespacio que también sea una variedad). Si  $x \in W$ , tomemos un entorno coordenado  $U$  de  $x$  en  $V$ . Entonces  $W \cap U$  es un entorno de  $x$  en  $W$ , luego contiene un entorno coordenado  $U'$  de  $x$  en  $W$ . Sean  $f : B' \rightarrow U'$  y  $g : B \rightarrow U$  homeomorfismos, donde  $B'$  y  $B$  son bolas abiertas en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $f \circ g^{-1} : B' \rightarrow B$  es inyectiva y continua, luego el teorema 3.21 nos da que su imagen  $g^{-1}[f[B']]$  es abierta en  $B$ , luego  $U' = f[B']$  es abierto en  $U$ , luego en  $V$ . Por consiguiente  $W$  es entorno de  $x$ . ■

Notemos que una variedad topológica  $V$  de dimensión  $n$  contiene un subespacio homeomorfo a una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$ , y esta bola contiene subespacios no abiertos homeomorfos a bolas abiertas en  $\mathbb{R}^m$  para cualquier  $m < n$ . Teniendo esto en cuenta —junto al teorema anterior— es fácil ver que  $V$  no puede contener subvariedades de dimensión mayor que  $n$ .

## 3.5 La homología de las superficies compactas

En el apéndice A demostramos que toda superficie compacta (conexa) es homeomorfa a una de las superficies  $M_g$  o  $N_h$  definidas en 1.21. Ahora comprobaremos que dos cualesquiera de estas superficies tienen grupos de homología diferentes, por lo que no son homeomorfas, ni siquiera homotópicas.

Consideremos uno de los espacios  $M_g$  o  $N_h$ . Por unificar el argumento lo representaremos por  $F_r$ , donde  $r = 2g$  o  $r = h$  según el caso. De este modo,  $F_r$  se obtiene identificando dos a dos las aristas de un polígono de  $2r$  lados. Por comodidad podemos sustituir el polígono por el disco unidad cerrado  $B^2$ .



Llamamos  $\tau_1, \dots, \tau_{2r}$  a los arcos de amplitud  $\pi/r$  que se muestran en la figura, orientados en sentido positivo. La aplicación cociente  $\phi : B^2 \rightarrow F_r$  identifica estos arcos a pares según los patrones de  $M_g$  o  $N_h$ , de modo que si  $\tau_i$  debe identificarse con  $\tau_j$ , la identificación consiste concretamente en que  $\phi(\tau_i(t)) = \phi(\tau_j(t))$  para todo  $t \in I$  o bien  $\phi(\tau_i(t)) = \phi(\tau_j(1-t))$ , para todo  $t \in I$ . Si  $F_r$  es de tipo  $N_h$  las identificaciones son todas de la primera forma, si es de tipo  $M_g$  son todas de la segunda.

Observemos que los tipos de identificaciones que estamos considerando hacen que todos los vértices (los extremos de los  $\tau_i$ ) tengan la misma imagen en  $F_r$ , por lo que los 1-símplices  $\tilde{\tau}_i = \phi^\sharp(\tau_i)$  son 1-ciclos en  $F_r$ . Más concretamente, si  $F_r$  es de tipo  $M_g$  y  $\phi$  identifica  $\tau_i$  con  $\tau_j$ , entonces  $[\tilde{\tau}_i] = [-\tilde{\tau}_j]$  en  $H_1(F_r)$ , mientras que si  $F_r$  es de tipo  $N_h$  entonces  $[\tilde{\tau}_i] = [\tilde{\tau}_j]$ .

Sea  $U_1$  el complementario en  $B^2$  de un disco cerrado de centro 0 y  $U_2$  un disco abierto de radio mayor. Llamaremos  $\tilde{U}_1$  y  $\tilde{U}_2$  a las imágenes por  $\phi$  de  $U_1$  y  $U_2$ , que claramente son abiertas en  $F_r$ . Las intersecciones  $V = U_1 \cap U_2$  y  $\tilde{V} = \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$  son coronas circulares.

Determinemos ahora la estructura de  $H_1(\tilde{U}_1)$ . Para ello usamos que el espacio  $G_r = \phi[S^1]$  es un retracto por deformación de  $\tilde{U}_1$ . En efecto, es claro que la aplicación  $r : U_1 \rightarrow S^1$  dada por  $r(x) = x/\|x\|$  es una retracción, que induce a su vez una retracción  $\tilde{r} : \tilde{U}_1 \rightarrow G_r$  dada por  $\tilde{r}([x]) = [r(x)]$ .

También es claro que  $r$  es homotópica a la identidad. Además, la homotopía  $H : I \times U_1 \rightarrow U_1$  induce a su vez una homotopía  $\tilde{H} : I \times \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{U}_1$  entre  $\tilde{r}$  y la identidad definida por  $\tilde{H}_t([x]) = [H_t(x)]$ . De este modo, tenemos el isomorfismo  $\tilde{r}_* : H_1(\tilde{U}_1) \rightarrow H_1(G_r)$ .

Al identificar  $S^1$  a través de  $\phi$  para obtener  $G_r$ , podemos empezar identificando los extremos de los arcos  $\tau_i$ , con lo que obtenemos una "flor" de  $2r$  pétalos (es decir,  $2r$  circunferencias identificadas por un punto). Cada arco  $\tau_i$  recorre uno de estos pétalos, pero éstos han de identificarse dos a dos, con lo que obtenemos una flor con  $r$  pétalos, cada uno recorrido por dos de los arcos  $\tau_i$ . Es fácil ver entonces que el espacio  $G_r$  es homotópico al espacio del último ejemplo de la sección 2.6 (sólo hay que contraer a un punto el segmento que allí unía a las circunferencias). Por consiguiente  $H_1(G_r) \cong \mathbb{A}^r$ . Más aún, el estudio

que hicimos allí muestra que una base de  $H_1(G_r)$  está formada por las clases de homología de cualquier conjunto de arcos que den una vuelta completa a cada una de las circunferencias. En nuestro contexto, una base de  $H_1(G_r)$  la forman la mitad de las clases  $[\tilde{\tau}_i]$ .

Necesitamos estudiar con detalle el homomorfismo  $i_* : H_1(\tilde{V}) \longrightarrow H_1(\tilde{U}_1)$  inducido por la inclusión. Para ello consideramos una circunferencia  $\tilde{S}^1$  de centro 0 contenida en  $V$ . Claramente  $\tilde{S}^1$  es un retracto por deformación de  $V$ , luego la inclusión induce un isomorfismo  $H_1(\tilde{S}^1) \cong H_1(V)$ . Según el ejemplo tras la definición 2.41, una base de  $H^1(\tilde{S}^1)$  la forma la clase de cualquier arco  $\sigma$  que dé una vuelta completa a la circunferencia. Podemos tomarlo, concretamente, de tal modo que su extremo inicial (y final) esté alineado con el 0 y el extremo común de los arcos  $\tau_1$  y  $\tau_{2r}$  en  $S^1$ . A su vez, podemos dividir  $\sigma$  en  $2r$  arcos  $\sigma_i$  homotéticos a los arcos  $\tau_i$  tal y como indica la figura. Sabemos que  $\sigma$  es homólogo a la cadena  $\sigma_1 + \cdots + \sigma_{2r}$ . Así pues,  $[\sigma] = [\sigma_1 + \cdots + \sigma_{2r}]$  es una base de  $H_1(\tilde{S}^1)$ , luego también de  $H_1(V)$ . Si llamamos  $\tilde{\sigma}_i = \phi^\sharp(\sigma_i)$ , entonces, dado que  $\phi$  se restringe a un homeomorfismo entre  $V$  y  $\tilde{V}$ , tenemos que  $[\tilde{\sigma}] = [\tilde{\sigma}_1 + \cdots + \tilde{\sigma}_{2r}]$  es una base de  $H_1(\tilde{V})$ .

La imagen de  $[\sigma]$  por el homomorfismo  $H_1(V) \longrightarrow H_1(U_1)$  inducido por la inclusión es también  $[\sigma] = [\sigma_1 + \cdots + \sigma_{2r}]$ , pero considerando ahora las clases en  $H_1(U_1)$ . Teniendo en cuenta las conmutatividades obvias, podemos concluir que

$$i_*([\tilde{\sigma}]) = [\tilde{\sigma}] = [\tilde{\sigma}_1 + \cdots + \tilde{\sigma}_{2r}],$$

considerando ahora las clases en  $H_1(\tilde{U}_1)$ . El homomorfismo  $i_*$  está completamente determinado por esta imagen.

Para estudiarla consideramos su imagen en  $H_1(G_r)$  a través de  $\tilde{r}$ . Teniendo en cuenta la construcción de  $\tilde{r}$  es fácil ver que  $\tilde{r}_*([\tilde{\sigma}]) = \phi_*(r_*([\sigma]))$ , es decir, que para calcular la imagen de  $[\tilde{\sigma}]$  por  $\tilde{r}_*$  podemos calcular la imagen de  $[\sigma]$  por  $r_*$  y luego aplicar  $\phi$ . Ahora bien, es claro que  $r^\sharp(\sigma_i) = \tau_i$ , por lo que

$$r_*([\tilde{\sigma}]) = \phi_*([\tau_1 + \cdots + \tau_{2r}]) = [\tilde{\tau}_1] + \cdots + [\tilde{\tau}_{2r}].$$

Ahora aplicamos el homomorfismo inverso de  $\tilde{r}$ , es decir, el inducido por la inclusión  $G_r \longrightarrow \tilde{U}_1$ , y obtenemos que

$$[\tilde{\sigma}] = [\tilde{\tau}_1] + \cdots + [\tilde{\tau}_{2r}],$$

donde ahora las clases son de  $H_1(\tilde{U}_1)$ .

Si  $F_r = M_g$ , sabemos que estas clases se anulan a pares, con lo que resulta  $r_*([\tilde{\sigma}]) = 0$ , luego  $[\tilde{\sigma}] = 0$  y por consiguiente  $i_*$  es el homomorfismo nulo. Si  $F_r = N_h$  entonces  $[\tilde{\tau}_{2k-1}] = [\tilde{\tau}_{2k}]$ , por lo que

$$[\tilde{\sigma}] = 2[\tilde{\tau}_2] + 2[\tilde{\tau}_4] + \cdots + 2[\tilde{\tau}_{2r}].$$

Además sabemos que las clases de la derecha son una base de  $H_1(\tilde{U}_1)$ . Otra base la constituyen las clases

$$[\tilde{\tau}_2], \dots, [\tilde{\tau}_{2(r-1)}], [\tilde{\tau}_2] + \cdots + [\tilde{\tau}_{2r}].$$

Respecto a esta base,  $[\tilde{\sigma}]$  tiene coordenadas  $(0, \dots, 0, 2)$ , luego tenemos el isomorfismo

$$H_1(\tilde{U}_1)/\text{Im } i_* \cong \mathbb{A}^{r-1} \oplus (\mathbb{A}/2\mathbb{A}).$$

Por otra parte, si  $a[\tilde{\sigma}]$  es un elemento arbitrario de  $H_1(V)$ , donde  $a \in \mathbb{A}$ , tenemos que  $i_*(a[\tilde{\sigma}]) = 0$  si y sólo si  $2a[\tilde{\tau}_2] + \dots + 2a[\tilde{\tau}_{2r}] = 0$ , si y sólo si  $2a = 0$ , si y sólo si  $2a[\tilde{\sigma}] = 0$ , luego el núcleo de  $i_*$  es el núcleo de la multiplicación por 2 en  $H_1(V)$ .

Ahora podemos calcular la sucesión de Mayer-Vietoris para la homología reducida:

$$0 \longrightarrow H_2(F_r) \longrightarrow H_1(V) \xrightarrow{i_*} H_1(U_1) \longrightarrow H_1(F_r) \longrightarrow 0.$$

Observar que donde debería aparecer  $H_1(U_1) \oplus H_1(U_2)$  hemos eliminado el segundo sumando porque es nulo. El homomorfismo correspondiente se reduce entonces a  $i_*$ . Prolongando la sucesión se comprueba que  $H_p(F_r) = 0$  para  $p > 2$ . Si  $F_r = M_g$  entonces  $i_* = 0$ , lo que implica que  $H_2(M_g) \cong H_1(V) \cong \mathbb{A}$ , así como que  $H_1(M_g) \cong H_1(U_1) \cong \mathbb{A}^{2g}$ .

**Ejercicio:** Recordemos que  $M_g$  es una esfera con  $g$  asas. Los cálculos que hemos hechos nos proporcionan explícitamente una base de  $H_1(M_g)$ . Interpretar los  $2g$  arcos que la componen.

Si  $F_r = N_h$ , entonces  $H_2(N_h) \cong H_1(V)_{(2)} \cong \mathbb{A}_{(2)}$ , donde, en general,  $L_{(2)}$  denota al núcleo de la multiplicación por 2 en el  $\mathbb{A}$ -módulo  $L$ . Por otra parte, el teorema de isomorfía nos da que

$$H_1(N_h) \cong H_1(U_1)/\text{Im } i_* \cong \mathbb{A}^{h-1} \oplus (\mathbb{A}/2\mathbb{A}).$$

Resumimos a continuación lo que hemos obtenido:

**Teorema 3.24** *Los grupos de homología reducida de las superficies compactas son:*

$$H_p(M_g) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 2, \\ \mathbb{A}^{2g} & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$H_p(N_h) \cong \begin{cases} \mathbb{A}_{(2)} & \text{si } p = 2, \\ \mathbb{A}^{h-1} \oplus (\mathbb{A}/2\mathbb{A}) & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

*En particular las superficies  $M_g$  y  $N_h$  son no homotópicas dos a dos y los números  $g$  y  $h$  son invariantes topológicos. Por consiguiente, dos superficies compactas son homeomorfas si y sólo si son homotópicas.*

Como es habitual, para la homología completa sólo hemos de cambiar que  $H_0(M_g) \cong H_0(N_h) \cong \mathbb{A}$ . Observar que, salvo elecciones patológicas del anillo  $\mathbb{A}$ , de hecho tenemos que  $H_2(N_h) = 0$ .

Para interpretar el hecho de que en los espacios  $N_h$  haya clases de homología (de dimensión 1) de orden 2 podemos pensar en el plano proyectivo  $N_1$ . Podemos verlo como el disco  $B^2$  en el que hemos identificado cada punto de  $S^1$  con su antípoda. Entonces una base de  $H_1(N_1)$  está formada por la clase de un arco  $\sigma$  que describa media circunferencia. Entonces,  $\sigma + \sigma$  es homotópico a un arco que describe una circunferencia completa, pero éste es homotópico a la frontera de un 2-símplice cuya imagen sea el disco abierto, luego  $2[\sigma] = 0$ .



## Capítulo IV

# Complejos celulares

Estudiamos ahora una clase de espacios topológicos cuyos grupos de homología tienen una interpretación geométrica especialmente simple, a saber, la que esbozamos en la introducción.

### 4.1 Adjunciones

Definiremos los complejos celulares como los espacios que pueden construirse mediante un proceso finito de adjunción de celdas. En esta sección introduciremos y estudiaremos este concepto de adjunción. En el capítulo I vimos cómo pegar dos espacios topológicos a través de un subespacio cerrado. Ahora conviene generalizar esta noción para permitir que la identificación se haga a través de una aplicación continua arbitraria, no necesariamente un homeomorfismo:

**Definición 4.1** Sean  $X$  e  $Y$  espacios compactos,  $A \subset X$  un subespacio cerrado y  $f : A \rightarrow Y$  una aplicación continua. Llamaremos *adjunción* de  $X$  a  $Y$  a través de  $f$  al espacio cociente  $X \oplus_f Y$  obtenido a partir de la suma topológica  $X \oplus Y$  mediante la relación de equivalencia  $R$  dada por

$$u R v \iff (u, v \in A \text{ y } f(u) = f(v)) \text{ o } (u \in A, v \in Y \text{ y } f(u) = v) \\ \text{o } (u \in Y, v \in A \text{ y } f(v) = u) \text{ o } u = v.$$

Por el teorema 1.19, tenemos que  $X \oplus_f Y$  es un espacio de Hausdorff. En efecto, basta ver que la relación  $R$  es cerrada en  $(X \oplus Y)^2$ , pero  $R$  es la unión de cuatro conjuntos cerrados: la antiimagen de la diagonal por la aplicación  $f \times f : A \times A \rightarrow Y \times Y$ ; la imagen de  $A$  por las aplicaciones  $u \mapsto (u, f(u))$  y  $u \mapsto (f(u), u)$ ; y la diagonal en  $(X \oplus Y)^2$ . Así pues,  $R$  es cerrada.

Obviamente, entonces,  $X \oplus_f Y$  es compacto. Sea  $\pi : X \oplus Y \rightarrow X \oplus_f Y$  la proyección canónica. La inclusión de  $Y$  en  $X \oplus Y$  seguida de  $\pi$  es inyectiva y continua, luego es un homeomorfismo. Esto nos permite identificar a  $Y$  con un subespacio cerrado de  $X \oplus_f Y$ . No podemos decir lo mismo de  $X$ . Concretamente, si llamamos  $g : X \rightarrow X \oplus_f Y$  a la composición de la inclusión con  $\pi$ ,

ciertamente tenemos que es continua, pero no es inyectiva. Sí lo es restringida a  $X \setminus A$ , donde de hecho es abierta y, por consiguiente, un homeomorfismo en la imagen. Para probarlo tomamos un abierto  $U \subset X \setminus A$ , con lo que también es abierto en  $X$ , luego en  $X \oplus Y$  y  $\pi^{-1}[\pi[U]] = U$ , luego  $g[U] = \pi[U]$  es abierto en  $X \oplus_f Y$ .

En particular podemos identificar a  $X \setminus A$  con un subespacio abierto de  $X \oplus_f Y$ . A través de la identificación  $Y \subset X \oplus_f Y$ , es claro que  $g|_A = f$  y  $g[X] \cap Y = f[A]$ . En resumen:

*Si  $X$  e  $Y$  son espacios compactos,  $A \subset X$  es un subespacio cerrado y  $f : A \rightarrow Y$  es continua, entonces  $X \oplus_f Y$  es un espacio compacto que contiene a  $X \setminus A$  como subespacio abierto, a  $Y$  como subespacio cerrado y existe  $g : X \rightarrow X \oplus_f Y$  continua tal que  $g|_A = f$  y  $g[X] \cap Y = f[A]$ .*

En realidad no estamos interesados en construir espacios mediante este proceso de adjunción, sino en describir espacios dados como homeomorfos a espacios contruidos así. Para ello el resultado principal es el teorema siguiente:

**Teorema 4.2** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios compactos,  $A \subset X$  un subespacio cerrado y  $f : A \rightarrow Y$  continua. Sea  $h : X \oplus Y \rightarrow W$  una aplicación continua y suprayectiva tal que para todo  $w \in W$  la antiimagen  $h^{-1}[w]$  sea un punto de  $X \setminus A$  o bien un punto  $y \in Y$  junto con  $f^{-1}[y]$ . Entonces el espacio  $W$  es homeomorfo a  $X \oplus_f Y$ .*

DEMOSTRACIÓN: De las hipótesis del enunciado se sigue que, para todo par de puntos  $u, v \in X \oplus Y$ , se cumple  $u R v \iff h(u) = h(v)$ . Esto nos permite definir  $k([u]) = h(u)$ , de modo que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X \oplus Y & \xrightarrow{h} & W \\ \pi \downarrow & \nearrow k & \\ X \oplus_f Y & & \end{array}$$

Claramente,  $k$  es biyectiva. Además es continua, pues si  $U$  es abierto en  $W$ , entonces  $k^{-1}[U]$  es abierto en  $X \oplus_f Y$ , pues esto equivale a que  $\pi^{-1}[k^{-1}[U]] = h^{-1}[U]$  sea abierto en  $X \oplus Y$ . ■

El caso más importante de adjunción que vamos a considerar es aquel en que  $X = B^n$  es una bola cerrada y  $f : S^{n-1} \rightarrow Y$ . En tal caso escribiremos  $Y_f$  en lugar de  $X \oplus_f Y$ , y diremos que  $Y_f$  es la *adjunción* a  $Y$  de una *celda*  $n$ -dimensional a través de  $f$ .

**Ejemplo** Sea  $Y = \{\infty\}$  un espacio con un punto y sea  $f : S^{n-1} \rightarrow Y$  la función constante. Entonces  $Y_f$  un espacio compacto en el que  $Y_f \setminus \{\infty\}$  es homeomorfo a una bola abierta de dimensión  $n$ . Por consiguiente  $Y_f$  es homeomorfo a  $S^n$ . ■



**Ejemplo** El *espacio proyectivo*  $P^n(\mathbb{R})$  puede definirse como el cociente de  $S^n$  respecto a la relación de equivalencia dada por  $u R v \iff u = \pm v$ .

Es fácil ver que  $P^n(\mathbb{R})$  es una variedad topológica conexa y compacta de dimensión  $n$ . En efecto, la identificación  $f : S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$  es continua y suprayectiva, luego  $P^n(\mathbb{R})$  es ciertamente un espacio conexo y compacto. También es fácil ver que es un espacio de Hausdorff. Dado  $x \in P^n(\mathbb{R})$ , sea  $x_0 \in S^n$  tal que  $f(x_0) = x$ . Podemos tomar un entorno coordinado  $U$  de  $x_0$  en  $S^n$  lo suficientemente pequeño como para que no contenga pares de puntos antípodos, de modo que  $f|_U$  es un homeomorfismo entre  $U$  y un entorno  $U'$  de  $x$  en  $P^n(\mathbb{R})$ . Claramente entonces  $U'$  es un entorno coordinado de  $x$ .

Por otra parte, es claro que la inclusión  $i : S^n \rightarrow S^{n+1}$  definida mediante  $x \mapsto (x, 0)$  induce un homeomorfismo en la imagen  $i : P^n(\mathbb{R}) \rightarrow P^{n+1}(\mathbb{R})$ . Sea  $g : B^{n+1} \rightarrow P^{n+1}(\mathbb{R})$  la composición de la aplicación  $x \mapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|})$  con la proyección  $S^{n+1} \rightarrow P^{n+1}(\mathbb{R})$ . Notemos que  $g|_{S^n} = f$ .

Esta aplicación  $g$  es continua y suprayectiva, como también lo es la aplicación  $g \oplus i : B^{n+1} \oplus P^n(\mathbb{R}) \rightarrow P^{n+1}(\mathbb{R})$ . Podemos aplicar el teorema anterior para concluir que  $P^{n+1}(\mathbb{R})$  se obtiene de  $P^n(\mathbb{R})$  por adjunción de una celda de dimensión  $n + 1$  a través de la proyección  $S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$ .

A menudo conviene identificar  $P^n(\mathbb{R})$  con el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión 1 de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En efecto, cada uno de estos subespacios admite exactamente dos generadores de norma 1, y ambos determinan el mismo punto de  $P^n(\mathbb{R})$ . También podemos considerar que  $P^n(\mathbb{R})$  está formado por clases de equivalencia  $[x]$ , con  $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , de modo que  $[x] = [y]$  si y sólo si  $x = \lambda y$ , para un  $\lambda \in \mathbb{R}$  no nulo. No es difícil probar que la aplicación  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n(\mathbb{R})$  dada por  $x \mapsto [x]$  es una identificación. ■

**Ejercicio:** Probar que  $P^1(\mathbb{R})$  es homeomorfo a  $S^1$ , mientras que  $P^2(\mathbb{R})$  es la superficie que introducimos en el capítulo I.

**Ejemplo** El *espacio proyectivo complejo*  $P^n(\mathbb{C})$  puede definirse como el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión 1 de  $\mathbb{C}^{n+1}$  (considerando a éste como  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial) o, equivalentemente, como el conjunto de todas las clases de equivalencia  $[z]$ , con  $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ , respecto a la relación en virtud de la cual  $[z] = [w]$  si y sólo si  $z = \lambda w$ , para un  $\lambda \in \mathbb{C}$  no nulo. Como en el caso real, también podemos considerar a  $P^n(\mathbb{C})$  como el cociente de una esfera. Para ello identificamos  $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$ , con lo que

$$S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \mid |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}.$$

Entonces  $P^n(\mathbb{C})$  es el cociente de  $S^{2n+1}$  a través de la relación dada por

$$u R v \iff u = \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| = 1.$$

Enseguida veremos que  $P^n(\mathbb{C})$  es una variedad topológica (claramente conexa y compacta) de dimensión  $2n$ . El superíndice hace referencia a su dimensión algebraica en geometría proyectiva, que es la mitad de su dimensión topológica.

Consideremos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \longrightarrow & B^{2n} \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \end{array}$$

donde  $f$  es la proyección canónica,

$$i(z_0, \dots, z_{n-1}) = (z_0, \dots, z_{n-1}, 0),$$

$$\bar{f}(z_0, \dots, z_{n-1}) = (z_0, \dots, z_{n-1}, \sqrt{1 - |z|^2}).$$

La aplicación  $i$  es inyectiva, lo que nos permite identificar a  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$  con un subespacio de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Si se cumple  $|z| < 1$ ,  $|w| \leq 1$ ,  $\bar{f}(z) = \bar{f}(w)$ , entonces

$$(z_0, \dots, z_{n-1}, \sqrt{1 - |z|^2}) = \lambda(w_0, \dots, w_{n-1}, \sqrt{1 - |w|^2}).$$

Como la última componente del miembro derecho es un número real positivo, necesariamente  $\lambda = 1$ , luego  $z = w$ . Esto prueba que  $\bar{f}$  es inyectiva sobre el interior de  $B^{2n}$  y claramente su imagen es  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ . Además  $\bar{f}$  es cerrada por compacidad, luego su restricción es un homeomorfismo en la imagen. Ahora es inmediato que  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  se obtiene a partir de  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$  adjuntando una celda de dimensión  $2n$  a través de la proyección canónica  $f : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ .

El cálculo anterior muestra que todos los puntos de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  con un representante cuya última componente no se anula tiene un entorno homeomorfo a una bola abierta de dimensión  $2n$ . Ahora bien, repitiendo el razonamiento con las demás componentes concluimos que esto es cierto para un punto cualquiera, luego  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  es una variedad topológica de dimensión  $2n$ . ■

## 4.2 Complejos celulares

Un complejo celular es un espacio obtenido a partir de un conjunto finito de puntos mediante sucesivas adjunciones de celdas, pero se exige que todas las celdas de cada dimensión se adjunten simultáneamente, en el sentido que ahora precisamos.

**Definición 4.3** Sean  $B_1^n, \dots, B_r^n$  bolas disjuntas de dimensión  $n$ , con fronteras  $S_1^{n-1}, \dots, S_r^{n-1}$ . Sean  $f_i : S_i^{n-1} \rightarrow Y$  continua. Éstas inducen una aplicación continua  $f : S_1^{n-1} \oplus \dots \oplus S_r^{n-1} \rightarrow Y$ . Definimos  $Y_{f_1, \dots, f_r} = (B_1^n \oplus \dots \oplus B_r^n) \oplus_f Y$ . Diremos que  $Y_{f_1, \dots, f_r}$  es el espacio obtenido a partir de  $Y$  por la *adjunción* (simultánea) de  $r$  celdas  $n$ -dimensionales a través de las aplicaciones  $f_i$ .

En general, diremos que una aplicación  $g : (X, U) \rightarrow (Y, V)$  entre pares de espacios compactos es un *homeomorfismo relativo* si  $g|_{X \setminus U} : X \setminus U \rightarrow Y \setminus V$  es biyectiva y continua.

En tal caso, dicha restricción es, de hecho, un homeomorfismo, pues es cerrada al serlo  $g$ . En la situación de la definición anterior tenemos un homeomorfismo relativo

$$g : (B_1^n \oplus \cdots \oplus B_r^n, S_1^{n-1} \oplus \cdots \oplus S_r^{n-1}) \longrightarrow (Y_{f_1, \dots, f_r}, Y).$$

Recíprocamente, si  $(W, Y)$  es un par de espacios compactos y

$$g : (B_1^n \oplus \cdots \oplus B_r^n, S_1^{n-1} \oplus \cdots \oplus S_r^{n-1}) \longrightarrow (W, Y)$$

es un homeomorfismo relativo, entonces  $W$  es homeomorfo a la adjunción a  $Y$  de  $r$  bolas  $n$ -dimensionales a través de las funciones  $f_i = g|_{S_i^{n-1}}$ . En efecto, podemos construir

$$h = g \oplus i : (B_1^n \oplus \cdots \oplus B_r^n) \oplus Y \longrightarrow W,$$

que es continua, suprayectiva y satisface las hipótesis del teorema 4.2.

**Definición 4.4** Un *complejo celular*<sup>1</sup> es un espacio compacto  $X$  junto con una sucesión

$$X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^n = X$$

de subespacios cerrados tales que  $X^0$  es finito y cada  $X^k$  se obtiene de  $X^{k-1}$  por adjunción de un número finito de celdas  $k$ -dimensionales.

Según lo dicho, existen homeomorfismos relativos

$$g_k : (B_1^k \oplus \cdots \oplus B_{r_k}^k, S_1^{k-1} \oplus \cdots \oplus S_{r_k}^{k-1}) \longrightarrow (X^k, X^{k-1}),$$

de modo que la diferencia  $X^k \setminus X^{k-1}$  es la unión de  $r_k$  subespacios abiertos disjuntos  $C_1^k, \dots, C_{r_k}^k$  homeomorfos a bolas abiertas de dimensión  $k$ . Los llamaremos *k-celdas* de  $X$ . El subespacio  $X^k$  se llama *k-esqueleto* de  $X$ . El mayor  $n$  tal que  $X^n \setminus X^{n-1} \neq \emptyset$  se llama *dimensión* del complejo celular  $X$ .

Si  $X$  es un complejo celular, es claro que se cumplen los hechos siguientes:

- $X = \bigcup_{j,k} C_j^k$  es una partición de  $X$  en conjuntos disjuntos.
- Para cada  $j, k$ , el conjunto  $\overline{C}_j^k \setminus C_j^k$  está contenido en la unión de las celdas de dimensión menor que  $k$ .
- Para cada  $j, k$ , existe un homeomorfismo relativo

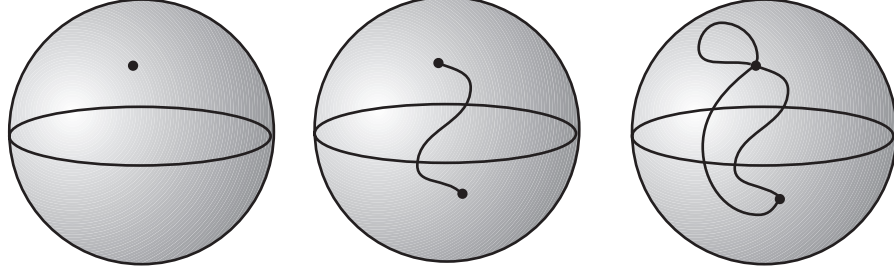
$$g : (B^k, S^{k-1}) \longrightarrow (\overline{C}_j^k, \overline{C}_j^k \setminus C_j^k).$$

- $X^k = \bigcup_{r \leq k} C_j^r$ .

<sup>1</sup>Traducimos así el término “(finite) CW-complex”.

Recíprocamente, si  $X$  es un espacio compacto, una descomposición a) que cumpla b) y c) induce una estructura de complejo celular mediante d).

Un mismo espacio compacto puede admitir distintas estructuras de complejo celular. Por ejemplo, la figura muestra tres complejos distintos sobre una esfera: uno con un vértice, ninguna arista y una cara; otro con dos vértices, una arista y una cara; y otro con dos vértices, tres aristas y tres caras.



Por otra parte, los ejemplos de la sección anterior muestran que la sucesión

$$P^0(\mathbb{R}) \subset P^1(\mathbb{R}) \subset \dots \subset P^n(\mathbb{R})$$

determina una estructura de complejo celular  $n$ -dimensional en  $P^n(\mathbb{R})$  con una única celda de cada dimensión.

Similarmente, el espacio  $P^n(\mathbb{C})$  es un complejo celular de dimensión  $2n$  con una única celda de cada dimensión par y ninguna de dimensión impar.

**Teorema 4.5** *El producto de complejos celulares es un complejo celular cuyas celdas son los productos de celdas de los factores.*

DEMOSTRACIÓN: Sean  $X$  e  $Y$  complejos celulares. Representaremos por  $C_i^k$  a las celdas de  $X$  y  $C_j^l$  a las de  $Y$ . Entonces los productos  $C_i^k \times C_j^l$  son una partición de  $X \times Y$ . Vamos a probar que constituyen una descomposición en celdas, entendiendo que  $C_i^k \times C_j^l$  tiene dimensión  $k + l$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{C_i^k \times C_j^l} \setminus C_i^k \times C_j^l &= (\overline{C_i^k} \times \overline{C_j^l}) \setminus (C_i^k \times C_j^l) \\ &= (\overline{C_i^k} \setminus C_i^k) \times \overline{C_j^l} \cup \overline{C_i^k} \times (\overline{C_j^l} \setminus C_j^l), \end{aligned}$$

y este último espacio está contenido en la unión de las celdas de dimensión menor que  $k + l$ . Se cumple, pues, la condición b). Para probar la condición c) notemos que, por el teorema 1.3 podemos sustituir las bolas por cubos. De este modo, tenemos homeomorfismos relativos

$$f : (I^k, \partial I^k) \longrightarrow (\overline{C_i^k}, \overline{C_i^k} \setminus C_i^k), \quad f' : (I^l, \partial I^l) \longrightarrow (\overline{C_j^l}, \overline{C_j^l} \setminus C_j^l).$$

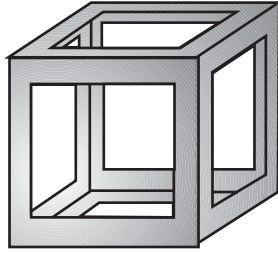
Con ellos podemos construir un homeomorfismo relativo:

$$(f \times f') : (I^{k+l}, \partial I^{k+l}) \longrightarrow (\overline{C_i^k \times C_j^l}, (\overline{C_i^k} \times \overline{C_j^l}) \setminus (C_i^k \times C_j^l)).$$

Esto prueba c). ■

Veamos ahora el teorema en que se basará la determinación de la homología de los complejos celulares. Diremos que un subespacio  $A$  de un espacio  $X$  es un *retracto fuerte por deformación* si existe una retracción  $r : X \rightarrow A$  y una homotopía  $H : I \times X \rightarrow X$  entre la identidad y  $r$  con la propiedad de que  $H_t(x) = x$  para todo  $(t, x) \in I \times A$ .

**Teorema 4.6** *Sea  $X$  un complejo celular de dimensión  $n > 0$ . Entonces  $X^{n-1}$  es un retracto fuerte por deformación de un entorno compacto en  $X$ .*



DEMOSTRACIÓN: Consideremos el homeomorfismo relativo

$$g : (B_1^n \oplus \cdots \oplus B_r^n, S_1^{n-1} \oplus \cdots \oplus S_r^{n-1}) \rightarrow (X, X^{n-1}).$$

Llamemos  $U_i = \{x \in B_i^n \mid \|x\| \geq 1/2\}$ ,  $U = \bigoplus_i U_i$ ,  $V = g[U] \cup X^{n-1}$ . Observemos que  $V$  es un entorno (compacto) de  $X^{n-1}$ . En efecto, si consideramos un punto  $x \in g[U] \cap X^{n-1}$ , entonces, de hecho,  $x \in g[\overset{\circ}{U}] \cup X^{n-1}$ , que es abierto en  $X$ , pues su complementario es la imagen del compacto  $\bigoplus_i B_i^n \setminus \overset{\circ}{U}_i$ . Por lo tanto,  $V$  es un entorno de  $x$ . Si, por el contrario,  $x \in X^{n-1} \setminus g[U]$ , entonces

$$x \in X \setminus g[\bigoplus_i B_i^n] \subset X^{n-1} \subset V,$$

luego  $V$  también es un entorno de  $x$  en este caso.

Es claro que  $S_i^{n-1}$  es un retracto fuerte por deformación de  $U_i$  (la retracción es  $x \mapsto x/\|x\|$ ). De aquí se sigue inmediatamente que  $\bigoplus_i S_i^{n-1}$  es un retracto fuerte por deformación de  $U$ . Sea  $H : I \times U \rightarrow U$  la homotopía. Definimos ahora

$$\tilde{H} : I \times V \rightarrow V.$$

Para ello distinguimos dos casos: si  $x \in V \setminus X^{n-1}$ , entonces  $x$  tiene una única antiimagen  $y$  por  $g$ , que de hecho está en  $U$ , luego podemos definir  $\tilde{H}_t(x) = g(H_t(y)) \in V$ . Si  $x \in X^{n-1}$ , entonces  $\tilde{H}_t(x) = x$ . Claramente, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} I \times U & \xrightarrow{H} & U \\ 1 \times g \downarrow & & \downarrow g \\ I \times V & \xrightarrow{\tilde{H}} & V \end{array}$$

De aquí se sigue que  $\tilde{H}$  es continua, pues si  $C \subset V$  es cerrado, entonces  $\tilde{H}^{-1}[C] = (1 \times g)[H^{-1}[g^{-1}[C]]] \cup (C \cap X^{n-1})$  es cerrado en  $I \times V$ .

Es fácil ver que  $\tilde{H}$  es una homotopía entre la identidad en  $V$  y una retracción de  $V$  en  $X^{n-1}$ , que es, por tanto, un retracto fuerte por deformación de  $V$ . ■

### 4.3 El teorema del homeomorfismo relativo

Para calcular la homología de los complejos celulares demostraremos un resultado general que, bajo ciertas hipótesis, relaciona la homología relativa de dos pares de espacios entre los que tenemos un homeomorfismo relativo. Obviamente, nuestra intención es aplicarlo a los pares  $(X^k, X^{k-1})$  de esqueletos de un complejo, para reducir su homología a la de los pares  $(B^k, S^{k-1})$ . El teorema del homeomorfismo relativo se aplica únicamente a pares  $(X, U)$  tales que  $U$  es un retracto fuerte por deformación de un entorno compacto en  $X$ , condición que cumplen los pares de esqueletos según acabamos de probar en 4.6. Lo primero que vamos a ver es que esta hipótesis nos permite sustituir a  $X$  por el cociente  $X/U$ .

**Definición 4.7** Dado un par de espacios  $(X, U)$ , llamaremos  $X/U$  al espacio cociente que resulta de identificar los puntos de  $U$  a un sólo punto  $x_0$ , es decir, al cociente respecto de la relación dada por

$$x R y \iff x = y \text{ o } x, y \in U.$$

Por el teorema 1.19, si  $X$  y  $U$  son compactos, entonces  $X/U$  también lo es, pues, como subconjunto de  $X \times X$ , la relación  $R$  es  $\Delta \cup (U \times U)$ , donde  $\Delta$  es la diagonal, luego  $R$  es cerrada.

Si llamamos  $x_0$  a la clase de los puntos de  $U$  en  $X/U$ , tenemos que la proyección canónica es una aplicación entre pares  $\pi : (X, U) \longrightarrow (X/U, x_0)$ .

**Teorema 4.8** Sea  $(X, U)$  un par de espacios compactos tal que  $U$  sea un retracto fuerte por deformación de  $X$ . Entonces  $x_0 = \pi[U]$  es un retracto por deformación fuerte de  $X/U$ .

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis tenemos una homotopía  $H : I \times X \longrightarrow X$  tal que  $H_0$  es la identidad,  $H_1 : X \longrightarrow U$  es una retracción y  $H_t(u) = u$  para todo  $u \in U$ . Definimos ahora  $\tilde{H}$  que haga conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} I \times X & \xrightarrow{H} & X \\ 1 \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ I \times X/U & \xrightarrow{\tilde{H}} & X/U \end{array}$$

Concretamente, si  $x \notin U$  definimos  $\tilde{H}_t([x]) = [H_t(x)]$  y  $\tilde{H}_t(x_0) = x_0$ . Es claro que  $\tilde{H}$  cierra el diagrama, y además es continua pues, si  $C$  es cerrado en  $X/U$ , entonces  $\tilde{H}^{-1}[C] = (1 \times \pi)[H^{-1}[\pi^{-1}[C]]]$  es cerrado en  $X/U$ .

También es obvio que  $\tilde{H}$  prueba que  $x_0$  es un retracto fuerte por deformación de  $X/U$ . ■

El punto más delicado en la prueba del teorema del homeomorfismo relativo es el teorema siguiente:

**Teorema 4.9** *Sea  $(X, U)$  un par de espacios compactos tal que  $U$  sea un retracto fuerte por deformación de un entorno compacto en  $X$ . Entonces la proyección canónica  $\pi : (X, U) \rightarrow (X/U, x_0)$  induce isomorfismos*

$$\pi_* : H_p(X, U) \rightarrow H_p(X/U, x_0).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea  $G$  el entorno compacto del cual  $U$  es un retracto fuerte por deformación. La idea básica de la prueba es que  $\pi$  induce un homeomorfismo

$$\pi : (X \setminus U, G \setminus U) \rightarrow (X/U \setminus \{x_0\}, \pi[G] \setminus \{x_0\}),$$

que a su vez induce isomorfismos

$$\pi_* : H_p(X \setminus U, G \setminus U) \rightarrow H_p(X/U \setminus \{x_0\}, \pi[G] \setminus \{x_0\}).$$

Aplicamos el teorema de escisión a las ternas  $(X, G, U)$  y  $(X/U, \pi[G], x_0)$ , con lo que obtenemos isomorfismos

$$\pi_* : H_p(X, G) \rightarrow H_p(X/U, \pi[G]).$$

Los seguimos llamando  $\pi_*$  porque es claro que vienen dados por  $[c] \mapsto [\pi^\#(c)]$ . Ahora sólo nos queda sustituir  $G$  por  $U$  y  $\pi[G]$  por  $x_0$ . Para ello usamos que  $U$  es un retracto fuerte por deformación de  $G$  y que, por el teorema anterior,  $x_0$  es un retracto fuerte por deformación de  $\pi[G]$ . Esto nos dice que los grupos de homología (reducida)  $H_p(G, U)$  y  $H_p(\pi[G], x_0)$  son triviales (son isomorfos a los grupos de los pares  $(U, U)$  y  $(x_0, x_0)$ ).

Entonces, la sucesión exacta de la terna  $(X/U, \pi[G], x_0)$ , que es de la forma  $\rightarrow H_p(\pi[G], x_0) \rightarrow H_p(X/U, x_0) \rightarrow H_p(X/U, \pi[G]) \rightarrow H_{p-1}(\pi[G], x_0) \rightarrow$  nos da que la inclusión induce isomorfismos  $H_p(X/U, x_0) \cong H_p(X/U, \pi[G])$ , y del mismo modo obtenemos isomorfismos  $H_p(X, U) \cong H_p(X, G)$ .

Al combinar todos estos isomorfismos obtenemos finalmente isomorfismos

$$H_p(X, U) \cong H_p(X/U, x_0),$$

y es inmediato comprobar que se trata de las aplicaciones  $\pi_*$ . ■

Observemos que si  $X$  es cualquier espacio y  $x_0 \in X$ , entonces la sucesión exacta del par  $(X, x_0)$  para la homología reducida nos da isomorfismos naturales  $H_p(X) \cong H_p(X, x_0)$ , luego el teorema anterior nos da una interpretación de los grupos de homología relativa  $H_p(X, U)$  cuando  $X$  es compacto y  $U$  es un retracto fuerte por deformación de un entorno compacto en  $X$ . En tal caso resulta que  $H_p(X, U) \cong H_p(X/U)$ , siempre y cuando consideremos (a la derecha) la homología reducida (a la izquierda es lo mismo).

Ahora ya podemos probar el teorema que necesitamos:

**Teorema 4.10 (Teorema del homeomorfismo relativo)** *Consideremos un homeomorfismo relativo  $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$  entre pares de espacios compactos tales que  $U$  y  $V$  sean retracts fuertes por deformación de respectivos entornos compactos. Entonces  $f$  induce isomorfismos*

$$f_* : H_p(X, U) \rightarrow H_p(Y, V).$$

DEMOSTRACIÓN: Es claro que  $f$  induce una aplicación continua  $f'$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X/U & \xrightarrow{f'} & Y/V \end{array}$$

Del hecho de que  $f$  sea un homeomorfismo relativo se sigue que  $f'$  es biyectiva, luego por compacidad es un homeomorfismo. En correspondencia, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_p(X, U) & \xrightarrow{f_*} & H_p(Y, V) \\ \pi_* \downarrow & & \downarrow \pi_* \\ H_p(X/U, x_0) & \xrightarrow{f'_*} & H_p(Y/V, y_0) \end{array}$$

La flecha inferior es un isomorfismo y por el teorema anterior también lo son las verticales, luego  $f_*$  también lo es. ■

## 4.4 La homología de los complejos celulares

El primer paso en el cálculo de la homología de un complejo celular  $X$  consiste en combinar los resultados de las secciones anteriores para determinar los grupos de homología relativa  $H_p(X^k, X^{k-1})$ . Según hemos señalado inmediatamente después de la definición de complejo celular, tenemos homeomorfismos relativos

$$g_k : (B_1^k \oplus \dots \oplus B_{r_k}^k, S_1^{k-1} \oplus \dots \oplus S_{r_k}^{k-1}) \rightarrow (X^k, X^{k-1}).$$

Es obvio que  $S_1^{k-1} \oplus \dots \oplus S_{r_k}^{k-1}$  es un retracto fuerte por deformación de un entorno compacto en  $B_1^k \oplus \dots \oplus B_{r_k}^k$ , y el teorema 4.6 afirma lo mismo del par  $(X^k, X^{k-1})$  (para  $k > 0$ ). Por consiguiente podemos aplicar el teorema del homeomorfismo relativo para concluir que

$$H_p(X^k, X^{k-1}) \cong H_p\left(\bigoplus_{j=1}^{r_k} B_j^k, \bigoplus_{j=1}^{r_k} S_j^{k-1}\right) \cong \bigoplus_{j=1}^{r_k} H_p(B^k, S^{k-1}).$$

Como  $B^k$  es contractible, la sucesión exacta del par  $(B^k, S^k)$  nos proporciona el isomorfismo  $H_p(B^k, S^{k-1}) \cong H_{p-1}(S^{k-1})$ , con lo que tenemos probado el teorema siguiente:



**Teorema 4.11** *Si  $X$  es un complejo celular, el módulo  $H_p(X^k, X^{k-1})$  es trivial salvo si  $p = k$ , en cuyo caso es un  $\mathbb{A}$ -módulo libre de rango igual al número de celdas  $k$ -dimensionales de  $X$ .*

Notemos que este teorema es trivialmente cierto para  $k \leq 0$  si consideramos que  $X^k = \emptyset$  cuando  $k < 0$ . Para  $k = 0$  hemos de considerar la homología completa.

Vamos a describir explícitamente los generadores de  $H_k(X^k, X^{k-1})$  para  $k = 0, 1, 2$ . Para  $k = 0$  la situación es muy simple, pues  $H_0(X^0, X^{-1}) = H_0(X^0)$ , y los generadores (para la homología completa) son los símlices constantes correspondientes a cada vértice de  $X$ . Para  $k = 1$  tenemos el isomorfismo

$$H_1(X^1, X^0) \cong \bigoplus_{j=1}^{r_1} H_1(B_j^1, S_j^0). \quad (4.1)$$

Un generador de  $H_1(B^1, S^0)$  es el símlice  $[x_0, x_1]$ , es decir, la identidad en  $B^1 = \Delta_1$ . En efecto, basta considerar el isomorfismo

$$\delta_* : H_1(B_j^1, S_j^0) \longrightarrow H_0(S_j^0)$$

(respecto a la homología reducida). Se cumple que

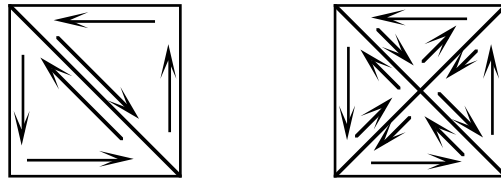
$$\delta_*([x_0, x_1]) = [\partial[x_0, x_1]] = [x_1 - x_0],$$

que, según sabemos, es un generador de  $H_0(S_j^0)$ , luego  $[x_0, x_1]$  lo es del módulo  $H_1(B_j^1, S_j^0)$ . Los generadores de  $H_1(X^1, X^0)$  son las imágenes por  $g_{1*}$  de los generadores de cada sumando directo de (4.1), donde  $g_1$  es el homeomorfismo relativo según la definición de complejo, pero claramente estas imágenes son las clases de las aristas de  $X$  (más sus extremos) consideradas como 1-símlices singulares.

Similarmente, los generadores de  $H_2(X^2, X^1)$  son las imágenes por  $g_{2*}$  de los generadores de los módulos  $H_2(B_j^2, S_j^1)$ . Considerando el isomorfismo

$$\delta_* : H_2(B_j^2, S_j^1) \longrightarrow H_1(S_j^1),$$

concluimos que un generador del primer módulo es la clase de cualquier 2-cadena cuya frontera sea un generador de  $H_1(S_j^1)$ . Por ejemplo, si el complejo  $X$  es la superficie de un cubo, resulta natural considerar como generador de  $H_2(X^2, X^1)$  asociado a una de las caras a la clase de cualquiera de las dos cadenas indicadas en la figura siguiente:



Lo esencial es que hay que escoger el signo de los símlices para que las fronteras interiores se cancelen y las exteriores formen un circuito cerrado que dé una sola vuelta.

Si  $X$  es un complejo celular, llamaremos  $\tilde{C}_p(X) = H_p(X^p, X^{p-1})$ . A los elementos de este módulo los llamaremos  $p$ -cadenas celulares. Los módulos  $\tilde{C}_p(X)$  determinan un  $\mathbb{A}$ -módulo graduado que se convierte en un complejo si definimos el operador frontera

$$\partial_p : H_p(X^p, X^{p-1}) \longrightarrow H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$$

como el homomorfismo de conexión  $\delta_*$  de la sucesión exacta correspondiente a la terna  $(X^p, X^{p-1}, X^{p-2})$ . Hemos de comprobar que  $\partial^2 = 0$ . Para ello consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & H_{p-2}(X^{p-2}) & & \\ & & \uparrow \delta_* & \searrow i_* & \\ H_p(X^p, X^{p-1}) & \xrightarrow{\partial_p} & H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}) & \xrightarrow{\partial_{p-1}} & H_{p-2}(X^{p-2}, X^{p-3}) \\ & \searrow \delta_* & \uparrow i_* & & \\ & & H_{p-1}(X^{p-1}) & & \end{array}$$

Los triángulos conmutan por el teorema 2.28 aplicado a la identidad

$$i : (X^p, X^{p-1}, \emptyset) \longrightarrow (X^p, X^{p-1}, X^{p-2})$$

para el primer triángulo y a la aplicación correspondiente al cambiar  $p$  por  $p - 1$  para el segundo. Ahora bien, la sucesión vertical es un tramo de la sucesión exacta del par  $(X^{p-1}, X^{p-2})$ , luego  $i_* \circ \delta_* = 0$ , de donde se sigue que  $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$ .

Si  $X$  es un complejo celular, llamaremos  $\tilde{H}_p(X)$  a los grupos de homología del complejo  $\tilde{C}(X)$ .

Dejamos que el lector se convenza por sí mismo de que estos grupos de homología para la superficie de un cubo son una formalización rigurosa de los que describimos en la introducción. El teorema siguiente justifica que en realidad son los mismos que hemos estado considerando en espacios arbitrarios.

**Teorema 4.12** *Sea  $X$  un complejo celular. Entonces  $H_p(X) \cong \tilde{H}_p(X)$ , para todo entero  $p$  (considerando la homología completa).*

DEMOSTRACIÓN: Hemos de considerar la sucesión

$$H_{p+1}(X^{p+1}, X^p) \xrightarrow{\partial_{p+1}} H_p(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{\partial_p} H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$$

y comprobar que  $H_k(X)$  es isomorfo al núcleo de  $\partial_p$  sobre la imagen de  $\partial_{p+1}$ .

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H_p(X^{p+1}, X^{p-2}) & & \\
 & & & & \downarrow j_* & & \\
 H_{p+1}(X^{p+1}, X^p) & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & H_p(X^p, X^{p-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_p(X^{p+1}, X^{p-1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \searrow \partial_p & & \downarrow \delta_* & & \\
 & & & & H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}) & & 
 \end{array}$$

La fila y la columna son sucesiones exactas de ternas. El triángulo conmuta por el teorema 2.28.

Si  $x \in N(\partial_p)$ , entonces  $\delta_*(i_*(x)) = 0$ , luego  $i_*(x) = j_*(y)$ , para cierta clase  $y \in H_p(X^{p+1}, X^{p-2})$ . Como  $j_*$  es un monomorfismo,  $y$  está unívocamente determinado. Podemos definir, pues,

$$\phi : N(\partial_p) \longrightarrow H_p(X^{p+1}, X^{p-2})$$

mediante  $\phi(x) = y$ , y es fácil ver que se trata de un homomorfismo.

Si  $y' \in H_p(X^{p+1}, X^{p-2})$ , entonces  $j_*(y') \in \text{Im } i_*$ , pues  $i_*$  es suprayectivo. Así pues, existe un  $x' \in H_p(X^p, X^{p-1})$  tal que  $j_*(y') = i_*(x')$ , de donde

$$\partial_p x' = \delta_*(i_*(x')) = \delta_*(j_*(y')) = 0,$$

lo que implica que  $x' \in N(\partial_p)$  y  $\phi(x') = y'$ . Así pues,  $\phi$  es un epimorfismo.

Como  $\partial_{p+1} \circ i_* = 0$ , es claro que  $\text{Im}(\partial_{p+1}) \subset N(\phi)$ . De hecho se da la igualdad, pues si  $x \in N(\phi) \subset N(\partial_p)$ , entonces  $i_*(x) = 0$ , luego  $x \in \text{Im}(\partial_{p+1})$ .

Así pues,  $N(\phi) = \text{Im}(\partial_{p+1})$ , y el teorema de isomorfía nos da que  $\phi$  induce un isomorfismo de módulos

$$\phi : \tilde{H}_p(X) \longrightarrow H_p(X^{p+1}, X^{p-2}).$$

Ahora probaremos que  $H_p(X^{p+1}, X^{p-2}) \cong H_p(X)$ . Sea  $n$  la dimensión del complejo  $X$ , de modo que  $H_p(X) = H_p(X^n, X^{-1})$ . Las inclusiones entre pares inducen homomorfismos

$$H_p(X) \longrightarrow H_p(X^n, X^{-1}) \longrightarrow H_p(X^n, X^0) \longrightarrow \dots \longrightarrow H_p(X^n, X^{p-2}).$$

Cada uno de estos homomorfismos forma parte de una sucesión exacta

$$H_p(X^i, X^{i-1}) \longrightarrow H_p(X^n, X^{i-1}) \longrightarrow H_p(X^n, X^i) \longrightarrow H_{p-1}(X^i, X^{i-1}),$$

y el teorema 4.11 nos da que los extremos de esta sucesión son triviales, luego cada homomorfismo es en realidad un isomorfismo. Concluimos, pues, que

$$H_p(X) \cong H_p(X^n, X^{p-2}).$$

Similarmente, los homomorfismos

$$H_p(X^{p+1}, X^{p-2}) \longrightarrow H_p(X^{p+2}, X^{p-2}) \longrightarrow \dots \longrightarrow H_p(X^n, X^{p-2})$$

inducidos por las inclusiones son isomorfismos, con lo que

$$H_p(X^n, X^{p-2}) \cong H_p(X^{p+1}, X^{p-2}).$$

Uniendo estos dos isomorfismos obtenemos el que necesitábamos. ■

Vamos a ver varias aplicaciones de este teorema. Para empezar observamos que ahora la homología de los espacios proyectivos complejos se calcula inmediatamente. Basta recordar que  $P^n(\mathbb{C})$  se obtiene a partir de  $P^{n-1}(\mathbb{C})$  adjuntando una celda de dimensión  $2n$ , lo que nos da una estructura de complejo celular en  $P^n(\mathbb{C})$  con una única celda de dimensión  $2k$  para cada  $k \leq n$  (y ninguna celda de dimensión impar). Por consiguiente

$$\tilde{C}_p(P^n(\mathbb{C})) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } 0 \leq p = 2k \leq 2n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Necesariamente, entonces, el operador frontera ha de ser trivial, lo que nos da el teorema siguiente:

**Teorema 4.13** *La homología (completa) del espacio proyectivo complejo  $P^n(\mathbb{C})$  viene dada por*

$$H_p(P^n(\mathbb{C})) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } 0 \leq p = 2k \leq 2n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

También vamos a calcular la homología de los espacios proyectivos reales, pero esto requiere argumentos más sutiles. Antes veremos un ejemplo más sencillo.

**Ejemplo** Usaremos ahora el teorema 4.12 para calcular de nuevo la homología de las superficies compactas (cf. 3.5). Por simplicidad calcularemos la homología de  $N_3$ , aunque el método es general y aplicable igualmente a las superficies  $M_g$ .

Observamos que  $N_3$  es un complejo celular que puede ser construido como sigue:  $X^0$  consta de un único vértice  $v$ . Representaremos por  $\sigma_v$  su 0-símplice asociado en  $C_0(X^0)$ . Ahora construimos  $X^1$  adjuntando tres aristas  $a, b, c$  con ambos extremos en  $v$ , con lo que obtenemos una “flor” de tres pétalos. Específicamente, la adjunción se realiza a través de la aplicación

$$f_1 : S_1^0 \oplus S_2^0 \oplus S_3^0 \longrightarrow X^0$$

constante igual a  $v$ , con la que obtenemos

$$g_1 : B_1^1 \oplus B_2^1 \oplus B_3^1 \longrightarrow X^1$$

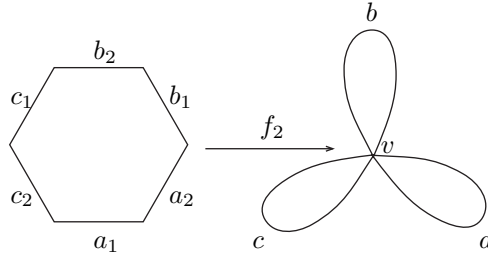
de manera que  $\sigma_a = g_1|_{B_1^1}$ ,  $\sigma_b = g_1|_{B_2^1}$ ,  $\sigma_c = g_1|_{B_3^1}$ , son tres 1-símplices en  $C_1(X^1)$  que parametrizan cada uno de los tres pétalos  $a, b, c$ .

Para formar  $X^2$ , dividimos  $S^1$  en seis arcos iguales (podemos identificar a  $S^1$  con un hexágono regular, y entonces tales arcos son los lados). Parametrizamos dichos arcos mediante 1-símplices  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  ordenados como indica la figura. Se entiende que todos están recorridos en sentido antihorario, de modo que la 1-cadena  $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2$  es un 1-ciclo que genera  $H_1(S^1)$ .

Mediante  $a_1^{-1}$  biyectamos el lado  $a_1^*$  con  $B_1^1$ , y a continuación aplicamos  $g_1$ , con lo que tenemos una aplicación continua de  $a_1^*$  en  $X^1$ . Hacemos lo mismo con  $a_2$ , mientras que  $b_1$  y  $b_2$  los hacemos corresponder con  $B_2^1$  y  $c^1$ ,  $c_2$  con  $B_3^1$ . De este modo obtenemos seis aplicaciones continuas de cada uno de los lados del hexágono en  $X^1$ . Como todas ellas hacen corresponder los extremos con el punto  $v$ , se pueden unir en una única aplicación continua

$$f_2 : S^1 \longrightarrow X^1,$$

a través de la cual adjuntamos al complejo una única cara  $k$ .



Así obtenemos una aplicación  $g_2 : B^2 \longrightarrow X^2$  que restringida a  $\overset{\circ}{B}^2$  es un homeomorfismo en su imagen y en la frontera cumple

$$g_2^\#(a_1) = g_2^\#(a_2) = \sigma_a, \quad g_2^\#(b_1) = g_2^\#(b_2) = \sigma_b, \quad g_2^\#(c_1) = g_2^\#(c_2) = \sigma_c.$$

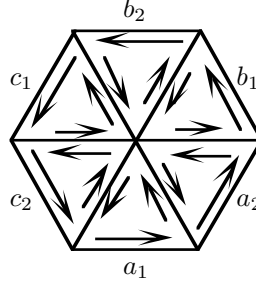
De aquí se sigue inmediatamente que el complejo  $X = X^2$  es homeomorfo a  $N_3$ . Si llamamos  $v = [\sigma_v] \in H_0(X^0)$ , tenemos que

$$\tilde{C}_0(X) = \langle v \rangle.$$

Similarmente, sabemos que  $\tilde{C}_1(X)$  está generado por las imágenes por  $g_{1*}$  de un generador de cada grupo  $H_1(B_i^1, S_i^1)$ . Este grupo está generado por la clase de la identidad  $B_i^1 \longrightarrow B_i^1$ , y su imagen es la clase del símplex  $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$  correspondiente. Así pues, tomando clases en  $H_1(X^1, X^0)$ , llamamos  $a = [\sigma_a]$ ,  $b = [\sigma_b]$  y  $c = [\sigma_c]$ , y se cumple que

$$\tilde{C}_1(X) = \langle a, b, c \rangle.$$

Finalmente, consideramos en  $B^2$  (identificado con el hexágono) la 2-cadena  $\sigma_k$  indicada en la figura:



Puesto que

$$\partial\sigma_k = a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2$$

es un ciclo cuya clase genera  $H^1(S^1)$ , tenemos que  $k = g_{2*}([\sigma_k])$  es el generador de  $H^2(X^2, X^1)$  correspondiente a la única cara de  $N_3$ . Así pues,

$$\tilde{C}_2(X) = \langle k \rangle.$$

Ahora calculamos el operador frontera del complejo  $\tilde{C}(X)$ . Trivialmente,  $\partial v = 0$ . Por otra parte,

$$\partial a = \delta_*([\sigma_a]) = [\partial\sigma_a] = [v - v] = 0,$$

e igualmente  $\partial b = \partial c = 0$ . Por otra parte,

$$\begin{aligned} \partial k &= \delta_*([g_2^\sharp(\sigma_k)]) = [\partial g_2^\sharp(\sigma_k)] = [g_2^\sharp(\partial\sigma_k)] = [g_2^\sharp(a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2)] \\ &= [2\sigma_a] + [2\sigma_b] + [2\sigma_c] = 2a + 2b + 2c. \end{aligned}$$

Por consiguiente,  $rk$ , para  $r \in \mathbb{A}$  es un ciclo si y sólo si  $2r = 0$ , es decir, si y sólo si  $r$  pertenece al núcleo  $\mathbb{A}_{(2)}$  de la multiplicación por 2 en  $\mathbb{A}$  y, por consiguiente,  $H_2(X) \cong \mathbb{A}_{(2)}$ . Por otra parte,

$$H_1(X) = \langle a, b, c \rangle / \langle 2a + 2b + 2c \rangle \cong \mathbb{A}^2 \oplus (\mathbb{A}/2\mathbb{A}),$$

y claramente  $H_0(X) \cong \mathbb{A}$ . ■

Para calcular —tal y como habíamos anunciado— la homología de los espacios proyectivos reales, necesitamos un resultado más:

**Definición 4.14** Una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  entre complejos celulares es *celular* si cumple  $f[X^p] \subset Y^p$  para todo  $p$ .

Una aplicación celular  $f$  induce aplicaciones entre pares

$$f : (X^p, X^{p-1}) \rightarrow (Y^p, Y^{p-1}),$$

luego induce homomorfismos

$$f_* : H_p(X^p, X^{p-1}) \rightarrow H_p(Y^p, Y^{p-1}).$$

A este homomorfismo lo llamaremos  $\tilde{f}_p : \tilde{C}_p(X) \rightarrow \tilde{C}_p(Y)$ . El teorema 2.28 implica inmediatamente que  $\tilde{f}$  conmuta con el operador frontera de  $\tilde{C}(X)$ , es decir, que es un homomorfismo de complejos, por lo que induce homomorfismos

$$\tilde{f}_{*p} : \tilde{H}_p(X) \rightarrow \tilde{H}_p(Y).$$

**Teorema 4.15** Sea  $f : X \longrightarrow Y$  una aplicación celular entre dos complejos celulares. Entonces el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_p(X) & \longrightarrow & H_p(X) \\ \tilde{f}_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \tilde{H}_p(Y) & \longrightarrow & H_p(Y) \end{array}$$

donde las flechas horizontales representan a los isomorfismos construidos en el teorema 4.12.

DEMOSTRACIÓN: Si analizamos la prueba del teorema 4.12, veremos que el isomorfismo construido se descompone en tres isomorfismos, de acuerdo con el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_p(X) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & H_p(X^{p+1}, X^{p-2}) & \longrightarrow & H_p(X, X^{p-2}) & \longleftarrow & H_p(X) \\ \tilde{f}_* \downarrow & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \tilde{H}_p(Y) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & H_p(Y^{p+1}, Y^{p-2}) & \longrightarrow & H_p(Y, Y^{p-2}) & \longleftarrow & H_p(Y) \end{array}$$

Las flechas horizontales sin nombre representan los homomorfismos inducidos por las inclusiones. Es claro entonces que el cuadrado central y el derecho son conmutativos. Sólo falta probar que lo mismo sucede con el izquierdo.

Con la notación de 4.12, el homomorfismo  $\tilde{\phi}$  está determinado por los homomorfismos  $i_*$  y  $j_*$ . Concretamente, si  $x \in \tilde{Z}_p(X)$ , tenemos que  $\tilde{\phi}([x]) = \phi(x)$ , donde  $\phi(x)$  está determinado por la relación  $i_*(x) = j_*(\phi(x))$ . Como  $f_*$  conmuta con  $i_*$  y  $j_*$ , tenemos que  $i_*(f_*(x)) = j_*(f_*(\phi(x)))$ , lo que significa que  $f_*(\phi(x)) = \phi(f_*(x))$ , donde la segunda  $\phi$  es la correspondiente al complejo  $Y$ .

Tomando clases en  $\tilde{H}_p(X)$  y  $\tilde{H}_p(Y)$ , concluimos que

$$f_*(\tilde{\phi}([x])) = f_*(\phi(x)) = \phi(f_*(x)) = \tilde{\phi}([f_*(x)]) = \tilde{\phi}(\tilde{f}_*([x])).$$

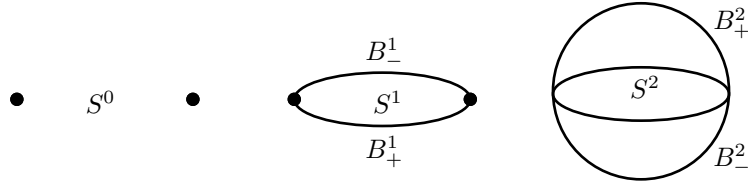
■

Nos ocupamos ahora de la homología de  $P^n(\mathbb{R})$ . Para ello hemos de describir con detalle una estructura de complejo celular en la esfera  $S^n$ . Identificando a  $S^p$  con los puntos de  $S^n$  cuyas últimas coordenadas son nulas, vamos a considerar a  $S^n$  como complejo celular  $X$  de modo que el esqueleto de dimensión  $p$  será  $X^p = S^p$ .

Para ello basta observar que  $S^p$  puede obtenerse a partir de  $S^{p-1}$  adjuntando dos celdas:

$$B_+^p = \{x \in S^p \mid x_{p+1} > 0\}, \quad B_-^p = \{x \in S^p \mid x_{p+1} < 0\}.$$

Específicamente, tenemos la aplicación  $g_p : B_1^p \oplus B_2^p \longrightarrow S^p$  que restringida a  $B_1^p$  es  $g_p(x) = (x, \sqrt{1 - \|x\|})$  y restringida a  $B_2^p$  es  $g_p(x) = (x, -\sqrt{1 - \|x\|})$ .



(Notemos que estamos sustituyendo el espacio cociente determinado por la restricción de  $g_p$  a la suma de las fronteras por un espacio homeomorfo, a saber, la realización de  $S^p$  como subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Esto no supone ningún cambio teórico sustancial.)

Consideremos ahora la aplicación antipodal  $\alpha : S^n \rightarrow S^n$ . Ciertamente es celular, luego induce homomorfismos  $\tilde{\alpha}^\#$  entre los grupos  $\tilde{C}_p(S^n)$ . Si llamamos  $\beta : B_1^p \oplus B_2^p \rightarrow B_1^p \oplus B_2^p$  a la aplicación que envía  $x \in B_1^p$  a  $-x \in B_2^p$  y viceversa, tenemos que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} B_1^p \oplus B_2^p & \xrightarrow{g_p} & S^p \\ \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B_1^p \oplus B_2^p & \xrightarrow{g_p} & S^p \end{array}$$

Por lo tanto, el diagrama siguiente también conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H_p(B_1^p \oplus B_2^p, S_1^{p-1} \oplus S_2^{p-1}) & \xrightarrow{g_{p*}} & \tilde{C}_p(S^n) \\ \beta_* \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha}^\# \\ H_p(B_1^p \oplus B_2^p, S_1^{p-1} \oplus S_2^{p-1}) & \xrightarrow{g_{p*}} & \tilde{C}_p(S^n) \end{array}$$

Ahora bien, es claro que  $\beta_*$  se restringe a un isomorfismo entre  $H_p(B_1^p, S_1^{p-1})$  y  $H_p(B_2^p, S_2^{p-1})$ , luego, fijado un generador (libre)  $c$  del primer módulo, podemos tomar a  $\beta_*(c)$  como generador (libre) del segundo. Esto se traduce en que como base de  $\tilde{C}_p(S^n)$  podemos tomar un par de clases  $e_p, \tilde{\alpha}^\#(e_p)$ .

Para estudiar el operador frontera consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_p(S^p, S^{p-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{p-1}(S^{p-1}, S^{p-2}) & & \\ \delta_* \searrow & & \nearrow i_* & & \\ & H_{p-1}(S^{p-1}) & & & \\ \tilde{\alpha}^\# \downarrow & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \tilde{\alpha}^\# \\ & H_{p-1}(S^{p-1}) & & & \\ \delta_* \nearrow & & \searrow i_* & & \\ H_p(S^p, S^{p-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{p-1}(S^{p-1}, S^{p-2}) & & \end{array}$$



Según el teorema 3.14, el homomorfismo  $\alpha_*$  que aparece en el centro del diagrama es la multiplicación por  $(-1)^p$ . Vemos, pues, que

$$\partial\tilde{\alpha}^\sharp(e_p) = i_*(\alpha_*(\delta_*(e_p))) = (-1)^p i_*(\delta_*(e_p)) = (-1)^p \partial e_p.$$

En particular, la cadena  $e_p + (-1)^{p+1}\tilde{\alpha}^\sharp(e_p)$  es un ciclo. Vamos a ver que si  $p > 0$  es, de hecho, una base de  $\tilde{Z}_p(S^n)$ . Ciertamente es libre. Un ciclo arbitrario ha de ser de la forma  $z = a_1 e_p + a_2 \tilde{\alpha}^\sharp(e_p)$ , para ciertos  $a_1, a_2 \in \mathbb{A}$ , sujeto a la condición

$$0 = \partial(a_1 e_p + a_2 \tilde{\alpha}^\sharp(e_p)) = (a_1 + (-1)^p a_2) \partial e_p.$$

Si probamos que  $\partial e_p$  es libre, concluiremos que  $a_1 + (-1)^p a_2 = 0$ , con lo que

$$z = a_1(e_p + (-1)^{p+1}\tilde{\alpha}^\sharp(e_p)),$$

como queríamos probar. Para ello consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_p(B_1^p, S_1^{p-1}) & \xrightarrow{g_{p*}} & H_p(S^p, S^{p-1}) \\ \delta_* \downarrow & & \downarrow \delta_* = \partial \\ H_{p-1}(S^{p-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_{p-1}(S^{p-1}, S^{p-2}) \end{array}$$

Las flechas horizontales son las inducidas por la restricción

$$g_p : (B_1^p, S_1^{p-1}, \emptyset) \longrightarrow (S^p, S^{p-1}, S^{p-2}),$$

ambas son monomorfismos: la superior porque es la restricción de un isomorfismo, la inferior porque, en la sucesión de homología del par  $(S^{p-1}, S^{p-2})$ , el término anterior es  $H_{p-1}(S^{p-2}) = 0$ . Por otra parte, la flecha vertical izquierda es un isomorfismo y sabemos que  $e_p$  es la imagen por  $g_{p*}$  de una base de  $H_p(B_1^p, S_1^{p-1})$ , luego  $\partial e_p$  es la imagen por  $i_*$  de una base de  $H_{p-1}(S^{p-1})$ . Es claro entonces que  $\partial e_p$  es libre, como queríamos probar.

Si  $0 < p < n$ , es claro que  $\tilde{F}_p(S^n) = \langle \partial e_{p+1} \rangle$ . Por otra parte, sabemos que  $\tilde{H}_p(S^n) \cong H_p(S^n) = 0$ , luego

$$\tilde{Z}_p(S^n) = \langle e_p + (-1)^{p+1}\tilde{\alpha}^\sharp(e_p) \rangle = \langle \partial e_{p+1} \rangle = \tilde{F}_p(S^n).$$

Por consiguiente,

$$\partial e_{p+1} = \epsilon(e_p + (-1)^{p+1}\tilde{\alpha}^\sharp(e_p)),$$

donde  $\epsilon \in \mathbb{A}$  es una unidad. Podemos cambiar  $e_p$  por  $\epsilon e_p$  y así  $\epsilon = 1$ , es decir, tenemos la relación

$$\partial e_{p+1} = e_p + (-1)^{p+1}\tilde{\alpha}^\sharp(e_p).$$

Una comprobación directa muestra que esta fórmula vale igualmente si  $p = 0$ . Con esto tenemos completamente determinado el complejo  $\tilde{C}(S^n)$ .

Ahora consideramos la proyección canónica  $\pi : S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , que claramente es celular, luego induce homomorfismos

$$\tilde{\pi}^\# : \tilde{C}_p(S^n) \longrightarrow \tilde{C}_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})).$$

La restricción  $\pi : (B_+^p, S^{p-1}) \longrightarrow (\mathbb{P}^p(\mathbb{R}), \mathbb{P}^{p-1}(\mathbb{R}))$  es un homeomorfismo relativo, luego  $\tilde{\pi}^\#$  se restringe a un isomorfismo entre  $H_p(B_+^p, S^{p-1})$  y  $\tilde{C}_p(\mathbb{P}^p(\mathbb{R}))$ . Por consiguiente,  $e'_p = \tilde{\pi}^\#(e_p)$ , es una base de  $\tilde{C}_p(\mathbb{P}^p(\mathbb{R}))$ . Por otra parte,

$$\tilde{\pi}^\#(\tilde{\alpha}^\#(e_p)) = \widetilde{\alpha \circ \pi}^\#(e_p) = \tilde{\pi}^\#(e_p) = e'_p.$$

Con esto podemos calcular el operador frontera:

$$\begin{aligned} \partial e'_{p+1} &= \partial \tilde{\pi}^\#(e_{p+1}) = \tilde{\pi}^\#(\partial e_{p+1}) \\ &= \tilde{\pi}^\#(e_p + (-1)^{p+1} \tilde{\alpha}^\#(e_p)) = (1 + (-1)^{p+1}) e'_p. \end{aligned}$$

Explícitamente:

$$\partial e'_{p+1} = \begin{cases} 2e'_p & \text{si } p \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ahora es inmediato el teorema siguiente:

**Teorema 4.16** *La homología (completa) del espacio proyectivo real  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  viene dada por*

$$H_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } p < 0 \text{ o } p > n, \\ \mathbb{A} & \text{si } p = 0, \\ \mathbb{A}_{(2)} & \text{si } 1 \leq p = 2k \leq n, \\ \mathbb{A}/2\mathbb{A} & \text{si } 1 \leq p = 2k + 1 < n, \\ \mathbb{A} & \text{si } p = 2k + 1 = n, \end{cases}$$

donde  $\mathbb{A}_{(2)}$  es el núcleo de la multiplicación por 2 en  $\mathbb{A}$ .

## 4.5 Los números de Betti y la característica de Euler

En esta sección supondremos que el anillo de coeficientes  $\mathbb{A}$  sobre el que construimos los grupos de homología es un cuerpo o, al menos, dominio de ideales principales (como  $\mathbb{Z}$ ). En tal caso, si  $M$  es un  $\mathbb{A}$ -módulo finitamente generado y  $T(M)$  es el *submódulo de torsión*, es decir, el submódulo formado por los elementos  $m \in M$  tales que existe un  $a \in \mathbb{A}$  no nulo tal que  $am = 0$ , se cumple que  $M/T(M)$  es un  $\mathbb{A}$ -módulo libre (finitamente generado). Al rango de este cociente se le llama *rango* de  $M$ . Además, todo submódulo de un  $\mathbb{A}$ -módulo libre de rango finito  $r$  es libre y de rango menor o igual que  $r$ .

Si  $X$  es un complejo celular, sabemos que  $\tilde{C}_p(X)$  es un  $\mathbb{A}$ -módulo libre finitamente generado, luego también lo es el submódulo de ciclos  $\tilde{Z}_p(X)$  y su cociente,  $\tilde{H}_p(X)$ .

**Definición 4.17** Sea  $X$  un espacio topológico y  $p$  un entero tal que el  $\mathbb{A}$ -módulo  $H_p(X)$  sea finitamente generado. Entonces se define el *número de Betti* de  $X$  de dimensión  $p$  como el rango  $b_p(X)$  de  $H_p(X)$ . Cuando no se especifica el anillo  $\mathbb{A}$  se sobrentiende que es  $\mathbb{Z}$ .

La homología considerada es la completa, de modo que  $b_0(X)$  es el número de componentes arcoconexas de  $X$  (supuesto que sea finito).

Las observaciones previas a la definición junto con el teorema 4.12 prueban que si  $X$  es un complejo celular entonces todos sus números de Betti están definidos, así como que  $b_p(X) \neq 0$  a lo sumo si  $0 \leq p \leq n$ .

En general, si  $X$  es un espacio topológico cuyos números de Betti están todos definidos y todos son nulos salvo a lo sumo una cantidad finita, definimos la *característica de Euler* de  $X$  como

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p b_p(X).$$

Tenemos, pues, que la característica de Euler está definida para todo complejo celular. Por ejemplo, con los cálculos que tenemos hechos, es inmediato comprobar que

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 2 & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases} \quad \chi(M_g) = 2 - 2g, \quad \chi(N_h) = 2 - h,$$

$$\chi(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = n + 1, \quad \chi(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 1 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

En particular, vemos que este invariante es suficiente para distinguir entre sí las superficies  $M_g$  y también las  $N_h$  (aunque  $\chi(M_g) = \chi(N_{2g})$ ).

Observemos que los números de Betti pueden depender del anillo de coeficientes. Un ejemplo nos lo proporcionan las superficies  $N_h$ , para las cuales  $b_1 = h - 1$  si  $\mathbb{A}$  no tiene característica 2 y  $b_1 = h$  en caso contrario. Ahora bien, la característica de Euler resulta invariante porque  $b_2$  compensa esta diferencia. El teorema 4.20 prueba que la característica de Euler de un complejo celular no depende del anillo de coeficientes.

Vamos a ver que la característica de Euler es muy fácil de calcular en espacios concretos. Para ello necesitamos algunas cuentas con sucesiones exactas. El teorema siguiente es trivial si  $\mathbb{A}$  es un cuerpo y, por consiguiente, los módulos son espacios vectoriales.

**Teorema 4.18** *Consideremos una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \dots \longrightarrow M_r \longrightarrow 0,$$

*de módulos finitamente generados sobre un dominio de ideales principales  $\mathbb{A}$ . Entonces*

$$\sum_p (-1)^p \text{rang } M_p = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Lo probaremos por inducción sobre  $r$ . Para  $r = 1, 2$  es inmediato. Veámoslo para  $r = 3$ . Tenemos, pues,

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow 0.$$

Vamos a reducirlo al caso en que el anillo es un cuerpo. Para ello consideramos el cuerpo de cocientes  $\mathbb{K}$  de  $\mathbb{A}$ . Llamemos  $\overline{M}_i = M_i/T(M_i)$ , que es un  $\mathbb{A}$ -módulo libre del mismo rango que  $M_i$  (por definición). Es fácil ver que la sucesión dada induce una sucesión

$$0 \longrightarrow \overline{M}_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \overline{M}_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \overline{M}_3 \longrightarrow 0.$$

Esta sucesión es exacta en  $\overline{M}_1$  y en  $\overline{M}_3$ , aunque no necesariamente en  $\overline{M}_2$ . Además,  $\overline{f}_1 \circ \overline{f}_2 = 0$ . (Las comprobaciones son simples: veamos, por ejemplo, la inyectividad de  $\overline{f}_1$ . Si  $\overline{f}_1([m]) = 0$ , entonces  $f_1(m) \in T(M_2)$ , luego existe  $a \in \mathbb{A}$  no nulo tal que  $f_1(am) = 0$ , luego  $am = 0$ , luego  $m \in T(M_1)$  y  $[m] = 0$ .)

Si  $r_i = \text{rang } M_i$ , fijando una base en cada  $\overline{M}_i$  podemos considerar el isomorfismo coordinado  $\phi_i : \overline{M}_i \longrightarrow \mathbb{A}^{r_i}$ . A través de estos isomorfismos los homomorfismos  $\overline{f}_1$  y  $\overline{f}_2$  se transforman en homomorfismos  $j_1$  y  $j_2$ , los cuales se extienden de forma única a aplicaciones lineales  $j'_1$  y  $j'_2$  entre los espacios vectoriales  $\mathbb{K}^{r_i}$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{M}_1 & \xrightarrow{\overline{f}_1} & \overline{M}_2 & \xrightarrow{\overline{f}_2} & \overline{M}_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \phi_1 \downarrow & & \phi_2 \downarrow & & \phi_3 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{A}^{r_1} & \xrightarrow{j_1} & \mathbb{A}^{r_2} & \xrightarrow{j_2} & \mathbb{A}^{r_3} & \longrightarrow & 0 \\ & & i \downarrow & & i \downarrow & & i \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^{r_1} & \xrightarrow{j'_1} & \mathbb{K}^{r_2} & \xrightarrow{j'_2} & \mathbb{K}^{r_3} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Concretamente,  $j'_1$  es la extensión a  $\mathbb{K}^{r_1}$  de la restricción de  $j_1$  a la base canónica de  $\mathbb{A}^{r_1}$ . Similarmente con  $j'_2$ .

Ya hemos comentado que la primera fila no es necesariamente exacta en  $\overline{M}_2$ , luego la segunda (que es una réplica) tampoco tiene por qué serlo. No obstante probamos a continuación que la tercera lo es.

En general, si  $x \in \mathbb{K}^{r_1}$ , existe un  $a \in \mathbb{A}$  no nulo (el producto de los denominadores de las componentes de  $x$ ) tal que  $ax \in \mathbb{A}^{r_1}$ , luego  $j_1(ax) = j'_1(ax) = 0$ , luego  $ax = 0$  y también  $x = 0$ .

Similarmente se prueba que  $j'_2$  es suprayectiva, así como que  $j'_1 \circ j'_2 = 0$ . Tomemos ahora  $x \in N(j'_2)$  y, como antes, consideramos  $a \in \mathbb{A}$  no nulo tal que  $ax \in \mathbb{A}^{r_2}$ . Sea  $ax = \phi_2([m])$ . Entonces  $\overline{f}_2([m]) = 0$ , es decir,  $f_2(m)$  es un elemento de torsión, existe  $b \in \mathbb{A}$  no nulo tal que  $f_2(bm) = 0$ , luego  $bm \in \text{Im } f_1$ , luego  $[bm] \in \text{Im } \overline{f}_1$ , luego  $baax \in \text{Im } j'_1$ , y también  $x \in \text{Im } j'_1$ .

Ahora es clara la relación  $r_2 = r_1 + r_3$ . Si  $r > 3$  dividimos la sucesión exacta dada en las sucesiones

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \text{Im } f_2 \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \text{Im } f_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_r \longrightarrow 0.$$

Como ambas tienen longitud menor que  $r$ , podemos aplicarles la hipótesis de inducción y, sumando las igualdades que obtenemos, llegamos a la conclusión. ■

Aunque hemos definido los números de Betti y la característica de Euler para el caso de un espacio topológico, es claro que la definición vale igualmente para pares de espacios. Para probar el teorema siguiente basta aplicar el resultado anterior a la sucesión exacta de homología del par  $(X, U)$  del enunciado:

**Teorema 4.19** *Sea  $(X, U)$  un par de espacios topológicos de modo que estén definidas las características de Euler de  $X$ ,  $U$  y  $(X, U)$ . Entonces se da la relación*

$$\chi(X) = \chi(U) + \chi(X, U).$$

Ahora podemos probar:

**Teorema 4.20** *Sea  $X$  un complejo celular de dimensión  $n$  formado por  $c_p$  celdas de cada dimensión  $p$ . Entonces*

$$\chi(X) = \sum_{p=0}^n (-1)^p c_p.$$

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 0$  tenemos que  $X$  es un espacio finito de  $c_0$  puntos. Ciertamente entonces, su único grupo de homología no trivial es el de dimensión 0 y  $\chi(X) = b_0(X) = c_0$ .

Supuesto cierto para  $n - 1$ , aplicamos el teorema anterior al par  $(X, X^{n-1})$ , que nos da la relación

$$\chi(X) = \chi(X^{n-1}) + \chi(X, X^{n-1}).$$

Según el teorema 4.11, tenemos que  $\chi(X, X^{n-1}) = (-1)^n c_n$ , con lo que la conclusión es inmediata. ■

**Ejemplo** Sea  $P$  un poliedro en el sentido tradicional, es decir, un espacio formado por caras poligonales homeomorfo a una esfera. Entonces, si  $P$  está formado por  $V$  vértices,  $A$  aristas y  $C$  caras, se cumple la relación

$$V + C - A = 2,$$

conocida como la fórmula de Euler. ■

El teorema anterior nos permite probar fácilmente una última relación:

**Teorema 4.21** *Sean  $X$  e  $Y$  dos complejos celulares. Entonces*

$$\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y).$$

DEMOSTRACIÓN: En la prueba del teorema 4.5 hemos visto que  $X \times Y$  admite una estructura de complejo celular en la que

$$c_p(X \times Y) = \sum_{i+j=p} c_i(X)c_j(Y).$$

El resultado es ahora un simple cálculo a partir del teorema anterior. ■

**Ejemplo**  $\chi(S^2 \times S^2) = 4$ , luego  $S^2 \times S^2$  no es homeomorfo a  $S^4$ . ■

Terminamos la sección mostrando otro caso en el que podemos asegurar que están definidos los números de Betti: el de las variedades topológicas compactas.

**Teorema 4.22** *Los grupos de homología de las variedades topológicas compactas son módulos finitamente generados.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 1.9 no perdemos generalidad si consideramos una variedad  $V \subset \mathbb{R}^m$ . Por el teorema 1.15 tenemos un entorno  $N$  de  $V$  en  $\mathbb{R}^m$  y una retracción  $r : N \rightarrow V$ . Sea  $\epsilon = d(V, \mathbb{R}^m \setminus N)$ . Podemos descomponer  $\mathbb{R}^m$  en una cuadrícula de cubos de diámetro menor que  $\epsilon$ . La unión  $K$  de los cubos que cortan a  $V$  es un complejo celular  $V \subset K \subset N$  y  $r$  se restringe a una retracción  $r : K \rightarrow V$ , la cual induce a su vez epimorfismos

$$r_* : H_p(K) \rightarrow H_p(V).$$

(Son suprayectivos porque  $i_* \circ r_* = 1$ , donde  $i : V \rightarrow K$  es la inclusión.)

Sabemos que los módulos  $H_p(K)$  de los complejos celulares son finitamente generados, luego lo mismo vale para los módulos  $H_p(V)$ . ■

En particular todas las variedades compactas tienen definidos los números de Betti y la característica de Euler.

## 4.6 Poliedros

Terminamos estudiando los complejos celulares más sencillos, a saber, aquellos cuyas caras de dimensión  $p$  son  $p$ -símplices afines. Estos espacios tienen gran interés en topología algebraica. De todos modos, los resultados que siguen no van a ser usados después salvo en el apéndice A.

**Definición 4.23** Un *complejo simplicial* afín en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto finito  $K$  de símplices de  $\mathbb{R}^n$  con la propiedad de que toda cara de un símplice de  $K$  está en  $K$  y la intersección de dos símplices de  $K$  es vacía o bien es una cara común.

Los símplices de  $K$  se llaman *caras* de  $K$ . La *dimensión* de un complejo  $K$  es el máximo de las dimensiones de sus caras. Llamaremos *poliedro* asociado a  $K$  a la unión de todos los símplices que lo componen. Lo representaremos por  $|K|$ . Claramente se trata de un espacio topológico compacto, no necesariamente conexo.

La última observación de la sección 2.1 muestra que el conjunto de las caras de un símple  $S$  forma un complejo simplicial cuyo poliedro asociado es el propio  $S$ .

Un *subcomplejo*  $L$  de un complejo  $K$  es un subconjunto de  $K$  que además sea un complejo. Así, el conjunto de los símlices de  $K$  de dimensión  $\leq r$  forma un subcomplejo de  $K$  al que llamaremos *r-esqueleto* de  $K$ , y lo representaremos por  $K^r$ .

Teniendo en cuenta que un símple afín es homeomorfo a una bola cerrada (por el teorema 1.3), es fácil ver que si  $K$  es un complejo simplicial, entonces su poliedro  $|K|$  es un complejo celular y el poliedro del  $r$ -esqueleto de  $K$  en el sentido que acabamos de introducir es el  $r$ -esqueleto de  $|K|$ .

Si  $S$  es un símple, el conjunto de todas las caras de  $S$  distintas del propio  $S$  constituye un complejo al que llamaremos *frontera* de  $S$ , y lo representaremos por  $\partial S$ .

La unión y la intersección de subcomplejos de un complejo dado son a su vez complejos. El teorema siguiente contiene información más fina sobre la estructura de los complejos.

**Teorema 4.24** *Si  $K$  es un complejo afín, cada punto de  $|K|$  pertenece al interior de una única cara de  $K$ . Recíprocamente, si  $K$  es un conjunto finito de símlices con interiores disjuntos dos a dos y tal que toda cara de un símple de  $K$  está en  $K$ , entonces  $K$  es un complejo simplicial afín.*

DEMOSTRACIÓN: Todo punto  $x \in |K|$  está en una de sus caras, digamos en  $S$ . Si expresamos  $x$  como combinación afín de los vértices de  $S$ , entonces  $x$  está en el interior de la cara de  $S$  formada por los vértices correspondientes a las coordenadas positivas de  $x$ .

Si  $x$  está en el interior de dos caras de  $K$ , digamos en  $S_1$  y  $S_2$ , entonces  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ , luego  $C = S_1 \cap S_2$  es una cara común, pero una cara  $C$  es disjunta del interior del símple  $S_1$  salvo que  $C = S_1$ , e igualmente  $C = S_2$ .

Sea ahora  $K$  un conjunto de símlices en las condiciones del teorema. Hemos de probar que dos cualesquiera de sus elementos  $S_1$  y  $S_2$  son disjuntos o se cortan en una cara. Debidamente ordenados, podemos suponer que los vértices de  $S_1$  son  $(a_0, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_s)$  y que los de  $S_2$  son  $(a_0, \dots, a_r, c_{r+1}, \dots, c_{s'})$ , de modo que ningún  $b_i$  coincide con ningún  $c_j$ . Obviamente el símple de vértices  $(a_1, \dots, a_r)$  —tal vez vacío— está contenido en  $S_1 \cap S_2$ . Si  $x \in S_1 \cap S_2$ , entonces

$$x = \sum_{i=0}^r t_i a_i + \sum_{i=r+1}^s t_i b_i = \sum_{i=0}^r t'_i a_i + \sum_{i=r+1}^{s'} t'_i c_i,$$

donde  $\sum t_i = \sum t'_i = 1$ , pero ha de ser  $t_{r+1} = \dots = t_s = t'_{r+1} = \dots = t'_{s'} = 0$ , o de lo contrario  $x$  estaría en el interior de dos símlices distintos en  $K$ . Así pues,  $x$  pertenece al símple de vértices  $(a_1, \dots, a_r)$ , que es, por tanto,  $S_1 \cap S_2$ . ■

Sabemos que un símple, como espacio topológico, está determinado por su dimensión. Esto no es cierto para un complejo  $K$ , pero veremos que la topología

de  $K$  está determinada por un esquema muy general que describe la forma en que se conectan sus caras. para enunciarlo adecuadamente debemos introducir las aplicaciones que conservan con más exactitud la estructura de un complejo:

**Definición 4.25** Dados dos complejos simpliciales  $K$  y  $L$ , diremos que una aplicación  $f : |K| \rightarrow |L|$  es *simplicial* si cuando  $S$  es una cara de  $K$  con vértices  $a_0, \dots, a_r$ , entonces los puntos  $f(a_0), \dots, f(a_r)$  son afinmente independientes, generan una cara de  $L$  y la restricción de  $f$  a  $S$  viene dada por

$$f\left(\sum_{i=0}^r t_i a_i\right) = \sum_{i=0}^r t_i f(a_i),$$

es decir, la restricción de  $f$  a  $S$  coincide con la restricción de una aplicación afín.

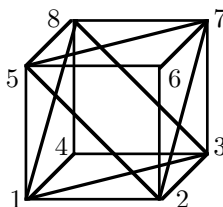
En particular, la restricción de  $f$  a cada cara de  $K$  es continua (porque las aplicaciones afines lo son), luego  $f$  es continua en  $|K|$  (porque las caras de  $K$  forman un cubrimiento cerrado finito de  $|K|$ ). Si  $f$  es biyectiva (y por consiguiente un homeomorfismo, ya que  $|K|$  es compacto), diremos que es un *homeomorfismo simplicial*.

**Definición 4.26** Un *complejo simplicial abstracto*  $\mathcal{K}$  es un conjunto finito de conjuntos finitos, llamados *caras* de  $\mathcal{K}$ , con la propiedad de que todo subconjunto de una cara de  $\mathcal{K}$  es una cara de  $\mathcal{K}$ . Los elementos de las caras de  $\mathcal{K}$  (o, indistintamente, las caras con un solo elemento) se llaman *vértices* de  $\mathcal{K}$ . La *dimensión* de una cara se define como una unidad menos que el número de vértices que la componen. La *dimensión* de  $\mathcal{K}$  es el máximo de las dimensiones de sus caras.

Diremos que un complejo simplicial afín  $K$  es una *realización* de un complejo simplicial abstracto  $\mathcal{K}$  si existe una biyección entre los vértices de  $K$  y los de  $\mathcal{K}$  de modo que un conjunto de vértices de  $\mathcal{K}$  es una cara de  $\mathcal{K}$  si y sólo si los vértices correspondientes en  $K$  son los vértices de una cara de  $K$ .

**Ejemplo** El cubo de la figura es una realización del complejo abstracto

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \\ & \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \\ & \{3, 3\}, \{3, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 8\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \\ & \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 5, 6\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 6, 7\}, \\ & \{3, 4, 8\}, \{3, 7, 8\}, \{1, 4, 8\}, \{1, 5, 8\}, \{5, 6, 7\}, \{5, 7, 8\}\} \end{aligned}$$





Es obvio que todo complejo afín es la realización de un complejo abstracto. El interés de este concepto reside en que un complejo abstracto es una estructura muy sencilla que, sin embargo, determina completamente la topología de sus realizaciones. Lo probamos en el teorema siguiente.

**Teorema 4.27** *Los poliedros de dos realizaciones de un mismo complejo abstracto son simplicialmente homeomorfos.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $K_1$  y  $K_2$  son dos realizaciones de un mismo complejo abstracto  $\mathcal{K}$ , entonces podemos nombrar sus vértices como  $a_0, \dots, a_m$  y  $b_0, \dots, b_m$  respectivamente, de modo que  $a_i$  y  $b_i$  se correspondan con el mismo vértice de  $\mathcal{K}$ . Esto implica que si  $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$  son los vértices de una cara  $C$  de  $K_1$ , entonces  $\{b_{i_1}, \dots, b_{i_r}\}$  son los vértices de una cara  $C'$  de  $K_2$ . Existe una única aplicación  $f_C : C \rightarrow C'$  tal que  $f(a_{i_j}) = b_{i_j}$  para todo  $j$  y que conserve las coordenadas baricéntricas respecto a los vértices, es decir, que sea la restricción de una aplicación afín. Es claro que las aplicaciones  $f_C$  se extienden a un único homeomorfismo simplicial  $f : |K_1| \rightarrow |K_2|$ . ■

Más notable es el hecho de que todo complejo abstracto tiene una realización, es decir, que nunca puede ocurrir que si razonamos sobre un complejo abstracto estemos hablando de nada.

**Teorema 4.28** *Todo complejo abstracto de dimensión  $n$  tiene una realización en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .*

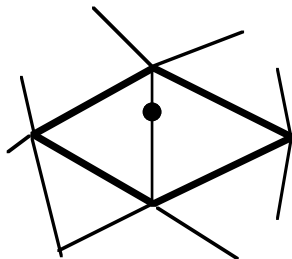
DEMOSTRACIÓN: Sea  $\mathcal{K}$  un complejo abstracto y sean  $a_0, \dots, a_m$  sus vértices. Veamos que existen  $m + 1$  puntos en  $\mathbb{R}^{2n+1}$  tales que  $2n + 2$  cualesquiera de ellos sean afínmente independientes. De hecho podemos encontrar cualquier cantidad de puntos así: supuesto que hayamos encontrado  $k$  de ellos, consideramos las variedades afines generadas por cada  $2n + 1$  de ellos, que son un número finito, luego no cubren  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , luego siempre podemos tomar un punto que no esté en ninguna de ellas, y así tenemos  $k + 1$  puntos con la misma propiedad.

Llamemos  $a_0, \dots, a_m$  a los puntos que hemos tomado y biyectémoslos con los vértices de  $\mathcal{K}$ . Puesto que  $\mathcal{K}$  tiene dimensión  $n$ , los subconjuntos de  $a_0, \dots, a_m$  correspondientes con caras de  $\mathcal{K}$  son afínmente independientes, luego determinan símlices en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Sea  $K$  el conjunto formado por estos símlices. Para que sea un complejo sólo hemos de probar que la intersección de dos cualesquiera de sus caras es vacía o bien es otra cara. Ahora bien, si  $C_1$  y  $C_2$  son caras de  $K$ , digamos de dimensiones  $p$  y  $q$ , el número de vértices de una y otra es a lo sumo  $p + q + 2 \leq 2n + 2$ , luego dichos vértices son afínmente independientes, luego forman un símlice que tiene a  $C_1$  y  $C_2$  como caras, luego  $C_1 \cap C_2$  ha de ser vacío o bien una cara común. ■

Investigamos ahora más a fondo la estructura de un complejo:

**Definición 4.29** Sea  $K$  un complejo simplicial. Para cada punto  $x \in |K|$ , definimos el *entorno simplicial* de  $x$  como el conjunto  $N_K(x)$  formado por todas las caras de  $K$  que contienen a  $x$  junto con las caras de éstas. La *esfera simplicial* de  $x$  es el conjunto  $S_K(x)$  de las caras de  $N_K(x)$  que no contienen a  $x$ .

Si  $S$  es una cara de  $K$ , la *estrella* de  $S$  es la unión de los interiores de las caras de  $K$  que tienen a  $S$  por cara. La representaremos por  $E_K(S)$ .



Por ejemplo, en el complejo de la figura, el entorno simplicial del punto señalado está formado por los dos triángulos centrales junto con sus cinco caras y sus cuatro vértices. La esfera simplicial está formada por las cuatro aristas y los cuatro vértices marcados con trazo grueso y la estrella de la arista en la que está el punto está formada por dicha arista (sin sus vértices) y los dos triángulos sin sus lados.

El teorema siguiente recoge las propiedades básicas de estos conceptos. La prueba se basa esencialmente en el teorema 4.24.

**Teorema 4.30** *Sea  $K$  un complejo simplicial,  $S$  una cara de  $K$  y  $x \in |K|$ . Entonces:*

- a)  $N_K(x)$  y  $S_K(x)$  son complejos simpliciales.
- b) La estrella  $E_K(S)$  es abierta en  $|K|$ .
- c) Si  $S$  es la única cara de  $K$  que tiene a  $x$  en su interior, entonces se cumple que  $E_K(S) = |N_K(x)| \setminus |S_K(x)|$ . En particular  $|N_K(x)|$  es un entorno de  $x$  en  $K$ .

DEMOSTRACIÓN: a) es inmediato.

Para probar b) basta observar que el conjunto  $|K| \setminus E_K(S)$  está formado por las caras de  $K$  que no tienen a  $S$  por cara. En efecto, si  $y \in |K| \setminus E_K(S)$ , entonces  $y$  está en el interior de una cara de  $K$ , pero ésta no puede tener a  $S$  por cara, o de lo contrario  $y$  estaría en  $E_K(S)$ . Recíprocamente, si  $C$  es una cara de  $K$  que no tiene a  $S$  por cara e  $y \in C$ , entonces  $y$  está en el interior de una única cara de  $K$  que, por ser cara de  $C$ , no tiene a  $S$  por cara. La unicidad implica que  $y \in |K| \setminus E_K(S)$ . Por consiguiente este conjunto es cerrado en  $|K|$ .

c) Si  $y \in E_K(S)$ , entonces  $y$  está en el interior de una cara  $C$  de  $K$  que tiene a  $S$  por cara, luego  $C \in N_K(x)$  y por consiguiente  $y \in |N_K(S)|$ . Además  $y \notin |S_K(x)|$ , o de lo contrario  $y$  estaría en una cara de  $N_K(S)$  que no contiene a  $x$ , luego estaría en el interior de una cara de  $N_K(S)$  que no contiene a  $x$ , pero esa cara habría de ser  $C$  por la unicidad y  $x \in S \subset C$ .

Recíprocamente, si  $y \in |N_K(x)| \setminus |S_K(x)|$ , entonces  $y$  está en una cara  $C$  de  $K$  que contiene a  $x$ . En particular  $y$  estará en el interior de una cara  $C'$  de  $C$ ,

pero  $C'$  ha de contener a  $x$ , o de lo contrario  $y$  estaría en  $S_K(x)$ . Entonces  $x$  está en el interior de una cara de  $C'$ , es decir,  $S$  es una cara de  $C'$ , luego  $x$  está en el interior de una cara ( $C$ ) que tiene a  $S$  por cara. En conclusión  $y \in E_K(S)$ . ■

Ahora necesitamos el siguiente teorema técnico:

**Teorema 4.31** *Sea  $K$  un complejo simplicial,  $x \in |K|$ ,  $y \in |N_K(x)|$ ,  $y \neq x$ . Entonces el segmento de extremos  $x, y$  está contenido en  $|N_K(x)|$ . La semirrecta de origen  $x$  que pasa por  $y$  corta a  $|S_K(x)|$  en un único punto.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que  $y$  está en un símplex  $S$  de  $K$  que contiene a  $x$ . Como los símplexes son convexos, el segmento de extremos  $x, y$  está contenido en  $S$ , luego en  $|N_K(x)|$ .

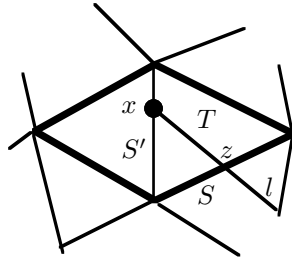
Sea ahora  $l$  la semirrecta de origen  $x$  y que pasa por  $y$ . Puesto que  $|N_K(x)|$  está acotado, existe un punto  $z \in l$  tal que

$$d(x, z) = \sup\{d(x, z') \mid z' \in l \cap |N_K(x)|\}.$$

Como  $y \in l \cap |N_K(x)|$ ,  $y \neq x$ , esta distancia no es nula, luego  $z \neq x$ . Como  $|N_K(x)|$  es cerrado,  $z \in |N_K(x)|$ . Por consiguiente  $z$  está en el interior de una cara  $S$  de  $N_K(x)$ . No puede ocurrir que  $x \in S$ , pues en tal caso podríamos prolongar el segmento  $xz$  sin salir de  $S$ , luego sin salir de  $N_K(x)$ , lo que contradiría la construcción de  $z$ . De este modo,  $S \in S_K(x)$ , luego  $z \in |S_K(x)| \cap l$ .

Falta probar que ningún otro punto de  $l$  está en  $|S_K(x)|$ . Ciertamente, los puntos de  $l$  que distan más de  $x$  que  $z$  están fuera de  $|N_K(x)|$ , luego no están tampoco en  $|S_K(x)|$ . Falta probar que ningún punto interior del segmento de extremos  $xz$  está en  $|S_K(x)|$ .

Como  $S \in N_K(x)$ , tenemos que  $S$  es una cara de un símplex  $C$  de  $K$  que contiene a  $x$ , luego  $x$  está en el interior de una cara  $S'$  de  $C$ . Los vértices de  $S$  y los de  $S'$  son vértices del símplex  $C$ , luego son afínmente independientes y generan un símplex  $T$ , que tiene a  $S$  y  $S'$  por caras. En particular  $T \in N_K(x)$ .



Basta probar que los puntos interiores del segmento  $xz$  son interiores a  $T$ , pues entonces estarán en  $E_K(S')$  y no en  $|S_K(x)|$ . Ahora bien,  $x$  tiene coordenadas baricéntricas positivas respecto de todos los vértices de  $S'$ ,  $z$  tiene coordenadas baricéntricas positivas respecto de todos los vértices de  $S$ , luego una combinación convexa estricta de ambos tiene coordenadas baricéntricas positivas respecto de todos los vértices de  $T$  y es, por lo tanto, interior a  $T$ . ■

De aquí deducimos un teorema muy útil sobre la topología de los complejos simpliciales. Esencialmente dice que si dos poliedros son homeomorfos entonces los poliedros asociados a las esferas simpliciales de puntos homólogos son homotópicos. Por conveniencia lo presentamos en una forma ligeramente más general que será necesaria en el apéndice A.

**Teorema 4.32** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales y sea  $f : |K| \rightarrow |L|$  un homeomorfismo en su imagen. Sea  $U$  un abierto de  $|L|$  contenido en  $f[|K|]$  y  $x \in |K|$  tal que  $f(x) \in U$ . Entonces  $|S_K(x)|$  es homotópico a  $|S_L(f(x))|$ .

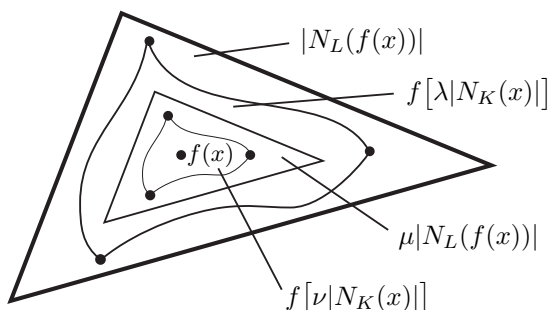
DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 4.24, el punto  $f(x)$  está en el interior de una única cara  $S$  de  $L$ . Tenemos que  $f(x) \in U \cap E_L(S) \subset |N_L(f(x))|$ , luego  $H = f^{-1}[U \cap E_L(S)]$  es un abierto en  $|K|$  que contiene a  $x$  y  $f[H] \subset |N_L(f(x))|$ .

Para cada número real  $0 < \lambda \leq 1$  sea  $\lambda|N_K(x)|$  el conjunto de puntos de  $|N_K(x)|$  de la forma  $x + \lambda(y - x)$ , donde  $y \in |N_K(x)|$ , es decir, es el conjunto que se obtiene al aplicarle a  $N_K(x)$  la homotecia de centro  $x$  y razón  $\lambda$ . En particular es homeomorfo a  $N_K(x)$ . Puesto que  $H$  es abierto y  $|N_K(x)|$  está acotado, existe un  $\lambda$  tal que  $x \in \lambda|N_K(x)| \subset H$ , de donde

$$f(x) \in f[\lambda|N_K(x)|] \subset |N_L(f(x))|.$$

Como  $\lambda|N_K(x)|$  es un entorno de  $x$  en  $K$ , tenemos que  $f[\lambda|N_K(x)|] \subset U$  es un entorno de  $f(x)$  en  $L$ , luego existe un  $\mu$  tal que  $\mu|N_L(f(x))| \subset f[\lambda|N_K(x)|]$ . Del mismo modo que hemos obtenido  $\lambda$  podemos obtener, por último un  $\nu$  de modo que

$$f(x) \in f[\nu|N_K(x)|] \subset \mu|N_L(f(x))| \subset f[\lambda|N_K(x)|] \subset |N_L(f(x))|.$$



Definimos como sigue una aplicación  $\phi : \mu|S_L(f(x))| \rightarrow f[\nu|S_K(x)|]$ . Dado  $y \in \mu|S_L(f(x))|$ , tenemos que  $f^{-1}(y) \in \lambda|N_K(x)| \subset |N_K(x)|$ ,  $f^{-1}(y) \neq x$ . Por el teorema anterior la semirrecta de origen  $x$  que pasa por  $f^{-1}(y)$  corta a  $S_K(x)$  en un único punto. Tomamos su homotético en  $\nu|S_K(x)|$  y aplicamos  $f$ .

Similarmente, podemos definir  $\psi : f[\nu|S_K(x)|] \rightarrow \mu|S_L(f(x))|$ , es decir, partimos de  $y \in f[\nu|S_K(x)|] \subset \mu|N_L(f(x))|$ , lo proyectamos radialmente sobre  $S_L(f(x))$  y consideramos su homotético en  $\mu|S_L(f(x))|$ .

Vamos a probar que  $\phi\psi$  es homotópica a la identidad en  $\mu|S_L(f(x))|$ . En primer lugar consideramos la aplicación  $\phi \circ f^{-1}$ . Si  $y \in \mu|S_L(f(x))|$ , entonces

$f^{-1}(\phi(y))$  está situado en la semirrecta de origen  $x$  que pasa por  $f^{-1}(y)$ . Ambos puntos están en  $\lambda|N_K(x)|$  y, por el teorema anterior, también lo está el segmento que los une. Más precisamente, dicho segmento está contenido en  $\lambda|N_K(x)| \setminus \{x\}$  luego, por el teorema 1.24, las aplicaciones

$$f^{-1}, \phi \circ f^{-1} : \mu|S_L(f(x))| \longrightarrow \lambda|N_K(x)| \setminus \{x\}$$

son homotópicas. Componiendo la homotopía con  $f$  obtenemos una homotopía entre

$$\phi, I : \mu|S_L(f(x))| \longrightarrow \lambda|N_L(f(x))| \setminus \{f(x)\}.$$

( $I$  es la identidad).

Por otra parte, el teorema 1.24 nos proporciona también una homotopía entre  $\phi$  y  $\phi \circ \psi$ . En efecto, dado  $y \in \mu|S_L(f(x))|$ , tenemos que  $\psi(\phi(y))$  está en la semirrecta de origen  $f(x)$  que pasa por  $\phi(y)$ . Ambos puntos están en  $|N_L(f(x))|$ , luego dicho segmento está en  $|N_L(f(x))| \setminus \{f(x)\}$ .

En definitiva tenemos una homotopía entre

$$\phi \circ \psi, I : \mu|S_L(f(x))| \longrightarrow \lambda|N_L(f(x))| \setminus \{f(x)\}.$$

Finalmente, componemos esta homotopía con la proyección radial

$$\lambda|N_L(f(x))| \setminus \{f(x)\} \longrightarrow \mu|S_L(f(x))|.$$

Puesto que las imágenes de  $I$  y  $\phi \circ \psi$  están en  $\mu|S_L(f(x))|$ , la composición sigue siendo una homotopía entre ambas, pero ahora como aplicaciones en  $\mu|S_L(f(x))|$ . Similarmente se prueba que  $\psi \circ \phi$  es homotópica a la identidad, luego tenemos que  $\mu|S_L(f(x))|$  es homotópico a  $f[\nu|S_K(x)|]$ . Puesto que  $|S_L(f(x))|$  es homeomorfo a  $\mu|S_L(f(x))|$  y  $|S_K(x)|$  es homeomorfo a  $f[\nu|S_K(x)|]$ , concluimos que  $|S_L(f(x))|$  y  $|S_K(x)|$  también son homotópicos. ■



## Capítulo V

# El álgebra homológica

En este capítulo estudiamos más detenidamente las estructuras algebraicas generales que hemos ido introduciendo para desarrollar la homología singular. Abordaremos problemas técnicos, como la relación entre las homologías respecto a diferentes anillos de coeficientes y veremos que existe una teoría dual a la homología singular, conocida como cohomología singular, que más adelante será esencial para enunciar importantes resultados sobre variedades topológicas. El lenguaje adecuado para enunciar las propiedades generales del álgebra homológica es el de la teoría de categorías, que introducimos en la primera sección.

### 5.1 Categorías

La noción de categoría permite un tratamiento unificado de diversas estructuras algebraicas. Veamos la definición:

**Definición 5.1** Una *categoría*  $\mathcal{C}$  está determinada por:

- a) Una clase, a cuyos elementos llamaremos *objetos* de  $\mathcal{C}$ ,
- b) Una función que a cada par de objetos  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$  les asigna un conjunto  $\text{hom}(X, Y)$ , a cuyos elementos llamaremos *morfismos* (en  $\mathcal{C}$ ) de  $X$  en  $Y$ .  
Escribiremos  $f : X \rightarrow Y$  o  $X \xrightarrow{f} Y$  para indicar que  $f \in \text{hom}(X, Y)$ .
- c) Una función que a cada par de morfismos  $f \in \text{hom}(X, Y)$ ,  $g \in \text{hom}(Y, Z)$  les asigna un morfismo  $f \circ g \in \text{hom}(X, Z)$  de modo que se cumplan las propiedades siguientes:
  1. Asociatividad:  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ , para todos los morfismos  $f, g, h$  para los que la composición tenga sentido.
  2. Para cada objeto  $X$ , existe un morfismo  $1_X \in \text{hom}(X, X)$  de manera que  $1_X \circ f = f$  para todo  $f \in \text{hom}(X, Y)$  y  $g \circ 1_X = g$  para todo  $g \in \text{hom}(Y, X)$ .

**Nota** Un ejemplo de categoría es la que tiene por objetos a todos los anillos y de modo que los morfismos entre dos anillos son todos los homomorfismos de anillos (y la composición de morfismos es la composición usual de aplicaciones). En este ejemplo, como en la mayoría de los que surgen de forma natural, la clase de los objetos no es un conjunto, pero esto es un mero problema técnico de la teoría axiomática de conjuntos que puede resolverse de muchas formas. Una es simplemente ser cuidadoso. Otra es restringirse a categorías menores, como, en nuestro ejemplo, la categoría de todos los anillos de cardinal hereditariamente menor que un cierto cardinal regular  $\kappa$ . Así tenemos un conjunto y, puesto que  $\kappa$  es arbitrario, todos los resultados que obtengamos se aplicarán a anillos arbitrarios. Hay más posibilidades, pero no vamos a discutir las aquí. El lector que sepa la suficiente teoría de conjuntos para comprender realmente el problema también sabrá resolverlo sin dificultad. ■

En muchos casos, definiremos una categoría indicando únicamente cuáles son sus objetos, pues en general es fácil sobrentender cuáles serán los morfismos correspondientes. Así, por ejemplo, si hablamos de la categoría de los  $\mathbb{A}$ -módulos, para un anillo fijo  $\mathbb{A}$ , se sobrentiende que los morfismos son los homomorfismos de módulos, y que la composición es la composición usual de aplicaciones.

No obstante, hemos de destacar que la definición de categoría no exige que los morfismos entre objetos sean aplicaciones, ni en particular que la composición de morfismos sea la composición de aplicaciones. Precisamente, la utilidad de la teoría de categorías reside en gran parte en la posibilidad de cubrir situaciones más complejas. Por ejemplo, fijado un anillo  $\mathbb{A}$ , las sucesiones exactas cortas de  $\mathbb{A}$ -módulos son los objetos de una categoría (más concretamente, los objetos son quintuplas formadas por tres módulos y dos homomorfismos), en la cual, los morfismos entre dos sucesiones son las ternas de homomorfismos que hacen conmutativo el diagrama correspondiente.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & Q' & \longrightarrow & R' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

En casos como este, también dejaremos de especificar los morfismos a menudo. No obstante, a veces es necesario precisar, pues hay varias opciones de interés. Por ejemplo, tomando como objetos los complejos de  $\mathbb{A}$ -módulos, podemos formar una categoría con los homomorfismos de complejos y la composición usual, pero también podemos tomar como morfismos las clases de homotopía de homomorfismos de complejos. La composición se define entonces como  $[f] \circ [g] = [f \circ g]$ . Se comprueba fácilmente que la clase de la composición depende únicamente de las clases de los homomorfismos que componemos.

También tenemos ejemplos de categoría de interés en topología: la de los espacios topológicos (con las aplicaciones continuas), o la de los pares o ternas de espacios (con las aplicaciones continuas entre pares o ternas), la de los complejos celulares (con las aplicaciones celulares), etc.



Observemos que si  $X$  es un objeto de una categoría, el morfismo  $1_X$  que satisface la definición está unívocamente determinado. En efecto, si hubiera otro  $1'_X$  tendríamos que  $1_X = 1_X \circ 1'_X = 1'_X$ .

Diremos que un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  en una categoría es *inyectivo* si existe un morfismo  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $f \circ g = 1_X$ . Diremos que es *suprayectivo* si existe  $g$  de modo que  $g \circ f = 1_Y$ . Diremos que  $f$  es una *equivalencia* si es a la vez inyectivo y suprayectivo. Observemos lo siguiente:

**Teorema 5.2** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en una cierta categoría y sean  $g, h : Y \rightarrow X$  dos morfismos tales que  $g \circ f = 1_Y$ ,  $f \circ h = 1_X$ . Entonces  $g = h$ .*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que  $g = g \circ 1_X = g \circ f \circ h = 1_Y \circ h = h$ . ■

Así pues, si  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia, podemos definir  $f^{-1}$  como el único morfismo que cumple  $f \circ f^{-1} = 1_X$ ,  $f^{-1} \circ f = 1_Y$ . Es claro que  $f^{-1}$  también es una equivalencia.

El *producto* de dos categorías  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  es la categoría que tiene por objetos a los pares  $(X, X')$  formados por un objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  y un objeto  $X'$  de  $\mathcal{C}'$  y por morfismos entre dos pares a los pares de morfismos entre sus componentes. Similarmente, podemos definir el producto de cualquier cantidad, finita o infinita, de categorías.

**Definición 5.3** Un *functor (covariante)*  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  entre dos categorías es una aplicación que a cada objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  le asigna un objeto  $F(X)$  de  $\mathcal{C}'$  y a cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$  de modo que se cumplan las propiedades siguientes:

- a)  $F(1_X) = 1_{F(X)}$ .
- b)  $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ .

Es claro que la composición de funtores es un functor. La mayoría de los conceptos del álgebra homológica en general y la topología algebraica en particular son functoriales. Veamos algunos ejemplos, sin ánimo de ser exhaustivos. A menudo describiremos un functor indicando su acción sobre los objetos, entendiendo que su acción sobre morfismos es la obvia por el contexto.

- La aplicación que a cada complejo de  $\mathbb{A}$ -módulos les asigna el complejo de sus grupos de homología (complejo con frontera trivial) es un functor de la categoría de complejos de  $\mathbb{A}$ -módulos en sí misma.
- El teorema 2.25 describe un functor de la categoría de las sucesiones exactas cortas de complejos de  $\mathbb{A}$ -módulos en la categoría de las sucesiones exactas infinitas de  $\mathbb{A}$ -módulos. La prueba de que se comporta adecuadamente sobre los morfismos es el teorema 2.27.
- La aplicación  $H$  que a cada par de espacios topológicos les asigna su complejo de módulos de homología singular (con coeficientes en un anillo fijo) es un functor.

- La aplicación que a cada complejo de  $\mathbb{A}$ -módulos  $\mathcal{C}$  le asigna su módulo de  $p$ -cadenas para un  $p$  fijo (y a cada homomorfismo de complejos su restricción a las  $p$ -cadenas) es un funtor. Al componerlo con el funtor  $H$  anterior obtenemos un funtor  $H_p$  que a cada par de espacios le asigna su grupo de homología de dimensión  $p$ .

**Definición 5.4** Sean  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  dos funtores entre dos categorías. Una *transformación natural*  $\phi : F \rightarrow G$  es una aplicación que a cada objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  le asigna un morfismo  $\phi(X) : F(X) \rightarrow G(X)$ , de modo que para todo morfismo  $f : X \rightarrow Y$  el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \phi(X) \downarrow & & \downarrow \phi(Y) \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

Por ejemplo, en la categoría de las sucesiones exactas cortas de complejos de  $\mathbb{A}$ -módulos consideramos las tres proyecciones  $P_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ , que a cada sucesión le asignan cada uno de sus complejos integrantes. Entonces el homomorfismo de conexión que proporciona el teorema 2.25 es una transformación natural  $\delta : P_3 \circ H \rightarrow P_1 \circ H$ , donde  $H$  es el funtor que a cada complejo le asocia el módulo graduado de sus grupos de homología.

Para compensar el carácter tan abstracto de los conceptos de funtor y transformación natural, es conveniente usar un lenguaje “más concreto”, aunque superficialmente sea menos exacto. Hablaremos de los funtores como si fueran objetos de la categoría donde toman imágenes, y de las transformaciones naturales como si fueran morfismos. Por ejemplo, si  $M$  es un funtor que toma imágenes en una categoría de  $\mathbb{A}$ -módulos, hablaremos de  $M$  como si fuera un módulo. Si decimos que  $M$  es libre hemos de entender que  $M(X)$  es un módulo libre para todo objeto  $X$ . Similarmente, si  $\phi$  es una transformación natural entre dos funtores  $C$  y  $C'$  que toman valores en una categoría de módulos graduados, diremos que  $\phi$  tiene grado 1 si  $\phi(X) : C(X) \rightarrow C'(X)$  es un homomorfismo de grado 1 para todo objeto  $X$ , etc.

**Ejemplo** Definimos la *suma directa* de dos complejos  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  como el complejo  $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$  dado por  $(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D})_p = C_p \oplus D_p$  con el operador frontera definido componente a componente.

Si decimos que la suma directa de complejos es functorial, debemos entender que la aplicación  $(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \mapsto \mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$  es un funtor de la categoría de pares de complejos de  $\mathbb{A}$ -módulos en la categoría de complejos de  $\mathbb{A}$ -módulos. Aquí se sobrentiende que el funtor en cuestión transforma un par de morfismos  $(f, g)$ , donde  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ,  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  en el morfismo obvio, es decir, en el morfismo  $f \oplus g : \mathcal{C} \oplus \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}' \oplus \mathcal{D}'$  dado por  $(f \oplus g)_p(u \oplus v) = f_p(u) \oplus g_p(v)$ . La functorialidad significa entonces que  $(f \oplus g) \circ (f' \oplus g') = (f \circ f') \oplus (g \circ g')$ , lo cual se comprueba inmediatamente.

Si decimos que existe un isomorfismo natural  $H_p(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) \cong H_p(\mathcal{C}) \oplus H_p(\mathcal{D})$ , esto ha de entenderse como que existe una transformación natural entre los funtores  $H_p(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D})$  y  $H_p(\mathcal{C}) \oplus H_p(\mathcal{D})$  (definidos ambos sobre la categoría de pares de complejos con imágenes en la categoría de  $\mathbb{A}$ -módulos), que a cada par de complejos le hace corresponder un isomorfismo.

Concretamente, el isomorfismo (= la transformación natural) es la aplicación

$$\phi(\mathcal{C}, \mathcal{D}) : H_p(\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}) \longrightarrow H_p(\mathcal{C}) \oplus H_p(\mathcal{D})$$

dada por  $\phi([c], [d]) = ([c], [d])$ . Es fácil comprobar que  $\phi$  está bien definido, así como que se cumple la conmutatividad que exige la definición de transformación natural. ■

En general, todos los conceptos definidos de forma canónica, es decir, sin elecciones arbitrarias, resultan ser functoriales, y todos los homomorfismos definidos de forma canónica resultan ser naturales. Por ejemplo, en la categoría de los módulos finitamente generados sobre un dominio de ideales principales, todo módulo se descompone como  $M = M_t \oplus L$ , donde  $M_t$  es el submódulo de torsión y  $L$  es libre. El módulo de torsión es functorial, mientras que no hay una forma canónica de asociar a cada módulo  $M$  un submódulo libre  $L$ , por lo que la parte libre de un módulo no es functorial.

## 5.2 Equivalencias homotópicas

Nos ocupamos aquí de algunos hechos adicionales sobre los homomorfismos de complejos. Sabemos que para que un homomorfismo de complejos  $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  induzca isomorfismos  $\bar{f}_p : H_p(\mathcal{C}) \longrightarrow H_p(\mathcal{D})$  no es necesario que él mismo sea un isomorfismo. Una condición suficiente es que sea una equivalencia homotópica, en el sentido que definimos a continuación:

**Definición 5.5** Un homomorfismo de complejos  $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  es una *equivalencia homotópica* si existe un homomorfismo  $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$  tal que los homomorfismos  $f \circ g$  y  $g \circ f$  son homotópicos a las respectivas identidades.<sup>1</sup>

Ciertamente (ver los comentarios tras la definición 2.21), en estas condiciones  $\bar{f}_p \circ \bar{g}_p = 1$  y  $\bar{g}_p \circ \bar{f}_p = 1$ , luego  $\bar{f}_p$  es un isomorfismo para todo  $p$ . Ahora probaremos que si los complejos  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son libres (como módulos) entonces esta condición suficiente es también necesaria. Conviene introducir algunos conceptos.

Diremos que un complejo es *acíclico* si sus módulos de homología son triviales. Diremos que  $\mathcal{C}$  es *contractible* si la identidad en  $\mathcal{C}$  es homotópica al homomorfismo nulo.

En tal caso, tenemos que  $\bar{1}_p = \bar{0}_p : H_p(\mathcal{C}) \longrightarrow H_p(\mathcal{C})$ , de donde se sigue que  $H_p(\mathcal{C}) = 0$ , es decir, todo complejo contractible es acíclico. Vamos a probar un

<sup>1</sup>Si consideramos la categoría de los complejos de  $\mathbb{A}$ -módulos con las clases de homotopía de homomorfismos de complejos (ver la pág. 114) entonces  $f$  es una equivalencia homotópica si su clase de homotopía es una equivalencia en el sentido categórico.

recíproco parcial de este hecho, para lo cual demostramos antes un resultado general muy simple sobre módulos libres que nos va a aparecer en diversas ocasiones.

**Teorema 5.6 (Propiedad proyectiva de los módulos libres)** *Consideremos tres  $\mathbb{A}$ -módulos  $L$ ,  $P$ ,  $Q$ , donde  $L$  es libre, y dos homomorfismos  $\alpha$  y  $\beta$  como indica la figura siguiente y de modo que  $\text{Im } \alpha \subset \text{Im } \beta$ :*

$$\begin{array}{ccc} & & L \\ & \nearrow \gamma & \downarrow \alpha \\ P & \xrightarrow{\beta} & Q \end{array}$$

*Entonces existe un homomorfismo  $\gamma$  que hace el diagrama conmutativo.*

**DEMOSTRACIÓN:** Tomamos una base  $X$  de  $L$ . Para cada  $x \in X$  definimos  $\gamma(x)$  como una antiimagen por  $\beta$  de  $\alpha(x)$  y extendemos la aplicación por linealidad. Así  $\beta(\gamma(x)) = \alpha(x)$  para todo  $x \in X$  y, en consecuencia, para todo  $x \in L$ . ■

Recordemos que si  $\mathbb{A}$  es un dominio de ideales principales, entonces todo submódulo de un  $\mathbb{A}$ -módulo libre es libre. Usamos este hecho en el teorema siguiente:

**Teorema 5.7** *Si  $\mathcal{C}$  es un complejo libre sobre un dominio de ideales principales, entonces  $\mathcal{C}$  es acíclico si y sólo si es contractible.*

**DEMOSTRACIÓN:** Si  $\mathcal{C}$  es acíclico, entonces  $\partial_p : C_p \rightarrow F_{p-1}(\mathcal{C}) = Z_{p-1}(\mathcal{C})$  es un epimorfismo. Como  $C_{p-1}$  es libre, también lo es su submódulo  $Z_{p-1}(\mathcal{C})$ , luego por el teorema anterior existe un homomorfismo  $s_{p-1} : Z_{p-1}(\mathcal{C}) \rightarrow C_p$  tal que  $s_{p-1} \circ \partial_p = 1$ . Es fácil ver entonces que  $1 - \partial_p s_{p-1} : C_p \rightarrow Z_p(\mathcal{C})$ .

Definimos  $D_p = (1 - \partial_p s_{p-1})s_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$ . Se cumple que

$$D\partial + \partial D = (1 - \partial s)s\partial + \partial(1 - \partial s)s = 1 = 1 - 0,$$

luego  $D$  es una homotopía entre los homomorfismos 1 y 0. ■

**Definición 5.8** Si  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  es un homomorfismo de complejos, definimos su *cono* como el complejo  $\overline{\mathcal{C}}$  dado por  $\overline{C}_p = C_{p-1} \oplus C'_p$  con el operador frontera

$$\overline{\partial}_p(c, c') = (-\partial_{p-1}c, f(c) + \partial'_p c').$$

Es fácil comprobar que  $\overline{\partial}'$  es ciertamente un operador frontera.

**Teorema 5.9** *Si  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  es un homomorfismo de complejos, existe una sucesión exacta*

$$\cdots \rightarrow H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{\overline{f}} H_p(\mathcal{C}') \rightarrow H_p(\overline{\mathcal{C}}) \rightarrow H_{p-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\overline{f}} H_{p-1}(\mathcal{C}') \rightarrow \cdots$$

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\alpha : \mathcal{C}' \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  el homomorfismo definido mediante  $\alpha(c') = (0, c')$ . Se comprueba inmediatamente que  $\alpha$  es un homomorfismo de complejos. Definimos el complejo  $\tilde{\mathcal{C}}$  como el dado por  $\tilde{C}_p = C_{p-1}$  con el operador frontera  $\tilde{\partial}_p = -\partial_{p-1}$ . Entonces, la aplicación  $\pi : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$  dada por  $\pi(c, c') = c$  es también un homomorfismo de complejos. Tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{\alpha} \bar{\mathcal{C}} \xrightarrow{\pi} \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow 0.$$

Teniendo en cuenta que  $H_p(\tilde{\mathcal{C}}) = H_{p-1}(\mathcal{C})$ , de esta sucesión obtenemos una sucesión exacta de homología

$$\dots \rightarrow H_p(\mathcal{C}') \rightarrow H_p(\bar{\mathcal{C}}) \rightarrow H_{p-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_*} H_{p-1}(\mathcal{C}') \rightarrow \dots$$

Sólo hemos de comprobar que el homomorfismo de conexión es  $\bar{f}$ . En efecto, si partimos de  $[z] \in H_{p-1}(\mathcal{C})$ , tomamos una antiimagen  $(z, c')$  de  $z$  por  $\pi$ , calculamos su frontera  $(0, f(z) + \partial' c')$  y tomamos una antiimagen por  $\alpha$ , con lo que  $\delta_*([z]) = [f(z) + \partial' c'] = [f(z)] = \bar{f}([z])$ . ■

En particular, si  $\bar{f}$  es un isomorfismo, la sucesión exacta del teorema se reduce a  $0 \rightarrow H_p(\bar{\mathcal{C}}) \rightarrow 0$ , luego concluimos que el cono  $\bar{\mathcal{C}}$  es acíclico. Con esto ya podemos probar:

**Teorema 5.10** *Sea  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un homomorfismo entre complejos libres sobre un dominio de ideales principales. Entonces  $f$  es una equivalencia homotópica si y sólo si induce isomorfismos sobre los grupos de homología.*

DEMOSTRACIÓN: Ya sabemos que una implicación es cierta en general. Si  $f$  induce isomorfismos, acabamos de probar que el cono  $\bar{\mathcal{C}}$  es acíclico, luego, según hemos probado también, es contractible. Sea  $\bar{D} : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  una homotopía entre 1 y 0, es decir, un homomorfismo de grado 1 tal que  $\bar{D} \bar{\partial} + \bar{\partial} \bar{D} = 1$ . Definimos los homomorfismos

$$g : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}, \quad D' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}, \quad D : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$$

mediante  $\bar{D}(0, c') = (g(c'), -D'(c'))$ ,  $\bar{D}(c, 0) = (D(c), -)$ .

Evaluando la igualdad  $\bar{D} \bar{\partial} + \bar{\partial} \bar{D} = 1$  sobre  $(0, c')$  obtenemos las relaciones  $g\partial = \partial g$  y  $gf - 1 = D'\partial + \partial D'$ . Evaluando sobre  $(c, 0)$  queda  $fg - 1 = D\partial + \partial D$ . Así pues,  $g$  es un homomorfismo de complejos y  $D, D'$  son homotopías que muestran que  $fg$  y  $gf$  son homotópicos a la identidad. ■

En particular este teorema se aplica al caso de los homomorfismos entre complejos de cadenas singulares sobre dominios de ideales principales, pues los módulos de cadenas (absolutas o relativas) son libres.

## 5.3 Productos tensoriales

En esta sección y la que sigue nos ocupamos de la relación entre los grupos de homología de un mismo espacio respecto a anillos diferentes. Veremos que

puede expresarse en términos puramente algebraicos, concretamente en términos de productos tensoriales (que estudiamos aquí) y productos de torsión (que introduciremos en la sección siguiente). Vamos a considerar únicamente anillos conmutativos y unitarios, de modo que un  $\mathbb{A}$ -módulo  $M$  es indistintamente un módulo por la izquierda y por la derecha, es decir, no hay ambigüedad si escribimos  $am = ma$ , para  $a \in \mathbb{A}$ ,  $m \in M$ , o incluso  $amb = abm = mab$ , con  $a, b \in \mathbb{A}$ ,  $m \in M$ .

Diremos que  $M$  es un *bimódulo* sobre dos anillos  $A$  y  $\mathbb{A}$  (o que es un  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo) si tiene estructura de módulo respecto de ambos y además  $(am)a' = a(ma')$ , para todo  $m \in M$ ,  $a \in A$ ,  $a' \in \mathbb{A}$ . El caso típico es el de un  $\mathbb{A}$ -módulo cualquiera  $M$ , que podemos considerar también como  $\mathbb{Z}$ -módulo de forma natural.

**Definición 5.11** Sean  $M$  y  $N$  dos  $A$ -módulos. Sea  $L$  un grupo abeliano libre con base  $M \times N$ . Llamaremos *producto tensorial* de  $M$  por  $N$  al grupo cociente de  $L$  sobre el subgrupo generado por los elementos de la forma

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n), & \quad m_1, m_2 \in M, n \in N, \\ (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2), & \quad m \in M, n_1, n_2 \in N, \\ (ma, n) - (m, an), & \quad m \in M, n \in N, a \in A. \end{aligned}$$

Lo representaremos por  $M \otimes_A N$ . Así mismo, la clase de equivalencia del par  $(m, n)$  en  $M \otimes_A N$  la representaremos por  $m \otimes n$  (el signo  $\otimes$  se lee “tensor”).

Así pues,  $M \otimes_A N$  es un grupo abeliano generado por los elementos  $m \otimes n$ , que obviamente cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \otimes n &= m_1 \otimes n + m_2 \otimes n, & m_1, m_2 \in M, n \in N, \\ m \otimes (n_1 + n_2) &= m \otimes n_1 + m \otimes n_2, & m \in M, n_1, n_2 \in N, \\ ma \otimes n &= m \otimes an, & m \in M, n \in N, a \in A. \end{aligned}$$

Es claro que el producto tensorial está unívocamente determinado salvo isomorfismo. En particular no depende de la elección del grupo libre con el que se construye. De todos modos, esto lo obtendremos explícitamente en breve. Observar que un elemento genérico de  $M \otimes_A N$  no es de la forma  $m \otimes n$ , sino una suma finita de elementos de esta forma.

Una consecuencia inmediata de las igualdades anteriores es que  $0 \otimes n = m \otimes 0 = 0$  (por ejemplo  $0 \otimes n = (0 + 0) \otimes n = 0 \otimes n + 0 \otimes n$ , luego  $0 \otimes n = 0$ ).

En las condiciones de la definición anterior, si  $G$  es un grupo abeliano, una aplicación  $f : M \times N \rightarrow G$  es *balanceada* si cumple

$$\begin{aligned} f(m_1 + m_2, n) &= f(m_1, n) + f(m_2, n), & m_1, m_2 \in M, n \in N, \\ f(m, n_1 + n_2) &= f(m, n_1) + f(m, n_2), & m \in M, n_1, n_2 \in N, \\ f(ma, n) &= f(m, an). & m \in M, n \in N, a \in A. \end{aligned}$$

Obviamente, la aplicación  $i : M \times N \rightarrow M \otimes_A N$  dada por  $i(m, n) = m \otimes n$  es balanceada. Se llama *aplicación balanceada canónica*.

El teorema siguiente caracteriza a los productos tensoriales.

**Teorema 5.12** *Consideremos dos  $A$ -módulos  $M$  y  $N$ , un grupo abeliano  $G$  y una aplicación balanceada  $f : M \times N \rightarrow G$ . Entonces existe un único homomorfismo  $g : M \otimes_A N \rightarrow G$  tal que  $g(m \otimes n) = f(m, n)$  para todo  $m \in M, n \in N$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $M \otimes_A N = L/R$  según la definición, como  $M \times N$  es una base de  $L$  tenemos que  $f$  se extiende a un homomorfismo  $f^* : L \rightarrow G$  y del hecho de que  $f$  es balanceada se sigue inmediatamente que  $R$  está contenido en el núcleo de  $f^*$  (sus generadores lo están). En consecuencia la aplicación  $g([x]) = f^*(x)$  está bien definida y es un homomorfismo de grupos. En particular  $g(m \otimes n) = f^*(m, n) = f(m, n)$ .

Como los tensores  $m \otimes n$  generan el producto  $M \otimes_A N$ , dos homomorfismos que coincidan sobre ellos son iguales, luego  $g$  es único. ■

En particular dos productos tensoriales  $(M \otimes_A N)_1$  y  $(M \otimes_A N)_2$  cumplen el teorema anterior, y las respectivas aplicaciones balanceadas canónicas se extienden a dos homomorfismos entre ellos mutuamente inversos, luego ambos grupos son isomorfos.

En la práctica usaremos la misma notación para las aplicaciones balanceadas y los homomorfismos que inducen. Este es un buen momento para notar que los productos tensoriales pueden ser más extraños de lo que podría pensarse:

**Ejemplo** Si  $A$  es un grupo abeliano finito, entonces  $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$  pues, si  $A$  tiene  $n$  elementos, para todo  $r \in \mathbb{Q}$  se cumple

$$a \otimes r = a \otimes n(r/n) = an \otimes (r/n) = 0 \otimes (r/n) = 0.$$

Veamos ahora cómo convertir en módulos a los productos tensoriales.

**Teorema 5.13** *Sea  $M$  un  $\mathbb{A}$ - $A$ -bimódulo y  $N$  un  $A$ -módulo. Entonces el producto  $M \otimes_A N$  se convierte en un  $\mathbb{A}$ -módulo mediante una operación caracterizada por la relación  $a(m \otimes n) = (am) \otimes n$ , para  $a \in \mathbb{A}, m \in M, n \in N$ .*

DEMOSTRACIÓN: Dado  $a \in \mathbb{A}$ , el teorema anterior nos da un homomorfismo  $f_a : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N$  determinado por  $f_a(m \otimes n) = (am) \otimes n$ .

Para cada  $x \in M \otimes_A N$  definimos  $ax = f_a(x)$ . Así tenemos definida una ley externa sobre  $M \otimes_A N$  que evidentemente distribuye a la suma. Esta distributividad reduce la comprobación de los axiomas restantes al caso de tensores  $m \otimes n$ , donde la comprobación es inmediata. Por ejemplo:

$$a\left(b \sum_{i=1}^r m_i \otimes n_i\right) = \sum_{i=1}^r a(b(m_i \otimes n_i)) = \sum_{i=1}^r (ab)m_i \otimes n_i = (ab) \sum_{i=1}^r m_i \otimes n_i.$$

Este mismo tipo de razonamiento justifica la unicidad de la operación externa. ■

Puesto que todo  $\mathbb{A}$ -módulo es un  $\mathbb{A}$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo, no perdemos generalidad si trabajamos sólo con bimódulos. La prueba del teorema siguiente es inmediata:

**Teorema 5.14** Sean tres anillos  $A, B, C$ , sea  $M$  un  $A$ - $B$ -bimódulo y sea  $N$  un  $B$ - $C$ -bimódulo. Entonces la aplicación  $i : M \times N \longrightarrow M \otimes_B N$  es bilineal, o sea, cumple  $i(am, nc) = ai(m, n)c$ . Además, toda aplicación bilineal y balanceada  $f : M \times N \longrightarrow R$  en un  $A$ - $C$ -bimódulo  $R$  induce un único homomorfismo de bimódulos de  $M \otimes_B N$  en  $R$  tal que  $g(m \otimes n) = f(m, n)$ .

Este teorema justifica la definición siguiente:

**Definición 5.15** Sean tres anillos  $A, B, C$ , sean  $M, M'$  dos  $A$ - $B$ -bimódulos y  $N, N'$  dos  $B$ - $C$ -bimódulos. Sea  $f : M \longrightarrow M'$  un homomorfismo de  $A$ - $B$ -bimódulos y  $g : N \longrightarrow N'$  un homomorfismo de  $B$ - $C$ -bimódulos. Llamaremos  $f \otimes g : M \otimes_B N \longrightarrow M' \otimes_B N'$  al (único) homomorfismo de  $A$ - $C$ -bimódulos determinado por  $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ .

**Ejercicio:** Probar que el producto tensorial de módulos es funtorial.

Ahora nos ocupamos de las propiedades algebraicas de los productos tensoriales. En primer lugar la asociatividad. Para abreviar no indicaremos explícitamente los anillos sobre los que están definidos los módulos cuando se pueda deducir del contexto. Así mismo sobrentenderemos que las letras  $A, B, C, D$  denotan anillos y las letras  $M, N, R$ , módulos.

**Teorema 5.16** Se cumple  $(M \otimes_B N) \otimes_C R \cong M \otimes_B (N \otimes_C R)$  (isomorfismo de  $A$ - $D$ -bimódulos). El isomorfismo hace corresponder los tensores  $(m \otimes n) \otimes r$  y  $m \otimes (n \otimes r)$ .

DEMOSTRACIÓN: Para cada  $r \in R$  sea  $f_r : M \otimes_B N \longrightarrow M \otimes_B (N \otimes_C R)$  el homomorfismo de  $A$ -módulos determinado por  $f_r(m \otimes n) = m \otimes (n \otimes r)$ . La aplicación  $(M \otimes_B N) \times R \longrightarrow M \otimes_B (N \otimes_C R)$  dada por  $(x, r) \mapsto f_r(x)$  es balanceada, luego induce un homomorfismo de grupos

$$f : (M \otimes_B N) \otimes_C R \longrightarrow M \otimes_B (N \otimes_C R)$$

que cumple  $f((m \otimes n) \otimes r) = f_r(m \otimes n) = m \otimes (n \otimes r)$ .

De igual modo se construye un homomorfismo en sentido contrario que claramente es el inverso de éste, luego  $f$  es en realidad un isomorfismo de grupos, y obviamente también de  $A$ - $D$ -bimódulos. ■

Consecuentemente podemos suprimir los paréntesis y hablar del producto tensorial  $M \otimes_B N \otimes_C R$ , generado por los tensores de la forma  $m \otimes n \otimes r$ . Más en general, el número de factores puede ser cualquiera. Los teoremas siguientes se demuestran sin dificultad de forma similar al anterior:

**Teorema 5.17** Se cumple  $A \otimes_A N \cong N$ , (isomorfismo de  $A$ - $B$ -bimódulos). El isomorfismo hace corresponder los tensores  $1 \otimes n$  y  $n$ . Así mismo  $M \otimes_B B \cong M$ .

**Teorema 5.18** Se cumple

$$\left( \bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_B N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_B N),$$



$$M \otimes_B \left( \bigoplus_{i \in I} N_i \right) \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_B N_i).$$

De aquí se sigue inmediatamente:

**Teorema 5.19** *Si  $M$  y  $N$  son  $A$ -módulos libres con bases  $B$  y  $B'$  respectivamente, entonces  $M \otimes_A N$  es libre con base  $B \otimes B' = \{b \otimes b' \mid b \in B, b' \in B'\}$ .*

**Ejercicio:** Probar que los isomorfismos de los teoremas anteriores son naturales.

Iniciamos ahora el estudio de las sucesiones exactas entre productos tensoriales, estudio que completaremos más adelante con la ayuda del producto de torsión.

**Teorema 5.20** *El producto tensorial de dos epimorfismos es un epimorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Sean  $f : M \rightarrow M'$  y  $g : N \rightarrow N'$  dos epimorfismos de módulos. Entonces la imagen de  $f \otimes g$  contiene a todos los tensores  $m' \otimes n'$ , con  $m' \in M$  y  $n' \in N'$  y, como estos tensores generan  $M' \otimes_A N'$ , concluimos que  $f \otimes g$  es suprayectiva. ■

**Ejemplo** Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

dada por  $f(n) = 2n$  y  $g(n) = n + 2\mathbb{Z}$ . Si multiplicamos sus aplicaciones por la identidad en  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  obtenemos una sucesión

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{f \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{g \otimes 1} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

que no es exacta porque  $f \otimes 1$  no es inyectiva. En efecto,

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0,$$

pero  $f \otimes 1 = 0$ , ya que  $f(n \otimes [m]) = 2n \otimes [m] = n \otimes [2m] = 0$ . ■

Pese a esto, algo más podemos decir sobre conservación de la exactitud. Para ello necesitamos el resultado siguiente:

**Teorema 5.21** *Si  $f : M \rightarrow M'$  y  $g : N \rightarrow N'$  son epimorfismos, entonces el núcleo de  $f \otimes g$  está generado por los tensores  $m \otimes n$  tales que  $m \in N(f)$  o  $n \in N(g)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $D$  el submódulo generado por los tensores indicados y sea  $p : M \otimes_A N \rightarrow (M \otimes_A N)/D$  la proyección. Podemos definir una aplicación bilineal

$$M' \times N' \rightarrow (M \otimes_A N)/D$$

mediante  $(m', n') \mapsto p(m \otimes n)$ , donde  $f(m) = m'$  y  $g(n) = n'$ . Es fácil ver que esta bien definida, y se extiende a un homomorfismo

$$\psi : M' \otimes_A N' \rightarrow (M \otimes_A N)/D.$$

Claramente,  $p = (f \otimes g) \circ \psi$ , de donde se sigue inmediatamente que el núcleo de  $f \otimes g$  está contenido en  $D$ . La otra inclusión es obvia. ■

Con esto podemos probar:

**Teorema 5.22** Si  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$  es una sucesión exacta de  $A$ -módulos y  $N$  es un  $A$ - $A$ -bimódulo, entonces

$$A \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes_A N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de bimódulos.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 5.20 tenemos que  $g \otimes 1$  es suprayectiva. Así mismo, la imagen de  $f \otimes 1$  es  $(\text{Im } f) \otimes_A N$ . Como  $\text{Im } f$  es también el núcleo de  $g$ , el teorema anterior nos da que el núcleo de  $g \otimes 1$  es precisamente este producto tensorial, luego la sucesión es exacta. ■

**Ejercicio:** Probar que la sucesión exacta del teorema anterior es funtorial.

Hemos visto un ejemplo que muestra que un resultado similar no es cierto en general para sucesiones más largas. Hay una clase importante de sucesiones exactas para las que sí es válido.

**Definición 5.23** Diremos que una sucesión exacta de bimódulos

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} R \longrightarrow 0 \quad (5.1)$$

se escinde si  $P' = \text{Im } f$  está complementado en  $Q$ , es decir, si existe un subbimódulo  $R'$  de  $Q$  tal que  $Q = P' \oplus R'$ .

Es claro que entonces  $g$  se restringe a un isomorfismo entre  $R'$  y  $R$ , con lo que tenemos que  $Q \cong P \oplus R$ . El teorema siguiente ayuda a reconocer este tipo de sucesiones.

**Teorema 5.24** Para una sucesión exacta (5.1), las condiciones siguientes son equivalentes:

- La sucesión se escinde.
- Existe un homomorfismo  $f' : Q \longrightarrow P$  tal que  $f \circ f' = 1$ .
- Existe un homomorfismo  $g' : R \longrightarrow Q$  tal que  $g' \circ g = 1$ .

DEMOSTRACIÓN: Es claro que a) implica b) y c). Supuesto b), consideremos el submódulo  $R' = \{q - f(f'(q)) \mid q \in Q\}$  y sea  $P' = f[P]$ . Es claro que  $Q = P' + R'$  y la suma es directa, pues si  $f(p) = q - f(f'(q))$ , aplicando  $f'$  queda  $p = f'(q) - f'(q) = 0$ .

Supuesto c), llamamos  $R' = g'[R]$  y, como antes,  $P' = f[P]$ . De nuevo se cumple que  $Q = P' \oplus R'$ , pues si  $q \in Q$  entonces  $q - g'(g(q)) \in N(g) = P'$ , y si  $g'(r) = f(p)$ , aplicando  $g$  queda  $r = 0$ . ■

**Teorema 5.25** Si una sucesión exacta de  $A$ -módulos (5.1) se escinde y  $N$  es un  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo, entonces

$$0 \longrightarrow P \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes 1} Q \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes 1} R \otimes_A N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de bimódulos y se escinde.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $f' : Q \longrightarrow P$  tal que  $f \circ f' = 1$ . Entonces tenemos que  $(f \otimes 1) \circ (f' \otimes 1) = 1$ , luego  $f \otimes 1$  es inyectiva. Esto, junto con el teorema 5.22 nos da que la sucesión es exacta. A su vez el teorema anterior implica que se escinde. ■

También es útil el teorema siguiente:

**Teorema 5.26** Una condición suficiente para que una sucesión exacta de  $A$ -módulos (5.1) se escinda es que  $R$  sea un  $A$ -módulo libre.

DEMOSTRACIÓN: Fijamos una base de  $R$  y para cada uno de sus elementos elegimos una antiimagen en  $Q$ . Esta elección se extiende a un homomorfismo  $g' : R \longrightarrow Q$  que claramente cumple  $g' \circ g = 1$ , luego la sucesión se escinde. ■

Veamos cómo los productos tensoriales relacionan las homologías respecto a distintos anillos de coeficientes. Para ello introducimos la noción de producto tensorial de un complejo por un módulo:

**Definición 5.27** Definimos el *producto tensorial* de un complejo  $\mathcal{C} = (\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p, \partial)$  de  $A$ -módulos por un  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo  $M$  como el complejo de  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulos

$$\mathcal{C} \otimes_A M = \left( \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p \otimes_A M, \partial \otimes 1 \right).$$

**Ejemplo** Sea  $(X, U)$  un par de espacios topológicos y  $C_p^{\mathbb{A}}(X, U)$  el módulo de las  $p$ -cadenas singulares en  $X$  módulo  $U$  con coeficientes en  $\mathbb{A}$ . Si omitimos el superíndice se entenderá que  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ . Entonces

$$C_p^{\mathbb{A}}(X, U) \cong \bigoplus_{\sigma} \mathbb{A} \sigma \cong \bigoplus_{\sigma} \langle \sigma \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A} \cong C_p(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A},$$

donde  $\sigma$  recorre los  $p$ -símplices singulares en  $X$  no contenidos en  $U$ . Esto vale igual para  $p = -1$  con la homología reducida.

Es claro que el isomorfismo hace corresponder  $a\sigma$  con  $\sigma \otimes a$ . Además, estos isomorfismos determinan un isomorfismo de complejos

$$C^{\mathbb{A}}(X, U) \cong C(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}.$$

Más en general, ahora podemos definir la homología singular de un par  $(X, U)$  de espacios topológicos con coeficientes en un  $\mathbb{A}$ -módulo  $M$  como la homología de  $C(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} M$  (que es isomorfo a  $(C(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}) \otimes_{\mathbb{A}} M$ , por

lo que no perdemos generalidad al considerar únicamente el producto tensorial respecto a  $\mathbb{Z}$ .

Representaremos por  $H_p^M(X, U)$  a los grupos de homología del complejo  $C(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} M$ . Es natural conjeturar que  $H_p^M(X, U) \cong H_p(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} M$ . Esto es cierto en muchos casos de interés, pero veremos que no en general. ■

En relación con el problema que acabamos de plantear, lo primero que podemos apuntar es lo siguiente: dado un complejo de  $A$ -módulos  $\mathcal{C}$  y un  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo  $M$ , es claro que si  $z$  es un  $p$ -ciclo de  $\mathcal{C}$  y  $m \in M$ , entonces  $z \otimes m$  es un  $p$ -ciclo en  $\mathcal{C} \otimes_A M$ , y si  $z$  es una frontera entonces  $z \otimes m$  también lo es. Esto permite definir una aplicación bilineal  $H_p(\mathcal{C}) \times M \rightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A M)$  dada por  $([z], m) \mapsto [z \otimes m]$ , que a su vez se extiende a un homomorfismo de bimódulos

$$\mu_p : H_p(\mathcal{C}) \otimes_A M \rightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A M).$$

Equivalentemente, tenemos un homomorfismo de grado 0 entre los bimódulos

$$\mu : H(\mathcal{C}) \otimes_A M \rightarrow H(\mathcal{C} \otimes_A M). \quad (5.2)$$

En general  $\mu$  no es un isomorfismo, pero interviene en una sucesión exacta que determina el segundo módulo (teorema 5.37).

**Ejercicio:** Probar que  $\mu$  es funtorial.

Veamos ahora que la homología singular con coeficientes en un  $\mathbb{A}$ -módulo  $M$  cumple las mismas propiedades que la homología con coeficientes en el anillo  $\mathbb{A}$ . De hecho, todas ellas se deducen de los resultados correspondientes a la homología con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ . En efecto:

**Homotopía** Si  $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$  es una aplicación continua entre pares de espacios topológicos, podemos definir  $f_p^\sharp : C_p(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow C_p(Y, V) \otimes_{\mathbb{Z}} M$  como  $f^\sharp \otimes 1$ , que a su vez induce homomorfismos  $f_* : H_p^M(X, U) \rightarrow H_p^M(Y, V)$ . Si  $f$  y  $g$  son homotópicas, existe una homotopía  $\Delta : C(X, U) \rightarrow C(Y, V)$  entre  $f^\sharp$  y  $g^\sharp$ , y es claro que  $\Delta \otimes 1$  es una homotopía entre  $f_M^\sharp$  y  $g_M^\sharp$ , luego  $f_* = g_*$ .

**La sucesión exacta de homología** Si  $(X, U)$  es un par de espacios topológicos, la sucesión

$$0 \rightarrow C(U) \rightarrow C(X) \rightarrow C(X, U) \rightarrow 0$$

es exacta y se escinde, porque  $C(X, U)$  es libre. Por consiguiente la sucesión

$$0 \rightarrow C(U) \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow C(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow 0$$

es exacta, y por el teorema 2.25 tenemos la sucesión exacta de homología

$$\cdots \rightarrow H_p(U) \rightarrow H_p(X) \rightarrow H_p(X, U) \rightarrow H_{p-1}(U) \rightarrow \cdots$$

Similarmente se razona con la sucesión de una terna.

**El teorema de escisión** Bajo las hipótesis del teorema de escisión, la inclusión  $i : (X \setminus V, U \setminus V) \rightarrow (X, U)$  induce el homomorfismo de complejos  $i^\# : C(X \setminus V, U \setminus V) \rightarrow C(X, U)$  que a su vez induce isomorfismos entre los grupos de homología. Por el teorema 5.10, existe un homomorfismo  $f : C(X, U) \rightarrow C(X \setminus V, U \setminus V)$  que induce el inverso de  $i_*$ . Por consiguiente,  $f \otimes 1$  induce el inverso de  $i^\# \otimes 1$ . De aquí se sigue a su vez la versión general del teorema 2.40 sobre tríadas exactas.

**Homología de un punto** Si  $P$  es el espacio de un único punto se cumple (para la homología completa) que

$$H_p(P) \cong \begin{cases} M & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

En efecto, la descripción explícita del complejo  $C(P)$  dada en la prueba del teorema 2.17 permite probar que la estructura de  $C(P) \otimes_{\mathbb{Z}} M$  es análoga, y llegar a la misma conclusión. (Alternativamente, podemos aplicar el teorema 5.37).

**La sucesión de Mayer-Vietoris** El teorema 3.2 se generaliza por el mismo argumento que hemos empleado para generalizar el teorema de escisión. La prueba del teorema en sí se generaliza por el mismo argumento que hemos empleado para generalizar la sucesión exacta de homología.

## 5.4 Productos de torsión

Los hechos que hemos probado sobre sucesiones exactas entre productos tensoriales son resultados parciales. Para precisar más la situación necesitamos introducir el concepto de producto de torsión. Comenzamos con algunos conceptos auxiliares:

**Definición 5.28** Una *resolución* de un  $A$ -módulo  $M$  es un complejo de  $A$ -módulos  $\mathcal{C} = (\bigoplus_p C_p, \partial)$  tal que  $C_p = 0$  para  $p < 0$ , junto con un homomorfismo  $\epsilon : C_0 \rightarrow M$  tal que la sucesión

$$\dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0.$$

es exacta.

Diremos que la resolución es *libre* si cada  $C_p$  es un  $A$ -módulo libre.

Cada resolución de  $M$  tiene asociado otro complejo en el que  $C_{-1} = M$  y  $\partial_0 = \epsilon$ . A éste lo llamaremos *aumento* de  $\mathcal{C}$  y lo representaremos por  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Observemos que todo homomorfismo  $\tilde{\phi} : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}'$  entre dos resoluciones aumentadas, no necesariamente del mismo módulo, determina un homomorfismo  $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  sin más que sustituir  $\tilde{\phi}_{-1}$  por el homomorfismo nulo.

Es claro que todo módulo  $M$  tiene una resolución libre. Basta expresar  $M$  como cociente de un  $A$ -módulo libre  $C_0$ , con lo que tenemos un epimorfismo  $\epsilon : C_0 \rightarrow M$ . Seguidamente, expresamos el núcleo de  $\epsilon$  como cociente de un  $A$ -módulo libre  $C_1$ , con lo que tenemos una sucesión exacta

$$C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0.$$

Este proceso se puede continuar inductivamente hasta conseguir una resolución libre.

**Teorema 5.29** *Si  $\mathcal{C}$  es una resolución libre de un  $A$ -módulo  $M$  y  $\mathcal{C}'$  es una resolución de un  $A$ -módulo  $N$ , entonces todo homomorfismo  $f : M \rightarrow N$  se extiende a un homomorfismo  $\tilde{\phi} : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}'$  y dos cualesquiera son homotópicos.*

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos la propiedad proyectiva de los módulos libres a la situación

$$\begin{array}{ccccc} & & C_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M \\ & \swarrow \phi_0 & \downarrow & \searrow f & \\ C'_0 & \xrightarrow{\epsilon'} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por hipótesis la línea inferior es exacta, luego  $\epsilon'$  es suprayectivo y  $C_0$  es libre. Así pues, existe un homomorfismo  $\phi_0$  que hace conmutativo el diagrama, es decir,  $\phi_0 \epsilon' = \epsilon f$ . Por lo tanto  $\partial_1 \phi_0 \epsilon' = \partial_1 \epsilon f = 0$  y, por la exactitud de la sucesión

$$C'_1 \xrightarrow{\partial'_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon'} N \rightarrow 0, \tag{5.3}$$

tenemos que  $\text{Im}(\partial_1 \phi_0) \subset \text{N}(\epsilon') = \text{Im} \partial'_1$ , luego podemos aplicar la propiedad proyectiva al diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 \\ & \swarrow \phi_1 & \downarrow & \searrow \phi_0 & \\ C'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & C'_0 & & \end{array}$$

lo que nos da un homomorfismo  $\phi_1$  tal que  $\phi_1 \partial'_1 = \partial_1 \phi_0$ . Repitiendo el proceso obtenemos un homomorfismo  $\tilde{\phi} : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}'$  que extiende a  $f$ .

Supongamos ahora que tenemos dos extensiones  $\tilde{\phi}, \tilde{\psi} : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}'$ . Entonces  $(\phi_0 - \psi_0) \epsilon' = \epsilon - \epsilon = 0$ , luego por la exactitud de la sucesión (5.3) tenemos que  $\text{Im}(\phi_0 - \psi_0) \subset \text{N}(\epsilon') = \text{Im} \partial'_1$ . Aplicamos la propiedad proyectiva al diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & C_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M \\ & \swarrow \Delta_1 & \downarrow \phi_0 - \psi_0 & \searrow \Delta_0 = 0 & \\ C'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & C'_0 & & \end{array}$$

y obtenemos un homomorfismo  $\Delta_1$  tal que  $\phi_0 - \psi_0 = \epsilon\Delta_0 + \Delta_1\partial'_1$  (donde, por definición,  $\Delta_0 = 0$ ).

Por lo tanto  $(\phi_1 - \psi_1 - \partial_1\Delta_1)\partial'_1 = \partial_1(\phi_0 - \psi_0) - \partial_1\Delta_1\partial'_1 = 0$ , y de aquí se concluye que  $\text{Im}(\phi_1 - \psi_1 - \partial_1\Delta_1) \subset N(\partial'_1) = \text{Im}\partial'_2$  y podemos repetir el proceso con el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} C_0 \\ & \swarrow \Delta_2 & \downarrow \phi_1 - \psi_1 \\ C'_2 & \xrightarrow{\partial'_2} & C'_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow \Delta_1 \\ \end{array}$$

Continuando de este modo obtenemos una homotopía entre los dos homomorfismos. Observemos que como  $\Delta_0 = 0$  la homotopía  $\Delta$  induce también una homotopía entre los homomorfismos que  $\phi$  y  $\psi$  inducidos entre  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$ . ■

De este modo, si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  son dos resoluciones libres de un mismo módulo  $M$ , el teorema anterior nos da dos homomorfismos  $\tilde{\phi} : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}'$ ,  $\tilde{\psi} : \tilde{\mathcal{C}}' \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$  que extienden a la identidad en  $M$ . Aplicando la parte de la unicidad a  $\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}$  y la identidad, concluimos que  $\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}$  es homotópico a la identidad, y lo mismo sucede con  $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}$ . Más aún, esto es cierto también para los homomorfismos correspondientes  $\phi$  y  $\psi$  entre  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$ .

Si  $N$  es un  $A$ - $A$ -bimódulo, tenemos homomorfismos de bimódulos  $\phi' = \phi \otimes 1$  y  $\psi' = \psi \otimes 1$  entre  $\mathcal{C} \otimes_A N$  y  $\mathcal{C}' \otimes_A N$  tales que  $\phi' \circ \psi'$  y  $\psi' \circ \phi'$  son homotópicas a la identidad (las homotopías son las inducidas por las asociadas los factores de la izquierda). Así,  $\phi'$  y  $\psi'$  inducen isomorfismos de bimódulos mutuamente inversos  $H_p(\mathcal{C} \otimes_A N) \cong H_p(\mathcal{C}' \otimes_A N)$ .

**Definición 5.30** Dado un  $A$ -módulo  $M$ , un  $A$ - $A$ -bimódulo  $N$  y  $p \geq 0$ , llamaremos  $p$ -ésimo *producto de torsión* de  $M$  y  $N$  al bimódulo  $\text{Tor}_p^A(M, N) = H_p(\mathcal{C} \otimes_A N)$ , donde  $\mathcal{C}$  es cualquier resolución libre de  $M$ .

El razonamiento precedente muestra que  $\text{Tor}_p^A(M, N)$  está determinado por  $M$  y  $N$  salvo isomorfismo. En particular no depende de la elección de la resolución libre de  $M$  que empleemos para calcularlo.

Más aún, si  $f : M \rightarrow M'$  y  $g : N \rightarrow N'$  son homomorfismos (el segundo de bimódulos), dadas dos resoluciones libres  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  de  $M$  y  $M'$  respectivamente, el teorema 5.29 nos da un homomorfismo de  $A$ -módulos  $\tilde{\phi} : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}'$  que extiende a  $f$ , de modo que  $\phi \otimes g : \mathcal{C} \otimes_A N \rightarrow \mathcal{C}' \otimes_A N$  induce homomorfismos de bimódulos

$$\text{Tor}_p(f, g) : \text{Tor}_p^A(M, N) \rightarrow \text{Tor}_p^A(M', N')$$

determinados únicamente por  $f$  y  $g$  (pues dos homomorfismos  $\phi$  cualesquiera son homotópicos, al igual que los correspondientes  $\phi \otimes g$ ). Es fácil ver que los productos de torsión son funtoriales.

Vamos a determinar quién es  $\text{Tor}_0^A(M, N)$ . Para ello partimos de la sucesión exacta

$$\text{Im}\partial_2 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0.$$

Según el teorema 5.22, también es exacta la sucesión de bimódulos

$$\operatorname{Im} \partial_2 \otimes_A N \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1} C_0 \otimes_A N \xrightarrow{\epsilon \otimes 1} M \otimes_A N \longrightarrow 0.$$

Por otra parte,  $\operatorname{Tor}_0^A(M, N)$  es el grupo de homología de dimensión 0 del complejo

$$\cdots \longrightarrow C_1 \otimes_A N \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1} C_0 \otimes_A N \longrightarrow 0,$$

es decir,

$$\operatorname{Tor}_0^A(M, N) = (C_0 \otimes_A N) / \operatorname{Im}(\partial_1 \otimes 1) = (C_0 \otimes_A N) / N(\epsilon \otimes 1) \cong M \otimes_A N.$$

Así pues, el producto de torsión de dimensión 0 no nos aporta nada nuevo.

**Nota** En el resto de la sección supondremos que el anillo  $A$  es un dominio de ideales principales. Esto sucede en particular si  $A = \mathbb{Z}$  o  $A$  es un cuerpo. (Salvo que se indique lo contrario, no suponemos nada del anillo  $\mathbb{A}$ ).

Según ya hemos comentado varias veces, bajo esta hipótesis todo submódulo de un  $A$ -módulo libre es libre. Esto hace que todo  $A$ -módulo  $M$  admita una resolución libre de la forma

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0. \quad (5.4)$$

Al calcular los productos de torsión con una resolución de este tipo llegamos a que  $\operatorname{Tor}_p^A(M, N) = 0$  para  $p < 1$ . Así, el único producto de torsión que nos queda por estudiar es el que llamaremos simplemente

$$\operatorname{Tor}_A(M, N) = \operatorname{Tor}_1^A(M, N).$$

Este bimódulo está caracterizado por la propiedad siguiente:

**Teorema 5.31** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo y  $N$  un  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo. Entonces cada resolución libre de  $M$  de la forma (5.4) da lugar a una sucesión exacta de bimódulos*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_A(M, N) \longrightarrow C_1 \otimes_A N \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1} C_0 \otimes_A N \xrightarrow{\epsilon \otimes 1} M \otimes_A N \longrightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Por definición  $\operatorname{Tor}_A(M, N)$  es el grupo de homología de dimensión 1 del complejo

$$0 \longrightarrow C_1 \otimes_A N \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1} C_0 \otimes_A N \longrightarrow 0,$$

es decir, es el núcleo de  $\partial_1 \otimes 1$ , lo que prueba la exactitud en  $C_1 \otimes_A N$  de la sucesión del enunciado (donde la aplicación que le precede es la inclusión). La exactitud del resto de la sucesión es consecuencia del teorema 5.22. ■

**Ejercicio:** Probar que la sucesión exacta del teorema anterior es funtorial.



Este teorema nos da una primera muestra del papel que desempeñan en la teoría los productos de torsión: completan las sucesiones exactas de productos tensoriales. Pronto veremos un resultado más general en esta línea, pero de momento es más conveniente probar varios resultados que nos permiten determinar explícitamente los productos de torsión en los casos más frecuentes. En primer lugar probamos que distribuyen las sumas directas:

**Teorema 5.32** *Se cumple*

$$\mathrm{Tor}_A\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) \cong \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Tor}_A(M_i, N), \quad \mathrm{Tor}_A\left(M, \bigoplus_{i \in I} N_i\right) \cong \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Tor}_A(M, N_i).$$

DEMOSTRACIÓN: Si las sucesiones

$$0 \longrightarrow C_{1i} \longrightarrow C_{0i} \longrightarrow M_i \longrightarrow 0$$

son resoluciones libres de los módulos  $M_i$ , entonces

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} C_{1i} \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} C_{0i} \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow 0$$

es una resolución libre de  $\bigoplus_{i \in I} M_i$ . Tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_A\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} C_{1i} \otimes_A N & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} C_{0i} \otimes_A N \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Tor}_A(M_i, N) & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} (C_{1i} \otimes_A N) & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} (C_{0i} \otimes_A N) \end{array}$$

donde las flechas verticales son los isomorfismos canónicos, las filas son exactas y el cuadrado conmuta (y todos los homomorfismos son de bimódulos). De aquí se sigue claramente el isomorfismo buscado. Si la suma directa está en el segundo argumento se razona análogamente. ■

El producto de torsión debe su nombre a que sólo depende de los submódulos de torsión de los factores. Esto lo probaremos más adelante, pero de momento tenemos lo siguiente:

**Teorema 5.33** *Si  $M$  o  $N$  es un  $A$ -módulo libre de torsión,  $\mathrm{Tor}_A(M, N) = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos primero en el caso en que  $M$  y  $N$  son finitamente generados, en cuyo caso, por los teoremas de estructura, ser libre de torsión equivale a ser libre. Si  $M$  es libre, entonces una resolución libre es

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

y el teorema 5.31 nos da la conclusión.

Si  $N$  es libre (como  $A$ -módulo) entonces  $N = \bigoplus_{i=1}^n N_i$ , donde  $N_i \cong A$ .

Consecuentemente,  $\mathrm{Tor}_A(M, N) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Tor}_A(M, A)$ , y basta comprobar que

$\text{Tor}_A(M, A) = 0$ . A partir de una resolución libre de  $M$  obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_A(M, A) \longrightarrow C_1 \otimes_A A \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1} C_0 \otimes_A A \xrightarrow{\epsilon \otimes 1} M \otimes_A A \longrightarrow 0,$$

pero, a través de los isomorfismos  $C_1 \otimes_A A \cong C_1$  y  $C_0 \otimes_A A \cong C_0$ , la aplicación  $\partial_1 \otimes 1$  se corresponde con  $\partial_1$ , que es inyectiva, luego el producto de torsión ha de ser nulo.

Consideremos ahora el caso general. Fijemos una resolución libre de  $M$ , digamos

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{i} C_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0,$$

donde  $C_1 \subset C_0$  e  $i$  es la inclusión. Recordemos que  $\text{Tor}_A(M, N)$  es el núcleo de  $i \otimes 1 : C_1 \otimes_A N \longrightarrow C_0 \otimes_A N$ . Sea  $x \in \text{Tor}_A(M, N)$ . Entonces

$$x = \sum_{i=1}^r c_i \otimes n_i, \quad c_i \in C_1, n_i \in N. \quad (5.5)$$

Además tenemos que esta misma expresión, interpretada como elemento de  $C_0 \otimes_A N$ , es nula. En los términos de la definición 5.11, esto significa que el elemento

$$\sum_{i=1}^r (c_i, n_i) \in L$$

se expresa como combinación lineal de un número finito de los tres tipos de generadores de allí indicados. Por consiguiente, podemos encontrar un  $A$ -submódulo finitamente generado  $C'_0$  de  $C_0$  y un  $A$ -submódulo finitamente generado  $N'$  de  $N$  de modo que la expresión (5.5) sea nula interpretada como elemento de  $C'_0 \otimes_A N'$ . Llamemos  $C'_1 = N(\epsilon|_{C'_0})$  y  $M' = \epsilon[C'_0]$ . De este modo,

$$0 \longrightarrow C'_1 \xrightarrow{i} C'_0 \xrightarrow{\epsilon} M' \longrightarrow 0$$

es una resolución libre de  $M'$  y la expresión (5.5) define un  $x' \in C'_1 \otimes_A N'$ . Ahora bien, la imagen de  $x'$  por el homomorfismo  $C'_1 \otimes_A N' \longrightarrow C'_0 \otimes_A N'$  es nula, lo que significa que  $x' \in \text{Tor}_A(M', N') = 0$ , por la parte ya probada, puesto que los módulos  $M'$  y  $N'$  son finitamente generados y uno de ellos es libre de torsión. Por consiguiente,  $x = (i \times 1)(x') = 0$ . ■

Consideremos ahora el caso en que  $M = \langle m \rangle$ , y que el orden de  $m$  es  $a \in A$ , es decir, el ideal formado por los elementos de  $A$  que anulan a  $m$  es el generado por  $a$ . Entonces una resolución libre de  $M$  es

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0,$$

donde  $f$  es la multiplicación por  $a$  y  $g(b) = bm$ , para todo  $b \in A$ . Tenemos entonces la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_A(M, N) \longrightarrow A \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes 1} A \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes 1} M \otimes_A N \longrightarrow 0.$$

A través del isomorfismo  $A \otimes_A N \cong N$ , la aplicación  $f \otimes 1$  se transforma en la multiplicación por  $a$  en  $N$ , y  $\text{Tor}_A(M, N)$  se corresponde con su núcleo, es decir,  $\text{Tor}_A(M, N) \cong \{n \in N \mid an = 0\}$ .

En particular esto vale si  $M$  es concretamente el módulo  $A/(a)$ , luego tenemos que

$$\text{Tor}_A(A/(a), N) \cong \{n \in N \mid an = 0\}.$$

■

Los teoremas de estructura afirman que si  $M$  es finitamente generado, entonces se descompone como suma directa de un número finito de submódulos monógenos. Los resultados que acabamos de probar nos permiten calcular  $\text{Tor}_A(M, N)$  siempre que  $M$  es finitamente generado. Observemos que si  $N$  es finitamente generado y  $m \in A$  es el mínimo común múltiplo de los órdenes de los elementos de torsión de  $N$  (o sea, el máximo factor invariante) entonces  $\text{Tor}_A(A/(m), N)$  es el submódulo de torsión de  $N$ . También es interesante notar cómo el producto de torsión depende del anillo respecto al que se calcula. Por ejemplo

$$\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \text{Tor}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0.$$

Volvamos ahora a la relación entre los productos de torsión y las sucesiones exactas entre productos tensoriales. El resultado principal es el siguiente:

**Teorema 5.34** *Dada una sucesión exacta de  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulos*

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} R \longrightarrow 0,$$

*y un  $A$ -módulo  $M$ , existe una sucesión exacta*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Tor}_A(M, P) \xrightarrow{\text{Tor}(1, f)} \text{Tor}_A(M, Q) \xrightarrow{\text{Tor}(1, g)} \text{Tor}_A(M, R) \\ \longrightarrow M \otimes_A P \xrightarrow{1 \otimes f} M \otimes_A Q \xrightarrow{1 \otimes g} M \otimes_A R \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea  $0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$  una resolución libre de  $M$  y sea  $\mathcal{C}$  el complejo determinado por  $C_p = 0$  si  $p \neq 0, 1$ . Puesto que  $\mathcal{C}$  es libre, los teoremas 5.25 y 5.26 nos dan una sucesión exacta de bimódulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \otimes_A P \xrightarrow{1 \otimes f} \mathcal{C} \otimes_A Q \xrightarrow{1 \otimes g} \mathcal{C} \otimes_A R \longrightarrow 0. \quad (5.6)$$

Notemos que en principio tendríamos que poner  $\mathcal{C}$  a la derecha, pero la conmutatividad del producto tensorial nos permite cambiar el orden. La definición del producto de torsión nos da que

$$H_p(\mathcal{C} \otimes P) \cong \begin{cases} M \otimes_A P & \text{si } p = 0, \\ \text{Tor}_A(M, P) & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Lo mismo vale cambiando  $P$  por  $Q$  o  $R$ . Teniendo esto en cuenta, la sucesión exacta de homología asociada a (5.6) se reduce a la del enunciado. Una simple

comprobación muestra que los homomorfismos que intervienen son los indicados. ■

Observemos que este teorema no puede considerarse estrictamente una generalización de 5.31 debido al orden de los factores. Sin embargo, a continuación probamos que éste es irrelevante:

**Teorema 5.35** *Si  $M$  y  $N$  son dos  $A$ - $A$ -bimódulos, entonces existe un isomorfismo de bimódulos*

$$\mathrm{Tor}_A(M, N) \cong \mathrm{Tor}_A(N, M).$$

*Además, el isomorfismo es natural, es decir, si  $f : M \rightarrow M'$  y  $g : N \rightarrow N'$  son homomorfismos, el diagrama siguiente es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_A(M, N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_A(N, M) \\ \mathrm{Tor}(f, g) \downarrow & & \downarrow \mathrm{Tor}(g, f) \\ \mathrm{Tor}_A(M', N') & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_A(N', M') \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos una presentación libre de  $N$

$$0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow N \rightarrow 0.$$

Puesto que  $\mathrm{Tor}_A(M, C_0) = 0$ , la sucesión del teorema anterior se reduce a

$$0 \rightarrow \mathrm{Tor}_A(M, N) \rightarrow M \otimes_A C_1 \rightarrow M \otimes_A C_0 \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow 0.$$

Por otra parte, el teorema 5.31 nos da la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathrm{Tor}_A(N, M) \rightarrow C_1 \otimes_A M \rightarrow C_0 \otimes_A M \rightarrow N \otimes_A M \rightarrow 0.$$

Ahora bien, existen isomorfismos canónicos (de bimódulos) entre los tres últimos módulos de la primera sucesión y los correspondientes de la segunda, que hacen conmutativos los dos cuadrados que determinan. De aquí se sigue fácilmente la existencia del isomorfismo buscado.

Para probar la naturalidad debemos recapitular lo que hemos obtenido: por una parte podemos sumergir  $\mathrm{Tor}_A(N, M) \rightarrow C_1 \otimes_A M$  a través de la inclusión, y el teorema anterior nos da un monomorfismo natural (concretamente es un homomorfismo de conexión)  $\mathrm{Tor}_A(M, N) \rightarrow M \otimes_A C_1$ . Lo que hemos probado es que el isomorfismo natural  $C_1 \otimes_A M \cong M \otimes_A C_1$  se restringe a un isomorfismo entre los productos de torsión.

Consideremos ahora una resolución libre de  $N'$

$$0 \rightarrow C'_1 \rightarrow C'_0 \rightarrow N' \rightarrow 0$$

así como sendas resoluciones libres de  $M$  y  $M'$  que, siguiendo la notación de la prueba del teorema anterior representaremos en forma de complejos  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$ . Por el teorema 5.29 el homomorfismo  $f$  se extiende  $\tilde{\phi} : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}'$  y dos extensiones

cualesquiera son homotópicas. Esto hará que nada de lo que sigue dependa de la elección de la extensión. Similarmente, tenemos homomorfismos que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & C'_1 & \longrightarrow & C'_0 & \longrightarrow & N' \longrightarrow 0 \end{array}$$

De aquí obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C} \otimes_A C_1 & \longrightarrow & \mathcal{C} \otimes_A C_0 & \longrightarrow & \mathcal{C} \otimes_A N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi \otimes g_1 & & \downarrow \phi \otimes g_0 & & \downarrow \phi \otimes g \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}' \otimes_A C'_1 & \longrightarrow & \mathcal{C}' \otimes_A C'_0 & \longrightarrow & \mathcal{C}' \otimes_A N' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ahora aplicamos el teorema 2.27, que nos proporciona el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Tor}_A(M, N) & \longrightarrow & M \otimes_A C_1 & & \\ & & \downarrow \text{Tor}(f, g) & & \downarrow f \otimes g_1 & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Tor}_A(M', N') & \longrightarrow & M' \otimes_A C_1 & & \end{array}$$

Sin más que aplicar las definiciones oportunas obtenemos la conmutatividad del diagrama que resulta de cambiar el orden de los factores:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Tor}_A(N, M) & \longrightarrow & C_1 \otimes_A M & & \\ & & \downarrow \text{Tor}(g, f) & & \downarrow f \otimes g_1 & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Tor}_A(N', M') & \longrightarrow & C'_1 \otimes_A M' & & \end{array}$$

y ahora la conmutatividad del diagrama del enunciado se sigue inmediatamente de la del diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A C_1 & \longrightarrow & C_1 \otimes M \\ f \otimes g_1 \downarrow & & \downarrow g_1 \otimes g \\ M' \otimes_A C'_1 & \longrightarrow & C'_1 \otimes M' \end{array}$$

■

A partir de este teorema es fácil probar una versión del teorema 5.34 con los factores en orden contrario. Otra consecuencia de 5.34 es que el producto de torsión de dos módulos depende únicamente de sus submódulos de torsión, es decir:

**Teorema 5.36** Sean  $M$  y  $N$  dos  $A$ - $A$ -bimódulos y sean  $i : M_t \rightarrow M$  y  $j : N_t \rightarrow N$  las inclusiones para los submódulos de torsión respecto de la estructura de  $A$ -módulo. Entonces  $\text{Tor}(i, j) : \text{Tor}_A(M_t, N_t) \rightarrow \text{Tor}_A(M, N)$  es un isomorfismo de bimódulos.

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos el teorema 5.34 a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N_t \longrightarrow N \longrightarrow N/N_t \longrightarrow 0.$$

Puesto que el módulo  $N/N_t$  es libre de torsión, el teorema 5.33 nos da que  $\text{Tor}_A(M, N/N_t) = 0$ , luego 5.34 implica que

$$\text{Tor}(1, j) : \text{Tor}_A(M, N_t) \longrightarrow \text{Tor}_A(M, N)$$

es un isomorfismo. Similarmente obtenemos que

$$\text{Tor}(i, 1) : \text{Tor}_A(M_t, N_t) \longrightarrow \text{Tor}_A(M, N_t)$$

es un isomorfismo, y la composición de ambos es  $\text{Tor}(i, j)$ . ■

A su vez de aquí se sigue que  $\text{Tor}_A(M, N)$  es siempre un módulo de torsión, pues es isomorfo a  $\text{Tor}_A(M_t, N_t)$  y éste a su vez es isomorfo a un submódulo de  $C_1 \otimes_A N_t$  (por el teorema 5.31), donde  $C_1$  forma parte de una resolución libre de  $M$ . Claramente  $C_1 \otimes_A N_t$  es un módulo de torsión.

Finalmente probamos el teorema fundamental que relaciona los grupos de homología con distintos coeficientes. Recordemos el homomorfismo  $\mu$  dado por (5.2).

**Teorema 5.37** *Sea  $\mathcal{C}$  un complejo libre de  $A$ -módulos y  $N$  un  $A$ - $A$ -bimódulo. Entonces existe una sucesión exacta de bimódulos*

$$0 \longrightarrow H_p(\mathcal{C}) \otimes_A N \xrightarrow{\mu} H_p(\mathcal{C} \otimes_A N) \longrightarrow \text{Tor}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N) \longrightarrow 0$$

que además se escinde.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\mathcal{Z}$  el subcomplejo de  $\mathcal{C}$  formado por los módulos de ciclos  $Z_p(\mathcal{C})$  con el operador frontera trivial. Sea  $\mathcal{F}$  el subcomplejo cuyo módulo de dimensión  $p$  es  $F_{p-1}(\mathcal{C})$ , también con el operador frontera trivial. Tanto  $\mathcal{Z}$  como  $\mathcal{F}$  son complejos libres y tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{\partial} \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Como  $\mathcal{F}$  es libre, los teoremas 5.25 y 5.26 nos dan la sucesión exacta de bimódulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z} \otimes_A N \xrightarrow{i \otimes 1} \mathcal{C} \otimes_A N \xrightarrow{\partial \otimes 1} \mathcal{F} \otimes_A N \longrightarrow 0.$$

A su vez podemos aplicar el teorema 2.25 para obtener la sucesión exacta

$$\longrightarrow H_p(\mathcal{Z} \otimes_A N) \longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A N) \longrightarrow H_p(\mathcal{F} \otimes_A N) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(\mathcal{Z} \otimes_A N) \longrightarrow$$

Puesto que  $\mathcal{Z} \otimes_A N$  y  $\mathcal{F} \otimes_A N$  tienen también operadores frontera triviales, esta sucesión es en realidad

$$\longrightarrow Z_p(\mathcal{C}) \otimes_A N \longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A N) \longrightarrow F_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N \xrightarrow{\delta_{*p}} Z_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N \longrightarrow$$

Para calcular el homomorfismo de conexión  $\delta_{*p}(\partial c \otimes n)$  tomamos una antiimagen por  $\partial \otimes 1$ , por ejemplo  $c \otimes n$ , aplicamos el operador frontera de  $\mathcal{C} \otimes_A N$ , con lo que llegamos a  $\partial c \otimes n$  y tomamos una antiimagen por  $i \otimes 1$ , con lo que llegamos de nuevo a  $\partial c \otimes n$ . En definitiva,  $\delta_{*p} = j \otimes 1$ , donde  $j : F_{p-1}(\mathcal{C}) \rightarrow Z_{p-1}(\mathcal{C})$  es la inclusión.

De las sucesión exacta anterior extraemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (Z_p(\mathcal{C}) \otimes_A N) / \text{Im } \delta_{*p+1} \longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A N) \longrightarrow N(\delta_{*p}) \longrightarrow 0.$$

Ahora observamos que

$$0 \longrightarrow F_{p-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{j} Z_{p-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow H_{p-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow 0$$

es una resolución libre de  $H_{p-1}(\mathcal{C})$ , luego tenemos la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Tor}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N) \longrightarrow F_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N \xrightarrow{\delta_{*p}} \\ Z_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N \longrightarrow H_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$(F_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N) / \text{Im } \delta_{*p} \cong H_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N, \quad N(\delta_{*p}) \cong \text{Tor}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N).$$

Combinando estos isomorfismos con la sucesión exacta que habíamos obtenido llegamos a la sucesión exacta del enunciado

$$0 \longrightarrow H_p(\mathcal{C}) \otimes_A N \xrightarrow{\mu} H_p(\mathcal{C} \otimes_A N) \longrightarrow \text{Tor}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N) \longrightarrow 0.$$

Es fácil comprobar que  $\mu$  es el homomorfismo definido en (5.2). Ahora falta comprobar que la sucesión se escinde. Para ello usamos la propiedad proyectiva de los módulos libres (ver la demostración de 5.29), que nos da un homomorfismo  $h_p$  que cierra el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & F_{p-1}(\mathcal{C}) \\ & \swarrow h_p & \downarrow 1 \\ C_p(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\partial_p} & F_{p-1}(\mathcal{C}) \end{array}$$

de modo que  $h_p \circ \partial_p = 1$ .

La aplicación  $h_p \otimes 1 : F_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N \rightarrow C_p(\mathcal{C}) \otimes_A N$  transforma elementos de  $\text{Tor}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N)$ , es decir, del núcleo de  $\delta_{*p}$ , en ciclos. Para probarlo descomponemos el operador frontera  $\partial_p : C_p(\mathcal{C}) \rightarrow C_{p-1}(\mathcal{C})$  como composición  $\partial_p \circ j \circ i$ , donde  $j : F_{p-1}(\mathcal{C}) \rightarrow Z_{p-1}(\mathcal{C})$  e  $i : Z_{p-1}(\mathcal{C}) \rightarrow C_{p-1}(\mathcal{C})$ . Así

$$(h_p \otimes 1) \circ (\partial_p \otimes 1) = (h_p \otimes 1) \circ (\partial_p \otimes 1) \circ (j \otimes 1) \circ (i \otimes 1) = \delta_{*p} \circ (i \otimes 1).$$

Por consiguiente  $h_p \otimes 1$  induce un homomorfismo

$$\phi : \text{Tor}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N) \longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A N) \quad (5.7)$$

que escinde la sucesión exacta del enunciado por el teorema 5.24. ■

En particular este teorema se puede aplicar a los complejos de cadenas singulares con coeficientes en un  $\mathbb{A}$ -módulo  $N$ , de modo que

$$H_p^N(X, U) \cong (H_p(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} N) \oplus \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{p-1}(X, U), N).$$

En particular tenemos el isomorfismo  $\mu : H_p^N(X, U) \rightarrow H_p(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} N$  siempre que  $N$  es libre de torsión como grupo abeliano. Por ejemplo, si  $N = \mathbb{A}$  es un anillo, esto sucede si tiene característica 0. Así mismo, los números de Betti (y, por consiguiente, la característica de Euler) de un espacio en el que estén definidos, son los mismos para todos los dominios de ideales principales de característica 0. En efecto, si  $H_p^{\mathbb{Z}}(X) = \mathbb{Z}^r \oplus M_t$ , donde  $M_t$  es el submódulo de torsión, entonces

$$H_p^{\mathbb{A}}(X) \cong (\mathbb{Z}^r \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}) \oplus (M_t \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}).$$

El primer sumando es isomorfo a  $\mathbb{A}^r$ , luego es libre, y el segundo es un  $\mathbb{A}$ -módulo de torsión. Por consiguiente, el rango de  $H_p^{\mathbb{A}}(X)$  como  $\mathbb{A}$ -módulo es el mismo que el de  $H_p^{\mathbb{Z}}(X)$  como  $\mathbb{Z}$ -módulo. ■

## 5.5 Cohomología

Si queremos profundizar en el estudio de los espacios topológicos mediante técnicas algebraicas necesitamos introducir una sucesión de módulos complementarios a los grupos de homología. Estos módulos intervienen en los llamados teoremas de dualidad, que contienen información valiosa sobre las variedades topológicas. En el caso de las variedades diferenciales, los módulos de cohomología tienen una interpretación natural, pues pueden identificarse con los grupos de cohomología de De Rham, es decir, con los grupos de cohomología determinados a partir del álgebra de Grassmann (el álgebra de las formas diferenciales) de la variedad.

**Complejos inversos** Para tratar con los grupos de cohomología conviene modificar formalmente el aparato algebraico básico que estamos utilizando:

**Definición 5.38** Un *complejo inverso* es un par

$$\mathcal{C} = \left( \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C^p, d \right)$$

cuya primera componente es un  $\mathbb{A}$ -módulo graduado y su segunda componente es un homomorfismo graduado de grado 1, llamado *operador cofrontera* de  $\mathcal{C}$ , o también *operador diferencial*, con la propiedad de que  $d_p \circ d_{p+1} = 0$ . Los elementos del módulo  $C^p$  se llaman *cofronteras* de dimensión  $p$ . El módulo  $Z^p$  de los *cociclos* de  $\mathcal{C}$  se define como el núcleo de  $d_p$ , mientras que el módulo de las *cofronteras* es la imagen  $F^p$  de  $d_{p-1}$ . De este modo, tenemos que  $F^p \subset Z^p$  y podemos definir el *grupo de cohomología* de dimensión  $p$  de  $\mathcal{C}$  como el módulo cociente  $H^p = Z^p / F^p$ .



Según esto, la única diferencia entre un complejo y un complejo inverso es que en los primeros el operador frontera tiene grado  $-1$ , mientras que en los segundos tiene grado  $1$ . Es claro entonces que definiendo  $C_p = C^{-p}$  y  $\partial_p = d^{-p}$  obtenemos un complejo directo a partir de un complejo inverso, y similarmente al revés. Esto hace que todos los conceptos que hemos definido y todos los teoremas que hemos demostrado para complejos directos son válidos para complejos inversos sin más que reajustar los subíndices (que, además, en el caso de los complejos inversos es costumbre escribir como superíndices).

Por ejemplo, un *homomorfismo*  $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  entre complejos inversos es un homomorfismo de grado  $0$  que conmuta con el operador cofrontera, es decir,  $\phi^p \circ d^p = d^p \circ \phi^{p+1}$ . Claramente  $\phi$  induce homomorfismos  $\bar{\phi}^p : H^p \rightarrow H'^p$  entre los grupos de cohomología. La definición de *homotopía* entre homomorfismos se adapta de forma obvia y sigue siendo cierto que homomorfismos homotópicos inducen los mismos homomorfismos entre los grupos de cohomología. También tenemos la versión correspondiente de los teoremas 2.25 y 2.27.

**Módulos de homomorfismos** Vamos a ver que a cada complejo directo podemos asociarle un complejo inverso de módulos de homomorfismos. En primer lugar definimos y estudiamos estos módulos:

**Definición 5.39** Dados dos  $A$ -módulos  $M$  y  $N$ , definimos  $\text{Hom}_A(M, N)$  como el  $A$ -módulo de todos los homomorfismos  $\omega : M \rightarrow N$ . La estructura de  $A$ -módulo es la dada por la suma y el producto definidos puntualmente.

Observemos que si  $N$  tiene estructura de  $\mathbb{A}$ - $A$ -bimódulo,  $\text{Hom}_A(M, N)$  adquiere estructura de bimódulo con el producto dado por  $(a\omega)(n) = a\omega(n)$ , para  $a \in \mathbb{A}$ ,  $\omega \in \text{Hom}_A(M, N)$ ,  $n \in N$ .

Si  $f : M \rightarrow M'$  es un homomorfismo de  $A$ -módulos, podemos definir el homomorfismo de bimódulos *traspuesto*  $f^t : \text{Hom}_A(M', N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N)$  mediante  $f^t(\omega) = f \circ \omega$ .

Es claro que  $(f \circ g)^t = g^t \circ f^t$ , así como que  $1^t = 1$ , donde  $1$  representa, respectivamente, a la identidad en un módulo  $M$  y en el módulo de homomorfismos en  $N$ .

El isomorfismo siguiente es fácil de probar:

$$\text{Hom}_A\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_A(M_i, N). \quad (5.8)$$

(Cada función se corresponde con sus restricciones a cada sumando directo).

Enunciamos sin demostración dos resultados sobre sucesiones exactas de módulos de homomorfismos, análogos a los que ya conocemos para productos tensoriales. La prueba del primero es muy simple, la del segundo es idéntica a la del teorema correspondiente 5.25.

**Teorema 5.40** Si  $P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} R \rightarrow 0$  es una sucesión exacta de  $A$ -módulos y  $N$  es un  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(R, N) \xrightarrow{g^t} \text{Hom}(Q, N) \xrightarrow{f^t} \text{Hom}(P, N)$$

es exacta.

**Teorema 5.41** Si  $0 \rightarrow P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} R \rightarrow 0$  es una sucesión exacta de  $A$ -módulos que se escinde y  $N$  es un  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(R, N) \xrightarrow{g^t} \text{Hom}(Q, N) \xrightarrow{f^t} \text{Hom}(P, N) \longrightarrow 0$$

es exacta y se escinde.

**Definición 5.42** Sea  $\mathcal{C}$  un complejo de  $A$ -módulos y sea  $N$  un  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo. Definimos el complejo inverso  $\text{Hom}(\mathcal{C}, N)$  como el complejo formado por los módulos de cocadenas  $C^p = \text{Hom}_A(C_p, N)$  con el operador cofrontera  $d_p = \partial_{p+1}^t$ .

Si  $M$  es un  $\mathbb{A}$ -módulo, definimos su *módulo dual* como  $M^* = \text{Hom}_{\mathbb{A}}(M, \mathbb{A})$ . Similarmente, a cada complejo de  $\mathbb{A}$ -módulos  $\mathcal{C}$  le podemos asociar su complejo dual  $\mathcal{C}^* = \text{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathcal{C}, \mathbb{A})$ . Éste es el caso de mayor interés.

**Cohomología singular** Si  $(X, U)$  es un par de espacios topológicos, los grupos de *cohomología singular* de  $(X, U)$  con coeficientes en un  $\mathbb{A}$ -módulo  $N$  se definen como los grupos de cohomología del complejo  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C(X, U), N)$ . Usaremos la notación  $C_N^p(X, U)$ ,  $Z_N^p(X, U)$ ,  $F_N^p(X, U)$ ,  $H_N^p(X, U)$  para los correspondientes módulos de cocadenas, cociclos, cofronteras y cohomología. La cohomología será *completa* o *reducida* según si partimos del complejo de cadenas correspondiente a la homología completa o reducida.

Podría pensarse en una definición en un contexto más general, pero si  $\mathcal{C}$  es un complejo de  $A$ -módulos,  $M$  es un  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo y  $N$  es un  $\mathbb{A}$ -módulo, es fácil comprobar el isomorfismo de  $\mathbb{A}$ -módulos

$$\text{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathcal{C} \otimes_A M, N) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}, \text{Hom}_{\mathbb{A}}(M, N)).$$

En particular

$$\text{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}, N) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}, N).$$

De aquí se sigue que cualquier complejo más general de cohomología singular se reduce a un complejo  $C_N(X, U)$  para un módulo  $N$  adecuado. De todos modos, muchas veces resulta más natural representar el módulo  $C_N^p(X, U)$  como  $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(C_p^{\mathbb{A}}(X, U), N)$  en lugar de como  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p(X, U), N)$ .

Las cocadenas relativas admiten una interpretación más simple que la definición que hemos dado. Para ello consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C_p^{\mathbb{A}}(U) \xrightarrow{i} C_p^{\mathbb{A}}(X) \xrightarrow{j} C_p^{\mathbb{A}}(X, U) \longrightarrow 0,$$

que se escinde porque  $C_p^{\mathbb{A}}(X, U)$  es un  $\mathbb{A}$ -módulo libre. Por consiguiente, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C_N^p(X, U) \xrightarrow{j^t} C_N^p(X) \xrightarrow{i^t} C_N^p(U) \longrightarrow 0.$$

Esto nos permite identificar a  $C_N^p(X, U)$  con un submódulo de  $C_N^p(X)$ . Concretamente, podemos considerar que  $C_N^p(X, U)$  es el submódulo formado por todas las cocadenas  $\omega \in C_N^p(X)$  tales que  $i^t(\omega) = 0$ , es decir, que se anulan sobre los símlices contenidos en  $U$ . Puesto que  $j^t$  conmuta con el operador cofrontera, a través de esta identificación la cofrontera de  $C_N^p(X, U)$  pasa a ser la restricción de la cofrontera de  $C_N^p(X)$ .

Los cociclos de  $Z_N^p(X)$  son claramente las cocadenas que se anulan sobre  $F_p^{\mathbb{A}}(X)$ , luego los cociclos relativos de  $Z_N^p(X, U)$  son las cocadenas que se anulan tanto sobre  $C_p^{\mathbb{A}}(U)$  como sobre  $F_p^{\mathbb{A}}(X)$ .

Si  $f : (X, U) \longrightarrow (Y, V)$  es una aplicación continua entre pares de espacios topológicos, y  $N$  es un  $\mathbb{A}$ -módulo, entonces la aplicación

$$f_{\#}^p = (f_p^{\#})^t : C_N^p(Y, V) \longrightarrow C_N^p(X, U)$$

es un homomorfismo de complejos inversos que induce a su vez homomorfismos

$$f^* : H_N^p(Y, V) \longrightarrow H_N^p(X, U).$$

**Funtores contravariantes** Para emplear el lenguaje categórico al tratar la cohomología necesitamos modificar también algunas definiciones:

**Definición 5.43** Un *funtor contravariante*  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  entre dos categorías es una aplicación que asigna a cada objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  un objeto  $F(X)$  de  $\mathcal{C}'$  y a cada  $f : X \longrightarrow Y$  un morfismo  $F(f) : F(Y) \longrightarrow F(X)$  de modo que se cumplan las propiedades siguientes:

- a)  $F(1_X) = 1_{F(X)}$ .
- b)  $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ .

Por ejemplo,  $C^p$  y  $H^p$  son funtores contravariantes sobre la categoría de los espacios topológicos (o de pares de espacios topológicos).

En realidad, un funtor contravariante puede verse como funtor covariante. Para ello definimos la *categoría opuesta* de una categoría  $\mathcal{C}$  como la categoría  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  cuyos objetos son los mismos que los de  $\mathcal{C}$  pero en la que el conjunto de los morfismos de  $X$  en  $Y$  es  $\text{hom}(Y, X)$  (y  $f \circ g$  para  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  es  $g \circ f$  para  $\mathcal{C}$ ).

Es claro que un funtor contravariante  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  es lo mismo que un funtor covariante  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}'$ . Más en general, un funtor definido sobre un producto de categorías  $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$  covariante en los  $p$  primeros argumentos y contravariante en los siguientes es un funtor (covariante) definido sobre el producto  $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_p \times \mathcal{C}_{p+1}^{\text{op}} \times \cdots \times \mathcal{C}_n^{\text{op}}$ .

Así, por ejemplo,  $\text{Hom}$  es un funtor de dos argumentos, covariante en el primero y contravariante en el segundo.

**Propiedades de la cohomología singular** Razonamientos completamente análogos a los que hemos empleado para generalizar los resultados básicos de la homología singular al caso de coeficientes arbitrarios nos permiten ahora probar estos mismos resultados para la cohomología singular. Nos limitamos a enunciarlos:

**El teorema de homotopía** Si  $f, g : (X, U) \rightarrow (Y, V)$  son aplicaciones continuas homotópicas, entonces  $f^* = g^*$ .

**La sucesión exacta de cohomología** Si  $(X, U, V)$  es una terna de espacios topológicos, entonces la sucesión exacta

$$0 \rightarrow C(X, U) \rightarrow C(X, V) \rightarrow C(U, V) \rightarrow 0$$

determina una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow H^p(X, U) \rightarrow H^p(X, V) \rightarrow H^p(U, V) \rightarrow H^{p+1}(X, U) \rightarrow \dots$$

**El teorema de escisión** Si  $U, V$  son subespacios de un espacio topológico  $X$  tales que  $\bar{V} \subset \overset{\circ}{U}$ , entonces la inclusión induce isomorfismos

$$i^* : H^p(X, U) \rightarrow H^p(X \setminus V, U \setminus V).$$

**Cohomología de un punto** Si  $P$  es el espacio de un único punto se cumple (para la cohomología completa) que

$$H^p(P) \cong \begin{cases} N & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

( $N$  es el módulo de coeficientes). La cohomología reducida es nula incluso en dimensión 0.

**La sucesión de Mayer-Vietoris** Sean  $(X, U_1, U_2)$  y  $(X, V_1, V_2)$  dos tríadas exactas tales que  $V_i \subset U_i$ . Sean

$$\phi_p : H^p(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2) \rightarrow H^p(U_1, V_1) \oplus H^p(U_2, V_2),$$

$$\psi_p : H^p(U_1, V_1) \oplus H^p(U_2, V_2) \rightarrow H^p(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2)$$

los homomorfismos dados por

$$\phi_p(\omega_1, \omega_2) = (j_1^*(\omega), j_2^*(\omega)), \quad \psi_p(\omega) = i_1^*(\omega_1) - i_2^*(\omega_2),$$

donde las aplicaciones  $i^*, j^*$  son las inducidas por las inclusiones correspondientes. Entonces existen homomorfismos

$$\Delta_p : H^p(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2) \rightarrow H^{p+1}(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2)$$

tales que la sucesión siguiente es exacta:

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H^{p-1}(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2) \xrightarrow{\Delta} H^p(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2) \\ &\xrightarrow{\phi} H^p(U_1, V_1) \oplus H^p(U_2, V_2) \xrightarrow{\psi} H^p(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2) \xrightarrow{\Delta} \dots \end{aligned}$$

Destacamos un resultado que difiere respecto a la homología:

**Teorema 5.44** Sea  $X = \bigcup_k X_k$  un espacio topológico descompuesto en una unión disjunta de subespacios tales que cada uno de ellos sea unión de componentes arcoconexas de  $X$ . Sea  $U \subset X$  y sea  $U_k = U \cap X_k$ . Sean

$$i_k : (X_k, U_k) \longrightarrow (X, U)$$

las inclusiones. Entonces

$$\prod_k i_k^* : H^p(X, U) \longrightarrow \prod_k H^p(X_k, U_k)$$

es un isomorfismo de módulos para la cohomología completa.

DEMOSTRACIÓN: En la prueba de 2.15 se ve que

$$i_p = \bigoplus_k i_k^\# : \bigoplus_k C_p(X_k, U_k) \longrightarrow C_p(X, U)$$

es un isomorfismo. Aplicando (5.8) obtenemos que

$$C^p(X, U) \cong \prod_k \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p(X_k, U_k), N).$$

Concretamente, cada  $\omega \in C^p(X, U)$  se corresponde con sus restricciones a cada módulo  $C_p(X_k, U_k)$ .

Los productos de la derecha constituyen un complejo inverso si consideramos como cofrontera el producto del operador cofrontera de cada factor. Los isomorfismos obtenidos determinan entonces un isomorfismo de complejos, de modo que

$$H^p(X, U) \cong H^p\left(\prod_k \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C(X_k, U_k), N)\right) \cong \prod_k H^p(X_k, U_k).$$

El primer isomorfismo hace corresponder a cada clase  $[\omega] \in H^p(X, U)$  la clase del producto de las restricciones de  $\omega$  a cada  $C_p(X, U)$ , mientras que el segundo lo pasa al producto de las clases de cohomología de las restricciones. Es fácil ver que se trata del isomorfismo indicado en el enunciado. ■

**Módulos de extensiones** Para relacionar la homología con la cohomología hemos de introducir un concepto análogo a los productos de torsión, es decir, unos módulos que nos completen las sucesiones exactas entre módulos de homomorfismos. El procedimiento que empleamos es el mismo:

**Definición 5.45** Dado un  $\mathbb{A}$ -módulo  $M$ , un  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo  $N$  y  $p \geq 0$ , definimos el bimódulo  $\text{Ext}_A^p(M, N) = H^p(\text{Hom}_A(\mathcal{C}, N))$ , donde  $\mathcal{C}$  es cualquier resolución libre de  $M$ .

Exactamente igual que en el caso de los productos de torsión se comprueba que el  $\mathbb{A}$ -módulo  $\text{Ext}_A^p(M, N)$  no depende de la resolución de  $M$  con que lo calculamos. Así mismo, si  $f : M \rightarrow M'$  es un homomorfismo de módulos, sabemos que se extiende a un homomorfismo  $\phi : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}'$  entre dos resoluciones cualesquiera de  $M$  y  $M'$ , el cual a su vez induce homomorfismos

$$\text{Ext}_A^p(f) : \text{Ext}_A^p(M', N) \rightarrow \text{Ext}_A^p(M, N)$$

que no dependen de las elecciones intermedias. Así mismo se comprueba que

$$\text{Ext}_A^0(M, N) \cong \text{Hom}_A(M, N).$$

**Ejercicio:** Probar que  $\text{Ext}^p$  es un funtor contravariante en la primera componente y covariante en la segunda.

A partir de aquí supondremos que el anillo  $A$  es un dominio de ideales principales, con lo que, tomando resoluciones libres de la forma (5.4) concluimos que  $\text{Ext}_A^p(M, N) = 0$  si  $p \neq 0, 1$ , y escribiremos simplemente

$$\text{Ext}_A(M, N) = \text{Ext}_A^1(M, N).$$

Explícitamente, tenemos la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(C_0, N) \xrightarrow{\partial_1^t} \text{Hom}_A(C_1, N) \rightarrow \dots$$

y

$$\text{Ext}_A(M, N) = \text{Hom}_A(C_1, N) / \text{Im } \partial_1^t.$$

El teorema siguiente se prueba igual que su análogo 5.31:

**Teorema 5.46** Sea  $M$  un  $A$ -módulo y  $N$  un  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo. Entonces cada resolución libre de  $M$  de la forma (5.4) da lugar a una sucesión exacta de bimódulos

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\epsilon^t} \text{Hom}_A(C_0, N) \xrightarrow{\partial_1^t} \text{Hom}_A(C_1, N) \rightarrow \text{Ext}_A(M, N) \rightarrow 0.$$

El módulo  $\text{Ext}_A(M, N)$  tiene este nombre porque está relacionado con las posibles extensiones de  $N$  a través de  $M$ , es decir, con los posibles módulos  $E$  que contengan un submódulo  $N' \cong N$  y de modo que  $E/N' \cong M$ . Más precisamente, una *extensión* de  $N$  a través de  $M$  es una sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Se dice que dos extensiones de  $N$  por  $M$  son *equivalentes* si existe un isomorfismo  $\phi : E \rightarrow E'$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \phi & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Puede probarse que las clases de equivalencia de extensiones están en correspondencia biunívoca con los elementos de  $\text{Ext}_A(M, N)$ , de modo que el elemento neutro se corresponde con las extensiones que se escinden. No demostraremos esto aquí porque no nos va a hacer falta y nos desviaría bastante.

Veamos algunos resultados sobre el cálculo de  $\text{Ext}_A(M, N)$ . En primer lugar tenemos:

**Teorema 5.47** *Si  $M$  es un  $A$ -módulo libre, entonces  $\text{Ext}_A(M, N) = 0$  para todo módulo  $N$ .*

DEMOSTRACIÓN: Basta considerar la resolución libre

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

■

**Teorema 5.48** *Sea  $\{M_i\}_{i \in I}$  una familia de  $A$ -módulos y  $N$  un  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo. Entonces tenemos un isomorfismo de bimódulos*

$$\text{Ext}_A\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Ext}_A(M_i, N).$$

DEMOSTRACIÓN: Si  $0 \rightarrow C'_i \rightarrow C_i \rightarrow M_i \rightarrow 0$  es una resolución libre de  $M_i$ , entonces

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} C'_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} C_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow 0$$

es una resolución libre de la suma directa. El teorema 5.46 nos da las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M_i, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(C_i, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(C'_i, N) \longrightarrow \text{Ext}_A(M_i, N) \longrightarrow 0.$$

Con éstas y con la correspondiente a la suma directa formamos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \prod_{i \in I} \text{Hom}_A(C_i, N) & \longrightarrow & \prod_{i \in I} \text{Hom}_A(C'_i, N) & \longrightarrow & \prod_{i \in I} \text{Ext}_A(M_i, N) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \text{Hom}_A\left(\bigoplus_{i \in I} C_i, N\right) & \longrightarrow & \text{Hom}_A\left(\bigoplus_{i \in I} C'_i, N\right) & \longrightarrow & \text{Ext}_A\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Las flechas verticales son los isomorfismos dados por (5.8). Es fácil ver que la fila superior sigue siendo exacta y que el cuadrado es conmutativo, con lo que los módulos de la tercera columna son cocientes de módulos isomorfos respecto a submódulos que se corresponden por el isomorfismo, luego son isomorfos. ■

Ahora, si  $a \in A$ , una resolución libre de  $A/aA$  es

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow A/aA \longrightarrow 0,$$

donde  $\alpha(b) = ab$ . Es claro que  $\text{Hom}_A(A, N) \cong N$  y que, a través de este isomorfismo ( $f \mapsto f(1)$ ), el homomorfismo  $\alpha^t$  se corresponde con  $\beta(n) = an$ . Por consiguiente, tenemos la sucesión exacta

$$N \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow \text{Ext}_A(A/aA, N) \longrightarrow 0,$$

de la que deducimos que  $\text{Ext}_A(A/aA, N) \cong N/aN \cong (A/aA) \otimes_A N$ .

Teniendo en cuenta que tanto  $\text{Ext}$  como  $\otimes_A$  conmutan con sumas directas finitas, de aquí se sigue, más en general, que si  $M$  es un  $A$ -módulo finitamente generado, entonces  $\text{Ext}_A(M, N) \cong M_t \otimes_A N$ , donde  $M_t$  es el submódulo de torsión de  $M$ .

Es fácil demostrar un resultado similar a 5.34, pero el resultado que interesa más en nuestro contexto es el de una sucesión exacta con el segundo argumento constante en lugar del primero y, dado que  $\text{Ext}$  no cumple una propiedad de conmutatividad similar a la de  $\text{Tor}$ , no podemos obtenerlo a partir de su simétrico y necesitamos un argumento distinto. La prueba del teorema siguiente se puede adaptar fácilmente al caso de  $\text{Tor}$ . De hecho se generaliza de forma natural al caso de anillos que no sean dominios de ideales principales. De todos modos, destacamos que este teorema no nos será necesario después, sino que lo incluimos únicamente por completitud.

**Teorema 5.49** *Dada una sucesión exacta de  $A$ - $A$ -bimódulos*

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} R \longrightarrow 0,$$

*y un  $A$ -módulo  $N$ , existe una sucesión exacta*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}_A(R, N) &\xrightarrow{g^t} \text{Hom}_A(Q, N) \xrightarrow{f^t} \text{Hom}_A(P, N) \\ \longrightarrow \text{Ext}_A(R, N) &\xrightarrow{\text{Ext}(g)} \text{Ext}_A(Q, N) \xrightarrow{\text{Ext}(f)} \text{Ext}_A(P, N) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

**DEMOSTRACIÓN:** En el diagrama siguiente, las dos columnas laterales son sendas resoluciones libres de  $P$  y  $R$ , mientras que la columna central es una



resolución libre de  $Q$  que definimos a partir de las otras dos.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{f} & Q & \xrightarrow{g} & R \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & \swarrow \bar{g} & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & C_0 \oplus C'_0 & \longrightarrow & C'_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_1 \oplus C'_1 & \longrightarrow & C'_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Las flechas horizontales son las naturales: inclusiones y proyecciones, por lo que todas las filas son exactas. Para definir  $\epsilon''$  fijamos un homomorfismo  $\bar{g} : C'_0 \rightarrow Q$  tal que  $\bar{g} \circ g = \epsilon'$ , que existe por la propiedad proyectiva de los módulos libres. Definimos  $\epsilon''(c, c') = f(\epsilon(c)) + \bar{g}(c')$ .

Así,  $\epsilon''$  es suprayectiva, pues si  $q \in Q$ , tenemos que  $g(q) = \epsilon'(c')$ , para cierto  $c' \in C'_0$ , luego  $g(\bar{g}(c')) = j(q)$ , de donde se sigue que  $q = i(p) + \bar{g}(c')$ , para un cierto  $p \in P$ . Éste a su vez será de la forma  $\epsilon(c)$ , para un  $c \in C$ . Claramente entonces  $q = \epsilon''(c, c')$ .

Ahora definimos  $\partial''_1(c, c') = (\partial_1 c + e(c'), \partial'_1 c')$ , para un cierto homomorfismo  $e : C'_1 \rightarrow C_0$ . Veremos que escogiéndolo adecuadamente tendremos la exactitud de la columna central. En efecto, queremos que

$$\epsilon''(\partial''_1(c, c')) = \epsilon''(\partial_1 c + e(c'), \partial'_1 c') = f(\epsilon(e(c'))) + \bar{g}(\partial'_1 c') = 0,$$

para lo cual basta con que  $f(\epsilon(e(c'))) = -\bar{g}(\partial'_1 c')$  para todo  $c' \in C'_1$ . Podemos exigir que  $e$  cumpla esto por la propiedad proyectiva de los módulos libres aplicada al diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & C'_1 & \\
 & \swarrow e & \downarrow \partial'_1 \circ \bar{g} \\
 C_0 & \xrightarrow{\epsilon \circ f} & Q
 \end{array}$$

Para ello hemos de comprobar que  $\text{Im } \partial'_1 \circ \bar{g} \subset \text{Im } \epsilon \circ f$ . En efecto, si  $x = \bar{g}(\partial'_1(c'_1))$ , entonces  $g(x) = \epsilon'(\partial'_1(c'_1)) = 0$ , luego  $x = f(p)$ , para cierto  $p \in P$ , que será a su vez de la forma  $p = \epsilon(c_0)$ , luego  $x = f(\epsilon(c_0)) \in \text{Im } \epsilon \circ f$ .

Por otra parte, si  $\epsilon''(c, c') = 0$ , entonces  $f(\epsilon(c)) + \bar{g}(c') = 0$ . Aplicando  $g$  tenemos que  $\epsilon'(c') = 0$ , luego existe un  $c'_1 \in C'_1$  tal que  $c' = \partial'_1 c'_1$ . Para que  $(c, c') \in \text{Im } \partial''_1$  sólo nos falta probar que  $c - e(c'_1) \in \text{Im } \partial_1 = \text{N } \epsilon$ . Ahora bien,

$$f(\epsilon(c - e(c'_1))) = f(\epsilon(c)) - f(\epsilon(e(c'_1))) = -\bar{g}(c') + \bar{g}(\partial'_1 c'_1) = 0$$

y, como  $f$  es inyectiva, también  $e(c - e(c'_1)) = 0$ .

La inyectividad de  $\partial_1''$  se comprueba sin dificultad, luego, efectivamente, la columna central es una resolución libre de  $Q$ . Si llamamos  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}'$  y  $\mathcal{C}''$  a las tres resoluciones, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'' \longrightarrow \mathcal{C}' \longrightarrow 0.$$

La sucesión exacta formada por los módulos de dimensión  $p$  se escinde, porque los módulos de  $\mathcal{C}'$  son libres, luego tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{C}', N) \longrightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{C}'', N) \longrightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{C}, N) \longrightarrow 0.$$

La sucesión exacta de cohomología de esta sucesión de complejos es la del enunciado. ■

Como aplicación probamos lo siguiente:

**Teorema 5.50** *Si  $\text{Ext}_A(R, P) = 0$  entonces toda sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} R \longrightarrow 0,$$

*se escinde.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $\text{Ext}_A(R, P) = 0$ , el teorema anterior nos proporciona la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(R, P) \xrightarrow{g^t} \text{Hom}_A(Q, P) \xrightarrow{f^t} \text{Hom}_A(P, P) \longrightarrow 0.$$

Por tanto  $f^t$  es suprayectiva, luego existe un homomorfismo  $f' : Q \longrightarrow P$  tal que  $f^t(f') = 1$ , es decir, tal que  $f \circ f' = 1$ . ■

Esto tiene la siguiente interpretación: si  $\text{Ext}_A(R, P) = 0$ , entonces existe una única clase de equivalencia de extensiones de  $P$  por  $R$ , concretamente la clase trivial, formada por las extensiones que se escinden.

**Ejercicio:** Probar que  $\text{Ext}(R, P) = 0$  para todo módulo  $P$  si y sólo si  $R$  es libre.

**Homología y cohomología** Finalmente expresamos la cohomología de un espacio topológico en términos de su homología. En un contexto más general, consideremos un complejo  $\mathcal{C}$  de  $A$ -módulos y un  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo  $N$ . Llamaremos  $C_p$  al  $A$ -módulo de las  $p$ -cadenas de  $\mathcal{C}$  y  $C^p = \text{Hom}_A(C_p, N)$  al bimódulo de las  $p$ -cocadenas del complejo inverso  $\text{Hom}_A(\mathcal{C}, N)$ . Podemos definir la aplicación bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C_p \times C^p \longrightarrow N$$

mediante

$$\langle c, \omega \rangle = \omega(c), \quad c \in C_p, \quad \omega \in C^p.$$

En estos términos, el operador cofrontera viene caracterizado por la relación

$$\langle c, d\omega \rangle = \langle \partial c, \omega \rangle, \quad c \in C_p, \quad \omega \in C^{p-1}.$$

Esto a su vez nos permite definir otra aplicación bilineal, llamada *producto de Kronecker*,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_p(\mathcal{C}) \times H_N^p(\mathcal{C}) \longrightarrow N$$

mediante

$$\langle [z], [\omega] \rangle = \langle z, \omega \rangle, \quad z \in Z_p, \quad \omega \in Z_N^p.$$

Equivalentemente, tenemos un homomorfismo (de bimódulos)

$$h : H_N^p(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Hom}_A(H_p(\mathcal{C}), N)$$

dado por  $h(x)(y) = \langle y, x \rangle$ . En muchos casos  $h$  es un isomorfismo, pero la situación general es la que describe el teorema siguiente.

**Teorema 5.51** *Sea  $\mathcal{C}$  un complejo libre de  $A$ -módulos y  $N$  un  $A$ - $\mathbb{A}$ -bimódulo. Existe una sucesión*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N) \longrightarrow H_N^p(\mathcal{C}) \xrightarrow{h} \text{Hom}_A(H_p(\mathcal{C}), N) \longrightarrow 0$$

que es exacta y se escinde.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{\partial} \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

donde el módulo de  $p$ -cadenas de  $\mathcal{Z}$  es  $Z_p(\mathcal{C})$ , con operador frontera trivial, y el módulo de las  $p$ -cadenas de  $\mathcal{F}$  es  $F_{p-1}(\mathcal{C})$ , también con operador frontera trivial. El homomorfismo  $i$  es la inclusión.

Esta sucesión se escinde porque  $\mathcal{F}$  es libre. Por lo tanto la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{F}, N) \xrightarrow{\partial^t} \text{Hom}_A(\mathcal{C}, N) \xrightarrow{i^t} \text{Hom}_A(\mathcal{Z}, N) \longrightarrow 0 \quad (5.9)$$

también es exacta y se escinde. Consideremos su sucesión de cohomología:

$$\longrightarrow H_N^{p-1}(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\delta_{p-1}^*} H_N^p(\mathcal{F}) \xrightarrow{\partial^{t*}} H_N^p(\mathcal{C}) \xrightarrow{i^{t*}} H_N^p(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\delta_p^*} H_N^{p+1}(\mathcal{F}) \longrightarrow$$

Teniendo en cuenta que las cofronteras de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{Z}$  son triviales, esta sucesión es simplemente

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \text{Hom}_A(Z_{p+1}, N) \xrightarrow{\delta_{p-1}^*} \text{Hom}_A(F_{p-1}, N) \xrightarrow{\partial^{t*}} H_N^p(\mathcal{C}) \\ &\xrightarrow{i^{t*}} \text{Hom}_A(Z_p, N) \xrightarrow{\delta_p^*} \text{Hom}_A(F_p, N) \longrightarrow \end{aligned}$$

de donde extraemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(F_{p-1}, N) / \text{Im } \delta_{p-1}^* \xrightarrow{\overline{\partial^{t*}}} H_N^p(\mathcal{C}) \xrightarrow{\overline{i^{t*}}} N(\delta_p^*) \longrightarrow 0. \quad (5.10)$$

Vamos a calcular los homomorfismos de conexión  $\delta^*$ . Tomamos una clase  $[\omega] \in H_N^{p-1}(\mathcal{Z})$ , de aquí pasamos a  $\eta \in \text{Hom}_A(C_{p-1}, N)$  tal que  $i^t(\eta) = \omega$ , es

decir,  $\eta|_{Z_{p-1}} = \omega$ . Ahora tomamos  $\omega' \in \text{Hom}_A(F_p, N)$  tal que  $\partial^t \omega' = d\eta$ , es decir, tal que  $\omega'(\partial c) = \eta(\partial c)$ . En definitiva,  $\omega' = \eta|_{F_p} = \omega|_{F_p}$ . De este modo,  $\delta_{p-1}^*([\omega]) = \omega|_{F_p} = j^*([\omega])$ , donde  $j : F_{p-1} \rightarrow Z_{p-1}$ .

Por otra parte, una resolución libre de  $H_{p-1}(\mathbb{C})$  es

$$0 \rightarrow F_{p-1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{j} Z_{p-1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} H_{p-1}(\mathbb{C}) \rightarrow 0.$$

De ella obtenemos la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}_A(H_{p-1}(\mathbb{C}), N) \xrightarrow{\pi^t} \text{Hom}_A(Z_{p-1}(\mathbb{C}), N) \\ &\xrightarrow{i^t} \text{Hom}_A(F_{p-1}(\mathbb{C}), N) \rightarrow \text{Ext}_A(H_{p-1}(\mathbb{C}), N) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos los isomorfismos

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(F_{p-1}, N) / \text{Im } \delta_{p-1}^* &\cong \text{Ext}_A(H_{p-1}(\mathbb{C}), N), \\ \text{N}(\delta_{p-1}^*) &\cong \text{Hom}_A(H_{p-1}(\mathbb{C}), N). \end{aligned}$$

Al sustituirlos en (5.10) obtenemos la sucesión del enunciado. Veamos que  $h$  es el homomorfismo descrito previamente al teorema. Según nuestra construcción es  $h = i^{t*} \circ (\pi^t)^{-1}$ , luego  $h \circ \pi^t = i^{t*}$ . Si hacemos actuar esta igualdad sobre un  $[\omega] \in H_N^p(\mathbb{C})$  y luego sobre  $z \in Z_p(\mathbb{C})$  obtenemos  $h([\omega])([z]) = \omega(z)$ , como queríamos probar.

Falta demostrar que la sucesión se escinde. El hecho de que (5.9) se escinda significa que existe  $r : \text{Hom}_A(Z, N) \rightarrow \text{Hom}_A(\mathbb{C}, N)$  tal que  $r \circ i^t = 1$ , luego  $r^* \circ i^{t*} = 1$ . La restricción de  $r^*$  a  $\text{N}(\delta_p^*)$  justifica que (5.10) se escinde y, por consiguiente, la sucesión del enunciado también. ■

Si particularizamos a la cohomología singular de un par de espacios, tenemos el teorema siguiente:

**Teorema 5.52** *Sea  $(X, U)$  un par de espacios topológicos y  $\mathbb{A}$  un dominio de ideales principales tal que  $H_p^{\mathbb{A}}(X, U)$  es finitamente generado para todo  $p$ . Entonces el rango de  $H_{\mathbb{A}}^p(X, U)$  coincide con el de  $H_p^{\mathbb{A}}(X, U)$  y el submódulo de torsión de  $H_{\mathbb{A}}^p(X, U)$  es isomorfo al de  $H_{p-1}^{\mathbb{A}}(X, U)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $H_p^{\mathbb{A}}(X, U) = L_p \oplus T_p$ , donde  $L_p$  es libre y  $T_p$  es el submódulo de torsión. Entonces

$$\text{Hom}_{\mathbb{A}}(H_p^{\mathbb{A}}(X, U), \mathbb{A}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{A}}(L_p, \mathbb{A}) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{A}}(T_p, \mathbb{A}) \cong L_p,$$

$$\text{Ext}_{\mathbb{A}}(H_{p-1}^{\mathbb{A}}, \mathbb{A}) \cong T_{p-1} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A} \cong T_{p-1},$$

y el teorema anterior nos da la conclusión. ■

Es fácil ver que si algún  $H_p^{\mathbb{A}}(X, U)$  tiene rango infinito, lo mismo ocurre con el correspondiente grupo de cohomología, por lo que los números de Betti están definidos para la homología de un par si y sólo si lo están para su cohomología, y en tal caso son iguales. Lo mismo vale, por tanto, para la característica de Euler.

# Capítulo VI

## Productos

En este capítulo relacionaremos la homología singular de un producto de espacios topológicos con la de sus factores. Los resultados que obtendremos nos permitirán a su vez definir un producto en el módulo de cohomología singular de un espacio topológico, con el que adquirirá estructura de álgebra. Todos estos resultados serán potentes herramientas para obtener hechos relevantes sobre la homología de las variedades topológicas.

### 6.1 El teorema de los modelos acíclicos

Muchos de los resultados de este capítulo descansan sobre un teorema general sobre categorías. Este resultado pone de manifiesto la utilidad del lenguaje categórico en la topología algebraica.

Comentábamos en el capítulo anterior que, en general, los homomorfismos que se definen de forma “canónica”, es decir, sin apoyarse en elecciones arbitrarias, son naturales, en el sentido que acabamos de explicar. Por ejemplo, la sucesión exacta del teorema 5.37 es funtorial (es decir, es un funtor del producto de la categoría de complejos libres de  $A$ -módulos por la categoría de los  $A$ - $A$ -bimódulos en la categoría de las sucesiones exactas cortas de bimódulos), pero, en cambio, el homomorfismo que la escinde no es natural, es decir, no hay una transformación natural (o, al menos, no está probado que la haya) que a cada objeto  $(\mathcal{C}, N)$  le asigne un homomorfismo (5.7) que escinda la sucesión del teorema. Más informalmente, no podemos hablar de “el” homomorfismo (canónico) que escinde la sucesión, sino de que hay “un” homomorfismo que la escinde. El problema está en que el homomorfismo  $\phi$  que construimos se obtiene aplicando la propiedad proyectiva de los módulos libres, lo cual supone definir un homomorfismo de módulos a partir de una elección arbitraria (no canónica) de las imágenes de una base.

Pese a esto, lo cierto es que en algunos casos hemos construido homomorfismos naturales mediante procesos que involucraban elecciones arbitrarias. Por ejemplo, los teoremas 2.32 y 2.33 prueban que el operador de subdivisión es

una transformación natural del funtor  $C$  que a cada espacio topológico le asigna su complejo de cadenas singulares —lo cual no es extraño, pues la definición es canónica—, pero en la prueba del teorema 2.34 definimos una homotopía  $H$  de la que probamos que es una transformación natural de  $C$  en  $C$ , y en la construcción sí se hacen elecciones arbitrarias. El argumento empleado en dicha prueba es un caso particular del teorema que nos proponemos demostrar aquí.

**Definición 6.1** Una *categoría con modelos* es una categoría  $\mathcal{C}$  junto con un conjunto  $\mathcal{M}$  de objetos de  $\mathcal{C}$  llamados *modelos*. Sea  $G$  un funtor en  $\mathcal{C}$  con imágenes en la categoría de los grupos abelianos. Una *base* es un conjunto  $\{g_i\}_{i \in I}$  tal que  $g_i \in G(M_i)$ , para cierto  $M_i \in \mathcal{M}$  de modo que para todo objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  el conjunto  $\{G(f)(g_i)\}_{i \in I, f \in \text{hom}(M_i, X)}$  es una base de  $G(X)$ .

Diremos que  $G$  es un *funtor libre con modelos en  $\mathcal{M}$*  si tiene una base con modelos en  $\mathcal{M}$ . Si  $C$  es un funtor con imágenes en la categoría de los complejos de  $A$ -módulos, diremos que es *libre con modelos en  $\mathcal{M}$*  si cada funtor  $C_p$  es libre con modelos en  $\mathcal{M}$ .

**Ejemplo** Consideremos la categoría  $\mathcal{C}$  de los espacios topológicos, con modelos  $\mathcal{M} = \{\Delta_p\}_{p \geq 0}$  (los  $p$ -símplices canónicos). Sea  $C$  el funtor que a cada espacio topológico le hace corresponder su complejo de cadenas singulares. Entonces  $C$  es libre con modelos en  $\mathcal{M}$ .

En efecto, si  $\sigma_p : \Delta_p \rightarrow \Delta_p$  es la identidad, entonces  $\sigma_p$  es una base de  $C_p$ , pues si  $f \in \text{hom}(\Delta_p, X)$ , entonces  $C_p(f)(\sigma_p) = f^\#(\sigma_p)$  es un  $p$ -símplice singular arbitrario en  $X$ , luego al variar  $f$  obtenemos una base de  $C_p(X)$ . ■

Diremos que un complejo  $\mathcal{C}$  de  $A$ -módulos es *no negativo* si sus módulos de dimensiones negativas son nulos. Diremos que es *acíclico* si sus grupos de homología son triviales.

Si  $C$  es un funtor en una categoría  $\mathcal{C}$  con modelos  $\mathcal{M}$  y con imágenes en la categoría de los complejos de  $A$ -módulos, podemos asociarle los funtores  $H_p(C)$  definidos de forma obvia. Diremos que  $C$  es *acíclico en dimensiones positivas* si  $H_p(C(M)) = 0$  para  $p > 0$  y  $M \in \mathcal{M}$ .

**Teorema 6.2 (Teorema de los modelos acíclicos)** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con modelos  $\mathcal{M}$ . Sean  $C$  y  $C'$  dos funtores de  $\mathcal{C}$  en la categoría de los complejos de  $A$ -módulos tales que  $C$  es libre no negativo y  $C'$  es acíclico en dimensiones positivas. Entonces*

- a) *Toda transformación natural  $\alpha : H_0(C) \rightarrow H_0(C')$  está inducida por una transformación natural  $\phi : C \rightarrow C'$ .*
- b) *Si dos transformaciones naturales  $\phi, \phi' : C \rightarrow C'$  inducen la misma transformación natural  $H_0(C) \rightarrow H_0(C')$  entonces son naturalmente homotópicas, es decir, existe una transformación natural  $\Delta : C \rightarrow C'$  tal que  $\Delta(X)$  es una homotopía entre  $\phi(X)$  y  $\phi'(X)$  para todo objeto  $X$ .*

DEMOSTRACIÓN: Probaremos las dos partes simultáneamente [las frases entre corchetes harán referencia a la parte b]. Para cada objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  hemos de definir un homomorfismo de complejos  $\phi(X) : C(X) \rightarrow C'(X)$  [o una homotopía  $\Delta(X) : C(X) \rightarrow C'(X)$ ] de modo que si  $h : X \rightarrow Y$  es un morfismo, entonces

$$C(h) \circ \phi(Y) = \phi(X) \circ C'(h), \quad [C(h) \circ \Delta(Y) = \Delta(X) \circ C'(h)].$$

Para cada  $p \geq 0$  fijamos una base  $\{c_j\}_{j \in J_p}$  de  $C_p$ , de modo que  $c_j \in C_p(M_j)$ , para cierto  $M_j \in \mathcal{M}$ . Esto significa que cada  $A$ -módulo  $C_p(X)$  tiene por base al conjunto  $\{C_p(f)(c_j)\}_{j \in J_p}$ ,  $f \in \text{hom}(M_j, X)$ .

Por consiguiente, el homomorfismo  $\phi_p(X)$  que queremos definir quedará completamente determinado si especificamos  $\{\phi_p(M_j)(c_j)\}_{j \in J_p}$  a través de la ecuación

$$\phi_p(X) \left( \sum_{i,j} a_{ij} C_p(f_{ij})(c_j) \right) = \sum_{i,j} a_{ij} C'_p(f_{ij})(\phi_p(M_j)(c_j)) \quad (6.1)$$

[respectivamente,  $\{\Delta_p(M_j)(c_j)\}_{j \in J_p}$  y la ecuación siguiente:]

$$\Delta_p(X) \left( \sum_{i,j} a_{ij} C_p(f_{ij})(c_j) \right) = \sum_{i,j} a_{ij} C'_{p+1}(f_{ij})(\Delta_p(M_j)(c_j)). \quad (6.2)$$

Definiremos  $\phi_p(X)$  por inducción sobre  $p$  de modo que se cumpla

$$\phi_p(X) \circ \partial = \partial \circ \phi_{p-1}(X), \quad (6.3)$$

[respectivamente,  $\Delta_p(X)$  tal que:]

$$\Delta_p(X) \circ \partial = \phi'_p(X) - \partial \circ \Delta_{p-1}(X). \quad (6.4)$$

Antes de proceder con la definición escribiremos unas ecuaciones que vamos a usar. En primer lugar, supuesto definido  $\phi_i$  para  $i < p$ , con  $p > 0$ , bastará definir  $\phi_p(M_j)(c_j)$ , para  $j \in J_p$ , de modo que

$$\partial \phi_p(M_j)(c_j) = \phi_{p-1}(M_j)(\partial c_j), \quad (6.5)$$

[respectivamente, dado  $\Delta_i$ , para  $i < p$ ,  $p > 0$ , tendremos que definir  $\Delta_p(M_j)(c_j)$  de modo que se cumpla la ecuación siguiente:]

$$\partial \Delta_p(M_j)(c_j) = \phi'_p(M_j)(c_j) - \Delta_{p-1}(M_j)(\partial c_j). \quad (6.6)$$

Si justificamos que esto es posible, entonces  $\phi_p(X)$  [o  $\Delta_p(X)$ ] queda determinado por la ecuación (6.1) [resp. (6.2)] para un objeto  $X$  arbitrario. En principio con esto tenemos dos definiciones de  $\phi_p(M_j)$ , pero haciendo actuar (6.1) sobre  $c_j = C_p(1)(c_j)$  obtenemos que coinciden. [Lo mismo vale para  $\Delta$ ]. A continuación es fácil ver que  $\phi_p(X)$  [resp.  $\Delta_p(X)$ ] cumple (6.3) [resp. (6.4)] así como la condición de transformación natural.

Para iniciar la inducción, consideramos  $\alpha : H_0(C) \rightarrow H_0(C')$  y, para cada  $j \in J_0$ , definimos  $\phi_0(M_j)(c_j) \in C_0(M_j)$  de modo que  $[\phi_0(M_j)(c_j)] = \alpha(M_j)([c_j])$ . Definimos  $\phi_p(X)$  mediante (6.1). Es fácil ver que si  $c \in C_0(X)$ , entonces  $[\phi_0(X)(c)] = \alpha(X)([c])$ , es decir,  $\phi$  induce  $\alpha$ .

En particular, si  $j \in J_1$ , entonces  $\phi_0(M_j)(\partial c_j)$  es una frontera en  $C'_0(M_j)$  y podemos definir  $\phi_1(M_j)(c_j) \in C'_1(M_j)$  tal que  $\partial\phi_1(M_j)(c_j) = \phi_0(M_j)(\partial c_j)$ . La ecuación (6.1) nos define  $\phi_1(X)$  para todo  $X$  y se cumple (6.3).

Supongamos ahora que  $\phi_i$  está definido para  $i < p$ ,  $p > 0$  de modo que se cumple (6.3). Entonces el miembro derecho de (6.5) es un ciclo de  $C'_{p-1}(M_j)$  y por hipótesis  $H_p(C'_{p-1}(M_j)) = 0$ , luego ha de ser una frontera. Por consiguiente podemos definir  $\phi_p(M_j)(c_j)$  de modo que se cumpla (6.5). Ahora podemos definir  $\phi_p(X)$  mediante (6.1). Esto completa la definición inductiva de  $\phi$ .

La construcción de  $\Delta$  es similar. Si  $\phi$  y  $\phi'$  inducen la misma transformación natural  $H_0(C) \rightarrow H_0(C')$ , entonces, para  $j \in J_0$ ,  $\phi_0(M_j)(c_j) - \phi'_0(M_j)(c_j)$  ha de ser una frontera, luego podemos definir  $\Delta_0(M_j)(c_j) \in C'_1(M_j)$  de modo que  $\partial\Delta_0(M_j)(c_j) = \phi_0(M_j)(c_j) - \phi'_0(M_j)(c_j)$ . Definimos  $\Delta_0(X)$  mediante (6.2). La prueba continúa de forma totalmente análoga al caso anterior. ■

El lector reconocerá sin dificultad el argumento del teorema 2.34 en la prueba del apartado b). En efecto, dicho teorema es consecuencia del teorema de los modelos acíclicos. Basta tomar como  $\mathcal{C}$  la categoría de los espacios topológicos y como  $C$  y  $C'$  el mismo funtor, que a cada espacio le asigna su complejo de cadenas singulares. Según hemos visto,  $C$  es libre con los símlices canónicos como modelos, es no negativo y acíclico en dimensiones positivas, pues cada  $\Delta_n$  es homotópico a un punto, luego  $H_p(C(\Delta_n)) = 0$  para  $p > 0$ . Para obtener la tesis de 2.34 basta comprobar que el operador de subdivisión  $S$  y la identidad 1 inducen la misma transformación natural sobre  $H_0(C)$ , es decir, que si  $x$  es un punto de un espacio topológico  $X$ , entonces  $[S(x)] = [x]$ , pero esto es trivialmente cierto, pues  $S(x) = x$ . ■

En las secciones siguientes veremos las aplicaciones de este teorema.

## 6.2 La homología de un producto

Nos ocupamos ahora de calcular los grupos de homología de un producto de espacios topológicos. La prueba se divide en dos partes. Por un lado, probaremos que los grupos de homología de un producto  $X \times Y$  coinciden con los grupos de homología del complejo  $C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$ , para una cierta definición de producto tensorial de complejos que veremos a continuación, y por otra parte demostraremos un resultado que nos determinará la homología de un producto tensorial de complejos a partir de la homología de cada factor. Por razones técnicas hemos de empezar por esta segunda parte. Ante todo definimos el producto tensorial de dos complejos.

Observemos que si  $C$  y  $C'$  son dos  $\mathbb{A}$ -módulos graduados, entonces

$$C \otimes_{\mathbb{A}} C' = \bigoplus_{i,j} C_i \otimes_{\mathbb{A}} C'_j.$$



Para dotar a este producto de estructura de módulo graduado convendremos que la dimensión de un producto tensorial de cadenas  $c \otimes c'$  es la suma de las dimensiones de los factores. Equivalentemente, definimos

$$(C \otimes_{\mathbb{A}} C')_p = \bigoplus_{i+j=p} C_i \otimes_{\mathbb{A}} C'_j.$$

De este modo,

$$C \otimes_{\mathbb{A}} C' = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} (C \otimes_{\mathbb{A}} C')_p$$

es un complejo graduado. En lo sucesivo supondremos siempre esta graduación en los productos tensoriales de módulos graduados.

**Teorema 6.3** *Si  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  son complejos de  $\mathbb{A}$ -módulos, entonces  $\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}'$  adquiere estructura de complejo con el operador frontera dado por*

$$\partial_p(c \otimes c') = \partial_i c \otimes c' + (-1)^i c \otimes \partial_j c', \quad c \in C_i, \quad c' \in C_j.$$

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, es fácil ver que  $\partial_p$  es un homomorfismo bien definido sobre cada producto  $C_i \otimes_{\mathbb{A}} C_j$  con  $i + j = p$ , luego se extiende de forma única a un homomorfismo en cada módulo  $(C \otimes_{\mathbb{A}} C')_p$  y, por consiguiente a un homomorfismo graduado en  $C \otimes_{\mathbb{A}} C'$ . Claramente tiene grado  $-1$ . Falta probar que  $\partial^2 = 0$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned} \partial_p(\partial_{p+1}(c \otimes c')) &= \partial_p(\partial_i c \otimes c' + (-1)^i c \otimes \partial_j c') \\ &= (-1)^{i-1} \partial_i c \otimes \partial_j c' + (-1)^i \partial_i c \otimes \partial_j c' = 0. \end{aligned}$$

■

En lo sucesivo consideraremos a los productos tensoriales de complejos con la estructura de complejo dada por el teorema anterior. La prueba muestra la necesidad del signo  $(-1)^i$  en la definición de la frontera del producto.

Es fácil ver que dos homomorfismos de complejos  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_1, g : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}'_1$  inducen un homomorfismo de complejos  $f \otimes g : \mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}_1 \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}'_1$  de forma natural, de modo que el producto tensorial de complejos es funtorial.

También hemos de observar que si  $\mathcal{C}'$  es el complejo dado por

$$C'_p = \begin{cases} M & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0, \end{cases}$$

donde  $M$  es un cierto  $\mathbb{A}$ -módulo y el operador frontera es trivial, entonces se cumple que  $\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}' = \mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} M$ , donde el producto de la derecha es el que considerábamos en el capítulo anterior. De este modo, los resultados sobre productos tensoriales de complejos generalizan a los resultados sobre producto de un complejo por un módulo.

Similarmente podemos definir un funtor de torsión  $\text{Tor}_{\mathbb{A}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  sobre la categoría de pares de complejos de  $\mathbb{A}$ -módulos que satisface propiedades análogas a las que acabamos de comentar para el producto tensorial. Concretamente,

$$\text{Tor}_{\mathbb{A}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')_p = \bigoplus_{i+j=p} \text{Tor}_{\mathbb{A}}(C_i, C'_j),$$

$$\partial|_{\text{Tor}_{\mathbb{A}}(C_i, C'_j)} = \text{Tor}(\partial_i, 1) + (-1)^i \text{Tor}(1, \partial_j).$$

Vamos a generalizar el teorema 5.37 a productos tensoriales de complejos. En primer lugar observamos que podemos definir un homomorfismo

$$\mu : H(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{C}') \longrightarrow H(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')$$

mediante  $\mu([c] \otimes [c']) = [c \otimes c']$ .

En efecto, la aplicación  $([c], [c']) \mapsto [c \otimes c']$  está bien definida porque si  $c$  es un ciclo y  $c' = \partial c''$  es una frontera, entonces  $c \otimes c' = c \otimes \partial c'' = \partial(c \otimes c'')$ , y similarmente al revés. Es claro que es bilineal, luego induce el homomorfismo  $\mu$  indicado.

**Teorema 6.4 (Teorema de Künneth)** *Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  dos complejos de  $\mathbb{A}$ -módulos y supongamos que  $\mathcal{C}'$  es libre. Entonces existe una sucesión exacta funtorial*

$$0 \longrightarrow (H(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} H(\mathcal{C}'))_p \xrightarrow{\mu} H_p(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}') \longrightarrow \text{Tor}_{\mathbb{A}}(H(\mathcal{C}), H(\mathcal{C}'))_{p-1} \longrightarrow 0.$$

Si  $\mathcal{C}$  también es libre, entonces la sucesión se escinde.

DEMOSTRACIÓN: Basta seguir punto por punto el argumento de 5.37. Consideramos el complejo  $\mathcal{Z}'$  formado por los módulos de ciclos  $Z_p(\mathcal{C}')$  con el operador frontera trivial y sea  $\mathcal{F}'$  el complejo cuyo módulo de dimensión  $p$  es  $F_{p-1}(\mathcal{C}')$ , también con el operador frontera trivial. Tanto  $\mathcal{Z}'$  como  $\mathcal{F}'$  son complejos libres y tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}' \xrightarrow{i} \mathcal{C}' \xrightarrow{\partial} \mathcal{F}' \longrightarrow 0. \quad (6.7)$$

Como  $\mathcal{F}'$  es libre, el teorema 5.26 nos da que la sucesión se escinde (más concretamente, que se escinde la sucesión de restricciones a cada dimensión). Usando repetidas veces el teorema 5.25 junto con el hecho obvio de que la suma directa de sucesiones exactas es una sucesión exacta, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{Z}' \xrightarrow{1 \otimes i} \mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}' \xrightarrow{1 \otimes \partial} \mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{F}' \longrightarrow 0. \quad (6.8)$$

Consideramos ahora su sucesión exacta de homología

$$\longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{Z}') \longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}') \longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{F}') \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{Z}') \longrightarrow$$

Observemos que  $\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{Z}' = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ , donde  $\mathcal{D}^j$  es el complejo dado por

$$D_p^j = C_{p-j} \otimes_{\mathbb{A}} Z_p(\mathcal{C}'),$$

con el operador frontera dado por  $\partial_p(c \otimes z) = \partial_{p-j}c \otimes z$ . Por consiguiente

$$H_p(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{Z}') \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} H_p(\mathcal{D}^j) \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} H_{p-j}(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} Z_p(\mathcal{C}') = \bigoplus_{i+j=p} H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} Z_j(\mathcal{C}'),$$

donde hemos usado el teorema 5.37, que nos da el isomorfismo

$$H_p(\mathcal{D}^j) \cong H_{p-j}(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} Z_p(\mathcal{C}'), \quad (6.9)$$

puesto que  $Z_p(\mathcal{C}')$  es libre y, por consiguiente, el producto de torsión que aparece en el teorema es nulo.

Similarmente,  $\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{F}' = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}^j$ , donde  $\mathcal{E}^j$  es el complejo dado por

$$E_p^j = C_{p-j} \otimes_{\mathbb{A}} F_{p-1}(\mathcal{C}'),$$

con lo que

$$H_p(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{F}') \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} H_p(\mathcal{E}^j) \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} H_{p-j}(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} F_{p-1}(\mathcal{C}') = \bigoplus_{i+j=p-1} H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} F_j(\mathcal{C}'),$$

A través de estos isomorfismos, la sucesión exacta que hemos obtenido se convierte en

$$\begin{aligned} \longrightarrow \bigoplus_{i+j=p} H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} Z_j(\mathcal{C}') &\longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}') \longrightarrow \bigoplus_{i+j=p-1} H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} F_j(\mathcal{C}') \\ &\xrightarrow{\delta_{*p}} \bigoplus_{i+j=p-1} H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} Z_j(\mathcal{C}'), \longrightarrow \end{aligned}$$

Vamos a calcular  $\delta_{*p}$ . Partimos de  $[z] \otimes \partial_{j+1}c' \in H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} F_j(\mathcal{C}')$ . A través de (6.9) se corresponde con  $[z \otimes \partial_{j+1}c'] \in H_{p-1}(\mathcal{D}^j)$  (donde  $p-1 = i+j$ ). Ahora aplicamos el homomorfismo de conexión de la sucesión (6.8), para lo cual tomamos una antiimagen de  $z \otimes \partial c'$  por  $1 \otimes \partial$ , por ejemplo  $z \otimes c'$ . Calculamos su frontera en  $\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}'$ , que es  $(-1)^i z \otimes \partial c'$  y tomamos su clase  $(-1)^i [z \otimes \partial c']$  en  $H_{p-1}(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{Z}')$ . Esta clase se corresponde con  $(-1)^i [z] \otimes \partial c' \in H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} Z_j(\mathcal{C}')$ . En definitiva,  $\delta_{*p} = \bigoplus_{i+j=p-1} (-1)^i \otimes \gamma_j$ , donde  $\gamma_j : F_j(\mathcal{C}') \longrightarrow Z_j(\mathcal{C}')$  es la inclusión.

De este modo, tenemos la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=p} H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} Z_j(\mathcal{C}') / \text{Im}((-1)^i \otimes \gamma_j) &\longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}') \\ &\longrightarrow \bigoplus_{i+j=p-1} N((-1)^i \otimes \gamma_j) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Ahora aplicamos el teorema 5.34 a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F_j(\mathcal{C}') \xrightarrow{(-1)^i \gamma_j} Z_j(\mathcal{C}') \longrightarrow H_j(\mathcal{C}') \longrightarrow 0,$$

lo que nos da la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_{\mathbb{A}}(H_i(\mathcal{C}), H_j(\mathcal{C}')) \longrightarrow H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} F_j(\mathcal{C}') \xrightarrow{(-1)^i \otimes \gamma_j}$$

$$H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} Z_j(\mathcal{C}') \longrightarrow H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} H_j(\mathcal{C}) \longrightarrow 0.$$

De aquí se sigue que

$$H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} Z_j(\mathcal{C}') / \text{Im}((-1)^i \otimes \gamma_j) \cong H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} H_j(\mathcal{C}),$$

$$\text{N}((-1)^i \otimes \gamma_j) \cong \text{Tor}_{\mathbb{A}}(H_i(\mathcal{C}), H_j(\mathcal{C}')).$$

A través de estos isomorfismos, la sucesión (6.10) se convierte en la del enunciado. Sólo falta comprobar que el homomorfismo  $\mu$  es el descrito en el párrafo previo al teorema. En efecto, un  $[z] \otimes [z'] \in H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} H_j(\mathcal{C}')$  se corresponde con  $[[z] \otimes z'] \in H_i(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} Z_j(\mathcal{C}') / \text{Im}((-1)^i \otimes \gamma_j)$ , que a su vez se corresponde con  $[[z \otimes z']] \in H_p(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}') / \text{Im} \delta_{*p}$  y su imagen en  $H_p(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}')$  es  $[z \otimes z']$ . Es fácil ver que la sucesión es funtorial.

Supongamos ahora que  $\mathcal{C}$  es libre y veamos que la sucesión se escinde. Como  $F(\mathcal{C})$  y  $F(\mathcal{C}')$  son libres, el teorema 5.26 nos da que la sucesión (6.7) se escinde, al igual que su análoga sin primas. Por el teorema 5.24 existen homomorfismos  $p : \mathcal{C} \longrightarrow Z(\mathcal{C})$  y  $p' : \mathcal{C}' \longrightarrow Z(\mathcal{C}')$  tales que  $p(c) = c$  para  $c \in Z(\mathcal{C})$  y  $p(c') = c'$  para  $c' \in Z(\mathcal{C}')$ . Entonces la composición

$$Z(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}') \longrightarrow \mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}' \xrightarrow{p \otimes p'} Z(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} Z(\mathcal{C}') \longrightarrow H(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} H(\mathcal{C}')$$

transforma  $F(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}')$  en 0, luego induce un homomorfismo

$$f : H(\mathcal{C} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{C}') \longrightarrow H(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{A}} H(\mathcal{C}')$$

tal que  $\mu \circ f = 1$ , luego la sucesión se escinde.  $\blacksquare$

Ahora pasamos a la segunda parte del argumento, que nos relaciona los productos de espacios topológicos con los productos tensoriales de complejos:

**Teorema 6.5 (Teorema de Eilenberg-Zilber)** *Los funtores de cadenas singulares  $C(X \times Y)$  y  $C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$  son naturalmente homotópicos*

Esto quiere decir que existen cuatro transformaciones naturales

$$\phi(X, Y) : C(X \times Y) \longrightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y),$$

$$\psi(X, Y) : C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \longrightarrow C(X \times Y),$$

$$\Delta_1(X, Y) : C(X \times Y) \longrightarrow C(X \times Y),$$

$$\Delta_2(X, Y) : C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \longrightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y),$$

de modo que  $\phi$  y  $\psi$  son homomorfismos de complejos,  $\Delta_1$  es una homotopía entre  $\phi \circ \psi$  y la identidad y  $\Delta_2$  es una homotopía entre  $\psi \circ \phi$  y la identidad. En particular,  $\phi$  y  $\psi$  inducen isomorfismos mutuamente inversos entre los grupos de homología singular  $H_p(X \times Y) \cong H_p(C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y))$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Vamos a aplicar el teorema de los modelos acíclicos. Para ello probaremos que ambos funtores son libres con modelos  $\mathcal{M} = \{(\Delta_i, \Delta_j)\}_{i,j \geq 0}$ ,

donde, recordemos,  $\Delta_p$  es el  $p$ -símplice canónico. Concretamente, una base de  $C_p(C \times Y)$  es la aplicación diagonal  $d : \Delta_p \longrightarrow \Delta_p \times \Delta_p$ . Para comprobarlo basta ver que, cuando  $(f, g)$  recorre  $\text{hom}((\Delta_p, \Delta_p), (X, Y))$ , entonces  $C_p(f, g)(d)$  recorre los  $p$ -símplices singulares en  $X \times Y$ . Ciertamente,  $C_p(f, g)(d) = d \circ (f \times g)$  es un  $p$ -símplice singular. Recíprocamente, si  $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X \times Y$  es un  $p$ -símplice singular arbitrario, basta componerlo con las proyecciones para formar  $f = \sigma \circ \pi_X$ ,  $g = \sigma \circ \pi_Y$  y es claro que  $\sigma = C_p(f, g)(d)$ .

Por consiguiente,  $C(X \times Y)$  es libre con modelos  $\{(\Delta_p, \Delta_p)\}_{p \geq 0}$ , luego también con modelos  $\mathcal{M}$ .

Hemos visto que la identidad  $\sigma_i : \Delta_i \longrightarrow \Delta_i$  es una base del funtor  $C_i$ . Más concretamente, si  $f : \Delta_i \longrightarrow X$  es un  $i$ -símplice, entonces  $C_i(f)(\sigma_i) = f$ .

Así pues, para todo espacio  $X$ , una base de  $C_i(X)$  está formada por los  $i$ -símplices singulares  $C_i(f)(\sigma_i)$ , donde  $f \in \text{hom}(\Delta_i, X)$ . Similarmente, una base de  $C_j(Y)$  la forman los  $j$ -símplices singulares  $C_j(g)(\sigma_j)$ , con  $g \in \text{hom}(\Delta_j, Y)$ .

Por el teorema 5.19, tenemos que una base de  $C_i(X) \otimes_{\mathbb{A}} C_j(Y)$  la forman los productos tensoriales  $f \otimes g = C_i(f)(\sigma_i) \otimes C_j(g)(\sigma_j)$  y una base del módulo  $(C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y))_p$  la forman los productos

$$(C(f) \otimes C(g))_p(\sigma_i \otimes \sigma_j), \quad i + j = p,$$

donde  $(f, g) \in \text{hom}((\Delta_i, \Delta_j), (X, Y))$ . Por consiguiente, una base del funtor  $C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$  lo forman los productos  $\sigma_i \otimes \sigma_j \in C(\Delta_i) \otimes_{\mathbb{A}} C(\Delta_j)$ .

Por otra parte,  $C(\Delta_i \times \Delta_j)$  es obviamente libre y es acíclico en dimensiones positivas, porque  $\Delta_i \times \Delta_j$  es contractible. Por el teorema 5.19 tenemos también que  $C(\Delta_i) \otimes_{\mathbb{A}} C(\Delta_j)$  es libre y por el teorema de Künneth tenemos que

$$H(C(\Delta_i) \otimes_{\mathbb{A}} C(\Delta_j)) \cong H(\Delta_i) \otimes_{\mathbb{A}} H(\Delta_j),$$

claramente acíclico en dimensiones positivas. También por el teorema de Künneth, tenemos el isomorfismo natural  $H_0(C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)) \cong H_0(X) \otimes_{\mathbb{A}} H_0(Y)$ . Así mismo tenemos el isomorfismo natural

$$H_0(X) \otimes_{\mathbb{A}} H_0(Y) \longrightarrow H_0(X \times Y)$$

dado por  $[p] \otimes [q] \mapsto [p, q]$ . Al componerlos obtenemos un isomorfismo natural

$$\alpha : H_0(C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)) \longrightarrow H_0(X \times Y).$$

El teorema de los modelos acíclicos nos da entonces que existen los morfismos naturales de complejos  $\phi, \psi$  que buscamos. La composición  $\phi \circ \psi$  induce en  $H_0$  el isomorfismo natural  $\alpha \circ \alpha^{-1} = 1$ , es decir, el mismo que la identidad, luego, de nuevo por el teorema de los modelos acíclicos, concluimos que  $\phi \circ \psi$  es naturalmente homotópico a la identidad, y lo mismo sucede con la composición en sentido contrario. ■

Combinando los dos teoremas anteriores tenemos lo siguiente:

**Teorema 6.6** *Si  $X$  e  $Y$  son dos espacios topológicos, entonces*

$$H_p(X \times Y) \cong \bigoplus_{i+j=p} H_i(X) \otimes_{\mathbb{A}} H_j(Y) \oplus \bigoplus_{i+j=p-1} \text{Tor}_{\mathbb{A}}(H_i(X), H_j(Y)).$$

### 6.3 El producto exterior

Los resultados de la sección anterior nos permiten dotar a los grupos de cohomología de una estructura de álgebra que desempeña un papel importante en la teoría. Algunos resultados pueden establecerse en un contexto ligeramente más general que el que después nos hará falta. Concretamente, trabajaremos con un producto de espacios  $X \times Y$ , aunque después nos restringiremos al caso en que  $X = Y$ .

Según el teorema de Eilenberg-Zilber existe un homomorfismo de complejos

$$\phi : C(X \times Y) \longrightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$$

que induce isomorfismos entre los grupos de homología y que en  $H_0$  induce el isomorfismo natural  $[(x, y)] \mapsto [x] \otimes [y]$ . Sabemos que dos homomorfismos cualesquiera en estas condiciones son homotópicos. Esto hará que las construcciones siguientes no dependan de la elección de  $\phi$ .

Sean  $N_1$  y  $N_2$  dos  $\mathbb{A}$ -módulos y  $\omega \in C_{N_1}^i(X)$ ,  $\eta \in C_{N_2}^j(X)$  dos cocadenas. Sea  $p = i + j$ . Llamamos  $\omega \times \eta$  a la cocadena de dimensión  $p$  dada por la composición

$$C_p(X \times Y) \xrightarrow{\phi} C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \xrightarrow{\omega \otimes \eta} N_1 \otimes_{\mathbb{A}} N_2$$

Hemos de entender que  $\omega \otimes \eta$  se define como el homomorfismo nulo sobre todos los sumandos directos de  $C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$  distintos de  $C_i(X) \otimes_{\mathbb{A}} C_j(Y)$ . De este modo,  $\omega \times \eta \in C_{N_1 \otimes_{\mathbb{A}} N_2}^p(X \otimes_{\mathbb{A}} Y)$ .

**Teorema 6.7** *En las condiciones anteriores*

$$d(\omega \times \eta) = d\omega \times \eta + (-1)^i \omega \times d\eta.$$

DEMOSTRACIÓN: Como  $\phi$  es un homomorfismo de complejos, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_{p+1}(X \times Y) & \xrightarrow{\phi} & C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ C_p(X \times Y) & \xrightarrow{\phi} & C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \xrightarrow{\omega \otimes \eta} N_1 \otimes_{\mathbb{A}} N_2 \end{array}$$

Por consiguiente,

$$d(\omega \times \eta) = \partial \circ \phi \circ (\omega \otimes \eta) = \phi \circ \partial \circ (\omega \otimes \eta),$$

$$d\omega \times \eta = \phi \circ (d\omega \otimes \eta), \quad \omega \times d\eta = \phi \circ (\omega \otimes d\eta).$$

De aquí que basta comprobar la relación

$$\partial \circ (\omega \otimes \eta) = d\omega \otimes \eta + (-1)^i \omega \otimes d\eta.$$

Tomemos un elemento  $u \otimes v \in C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$ . Estamos adoptando el convenio de que los productos tensoriales de homomorfismos se anulan donde no están definidos los factores. Por lo tanto, los tres homomorfismos de la igualdad anterior se anulan sobre  $u \otimes v$  salvo si  $u \in C_{i+1}(X)$ ,  $v \in C_j(X)$  o bien  $u \in C_i(X)$ ,  $v \in C_{j+1}(X)$ . En el primer caso,

$$\begin{aligned} (\omega \otimes \eta)(\partial(u \otimes v)) &= (\omega \otimes \eta)(\partial u \otimes v + (-1)^i u \otimes \partial v) \\ &= \omega(\partial u) \otimes \eta(v) + 0 = (d\omega \otimes \eta)(u \otimes v) + 0 \\ &= (d\omega \otimes \eta)(u \otimes v) + (-1)^i (\omega \otimes d\eta)(u \otimes v). \end{aligned}$$

El segundo caso es análogo. ■

Es obvio que  $\omega \times \eta$  es nulo si un factor lo es. El teorema anterior implica entonces las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \text{cociclo} \times \text{cociclo} &= \text{cociclo} \\ \text{cociclo} \times \text{cofrontera} &= \text{cofrontera} \\ \text{cofrontera} \times \text{cociclo} &= \text{cofrontera} \end{aligned}$$

De aquí se sigue a su vez que el producto  $\times$  induce un producto

$$H_{N_1}^i(X) \times H_{N_2}^j(Y) \longrightarrow H_{N_1 \otimes N_2}^{i+j}(X \otimes_{\mathbb{A}} Y)$$

mediante  $[\omega] \times [\eta] = [\omega \times \eta]$ . Claramente es bilineal, y se extiende a un homomorfismo

$$H_{N_1}^i(X) \otimes_{\mathbb{A}} H_{N_2}^j(Y) \longrightarrow H_{N_1 \otimes N_2}^{i+j}(X \otimes_{\mathbb{A}} Y) \quad (6.11)$$

dado por  $[\omega] \otimes [\eta] \mapsto [\omega \times \eta]$ . Es fácil comprobar que es natural.

Veamos que no depende de la elección de  $\phi$ . En efecto, sabemos que si  $\psi : C(X \times Y) \longrightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$  está en las mismas condiciones, entonces existe una homotopía  $\Delta : C(X \times Y) \longrightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$  tal que

$$\phi - \psi = \partial \circ \Delta + \Delta \circ \partial.$$

Por consiguiente, si  $\omega \in Z^i(X)$ ,  $\eta \in Z^j(Y)$ ,  $p = i + j$ , se cumple

$$\begin{aligned} \omega \times_{\phi} \eta - \omega \times_{\psi} \eta &= \partial_p \circ \Delta_{p-1} \circ (\omega \otimes \eta) + \Delta_p \circ \partial_{p+1} \circ (\omega \otimes \eta) \\ &= d(\Delta_{p-1} \circ (\omega \otimes \eta)), \end{aligned}$$

pues es claro que el producto de cociclos  $\omega \otimes \eta$  se anula en las fronteras. Así pues,  $[\omega \times_{\phi} \eta] = [\omega \times_{\psi} \eta]$ . ■

**Teorema 6.8** Sean  $X, Y, Z$  espacios topológicos y  $\omega \in Z_{N_1}^i(X)$ ,  $\eta \in Z_{N_2}^j(Y)$ ,  $\theta \in Z_{N_3}^k(Z)$ . Entonces

$$([\omega] \times [\eta]) \times [\theta] = [\omega] \times ([\eta] \times [\theta]).$$

DEMOSTRACIÓN: Fijemos una transformación natural  $\phi$  entre los funtores  $C(X \times Y)$  y  $C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$  en las condiciones del teorema de Eilenberg-Zilber. Es fácil ver entonces que  $\phi(X \times Y, Z) \circ (\phi(X, Y) \otimes 1)$  y  $\phi(X, Y \times Z) \circ (1 \otimes \phi(Y, Z))$  son transformaciones naturales entre los funtores

$$C(X \times Y \times Z) \quad \text{y} \quad C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \otimes_{\mathbb{A}} C(Z).$$

Exactamente igual que en la prueba del teorema de Eilenberg-Zilber, se comprueba que a estos funtores les podemos aplicar el teorema de los modelos acíclicos. Como ambas transformaciones naturales inducen la misma transformación sobre  $H_0$ , concluimos que son naturalmente homotópicas, es decir, existe una homotopía  $\Delta : C(X \times Y \times Z) \rightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \otimes_{\mathbb{A}} C(Z)$  tal que

$$\phi(X \times Y, Z) \circ (\phi(X, Y) \otimes 1) - \phi(X, Y \times Z) \circ (1 \otimes \phi(Y, Z)) = \partial \circ \Delta + \Delta \circ \partial.$$

Componiendo con  $\omega \otimes \eta \otimes \theta$  obtenemos

$$(\omega \times \eta) \times \theta - \omega \times (\eta \times \theta) = d(\Delta_{p-1} \circ (\omega \otimes \eta \otimes \theta)),$$

donde  $p = i + j + k$  y donde usamos que, al ser ciclos  $\omega$ ,  $\eta$  y  $\theta$ , el producto  $\omega \otimes \eta \otimes \theta$  se anula sobre las fronteras. Tomando clases obtenemos la igualdad del enunciado. ■

Nos restringimos ahora al caso en que  $N_1 = N_2 = \mathbb{A}$ . Entonces, el isomorfismo natural  $\alpha : \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  (dado por  $\alpha(a \otimes b) = ab$ ) induce un isomorfismo natural entre grupos de cohomología con coeficientes en  $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A}$  y los grupos de cohomología con coeficientes en  $\mathbb{A}$ , por lo que podemos transformar el homomorfismo (6.11) en un homomorfismo

$$H_{\mathbb{A}}^i(X) \otimes_{\mathbb{A}} H_{\mathbb{A}}^j(Y) \rightarrow H_{\mathbb{A}}^{i+j}(X \otimes_{\mathbb{A}} Y), \quad (6.12)$$

también natural. Cuando escribamos  $[\omega] \times [\eta]$  entenderemos que se trata de la imagen de  $[\omega] \otimes [\eta]$  por este homomorfismo y no por (6.11). Es fácil ver que el teorema anterior sigue siendo válido. Además ahora tenemos una propiedad de anticonmutatividad:

**Teorema 6.9** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y  $T : X \times Y \rightarrow Y \times X$  la aplicación dada por  $T(x, y) = (y, x)$ . Entonces la aplicación

$$T^* : H^{i+j}(X \times Y) \rightarrow H^{i+j}(Y \times X)$$

cumple  $T^*([\omega] \times [\eta]) = (-1)^{ij}[\eta] \times [\omega]$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $T' : C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \rightarrow C(Y) \otimes_{\mathbb{A}} C(X)$  el homomorfismo dado por  $T'(u \otimes v) = (-1)^{ij}v \otimes u$ , donde  $u \in C_i(X)$ ,  $v \in C_j(Y)$ . Veamos que efectivamente se trata de un homomorfismo de complejos (conviene observar que no lo sería si hubiéramos omitido el signo). En efecto,

$$\begin{aligned} T'(\partial(u \otimes v)) &= T'(\partial u \otimes v + (-1)^i u \otimes \partial v) \\ &= (-1)^{(i-1)j} v \otimes \partial u + (-1)^{i+(j-1)} \partial v \otimes u, \\ \partial T'(u \otimes v) &= (-1)^{ij} \partial(v \otimes u) = (-1)^{ij}(\partial v \otimes u + (-1)^j v \otimes \partial u). \end{aligned}$$



Es claro que ambas expresiones coinciden. Si llamamos  $\phi$  a la transformación natural que define el producto  $\times$ , es claro que tanto  $\phi(X, Y) \circ T'(X, Y)$  como  $T^\sharp(X, Y) \circ \phi(Y, X)$  son transformaciones naturales del funtor  $C(X \times Y)$  en el funtor  $C(Y) \otimes_{\mathbb{A}} C(X)$  y ambas inducen la misma transformación natural en  $H_0$ . Es claro que podemos aplicar el teorema de los modelos acíclicos para concluir que ambas son homotópicas. Si  $\Delta$  es una homotopía tenemos que

$$T^\sharp \circ \phi(Y, X) - \phi(X, Y) \circ T' = \partial \circ \Delta + \Delta \circ \partial. \quad (6.13)$$

Componemos con  $(\eta \otimes \omega) \circ \alpha$  y obtenemos

$$T_\sharp(\eta \times \omega) - (-1)^{ij}(\omega \times \eta) = d(\Delta \circ (\eta \otimes \omega) \circ \alpha).$$

Al tomar clases obtenemos la igualdad del enunciado.  $\blacksquare$

Finalmente nos restringimos al caso en que  $Y = X$ , con lo que podemos considerar la aplicación diagonal  $\delta : X \longrightarrow X \times X$  dada por  $\delta(x) = (x, x)$ . Al componer el homomorfismo (6.12) con el homomorfismo inducido

$$\delta^* : H^{i+j}(X \times X) \longrightarrow H^{i+j}(X)$$

obtenemos un homomorfismo natural

$$\cup : H^i(X) \otimes_{\mathbb{A}} H^j(X) \longrightarrow H^{i+j}(X). \quad (6.14)$$

Representaremos por  $[\omega] \cup [\eta]$  a la imagen de  $[\omega] \otimes [\eta]$  por este homomorfismo. El teorema 6.8 implica que  $\cup$  es un producto asociativo en el  $\mathbb{A}$ -módulo graduado  $H^*(X)$  formado por los grupos de cohomología de  $X$ , y recibe el nombre de *producto exterior* de cohomología. Con el producto exterior, el  $\mathbb{A}$ -módulo  $H^*(X)$  adquiere estructura de álgebra sobre  $\mathbb{A}$ . Más concretamente, es lo que se llama un *álgebra graduada*, es decir un álgebra con estructura de  $\mathbb{A}$ -módulo graduado y con la propiedad de que la dimensión de un producto es la suma de las dimensiones.

**Teorema 6.10** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $[\omega], [\eta] \in H^*(X)$  dos clases de cohomología de dimensiones  $i$  y  $j$  respectivamente. Entonces*

$$[\omega] \cup [\eta] = (-1)^{ij}[\eta] \cup [\omega].$$

DEMOSTRACIÓN: Con la notación del teorema 6.9, tenemos obviamente el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta} & X \times X \\ \downarrow 1 & & \downarrow T \\ X & \xrightarrow{\delta} & X \times X \end{array}$$

el cual induce a su vez el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^{i+j}(X \times X) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{i+j}(X) \\ T^* \downarrow & & \downarrow 1 \\ H^{i+j}(X \times X) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{i+j}(X) \end{array}$$

Partiendo de  $[\omega] \times [\eta]$  y aplicando 6.9 obtenemos la igualdad del enunciado. ■

La naturalidad del homomorfismo (6.14) se traduce en que si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua, el homomorfismo inducido  $f^* : H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$  es, de hecho, un homomorfismo de álgebras.

Si recapitulamos la construcción del producto exterior de cohomología, observamos que  $[\omega] \cup [\eta]$  se define como la clase del cociclo  $\delta_* \circ \phi(X, X) \circ (\omega \otimes \eta) \circ \alpha$ . Si llamamos  $\tau(X) = \delta_*(X) \circ \phi(X, X)$ , es claro que  $\tau$  satisface la definición siguiente:

**Definición 6.11** Una *aproximación diagonal* es una transformación natural  $\tau$  entre los funtores  $C(X)$  y  $C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(X)$  con la propiedad de que  $\tau(x) = x \otimes x$ , para todo espacio  $X$  y todo  $x \in C_0(X)$ .

Es claro que podemos aplicar el teorema de los modelos acíclicos a los funtores indicados, por lo que dos aproximaciones naturales cualesquiera son naturalmente homotópicas. De aquí se sigue, por el mismo razonamiento que ya hemos empleado en varias ocasiones, que si  $\tau$  es una aproximación diagonal y  $\omega$  y  $\eta$  son dos cociclos singulares en un espacio  $X$ , entonces  $[\omega] \cup [\eta]$  es la clase de cohomología de  $\tau \circ (\omega \otimes \eta) \circ \alpha$ . Conviene definir  $\omega \cup \eta = \tau \circ (\omega \otimes \eta) \circ \alpha$  para cocadenas cualesquiera  $\omega$  y  $\eta$ , aunque hemos de tener presente que este producto depende de la elección de  $\tau$ . Del teorema 6.7 se sigue la relación

$$d(\omega \cup \eta) = d\omega \cup \eta + (-1)^i \omega \cup d\eta, \quad \omega \in C^i(X), \quad \eta \in C^j(X).$$

Vamos a definir una aproximación diagonal especialmente simple:

**Definición 6.12** Definimos la *aproximación diagonal de Alexander-Whitney* como la dada por

$$\tau_X(\sigma) = \sum_{i+j=p} i\sigma \otimes \sigma_j,$$

donde  $\sigma$  es un  $p$ -símplice singular en el espacio  $X$  y, para cada índice  $i$ ,

$$i\sigma = \sigma^\#(x_0, \dots, x_i), \quad \sigma_i = \sigma^\#(x_{p-i}, \dots, x_p),$$

donde  $x_0, \dots, x_p$  son los vértices del  $p$ -símplice canónico  $\Delta_p$ .

Veamos que  $\tau_X : C(X) \rightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(X)$  es un homomorfismo de complejos. Una vez probado esto, es inmediato comprobar que  $\tau$  es realmente una aproximación diagonal. Calculamos

$$\begin{aligned} \tau(\partial\sigma) &= \tau\left(\sum_{r=0}^p (-1)^r \sigma^\#(x_0, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_p)\right) \\ &= \sum_{r=0}^p (-1)^r \sum_{i+j=p-1} i\sigma^\#(x_0, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_p) \otimes \sigma^\#(x_0, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_p)_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^p (-1)^r \sum_{i=r}^p \sigma^\sharp(x_0, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_{i+1}) \otimes \sigma^\sharp(x_{i+1}, \dots, x_p) \\
&\quad + \sum_{r=0}^p (-1)^r \sum_{i=0}^{r-1} \sigma^\sharp(x_0, \dots, x_i) \otimes \sigma^\sharp(x_i, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_p).
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\partial(\tau(\sigma)) &= \partial\left(\sum_{i=0}^p \sigma^\sharp(x_0, \dots, x_i) \otimes \sigma^\sharp(x_i, \dots, x_p)\right) \\
&= \sum_{i=0}^p (\sigma^\sharp \partial(x_0, \dots, x_i) \otimes \sigma^\sharp(x_i, \dots, x_p) + (-1)^i \sigma^\sharp(x_0, \dots, x_i) \otimes \sigma^\sharp \partial(x_i, \dots, x_p)) \\
&= \sum_{i=1}^p \sum_{r=0}^i (-1)^r \sigma^\sharp(x_0, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_i) \otimes \sigma^\sharp(x_i, \dots, x_p) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{r=i}^p (-1)^r \sigma^\sharp(x_0, \dots, x_i) \otimes \sigma^\sharp(x_i, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_p).
\end{aligned}$$

Los términos con  $i = r$  del primer sumando se cancelan con los del segundo, y es fácil ver que los restantes coinciden con los de la expresión que hemos obtenido para  $\tau(\partial\sigma)$ . ■

En términos de la aproximación de Alexander-Whitney, el producto  $\omega \cup \eta$  de dos cocadenas de dimensiones  $i$  y  $j$  actúa sobre un  $i + j$ -símplice  $\sigma$  como

$$(\omega \cup \eta)(\sigma) = \alpha((\omega \otimes \eta)(\tau(\sigma))) = \alpha(\omega({}_i\sigma) \otimes \eta(\sigma_j)) = \omega({}_i\sigma)\eta(\sigma_j).$$

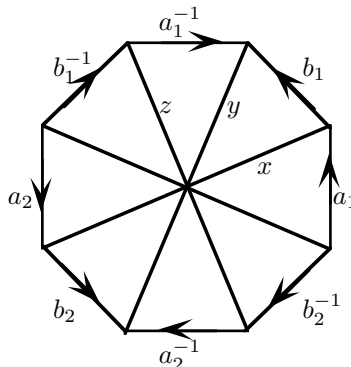
Si tomamos clases de cohomología el resultado es independiente de la elección de  $\tau$ :

$$\langle [\sigma], x \cup y \rangle = \langle [{}_i\sigma], x \rangle \langle [\sigma_j], y \rangle, \quad x \in H^i(X), \quad y \in H^j(X).$$

Ahora es inmediato que el álgebra de cohomología es unitaria: la unidad es la clase del homomorfismo  $1 : C_0(X) \rightarrow \mathbb{A}$  dado por  $1(p) = 1$  para todo 0-símplice  $p$ .

**Ejemplo** Vamos a calcular las álgebras de cohomología de las superficies compactas. Para evitar complicaciones de notación calcularemos concretamente las correspondientes a los espacios  $M_2$  y  $N_3$ , pero todos los cálculos se adaptan fácilmente al caso general.

Sean  $a_1, b_1, a_2$  y  $b_2$  los 1-ciclos de  $M_2$  indicados en la figura.



Sabemos que  $H_0(M_2) = \langle 1 \rangle$ ,  $H_1(M_2) = \langle [a_1], [b_1], [a_2], [b_2] \rangle$ ,  $H_2(M_2) = \langle [c] \rangle$ , donde  $c$  es la suma de los ocho triángulos que muestra la figura, considerados como 2-símplices orientados en sentido antihorario. Más concretamente, si  $\sigma$  es uno de ellos, convenimos que  $\sigma(x_0)$  es el vértice central. Así, por ejemplo, si  $\sigma$  es el 2-símplice de lados  $x$ ,  $b_1$  e  $y$ , tenemos que  $\partial\sigma = x + b_1 - y$  (consideramos que los radios están orientados del centro hacia los vértices del octógono),  ${}_1\sigma = x$ ,  $\sigma_1 = b_1$ .

Las cuatro clases  $[a_i], [b_i]$  son, de hecho una base de  $H_1(M_2)$ . Como  $H_0$  no tiene torsión, el teorema 5.51 nos da que  $H^1(M_2)$  se identifica de forma natural con  $H_1(M_2)^*$ . Sea  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  la base dual de  $[a_1], [b_1], [a_2], [b_2]$ , es decir,  $\alpha_1$  toma el valor 1 sobre  $[a_1]$  y 0 sobre las otras tres clases, etc. Pongamos que  $\alpha_1 = [a_1^*], \beta_1 = [b_1^*], \alpha_2 = [a_2^*], \beta_2 = [b_2^*]$ , donde  $a_1^*$ , etc. son 1-cociclos de los que, en principio, sólo sabemos cómo actúan sobre  $a_1, b_1, a_2, b_2$ , pero no sobre otras 1-cadenas.

Similarmente,  $H^2(M_2)$  se identifica de forma natural con  $H_2(M_2)^*$ . Una base es, pues, la base dual de  $[c]$ , formada por una única clase  $\zeta$  caracterizada por que  $\zeta([c]) = 1$ . Calculamos:

$$(a_1^* \cup b_1^*)(c) = \sum_{i=1}^8 (a_1^* \cup b_1^*)(\sigma_i) = \sum_{i=1}^8 a_1^*(\sigma_i)_1 b_1^*(\sigma_i)_1.$$

Como  $(\sigma_i)_1$  es uno de los símplexes  $\pm a_i, \pm b_i$ , todos los sumandos son nulos excepto dos:

$$(a_1^* \cup b_1^*)(c) = a_1^*(x) - a_1^*(z).$$

Ahora bien,  $a_1^*$  es un cociclo, luego se anula sobre las fronteras. Concretamente, si llamamos  $\sigma$  al 2-símplice de frontera  $\partial\sigma = x + b_1 - y$  tenemos que  $0 = a_1^*(\partial\sigma) = a_1^*(x) + 0 - a_1^*(y)$ . Similarmente,  $0 = a_1^*(y) - 1 - a_1^*(z)$ , de donde se sigue que  $(a_1^* \cup b_1^*)(c) = 1$ .

Así pues, al tomar clases concluimos que  $\alpha_1 \cup \beta_1 = \zeta$ . Similarmente se comprueba que  $\alpha_1 \cup \beta_2 = 0$ . Las conclusiones restantes las enunciamos en general para  $M_g$ :

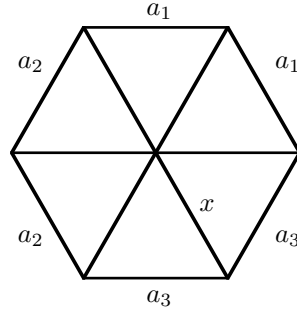
El módulo  $H^1(M_g)$  está generado por  $2g$  clases  $\alpha_i, \beta_i$ , para  $i = 1, \dots, g$ , tales que

$$\alpha_i \cup \alpha_j = \beta_i \cup \beta_j = 0,$$

$$\alpha_i \cup \beta_j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

y la clase  $\alpha_i \cup \beta_i = -\beta_i \cup \alpha_i$  es independiente de  $i$  y es una base de  $H^2(M_g)$ . En particular,  $H^*(M_g)$  está generada como álgebra por las clases  $\alpha_i, \beta_i$ .

Nos ocupamos ahora de la superficie  $N_3$ . Consideramos los símlices indicados en la figura:



Tomamos las orientaciones análogas a las del caso anterior. Ahora tenemos que

$$H_0(N_3) = \langle 1 \rangle, \quad H_1(N_3) = \langle [a_1], [a_2], [a_3] \rangle, \quad H_2(N_3) = 0.$$

Sin embargo, ahora  $H_1(N_3)$  no es libre, sino que sus generadores están sujetos a la relación  $2[a_1] + 2[a_2] + 2[a_3] = [\partial c] = 0$ , donde  $c$  es la suma de los seis triángulos que aparecen en la figura. Su estructura es

$$H_1(N_3) \cong \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \otimes (\mathbb{A}/2\mathbb{A}).$$

Más concretamente,  $H_1(N_3)$  se descompone en suma directa de una parte libre de rango 2, por ejemplo  $\langle [a_1], [a_2] \rangle$ , más el submódulo de torsión, que es precisamente  $\langle [a_1] + [a_2] + [a_3] \rangle$  (notemos que será nulo si  $\mathbb{A} = 2\mathbb{A}$ , pues entonces su generador es la clase de  $\partial \frac{1}{2}c$ ).

Como  $H_0(N_3)$  no tiene torsión, tenemos que  $H^1(N_3)$  se puede identificar de forma natural con  $H_1(N_3)^*$ , mientras que el teorema 5.52 nos da que  $H^2(N_3) \cong \mathbb{A}/2\mathbb{A}$ . Un primer ejemplo de la utilidad del producto exterior es que, como vamos a ver, nos proporciona un generador explícito de  $H^2(N_3)$ .

Es fácil ver que  $H_1(N_3)^* \cong \langle [a_1], [a_2] \rangle^*$ , donde el isomorfismo es la restricción. Simplemente, un homomorfismo de  $\mathbb{A}/2\mathbb{A}$  en  $\mathbb{A}$  ha de ser nulo (estamos suponiendo que  $\mathbb{A}$  es un dominio de ideales principales, en particular un dominio íntegro).

Sea  $\alpha_1, \alpha_2$  la base dual de  $[a_1], [a_2]$ . Digamos que  $\alpha_i = [a_i^*]$ . Puesto que  $a_1^*$  es un cociclo, ha de anularse sobre la frontera  $2a_1 + 2a_2 + 2a_3$ , de donde deducimos que  $a_1^*(a_3) = 1$ . Similarmente  $a_2^*(a_3) = 1$ .

El mismo razonamiento que en el caso anterior prueba que  $a_1^*$  toma el mismo valor  $u \in \mathbb{A}$  sobre todos los radios del hexágono, a excepción del marcado como  $x$  en la figura, para el que se cumple  $a_1^*(x) = u + 1$ .

El cálculo de  $(a_1^* \cup a_2^*)(c)$  nos lleva a seis sumandos, uno para cada triángulo de la figura, de los cuales sólo son no nulos los cuatro correspondientes a los dos lados  $a_2$  y a los dos lados  $a_3$ . Concretamente, queda  $(a_1^* \cup a_2^*)(c) = 4u + 1$ .

Si fuera  $a_1^* \cup a_2^* = d\omega$ , para cierta cocadena  $\omega$ , entonces tendríamos que

$$4u + 1 = df(c) = \omega(\partial c) = \omega(2a_1 + 2a_2 + 2a_3) = 2v, \quad v \in \mathbb{A},$$

luego  $1 = 2(v - 2u) \in 2\mathbb{A}$ , lo que implica que  $\mathbb{A} = 2\mathbb{A}$ .

Recíprocamente, si  $\mathbb{A} = 2\mathbb{A}$  entonces todo 2-cociclo es una cofrontera, en particular  $a_1^* \cup a_2^*$ . En cualquier caso, tomando clases concluimos que  $\alpha_1 \cup \alpha_2$  es un generador (quizá nulo) de  $H^2(N_3)$ .

Es fácil ver que lo mismo vale para  $\alpha_i \cup \alpha_j$ , cualesquiera que sean  $i, j = 1, 2$ . Notemos que  $\alpha_i \cup \alpha_j = -\alpha_j \cup \alpha_i = \alpha_j \cup \alpha_i$ .

Todo esto vale en general: el grupo  $H^1(N_h)$  tiene una base de la forma  $\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}$  de modo que todos los  $\alpha_i \cup \alpha_j$  son el mismo elemento de  $H^2(N_h)$ , el único elemento no nulo si es que lo hay o 0 en caso contrario. ■

## 6.4 El producto mixto

Introducimos ahora otro producto de interés en el estudio de la homología y la cohomología. Si  $X$  es un espacio topológico y  $\omega \in C^i(X)$ , podemos considerar que  $\omega : C(X) \rightarrow \mathbb{A}$  extendiéndola con el valor 0 sobre las cadenas de dimensión distinta de  $i$ . Fijemos una aproximación diagonal  $\tau$  y consideremos la composición siguiente:

$$C(X) \xrightarrow{\tau} C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(X) \xrightarrow{\omega \otimes 1} \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{A}} C(X) \xrightarrow{\beta} C(X).$$

Para cada cadena  $c \in C_p(X)$  definimos  $c \cap \omega \in C_{p-i}(X)$  como la imagen de  $c$  por esta composición. Este producto mixto está íntimamente relacionado con el producto exterior. Para probarlo vamos a calcular  $\langle c \cap \omega, \eta \rangle$ . Se trata de la imagen de  $c$  por la composición

$$\tau \circ (\omega \otimes 1) \circ \beta \circ \eta.$$

Ahora bien, es inmediato que  $\beta \circ \eta = (1 \otimes \eta) \circ \alpha$ , donde

$$\beta : \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{A}} C(X) \rightarrow C(X) \quad \text{y} \quad \alpha : \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$$

son los homomorfismos naturales. Por lo tanto  $\langle c \cap \omega, \eta \rangle$  es la imagen de  $c$  por

$$\tau \circ (\omega \otimes 1) \circ (1 \otimes \eta) \circ \alpha = \tau \circ (\omega \otimes \eta) \circ \alpha,$$

es decir,

$$\langle c \cap \omega, \eta \rangle = \langle c, \omega \cup \eta \rangle,$$

entendiendo que los dos productos se calculan con la misma aproximación diagonal. Si usamos concretamente la aproximación de Alexander-Whitney, es fácil ver que, para un  $p$ -símplice  $\sigma$  y  $\omega \in C^i(X)$ ,

$$\sigma \cap \omega = \omega({}_i\sigma) \sigma_{p-i}.$$

Veamos ahora que el producto mixto induce un producto entre las clases de homología y cohomología. Para ello estudiamos la frontera de un producto mixto:

$$\langle \partial(c \cap \omega), \eta \rangle = \langle c \cap \omega, d\eta \rangle = \langle c, \omega \cup d\eta \rangle.$$

Ahora usamos que  $d(\omega \cup \eta) = d\omega \cup \eta + (-1)^i \omega \cup d\eta$ , con lo que

$$\begin{aligned} \langle \partial(c \cap \omega), \eta \rangle &= \langle c, (-1)^i (d(\omega \cup \eta) - d\omega \cup \eta) \rangle \\ &= (-1)^i (\langle \partial c \cap \omega, \eta \rangle - \langle c \cap d\omega, \eta \rangle) \\ &= \langle (-1)^i (\partial c \cap \omega - c \cap d\omega), \eta \rangle. \end{aligned}$$

Como esto es válido para toda cocadena  $\eta$ , podemos concluir que

$$(-1)^i \partial(c \cap \omega) = \partial c \cap \omega - c \cap d\omega. \quad (6.15)$$

De aquí se desprenden las relaciones

$$\begin{aligned} \text{ciclo} \cap \text{cociclo} &= \text{ciclo} \\ \text{ciclo} \cap \text{cofrontera} &= \text{frontera} \\ \text{frontera} \cap \text{cociclo} &= \text{frontera} \end{aligned}$$

Estos hechos implican a su vez que el producto  $[c] \cap [\omega] = [c \cap \omega]$  está bien definido, e induce un homomorfismo

$$H_p(X) \otimes_{\mathbb{A}} H^i(X) \longrightarrow H_{p-i}(X).$$

Es fácil ver que es natural, así como que no depende de la aproximación diagonal con que se calcula. Observemos que la naturalidad consiste en que si  $f : X \longrightarrow Y$  es una aplicación continua, entonces  $f_*(\alpha) \cap \omega = f_*(\alpha \cap f^*(\omega))$ , para todo  $\alpha \in H_p(X)$ ,  $\omega \in H^i(Y)$ .

$$\begin{array}{ccc} H_p(X) \otimes_{\mathbb{A}} H^i(X) & \xrightarrow{\cap} & H_{p-i}(X) \\ f_* \downarrow & & \uparrow f^* \\ H_p(Y) \otimes_{\mathbb{A}} H^i(Y) & \xrightarrow{\cap} & H_{p-i}(Y) \end{array}$$

## 6.5 Productos relativos

El producto exterior y el producto mixto pueden definirse también entre grupos de homología y cohomología relativa. Para ello observamos que si  $\tau$  es una aproximación diagonal, la naturalidad aplicada a una inclusión  $i : A \longrightarrow X$  hace que  $\tau_X|_{C(A)} = \tau_A$ . Por consiguiente, si  $\omega \in C^i(X, A)$ ,  $\eta \in C^j(X, A)$  son dos cocadenas relativas, es decir, que se anulan en  $C(A)$ , tenemos que  $\omega \cup \eta \in C^{i+j}(X, A)$ . En efecto, si  $c \in C_{i+j}(A)$ , entonces  $\tau(c) \in C(A) \otimes C(A)$ , luego  $(\omega \otimes \eta)(\tau(c)) = 0$  y también  $(\omega \cup \eta)(c) = 0$ .

Es inmediato entonces que el producto exterior de cocadenas induce entonces un producto

$$\cup : H^i(X, A) \otimes_{\mathbb{A}} H^j(X, A) \longrightarrow H^{i+j}(X, A).$$

Además es independiente de la aproximación con la que se calcula debido a la naturalidad de las homotopías que proporciona el teorema de Eilenberg-Zilber. En efecto, sabemos que si  $\tau$  y  $\tau'$  son dos aproximaciones diagonales, entonces  $\tau_X - \tau'_X = \Delta\partial + \partial\Delta$ , para una cierta homotopía natural  $\Delta$ . Si  $\omega$  y  $\eta$  son dos cociclos, componiendo con  $(\omega \otimes \eta) \circ \alpha$  obtenemos que

$$\omega \cup_{\tau} \eta - \omega \cup_{\tau'} \eta = d(\Delta \circ (\omega \otimes \eta) \circ \alpha),$$

y la cocadena de la derecha se anula en  $C(A)$  porque  $\Delta_X|_{C(A)} = \Delta_A$ . Por consiguiente el miembro derecho está en  $F^*(X, A)$  y los dos productos exteriores son cohomólogos.

Esta misma técnica permite adaptar para el producto exterior relativo las demostraciones de las propiedades del producto absoluto. En principio podríamos trabajar con un producto relativo general  $\omega \times \eta$ , pero esto involucra productos de pares

$$(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y),$$

cuando para nuestros fines es más sencillo adaptar las pruebas particularizadas al caso  $X = Y$ . Veamos por ejemplo la anticonmutatividad. Observemos que si  $T$  es la aplicación del teorema 6.9 (para  $X = Y$ ) y  $\delta : X \rightarrow X \times X$  es la aplicación diagonal, entonces  $\delta \circ T = \delta$ . Por consiguiente  $\delta^{\#} \circ T^{\#} = \delta^{\#}$  y si componemos (6.13) con  $\delta^{\#}$  por la izquierda y con  $(\omega \otimes \eta) \circ \alpha$  por la derecha nos queda la relación

$$\eta \cup \omega - (-1)^{ij}(\omega \cup \eta) = d(\delta^{\#} \circ \Delta \circ (\omega \otimes \eta) \circ \alpha).$$

Como antes, la cocadena de la derecha se anula en  $C(A)$ , por lo que al tomar clases de cohomología relativa obtenemos la anticonmutatividad del producto. ■

Similarmente se prueba la asociatividad del producto y, en general, que  $H^*(X, A)$  es un álgebra graduada unitaria. También es claro que los homomorfismos inducidos por las aplicaciones continuas entre pares son homomorfismos de álgebras.

Pasamos ahora a los productos mixtos. Observamos en primer lugar que si  $c \in C_p(A)$  y  $\omega \in C^i(X, A)$ , entonces  $\tau(c) \in C(A) \otimes C(A)$  (una vez más por la naturalidad de la aproximación diagonal  $\tau$ ), luego  $(\omega \otimes 1)(\tau(c)) = 0$ , de donde se sigue que  $c \cap \omega = 0$ . A su vez, esto implica que el producto mixto induce un producto

$$\cap : C_p(X, A) \times C^i(X, A) \rightarrow C_{p-i}(X).$$

Puesto que se sigue cumpliendo la igualdad (6.15), este producto induce a su vez un homomorfismo natural

$$\cap : H_p(X, A) \otimes_{\mathbb{A}} H^i(X, A) \rightarrow H_{p-i}(X).$$



Por otra parte, si  $c \in C_p(A)$  y  $\omega \in C^i(X)$ , entonces no es cierto en general que  $c \cap \omega = 0$ , pero, al menos  $c \cap \omega \in C_{p-i}(A)$ . Por lo tanto el producto mixto induce un producto

$$\cap C_p(X, A) \times C^i(X) \longrightarrow C_{p-i}(X, A),$$

que a su vez induce un homomorfismo

$$\cap H_p(X, A) \otimes_{\mathbb{A}} H^i(X) \longrightarrow H_{p-i}(X, A). \quad (6.16)$$



## Capítulo VII

# Variedades topológicas

Aunque la práctica totalidad de los espacios con los que hemos trabajado son variedades topológicas, lo cierto es que este hecho no ha influido en ninguno de los resultados que hemos probado. La única excepción es el teorema 4.22, donde hemos probado que las variedades compactas tienen definidos los números de Betti, en cuya prueba hemos usado resultados nada triviales sobre variedades. En este capítulo demostraremos algunos resultados fundamentales específicos de las variedades topológicas.

### 7.1 Orientación

Suponemos que el lector está familiarizado con la noción intuitiva de orientación de una variedad. Determinar una orientación es un problema doble: localmente consiste en distinguir entre ciertas alternativas simétricas, como izquierda y derecha, giro horario y antihorario, etc.; globalmente consiste en escoger coherentemente una orientación en cada punto de forma consistente con desplazamientos continuos.

En esta sección mostraremos que la noción de orientación en una variedad puede precisarse en términos de su homología singular. Localmente, la idea básica es que una orientación local puede determinarse sin más que especificar un cierto símplice singular. Por ejemplo, si  $V$  es una variedad de dimensión 1, entonces un 1-símplice inyectivo  $\sigma : \Delta_1 \rightarrow V$  determina una orientación de los puntos de su soporte: determina un sentido de movimiento: de  $\sigma(0)$  hacia  $\sigma(1)$ . Por supuesto  $-\sigma$  determina la orientación opuesta. Equivalentemente, esta información está contenida en  $\partial\sigma$ , que distingue el vértice inicial con signo negativo y el final con signo positivo.

Análogamente, si  $V$  es una variedad bidimensional, un 2-símplice inyectivo  $\sigma : \Delta_2 \rightarrow V$  determina una orientación en su soporte. Por ejemplo, nos permite convenir que el sentido de giro positivo es el que marca su frontera  $\partial\sigma$ , es decir, el que nos lleva de  $\sigma(0,0)$  a  $\sigma(1,0)$ , de aquí a  $\sigma(0,1)$  y de aquí de vuelta a  $\sigma(0,0)$ .

El teorema siguiente es el punto de partida para incorporar estas ideas a la teoría:

**Teorema 7.1** *Sea  $V$  una variedad topológica de dimensión  $n$  y  $x \in V$ . Entonces*

$$H_n(V, V \setminus \{x\}) \cong \mathbb{A}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea  $U$  un entorno de  $x$  en  $V$  homeomorfo a una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$ . Podemos aplicar el teorema de escisión para cortar el cerrado  $V \setminus U$  del abierto  $V \setminus \{x\}$ . Así, la inclusión induce un isomorfismo

$$i_* : H_n(U, U \setminus \{x\}) \longrightarrow H_n(V, V \setminus \{x\}).$$

Como  $U$  es homotópico a un punto, la sucesión exacta de homología del par  $(U, U \setminus \{x\})$  (para la homología reducida) nos da el isomorfismo

$$\delta_* : H_n(U, U \setminus \{x\}) \longrightarrow H_{n-1}(U \setminus \{x\}).$$

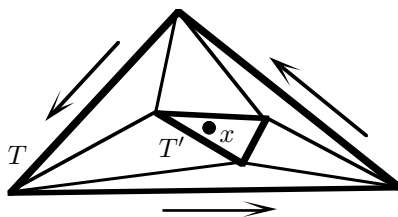
Pero en  $U \setminus \{x\}$  podemos encontrar un retracto por deformación  $\tilde{S}^{n-1}$  homeomorfo a  $S^{n-1}$ , con lo que la inclusión induce un isomorfismo

$$i_* : H_{n-1}(\tilde{S}^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(U \setminus \{x\}).$$

Puesto que  $H_{n-1}(\tilde{S}^{n-1}) \cong \mathbb{A}$ , el teorema está probado. ■

Conviene explicitar los isomorfismos que han aparecido en la prueba. En primer lugar notemos que como espacio  $\tilde{S}^{n-1}$  podemos tomar la frontera de un  $n$ -símplice inyectivo  $\sigma : \Delta_n \longrightarrow U$  tal que  $x$  esté en el interior de su soporte. Es fácil ver entonces que  $[\partial\sigma]$  es un generador de  $H_{n-1}(\tilde{S}^{n-1})$ . Su imagen en  $H_{n-1}(U \setminus \{x\})$  es  $[\partial\sigma]$ , su imagen en  $H_n(U, U \setminus \{x\})$  es  $[\sigma]$  y su imagen en  $H_n(V, V \setminus \{x\})$  es  $[\sigma]$ . Así pues, un generador de  $H_n(V, V \setminus \{x\})$  es la clase de cualquier símplice inyectivo cuyo soporte esté contenido en un abierto homeomorfo a una bola y contenga a  $x$  en su interior.

En el caso en que  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$  (más en general, si  $\mathbb{A}$  tiene característica distinta de 2), sucede que dos símplices homólogos en estas condiciones determinan la misma orientación. Sería difícil probar esto, pues requeriría una definición previa de orientación, cuando nuestro propósito es definirla en términos de la homología, pero la figura siguiente ilustra la idea geométrica subyacente:



Tenemos dos triángulos  $T$  y  $T'$  junto con seis triángulos que forman una 2-cadena  $c$  tal que  $\partial c = T - T'$ . Notemos que si la orientación de  $T$  es la que indican las flechas, para que la frontera de  $c$  sea la indicada es necesario que todos sus símplices estén orientados en sentido antihorario como  $T$ , lo que a su vez obliga a que la orientación de  $T'$  sea también antihoraria, es decir, la misma que la de  $T$ .

**Nota** La misma prueba del teorema anterior rebajando los índices en una unidad demuestra que  $H_{n-1}(V, V \setminus \{x\}) = 0$ . ■

**Definición 7.2** Una  $\mathbb{A}$ -orientación local en un punto  $x$  de una variedad  $V$  de dimensión  $n$  es un generador del  $\mathbb{A}$ -módulo  $H_n(V, V \setminus \{x\})$ . A las  $\mathbb{Z}$ -orientaciones las llamaremos simplemente *orientaciones*.

Puesto que  $\mathbb{Z}$  tiene exactamente dos generadores, toda variedad tiene exactamente dos orientaciones locales en cada punto. En cambio, tiene una única  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -orientación local en cada punto.

Ahora hemos de ocuparnos del problema de elegir coherentemente una orientación local en cada punto de una variedad. Una condición necesaria de coherencia es que un mismo  $n$ -símplice singular inyectivo  $\sigma$  determine la misma orientación respecto de cualquiera de sus puntos interiores, es decir, que si  $x$  e  $y$  son dos puntos del interior del soporte de  $\sigma$  y escogemos  $[\sigma]$  como orientación positiva en  $x$ , entonces la orientación positiva en  $y$  ha de ser también  $[\sigma]$  (notemos que estamos hablando de clases de homología en grupos distintos). Los teoremas siguientes justifican que esto es posible en parte.

**Teorema 7.3** Sea  $x$  un punto de una variedad topológica  $n$ -dimensional  $V$  y  $\alpha_x \in H_n(V, V \setminus \{x\})$ . Entonces existe un entorno abierto  $U$  de  $x$  y una clase  $\alpha \in H_n(V, V \setminus U)$  tal que  $\alpha_x = j_x^U(\alpha)$ , donde

$$j_x^U : H_n(V, V \setminus U) \longrightarrow H_n(V, V \setminus \{x\})$$

es el homomorfismo inducido por la inclusión.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\alpha_x = [z]$ . Como  $z$  es un ciclo relativo, se cumple que  $|\partial z| \subset V \setminus \{x\}$  es un espacio compacto que no contiene a  $x$ . Basta tomar  $U = X \setminus |\partial z|$  y  $\alpha = [z]$ . ■

Nuestra intención es fijar un  $\alpha \in H_n(V, V \setminus U)$  y definir  $\alpha_x = j_x^U(\alpha)$  para cada  $x \in U$ , lo que nos garantizará que, tal y como queríamos, un mismo símplectico determine la misma orientación en todo punto de  $U$ . Pero para que esto sea viable hemos de garantizar que las clases  $j_x^U(\alpha)$  generan los grupos de homología correspondientes. Ello se sigue del próximo teorema.

**Teorema 7.4** Sea  $x$  un punto en una variedad topológica  $n$ -dimensional  $V$ . Cada entorno  $W$  de  $x$  contiene un entorno  $U$  tal que para cada  $y \in U$  la aplicación  $j_y^U$  es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $B \subset W$  un entorno de  $x$  homeomorfo a una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$  y tomemos un abierto  $U \subset B$  que contenga a  $x$  y que se corresponda con una bola abierta de radio menor. Para  $y \in U$  tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(V, V \setminus U) & \longleftarrow & H_n(B, B \setminus U) & \longrightarrow & H_{n-1}(B \setminus U) \\ j_y^U \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(V, V \setminus \{y\}) & \longleftarrow & H_n(B, B \setminus \{y\}) & \longrightarrow & H_{n-1}(B \setminus \{y\}) \end{array}$$

donde los isomorfismos horizontales de la izquierda son escisiones y los de la derecha son homomorfismos de conexión. Las flechas verticales son los homomorfismos inducidos por las inclusiones correspondientes. La de la derecha es un isomorfismo porque  $B \setminus U$  es un retracto por deformación de  $B \setminus \{y\}$ . Por consiguiente  $j_y^U$  también es un isomorfismo. ■

**Nota 1** Más adelante necesitaremos la observación siguiente sobre la demostración que acabamos de ver: Las únicas propiedades que hemos usado de  $U$  son que  $(B, B \setminus U) \rightarrow (V, V \setminus U)$  es una escisión y que la inclusión  $B \setminus U \rightarrow B \setminus \{y\}$  induce un isomorfismo  $H_{n-1}(B \setminus U) \rightarrow H_{n-1}(B \setminus \{y\})$  entre los grupos de homología reducida. Estas propiedades se cumplen también si tomamos como  $U$  la imagen de un cubo de dimensión  $d$  que contenga a  $x$ . La primera propiedad es clara. Para la segunda, tomamos una esfera  $\tilde{S}^{n-1} \subset B \setminus U$ . Entonces la inclusión  $i_1 : \tilde{S}^{n-1} \rightarrow B \setminus \{y\}$  induce un isomorfismo entre los grupos de homología (pues  $\tilde{S}^{n-1}$  es un retracto por deformación de  $B \setminus \{y\}$ ) y lo mismo sucede con la inclusión  $i_2 : \tilde{S}^{n-1} \rightarrow B \setminus U$ . Entonces, el homomorfismo inducido por la inclusión  $i : B \setminus U \rightarrow B \setminus \{y\}$  es  $i_* = i_{2*}^{-1} \circ i_{1*}$ , luego es un isomorfismo. ■

**Nota 2** La misma prueba del teorema anterior junto con la nota que sigue al teorema 7.1 implican que, para todo abierto  $U$  suficientemente pequeño, se cumple  $H_{n-1}(V, V \setminus U) = 0$ . ■

Ahora estamos en condiciones de relacionar orientaciones locales:

**Definición 7.5** Sea  $V$  una variedad topológica  $n$ -dimensional y  $U$  un abierto en  $V$ . Una  $\mathbb{A}$ -orientación local sobre  $U$  es una clase  $\alpha \in H_n(V, V \setminus U)$  tal que para todo  $y \in U$  se cumple que  $\alpha_y = j_y^U(\alpha)$  es un generador de  $H_n(V, V \setminus \{y\})$ .

En los dos últimos teoremas el abierto  $U$  se puede sustituir por cualquier otro abierto menor, por lo que podemos tomar uno que cumpla los dos al mismo tiempo. Así, dada una  $\mathbb{A}$ -orientación local  $\alpha_x$  en un punto  $x$ , existe un entorno  $U$  y una clase  $\alpha \in H_n(V, V \setminus U)$  tal que  $\alpha_x = j_x^U(\alpha)$  y para todo  $y \in U$  el homomorfismo  $j_y^U$  es un isomorfismo. Por consiguiente,  $\alpha$  ha de ser un generador de  $H_n(V, V \setminus U)$ , de donde a su vez cada  $\alpha_y$  es un generador de  $H_n(V, V \setminus \{y\})$ . Por consiguiente  $\alpha$  es una orientación local sobre  $U$ . Además, el hecho de que  $j_x^U$  sea un isomorfismo implica  $\alpha$  es la única  $\mathbb{A}$ -orientación sobre  $U$  que extiende a  $\alpha_x$ . Así pues:

**Teorema 7.6** Si  $\alpha_x$  es una  $\mathbb{A}$ -orientación local en un punto  $x$  de una variedad  $n$ -dimensional  $V$ , entonces existe un entorno  $U$  de  $x$  en el cual  $\alpha_x$  se extiende de forma única a una  $\mathbb{A}$ -orientación local sobre  $U$ .

Supongamos ahora que  $U_1 \subset U_2 \subset V$  son dos abiertos en la variedad  $V$ . Llamaremos

$$j_{U_1}^{U_2} : H_n(V, V \setminus U_2) \rightarrow H_n(V, V \setminus U_1)$$

al homomorfismo inducido por la inclusión. Es claro que si  $\alpha$  es una  $\mathbb{A}$ -orientación sobre  $U_2$  entonces  $j_{U_1}^{U_2}(\alpha)$  es una  $\mathbb{A}$ -orientación sobre  $U_1$ .

**Definición 7.7** Una  $\mathbb{A}$ -orientación de una variedad topológica  $n$ -dimensional  $V$  sobre un abierto  $W$  es una función  $\alpha$  que a cada  $x \in W$  le hace corresponder una  $\mathbb{A}$ -orientación local  $\alpha_x \in H_n(V, V \setminus \{x\})$  de modo que todo  $x \in W$  tiene un entorno  $U \subset W$  donde hay definida una  $\mathbb{A}$ -orientación local  $\alpha_U$  tal que  $\alpha_y = j_y^U(\alpha_U)$  para todo  $y \in U$ . En tal caso se diremos que  $\alpha_U$  es una *determinación local* de  $\alpha$  en  $U$ .

A las  $\mathbb{Z}$ -orientaciones las llamaremos simplemente *orientaciones*. Una variedad es  $\mathbb{A}$ -orientable (resp. *orientable*) si tiene una  $\mathbb{A}$ -orientación (resp. una orientación) definida sobre todos los puntos de  $V$ .

Es claro que si  $\alpha_U$  es una determinación local de una  $\mathbb{A}$ -orientación  $\alpha$  en un abierto  $U$  y  $U'$  es un abierto menor, entonces  $j_{U'}^U(\alpha_U)$  es una determinación local de  $\alpha$  en  $U'$ , por lo que una  $\mathbb{A}$ -orientación tiene determinaciones locales en abiertos arbitrariamente pequeños alrededor de un punto dado.

**Ejemplo** Si  $x \in S^n$ , puesto que  $S^n \setminus \{x\}$  es contractible, la inclusión induce un isomorfismo  $H_n(S^n) \cong H_n(S^n, S^n \setminus \{x\})$ . Esto hace que si  $\alpha$  es un generador de  $H_n(S^n)$  entonces  $\alpha_x = j_x^{S^n}(\alpha)$  determina una orientación de  $S^n$  (la definición de orientación se cumple en todo punto con  $U = S^n$ ). El argumento se generaliza fácilmente para probar que todas las superficies  $M_g$  son orientables, aunque después veremos una prueba más elegante. ■

**Teorema 7.8** Una variedad topológica es orientable si y sólo si es  $\mathbb{A}$ -orientable para todo anillo  $\mathbb{A}$ .

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es obvia. Si  $V$  es una variedad orientable, teniendo en cuenta la nota 2 tras el teorema 7.4, el teorema 5.37 nos da un isomorfismo natural

$$H_n^{\mathbb{Z}}(V, V \setminus U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A} \cong H_n^{\mathbb{A}}(V, V \setminus U), \quad (7.1)$$

para todo entorno abierto  $U$  suficientemente pequeño de cualquier punto de  $V$ . Si  $\alpha$  es una orientación en  $V$  y  $\alpha_U$  es una determinación local de  $\alpha$  en un abierto  $U$  (suficientemente pequeño para que tengamos el isomorfismo anterior), es claro que  $\alpha_U \otimes 1$  es un generador del miembro izquierdo de (7.1), de donde se sigue inmediatamente que las imágenes de estos tensores por los isomorfismos determinan una  $\mathbb{A}$ -orientación en  $V$ . ■

Dejando pendiente la existencia de variedades no orientables (esto lo probaremos más adelante) el teorema siguiente muestra que, en general, la orientabilidad depende del anillo de coeficientes:

**Teorema 7.9** Si  $\mathbb{A}$  es un anillo de característica 2, entonces toda variedad topológica es  $\mathbb{A}$ -orientable.

DEMOSTRACIÓN: Si  $V$  es una variedad  $n$ -dimensional, consideremos un abierto  $U$  que satisfaga el teorema 7.4 y para el que tengamos el isomorfismo (7.1). Entonces el grupo abeliano  $H_n^{\mathbb{Z}}(V, V \setminus U) \cong \mathbb{Z}$  tiene exactamente dos

generadores  $\pm\alpha_U$ , pero ambos determinan el mismo tensor  $\alpha_U \otimes 1 = -\alpha_U \otimes 1$  en  $H_n^{\mathbb{Z}}(V, V \setminus U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}$ , por lo que tenemos un generador  $\beta_U \in H_n^{\mathbb{A}}(V, V \setminus U)$  unívocamente determinado. Estas clases constituyen las determinaciones locales de una  $\mathbb{A}$ -orientación de  $V$ . ■

Si  $W$  es un abierto en una variedad  $V$ , entonces él es por sí mismo una variedad de la misma dimensión. En principio, son dos cosas distintas que  $V$  admita una  $\mathbb{A}$ -orientación sobre  $W$  o que  $W$  sea  $\mathbb{A}$ -orientable como variedad topológica. Sin embargo, vamos a ver que ambas propiedades son equivalentes. Ante todo, observemos que si  $x \in W$  el teorema de escisión nos da que la inclusión induce un isomorfismo  $H_n(W, W \setminus \{x\}) \cong H_n(V, V \setminus \{x\})$ . Por consiguiente, una  $\mathbb{A}$ -orientación local en  $x$  viene determinada por un generador de cualquiera de los dos módulos. Así mismo, una aplicación  $x \mapsto \alpha_x$  sobre los puntos de  $W$  y con imágenes en los grupos  $H_n(W, W \setminus \{x\})$  determina otra  $x \mapsto \alpha'_x$  con imágenes en los grupos  $H_n(V, V \setminus \{x\})$  y viceversa. Sólo hay que comprobar que una es una  $\mathbb{A}$ -orientación si y sólo si lo es la otra.

Supongamos que  $\alpha'$  es una  $\mathbb{A}$ -orientación de  $V$  sobre  $W$ . Dado  $x \in W$ , tomemos un entorno abierto  $U \subset W$  en el que  $\alpha'$  tenga una determinación local  $\alpha'_U$ , que verifique el teorema 7.4 y de modo que  $V \setminus W$  esté contenido en el interior de  $V \setminus U$ . Esto nos permite aplicar el teorema de escisión, en virtud del cual la inclusión induce un isomorfismo  $H_n(W, W \setminus U) \cong H_n(V, V \setminus U)$ . Llamemos  $\alpha_U$  a la clase del primer grupo que se corresponde con  $\alpha'_U$ . Para cada  $y \in U$  tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(V, V \setminus U) & \longrightarrow & H_n(V, V \setminus \{y\}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_n(W, W \setminus U) & \longrightarrow & H_n(W, W \setminus \{y\}) \end{array}$$

De él se deduce que  $j_y^U(\alpha_U) = \alpha_y$ , por lo que  $\alpha$  es una  $\mathbb{A}$ -orientación de  $W$ . El recíproco se prueba igualmente.

Es claro que una variedad  $V$  es  $\mathbb{A}$ -orientable si y sólo si puede ser cubierta por una familia de abiertos con  $\mathbb{A}$ -orientaciones que coinciden en las intersecciones. En particular, si tenemos descompuesta una variedad  $V$  en unión de una familia de abiertos disjuntos dos a dos,  $V$  es  $\mathbb{A}$ -orientable si y sólo si lo es cada uno de los abiertos. Más concretamente todavía, una variedad topológica es  $\mathbb{A}$ -orientable si y sólo si lo son sus componentes conexas. En las variedades conexas tenemos el siguiente teorema de unicidad:

**Teorema 7.10** *Dos  $\mathbb{A}$ -orientaciones en una variedad topológica conexa son iguales si y sólo si coinciden en un punto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $V$  una variedad topológica conexa y sea  $A$  el conjunto de los puntos de  $V$  donde dos orientaciones dadas coinciden. Por el teorema 7.4 tanto  $A$  como  $V \setminus A$  son abiertos. ■

En particular, dado que  $\mathbb{Z}$  tiene exactamente dos generadores:



**Teorema 7.11** *Una variedad topológica conexa y orientable tiene exactamente dos orientaciones.*

El problema de la orientación de las variedades consiste en que en cada punto tenemos dos orientaciones posibles, y no siempre es posible escoger una de forma globalmente consistente. Para estudiar este problema resulta útil asociar a cada variedad  $V$  otra variedad orientable, que llamaremos  $\tilde{V}_1$ , definida de modo que cada punto  $x \in V$  se corresponde con dos puntos  $x_1, x_2 \in \tilde{V}_1$ , y las dos orientaciones de  $x$  en  $V$  se corresponden con la misma orientación de  $\tilde{V}_1$  en los puntos  $x_1$  y  $x_2$ . Por razones técnicas conviene introducir una variedad  $\tilde{V}$  que es más grande que  $\tilde{V}_1$ , aunque contiene la misma información sobre  $V$  y sus orientaciones.

**Definición 7.12** Sea  $V$  una variedad topológica  $n$ -dimensional. Definimos

$$\tilde{V} = \{(x, \alpha_x) \mid x \in V, \alpha_x \in H_n(V, V \setminus \{x\})\}.$$

Notemos que no exigimos que  $\alpha_x$  sea un generador del grupo de homología.

Llamaremos  $p : \tilde{V} \rightarrow V$  a la proyección en la primera componente. Para cada abierto  $U$  de  $V$  y cada  $\alpha_U \in H_n(V, V \setminus U)$  definimos

$$\langle U, \alpha_U \rangle = \{(x, j_x^U(\alpha_U)) \mid x \in U\} \subset \tilde{V}.$$

Veamos que estos conjuntos son la base de una topología en  $\tilde{V}$  con la cual adquiere estructura de variedad topológica  $n$ -dimensional.

Por el teorema 7.3 los conjuntos indicados cubren  $\tilde{V}$ . Supongamos ahora que  $(x, \alpha_x) \in \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle U', \alpha_{U'} \rangle$ . Por el teorema 7.4 el punto  $x$  tiene un entorno  $U'' \subset U \cap U'$  tal que  $j_x^{U''}$  es un isomorfismo. Tomamos como  $\alpha_{U''}$  la antiimagen de  $\alpha_x$  por  $j_x^{U''}$  y basta probar que  $\langle U'', \alpha_{U''} \rangle \subset \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle U', \alpha_{U'} \rangle$ . Ahora bien,

$$j_x^{U''}(j_{U''}^U(\alpha_U)) = j_x^U(\alpha_U) = \alpha_x = j_x^{U''}(\alpha_{U''}),$$

luego  $j_{U''}^U(\alpha_U) = \alpha_{U''}$  y si  $(y, \alpha_y) \in \langle U'', \alpha_{U''} \rangle$  entonces

$$\alpha_y = j_y^{U''}(\alpha_{U''}) = j_y^{U''}(j_{U''}^U(\alpha_U)) = j_y^U(\alpha_U),$$

luego  $(y, \alpha_y) \in \langle U, \alpha_U \rangle$ . La otra inclusión se prueba análogamente.

Con esto tenemos que  $\tilde{V}$  es un espacio topológico. La proyección  $p$  es continua, pues  $p^{-1}[U]$  es la unión de todos los abiertos  $\langle U', \alpha_{U'} \rangle$  con  $U' \subset U$  y  $\alpha_{U'} \in H_n(V, V \setminus U')$ . También es claro que  $p$  es abierta. Más aún, las restricciones  $p : \langle U, \alpha_U \rangle \rightarrow U$  son homeomorfismos, pues si  $p(y, \alpha_y) = p(z, \alpha_z)$ , entonces  $y = z$  y, por consiguiente,  $\alpha_y = j_y^U(\alpha_U) = j_z^U(\alpha_U) = \alpha_z$ .

De aquí se desprende, en particular, que  $\tilde{V}$  es una variedad topológica de dimensión  $n$ .

La variedad  $\tilde{V}$  contiene la misma información repetida varias veces. Para descomponerla en partes más simples necesitamos algunos conceptos adicionales.

Ante todo recordemos que dos elementos de  $\mathbb{A}$  son *asociados* si se diferencian en un factor unitario (es decir, con inverso en  $\mathbb{A}$ ). Representaremos mediante  $\tilde{\mathbb{A}}$  el conjunto de clases de equivalencia de elementos asociados de  $\mathbb{A}$ , incluyendo la clase formada únicamente por el 0. Representaremos por 1 la clase de  $1 \in \mathbb{A}$ , es decir, la clase de las unidades de  $\mathbb{A}$ .

Por ejemplo, en el caso de mayor interés,  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ , podemos considerar que  $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{N}$ . Si  $\mathbb{A}$  es un cuerpo tenemos que  $\tilde{\mathbb{A}} = \{0, 1\}$ .

Si  $M$  es un  $\mathbb{A}$ -módulo libre de rango 1, podemos definir  $m : M \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$  como la función dada por  $m(ag) = [a]$ , donde  $g$  es cualquier base de  $M$ . Es claro que al tomar clases módulo unidades la aplicación  $m$  no depende de la elección de la base  $g$ . Es claro que un elemento  $x \in M$  es un generador de  $M$  si y sólo si  $m(x) = 1$ .

Dada una variedad  $V$ , definimos  $m : \tilde{V} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$  como la aplicación dada por  $m(x, \alpha_x) = m(\alpha_x)$ . Vamos a probar que  $m$  es continua cuando en  $\tilde{\mathbb{A}}$  consideramos la topología discreta. Esto es tanto como afirmar que  $m$  es localmente constante. En efecto, dado un punto  $(x, \alpha_x) \in \tilde{V}$ , tomamos un entorno  $U$  de  $x$  en las condiciones del teorema 7.4. Si  $j_x^U(\alpha_U) = \alpha_x$ , entonces  $\langle U, \alpha_U \rangle$  es un entorno de  $(x, \alpha_x)$  donde  $m$  es constante.

Claramente  $m$  es suprayectiva. Para cada  $k \in \tilde{\mathbb{A}}$  llamaremos  $\tilde{V}_k = m^{-1}(k)$ . Así,  $\tilde{V}_k$  es abierto y cerrado en  $\tilde{V}$ . En particular es también una variedad topológica  $n$ -dimensional.

Observemos ahora que si  $n \in \tilde{\mathbb{A}}$ ,  $n \neq 0$ , entonces  $\tilde{V}_n$  es homeomorfa a  $\tilde{V}_1$ . En efecto, si  $n = [a]$ , un homeomorfismo  $\phi_a : \tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}_n$  viene dado por  $\phi_a(x, \alpha_x) = \phi(x, a\alpha_x)$ .

Así pues, toda la información sobre  $V$  contenida en  $\tilde{V}$  está en realidad en las variedades  $\tilde{V}_0$  y  $\tilde{V}_1$ . La primera contiene simplemente la topología de  $V$ , pues la aplicación  $\phi_0 : V \rightarrow \tilde{V}_0$  dada por  $\phi_0(x) = (x, 0)$  es un homeomorfismo.

En definitiva, la información relevante está contenida en  $\tilde{V}_1$ , como ya anticipábamos, aunque por razones técnicas es más sencillo trabajar con  $\tilde{V}$ .

**Definición 7.13** Si  $V$  es una variedad topológica, a la variedad  $\tilde{V}_1$  que acabamos de construir la llamaremos *variedad de  $\mathbb{A}$ -orientaciones de  $V$* .

Sabemos que  $\tilde{V}_1$  es una variedad topológica de la misma dimensión que  $V$ . Está formada por los pares  $(x, \alpha_x)$  tales que  $\alpha_x$  es una  $\mathbb{A}$ -orientación local en  $x$ . Una base de  $\tilde{V}_1$  la forman los conjuntos  $\langle U, \alpha_U \rangle$ , donde  $U$  es abierto en  $V$  y  $\alpha_U$  es una orientación local sobre  $U$ . Cada punto de  $V$  tiene tantas antiimágenes por  $p$  en  $\tilde{V}_1$  como generadores admite  $\mathbb{A}$ , es decir, como unidades tiene  $\mathbb{A}$ .

Veamos ahora que  $\tilde{V}_1$  es  $\mathbb{A}$ -orientable. Para ello observamos que si  $\langle U, \alpha_U \rangle$  es un abierto básico, entonces  $\alpha_U$  define una  $\mathbb{A}$ -orientación en  $U$  y, como la restricción de  $p$  a  $\langle U, \alpha_U \rangle$  es un homeomorfismo, podemos transportar  $\alpha_U$  a  $\langle U, \alpha_U \rangle$  mediante  $p_*$ . Sólo hemos de comprobar que estas  $\mathbb{A}$ -orientaciones son

consistentes dos a dos. Ahora bien, puesto que la intersección de dos abiertos básicos es un nuevo abierto básico, basta probar que si

$$(x, \alpha_x) \in \langle U, \alpha_U \rangle \subset \langle U', \alpha_{U'} \rangle$$

entonces las  $\mathbb{A}$ -orientaciones definidas en el punto con uno y otro abierto inducen el mismo elemento de  $H_n(\langle U', \alpha_{U'} \rangle, \langle U', \alpha_{U'} \rangle \setminus \{(x, \alpha_x)\})$ . Esto se sigue de considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_n(\langle U', \alpha_{U'} \rangle, \langle U', \alpha_{U'} \rangle \setminus \{(x, \alpha_x)\}) & \xrightarrow{p_*} & H_n(U', U' \setminus \{x\}) \\ \uparrow i_* & & \uparrow i_* \\ H_n(\langle U, \alpha_U \rangle, \langle U, \alpha_U \rangle \setminus \{(x, \alpha_x)\}) & \xrightarrow{p_*} & H_n(U, U \setminus \{x\}) \end{array}$$

A la derecha tenemos  $\alpha_x$  visto como elemento de cualquiera de los dos grupos y a la izquierda tenemos las  $\mathbb{A}$ -orientaciones en  $(x, \alpha_x)$ . Como las de la derecha se corresponden, las de la izquierda también.

Por simplicidad, supongamos ahora que  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ . Para cada punto  $x \in V$ , podemos tomar un entorno  $U$  que cumpla el teorema 7.4. Si  $\alpha_U$  es un generador de  $H_n(V, V \setminus U)$ , el otro posible es  $-\alpha_U$ . Éstas son las dos únicas orientaciones locales sobre  $U$ , y determinan dos abiertos  $U_1 = \langle U, \alpha_U \rangle$  y  $U_2 = \langle U, -\alpha_U \rangle$  en  $\tilde{V}_1$  tales que  $p^{-1}[U] = U_1 \cup U_2$ ,  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  y si trasladamos a través de las restricciones de  $p$  las orientaciones que  $\tilde{V}_1$  induce en cada  $U_i$ , obtenemos las dos orientaciones de  $U$ .

La relación esencial entre la variedad de orientaciones de una variedad  $V$  y la orientabilidad de  $V$  viene dada por el teorema siguiente:

**Teorema 7.14** *Una variedad conexa  $V$  es orientable si y sólo si su variedad de orientaciones es disconexa, y en tal caso consta exactamente de dos componentes conexas, ambas homeomorfas a  $V$  a través de la proyección.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $V$  es orientable, y sea  $\alpha$  una orientación. Llamemos  $U_1 = \{(x, \alpha_x) \mid x \in V\}$  y  $U_2 = \{(x, -\alpha_x) \mid x \in V\}$ . Es fácil ver que son dos abiertos disjuntos en  $\tilde{V}_1$ , que  $\tilde{V}_1 = U_1 \cup U_2$  y que la restricción de  $p$  determina homeomorfismos  $U_i \cong V$ .

Supongamos ahora que  $\tilde{V}_1$  es disconexa. Si  $C$  es una componente conexa,  $p[C]$  es abierto en  $V$ . Veamos que también es cerrado. En efecto, si  $x \in V \setminus p[C]$ , tomamos un entorno abierto conexo  $U$  de  $x$  que cumpla el teorema 7.4. Entonces  $p^{-1}[U] = \langle U, \alpha_U \rangle \cup \langle U, -\alpha_U \rangle$ , donde  $\alpha_U$  es una orientación en  $U$ . Ninguno de estos dos abiertos básicos puede cortar a  $C$ , luego  $U \subset V \setminus p[C]$ . Así pues,  $p[C] = V$ . A su vez, esto implica que  $\tilde{V}_1$  tiene exactamente dos componentes conexas y que  $p$  restringida a cada una de ellas es biyectiva. Como también es continua y abierta, es de hecho un homeomorfismo. Como  $\tilde{V}_1$  es orientable, lo mismo le sucede a sus componentes conexas y también a  $V$ . ■

Para entender mejor este resultado conviene tener algún ejemplo concreto:

**Ejemplo** Sea  $V$  el plano proyectivo real  $P^2(\mathbb{R})$ . Vamos a probar que su superficie de orientaciones es homeomorfa a la esfera  $S^2$ . Consideramos la proyección canónica  $p : S^2 \rightarrow P^2(\mathbb{R})$ . Abreviaremos  $x' = p(x)$ ,  $U' = p[U]$ .

Fijemos un generador  $\alpha$  de  $H_2(S^2)$ . Para cada  $x \in S^2$ , tomamos un entorno  $U$  donde  $p$  sea inyectiva (es decir, que no llegue a abarcar un hemisferio). Entonces  $p_*$  transforma la restricción de  $\alpha_x$ , visto como elemento de  $H_2(U, U \setminus \{x\})$ , en una orientación local en  $x'$ , que representaremos por  $\alpha'_x$ . Definimos la aplicación  $\phi : S^2 \rightarrow \tilde{V}_1$  mediante  $\phi(x) = (x', \alpha'_x)$ . Vamos a demostrar que  $\phi$  es un homeomorfismo que (obviamente) hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{p} & P^2(\mathbb{R}) \\ \phi \downarrow & \nearrow p & \\ \tilde{V}_1 & & \end{array}$$

Para probar que  $\phi$  es biyectiva es suficiente demostrar que para todo  $x \in S^2$  se cumple que  $\phi(x) \neq \phi(-x)$ , pues entonces estas dos imágenes serán las dos únicas antiimágenes de  $x'$  en  $\tilde{V}_1$ , con lo que  $\phi$  biyectará cada par de antiimágenes de cada punto de  $V$  en  $S^2$  con su par correspondiente de antiimágenes en  $\tilde{V}_1$ .

Sea  $f : S^2 \rightarrow S^2$  la aplicación antípoda. Sea  $U$  un entorno de  $x$  donde  $p$  sea inyectiva. Consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(S^2) & \xrightarrow{i_*} & H_2(S^2, S^2 \setminus \{x\}) & \xleftarrow{i_*} & H_2(U, U \setminus \{x\}) & \xrightarrow{p_*} & H_2(U', U' \setminus \{x'\}) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow 1 \\ H_2(S^2) & \xrightarrow{i_*} & H_2(S^2, S^2 \setminus \{-x\}) & \xleftarrow{i_*} & H_2(-U, -U \setminus \{-x\}) & \xrightarrow{p_*} & H_2(U', U' \setminus \{x'\}) \end{array}$$

Si partimos de  $\alpha$  en la esquina superior izquierda y recorremos la fila superior acabamos en  $\alpha'_x$ . Similarmente, si recorremos la fila inferior partiendo de  $\alpha$  llegamos a  $\alpha'_{-x}$ . Ahora bien, según el teorema 3.14, el isomorfismo  $f_*$  de la izquierda es la multiplicación por  $-1$ . Esto nos lleva a que  $\alpha'_x = -\alpha'_{-x}$ , luego  $\phi(x) \neq \phi(-x)$ .

Para probar que  $\phi$  es un homeomorfismo basta observar que si  $U$  es un abierto en  $S^2$  que no contenga pares de puntos antípodas, entonces  $\phi[U] = \langle U, j_U^{S^2}(\alpha) \rangle$ .

Si a  $S^2$  le quitamos dos casquetes antípodas, obtenemos una superficie cilíndrica, y si a  $P^2(\mathbb{R})$  le quitamos la imagen común de estos casquetes obtenemos el espacio que resulta de identificar los pares de puntos antípodas en el cilindro, que, como es fácil ver, es una cinta de Möbius. Por otra parte, también es fácil convencerse de que la imagen por  $\phi$  del cilindro es la superficie de orientaciones de la cinta de Möbius, luego ya sabemos su estructura topológica.

Según el teorema anterior, hemos probado que el plano proyectivo y la cinta de Möbius son superficies no orientables. Sabemos que todas las superficies  $N_h$

contienen abiertos homeomorfos a cintas de Möbius, luego ninguna de ellas es orientable. De todos modos, luego probaremos esto de forma más elegante.

Ahora tenemos un ejemplo de que la orientabilidad no se conserva por homotopías: la cinta de Möbius es homotópica a la circunferencia.

Para terminar la discusión de estos ejemplos, tratemos de dar una interpretación intuitiva de los resultados que hemos obtenido: Consideremos un punto  $x$  de una cinta de Möbius  $V$  y supongamos que trazamos un triángulo a su alrededor, especificando un sentido de giro en su frontera. Esto es tanto como especificar un 2-símplice que a su vez determina una orientación local  $\alpha_x$ . Con esto podemos pensar que, no sólo estamos en un punto de la cinta  $V$ , sino de hecho en el punto  $(x, \alpha_x)$  de su superficie de orientaciones. Si movemos el triángulo a lo largo de la cinta, con ello vamos especificando orientaciones locales en los puntos sobre los que pasamos, todas ellas consistentes entre sí. Por consiguiente, el desplazamiento determina un desplazamiento sobre la superficie de orientaciones. Pero cuando damos una vuelta completa a la cinta, la orientación que el triángulo determina en  $x$  resulta ser  $-\alpha_x$ , por lo que no hemos dado una vuelta completa en  $\tilde{V}_1$ , sino tan sólo media vuelta: estamos en el punto  $(x, -\alpha_x)$ , antípoda del punto de partida. Sólo cuando damos una segunda vuelta completamos un arco cerrado en la superficie de orientaciones. ■

## 7.2 La homología de las variedades topológicas

En esta sección obtendremos algunos resultados generales sobre la homología de las variedades topológicas. Los argumentos se basan en los resultados de la sección anterior. Como ya habíamos anticipado, aunque toda la información relevante de la variedad  $\tilde{V}$  está contenida de hecho en la variedad de orientaciones  $\tilde{V}_1$ , por razones técnicas es preferible trabajar con toda  $\tilde{V}$ . Hemos de introducir el concepto siguiente:

**Definición 7.15** Sea  $V$  una variedad topológica y  $A \subset V$ . Una *sección* sobre  $A$  es una aplicación continua  $s : A \rightarrow \tilde{V}$  tal que  $p(s(x)) = x$  para todo  $x \in A$ . Llamaremos  $\Gamma[A]$  al conjunto de todas las secciones sobre  $A$ . Las secciones sobre  $V$  se llaman *secciones globales*.

Para cada  $x \in A$ , representaremos por  $s'(x)$  a la segunda componente de  $s(x)$  de modo que  $s(x) = (x, s'(x))$ . El conjunto  $\Gamma[A]$  adquiere estructura de  $\mathbb{A}$ -módulo con las operaciones dadas por

$$(s_1 + s_2)(x) = (x, s'_1(x) + s'_2(x)), \quad (as)(x) = (x, as'(x)).$$

El elemento neutro es la *sección nula* dada por  $s(x) = (x, 0)$ .

Observemos que un abierto  $U \subset V$  es  $\mathbb{A}$ -orientable si y sólo si existe una sección  $s \in \Gamma[U]$  tal que  $s[U] \subset \tilde{V}_1$ , pues en tal caso  $\alpha_x = s'(x)$  es una  $\mathbb{A}$ -orientación en  $U$  y, recíprocamente, si  $\alpha$  es una  $\mathbb{A}$ -orientación en  $U$ , entonces  $s(x) = (x, \alpha_x)$  es una sección en las condiciones indicadas.

Esto nos permite generalizar la noción de orientación a subconjuntos no necesariamente abiertos. Diremos que una variedad topológica  $V$  es  $\mathbb{A}$ -orientable sobre un subconjunto arbitrario  $A$  si existe una sección  $s \in \Gamma[A]$  con imágenes en  $\tilde{V}_1$ . No hay riesgo de confusión si a tales secciones las llamamos simplemente  $\mathbb{A}$ -orientaciones en  $A$ . Hemos probado que si  $A$  es abierto esta noción coincide con la que ya teníamos definida. El teorema siguiente determina la estructura de los módulos  $\Gamma[A]$ :

**Teorema 7.16** *Si  $V$  es una variedad topológica  $\mathbb{A}$ -orientable sobre un subconjunto  $A$  entonces existe un homeomorfismo  $\phi : p^{-1}[A] \longrightarrow A \times \mathbb{A}$  (considerando a  $\mathbb{A}$  como espacio discreto) que hace conmutativo el diagrama siguiente:*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}[A] & \xrightarrow{\phi} & A \times \mathbb{A} \\ & \searrow p & \downarrow \pi \\ & & A \end{array}$$

(donde  $\pi$  es la proyección en la primera componente).

Por consiguiente  $\Gamma[A]$  es isomorfo al módulo de todas las aplicaciones continuas de  $A$  en  $\mathbb{A}$ . Si  $A$  tiene un número finito  $k$  de componentes conexas, entonces  $\Gamma[A] \cong \mathbb{A}^k$ .

DEMOSTRACIÓN: Dada una  $\mathbb{A}$ -orientación  $s' : A \longrightarrow \tilde{V}_1$ , para cada  $x \in A$  tenemos que  $s'(x)$  es un generador del módulo  $H_n(V, V \setminus \{x\})$ , luego para cada  $(x, \alpha_x) \in p^{-1}[A]$  existe un único  $a_x \in \mathbb{A}$  tal que  $\alpha_x = a_x s'(x)$ . Definimos  $\phi(x, \alpha_x) = (x, a_x)$ .

Si  $U$  es un entorno abierto de  $x$  donde  $\alpha_x$  tiene una prolongación única  $\alpha_U$ , entonces  $\phi$  biyecta  $\langle U, \alpha_U \rangle \cap p^{-1}[A]$  con  $(U \cap A) \times \{a_x\}$ . De aquí se sigue que  $\phi$  es un homeomorfismo. Claramente cumple lo pedido.

El isomorfismo indicado en el enunciado es el que a cada función continua  $f : A \longrightarrow \mathbb{A}$  le hace corresponder la composición de  $a \mapsto (a, f(a))$  con  $\phi^{-1}$ . ■

Observemos que, a través del isomorfismo descrito en el teorema anterior, las orientaciones de  $A$  se corresponden con las aplicaciones continuas  $f : A \longrightarrow \mathbb{A}$  cuya imagen está formada por unidades. Por consiguiente, si  $A$  tiene  $k$  componentes conexas, las orientaciones de  $A$  se corresponden a través del isomorfismo  $\Gamma[A] \cong \mathbb{A}^k$  con los vectores formados por unidades de  $\mathbb{A}$ . En particular, si  $A$  es conexo las orientaciones de  $A$  son simplemente los generadores (bases) de  $\Gamma[A]$ .

Por otra parte tenemos un homomorfismo canónico

$$j_A : H_n(V, V \setminus A) \longrightarrow \Gamma[A]$$

dado por  $j_A(\alpha)(x) = (x, j_x^A(\alpha))$ .

Hemos de comprobar que  $j_A(\alpha)$  es continua. En efecto, sea  $\alpha = [z]$ . Sea  $U = V \setminus |\partial z|$ . Como  $z$  es un cociclo relativo,  $A \subset U$ . Sea  $\alpha_U = [z] \in H_n(V, V \setminus U)$ . Claramente  $\alpha = j_A^U(\alpha_U)$ .

Dado  $x \in A$ , sea  $U_0 \subset U$  un entorno abierto de  $x$  en  $V$  tal que  $j_x^A(\alpha)$  se prolongue a  $\alpha_{U_0} \in H_n(V, V \setminus U_0)$ . Notemos que  $\langle U_0, \alpha_{U_0} \rangle$  es un entorno básico de  $j_A(\alpha)(x) = (x, j_x^A(\alpha))$ . Ahora basta observar que  $j_A(\alpha)[U_0 \cap A] \subset \langle U_0, \alpha_{U_0} \rangle$ . ■

Observemos que si  $A \subset B \subset V$ , tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_n(V, V \setminus B) & \xrightarrow{j_B} & \Gamma[B] \\ j_A^B \downarrow & & \downarrow r \\ H_n(V, V \setminus A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma[A] \end{array} \quad (7.2)$$

donde  $r$  es la restricción a  $A$ .

Diremos que una sección  $s \in \Gamma[A]$  tiene *soporte compacto* si existe un subespacio compacto  $K \subset A$  tal que  $s$  coincide con la sección nula en  $A \setminus K$ . Llamaremos  $\Gamma_c[A]$  al conjunto de las secciones de  $A$  con soporte compacto, que claramente es un submódulo de  $\Gamma[A]$ . Se entiende que si  $A$  es compacto entonces  $\Gamma_c[A] = \Gamma[A]$ .

Todos los resultados que perseguimos en esta sección se deducen del teorema siguiente:

**Teorema 7.17** *Sea  $V$  una variedad topológica  $n$ -dimensional y  $A$  un subconjunto cerrado de  $V$ . Entonces*

- a) *Para todo  $p > n$  se cumple  $H_p(V, V \setminus A) = 0$ .*
- b)  *$j_A : H_n(V, V \setminus A) \rightarrow \Gamma_c[A]$  es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que el teorema es obvio si  $A = \emptyset$ . También es fácil ver que  $j_A : H_n(V, V \setminus A) \rightarrow \Gamma_c[A]$ , pues si  $\alpha = [z] \in H_n(V, V \setminus A)$ , entonces  $K = A \cap |z|$  es un compacto tal que  $j_A(\alpha)$  se anula en  $A \setminus K$ . Dividimos la prueba en varios pasos:

1) *Si el teorema vale para los cerrados  $A_1, A_2$  y  $A_1 \cap A_2$ , entonces vale para  $A = A_1 \cup A_2$ .*

Consideramos la sucesión de Mayer-Vietoris asociada a la tríada exacta  $(V, V \setminus A_1, V \setminus A_2)$ . Para  $p > n$  nos da inmediatamente que  $H_p(V, V \setminus A) = 0$ . Para  $p = n$  formamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(V, V \setminus A) & \longrightarrow & H_n(V, V \setminus A_1) \oplus H_n(V, V \setminus A_2) & \longrightarrow & H_n(V, V \setminus (A_1 \cap A_2)) \\ & & j_A \downarrow & & j_{A_1} \oplus j_{A_2} \downarrow & & j_{A_1 \cap A_2} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_c[A] & \xrightarrow{(\tau_1, -\tau_2)} & \Gamma_c[A_1] \oplus \Gamma_c[A_2] & \xrightarrow{\tau_1 + \tau_2} & \Gamma_c[A_1 \cap A_2] \end{array}$$

La fila superior es la sucesión de Mayer-Vietoris, los homomorfismos del centro y la derecha son isomorfismos por hipótesis, y el teorema 3.1 nos da que  $j_A$  también es un isomorfismo.

2) El teorema se cumple si  $A$  es un compacto contenido en un abierto  $U$  homeomorfo a una bola de  $\mathbb{R}^n$  y que cumple el teorema 7.4.

En primer lugar veamos que podemos suponer que  $V = U$ . El teorema de escisión nos da el isomorfismo  $H_p(U, U \setminus A) \cong H_p(V, V \setminus A)$ , luego la parte a) podemos probarla sobre  $U$ . Similarmente, el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(V, V \setminus A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma[A] \\ i_* \uparrow & \nearrow j_A & \\ H_n(U, U \setminus A) & & \end{array}$$

reduce el apartado b) al caso  $V = U$ . Más aún, ahora es claro que podemos suponer que  $U$  es de hecho una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$ . Distinguiamos tres casos:

2.1)  $A$  es un cubo de dimensión  $\leq n$ .

Como  $U$  es contractible, la sucesión de homología del par  $(U, U \setminus A)$  nos da, para  $p > n$ ,

$$H_p(U, U \setminus A) \cong H_{p-1}(U \setminus A) \cong H_{p-1}(S^{n-1}) = 0.$$

Respecto a b), por la nota tras el teorema 7.4 sabemos que  $A$  cumple dicho teorema (cumple lo que allí se afirma sobre  $U$ ), es decir, que si tomamos  $x \in A$  tenemos que  $j_x^A$  es un isomorfismo. Sea  $\alpha_x \in H_n(U, U \setminus x)$  una orientación local en  $x$  y  $\alpha_U \in H_n(U, U \setminus A)$  tal que  $j_x^A(\alpha_U) = \alpha_x$ . Tenemos, pues, que  $H_n(U, U \setminus A)$  es un módulo libre de rango 1 y  $\alpha_U$  es una base. Por otra parte, el teorema 7.16 nos dice que mismo sucede con el módulo  $\Gamma[A]$ , luego basta probar que  $j_A(\alpha_U)$  es una base de  $\Gamma[A]$ .

Este mismo teorema nos hace corresponder los elementos de  $\Gamma[A]$  con las aplicaciones constantes de  $A$  en  $\mathbb{A}$  y, de aquí, con los elementos de  $\mathbb{A}$ . Concretamente, la imagen de  $j_A(\alpha_U)$  es la segunda componente de  $\phi(j_A(\alpha_U)(x))$ . Calculamos:

$$\phi(j_A(\alpha_U)(x)) = \phi(x, \alpha_x) = (x, 1),$$

y como 1 es una base de  $\mathbb{A}$ , tenemos la conclusión.

2.2)  $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$  es una unión finita de cubos.

Razonamos por inducción sobre  $m$ . El caso  $m = 1$  es el anterior. Si vale para menos de  $m$  cubos, entonces vale para  $A' = A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}$ , también para  $A_m$  y para  $A' \cap A_m$ , que es unión de a lo sumo  $m - 1$  cubos (tal vez de dimensiones menores, pero eso no importa). Por el caso 1 el teorema vale también para  $A$ .

2.3)  $A \subset U$  es un compacto arbitrario.

Veamos en primer lugar que  $j_A$  es suprayectiva. Tomamos  $s \in \Gamma[A]$ . Al cortar con  $s[A]$  las componentes conexas de  $\tilde{V}$  obtenemos una partición en abiertos disjuntos, y como  $s[A]$  es compacto sólo puede cortar a un número finito de



componentes. Como  $s$  es un homeomorfismo en la imagen, tenemos una descomposición  $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$  en compactos disjuntos, de modo que cada  $s[A_i]$  está contenido en una componente conexa de  $\tilde{V}$ .

Veamos que podemos suponer que  $m = 1$  o, dicho de otro modo, que si probamos que cada restricción  $s|_{A_i}$  tiene una antiimagen en  $H_n(U, U \setminus A_i)$  entonces  $s$  tiene una antiimagen en  $H_n(U, U \setminus A)$ . En efecto, digamos que  $j_{A_i}(\alpha_i) = s|_{A_i}$ , para  $i = 1, \dots, m$ . Sean  $U_i$  abiertos disjuntos dos a dos tales que  $A_i \subset U_i \subset U$ . El teorema de escisión nos da el isomorfismo  $H_n(U_i, U_i \setminus A_i) \cong H_n(U, U \setminus A_i)$ , por lo que podemos tomar un cociclo relativo  $z_i \in Z_n(U_i, U_i \setminus A_i)$  tal que  $\alpha_i = [z_i]$ . Definimos  $\alpha = [z_1 + \dots + z_m]$ . Entonces, si  $x \in A_i$ , tenemos que  $j_A(\alpha)(x) = (x, j_x^A(\alpha)) = (x, [z_i]) = (x, j_x^{A_i}(\alpha_i)) = s|_{A_i}(x) = s(x)$ . Por consiguiente  $s = j_A(\alpha)$ .

Según esto, podemos suponer que  $s[A]$  está contenido en una componente conexa  $C$  de  $\tilde{V}$ . Observemos ahora que  $p|_C : C \rightarrow U$  es un homeomorfismo. En efecto, tomemos un punto cualquiera de  $C$ , que será de la forma  $(x, a\alpha_x)$ , donde  $a \in \mathbb{A}$  y  $\alpha_x$  es una orientación local en  $x$ . Si  $\beta$  es una orientación en  $U$ , entonces  $\alpha_x = b\beta_x$ , para cierta unidad  $b \in \mathbb{A}$ , y  $\alpha = b\beta$  es una orientación en  $U$  que extiende a  $\alpha_x$ . Es fácil ver que  $C = \{(y, a\alpha_y) \mid y \in U\}$ , de donde se sigue inmediatamente nuestra afirmación sobre  $p|_C$ .

Por consiguiente,  $s^* = (p|_C)^{-1} \in \Gamma[U]$  es una extensión de  $s$ . Para cada punto  $x \in A$  tomamos un cubo que contenga a  $x$  en su interior. Por compacidad podemos extraer una unión finita  $A'$  de estos cubos tal que  $A \subset A'$ . Consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U \setminus A') & \xrightarrow{j_{A'}} & \Gamma[A'] \\ j_{A'} \downarrow & & \downarrow r \\ H_n(U, U \setminus A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma[A] \end{array}$$

En  $\Gamma[A']$  tenemos a  $s^*|_{A'}$ , que, por el apartado anterior, tiene antiimagen respecto a  $j_{A'}$ . Por otra parte,  $r(s^*|_{A'}) = s$ , luego la conmutatividad nos da que  $s$  también tiene antiimagen.

Tomemos ahora  $\alpha \in H_p(U, U \setminus A)$ , con  $p \geq n$ . Si  $p = n$  suponemos además que  $j_A(\alpha) = 0$ . Hemos de probar que  $\alpha = 0$ , con lo que tendremos a la vez a) y la parte de b) que nos falta.

Sea  $\alpha = [z]$  y  $U' = U \setminus |\partial z|$ . Como  $z$  es un cociclo relativo tenemos que  $A \subset U' \subset U$ . Además  $U'$  es abierto en  $U$ . Llamemos  $\alpha' = [z] \in H_p(U, U \setminus U')$ .

Si  $p = n$  tenemos que para todo  $x \in A$  se cumple  $j_x^{U'}(\alpha') = j_x^A(\alpha) = 0$ . Por el teorema 7.4 el punto  $x$  tiene un entorno  $U_x \subset U$  de modo que si  $y \in U_x$  entonces  $j_y^{U'}(\alpha') = 0$ . La unión de estos entornos es un abierto  $U'' \subset U$  que contiene a  $A$  y de modo que  $j_x^{U'}(\alpha') = 0$  para todo  $x \in U''$ . Formamos una unión finita de cubos  $A'$  igual que antes, de modo que  $A \subset A' \subset U''$ , con lo que  $j_{A'}(j_{A'}^{U'}\alpha') = 0$ .

Si  $p > n$  tomamos directamente  $A \subset A' \subset U'$ . En cualquier caso, el apartado anterior nos permite concluir que  $j_{A'}^{U'}(\alpha') = 0$ , luego  $\alpha = j_A^{A'}(j_{A'}^{U'}(\alpha')) = 0$ .

3) *El teorema se cumple si  $A$  es un compacto arbitrario.*

Para cada  $x \in A$  tomamos un entorno  $U_x$  en las condiciones del apartado anterior. A su vez consideramos un abierto tal que  $x \in W_x \subset \overline{W}_x \subset U_x$ . Extraemos un subcubrimiento finito de los  $W_x$ . Así  $A$  es unión de un número finito de compactos  $A \cap \overline{W}_x$ , cada uno de los cuales está en las hipótesis del caso anterior. Concluimos por inducción sobre el número de estos compactos, usando el paso 1.

4) *Si  $U$  es un abierto en  $V$  de clausura compacta y  $A$  es cerrado en  $U$  (no necesariamente en  $V$ ) entonces el teorema se cumple para  $U$  (como variedad) y para  $A$ .*

Vamos a considerar la sucesión de homología asociada a la terna

$$(V, U \cup (V \setminus \overline{U}), (U \setminus A) \cup (V \setminus \overline{U})),$$

pero antes observamos que el teorema de escisión nos da el isomorfismo

$$H_p(U, U \setminus A) \cong H_p(U \cup (V \setminus \overline{U}), (U \setminus A) \cup (V \setminus \overline{U})).$$

Las hipótesis del teorema de escisión se cumplen porque  $V \setminus \overline{U}$  es abierto y cerrado en  $U \cup (V \setminus \overline{U})$ . Teniendo en cuenta este isomorfismo, la sucesión exacta indicada queda así:

$$H_{p+1}(V, U \cup (V \setminus \overline{U})) \longrightarrow H_p(U, U \setminus A) \longrightarrow H_p(V, (U \setminus A) \cup (V \setminus \overline{U})).$$

Los grupos de los extremos son, respectivamente,  $H_{p+1}(V, V \setminus (\overline{U} \setminus U))$  y  $H_p(V, V \setminus A \cup (\overline{U} \setminus U))$ . El hecho de que  $A$  sea cerrado en  $U$  se traduce en que su clausura en  $V$  cumple  $\overline{A} \setminus A \subset \overline{U} \setminus U$ , por lo que  $A \cup (\overline{U} \setminus U) = \overline{A} \cup (\overline{U} \setminus U)$ . Teniendo esto en cuenta, ambos grupos son nulos (para  $p > n$ ) por el caso anterior, luego también  $H_p(U, U \setminus A) = 0$ . Para  $p = n$  tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(U, U \setminus A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(V, (U \setminus A) \cup (V \setminus \overline{U})) & \xrightarrow{i_*} & H_n(V, U \cup (V \setminus \overline{U})) \\ & & \downarrow j_A & & \downarrow j_{\overline{A} \cup (\overline{U} \setminus U)} & & \downarrow j_{\overline{U} \setminus U} \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_c[A] & \xrightarrow{e} & \Gamma[\overline{A} \cup (\overline{U} \setminus U)] & \xrightarrow{r} & \Gamma[\overline{U} \setminus U] \end{array}$$

Observemos que  $\Gamma_c[A]$  se refiere a la variedad  $U$ , mientras que los otros dos módulos se refieren a la variedad  $V$ . De todos modos, podemos identificar  $\tilde{U}$  con  $p^{-1}[U] \subset \tilde{V}$  identificando cada grupo  $H_n(U, U \setminus \{x\})$  con  $H_n(V, V \setminus \{x\})$ . El homomorfismo  $e$  asigna a cada  $s \in \Gamma_c[A]$  su extensión  $\tilde{s}$  a  $\overline{A} \cup (\overline{U} \setminus U)$  dada por  $\tilde{s}(x) = (x, 0)$  para todo  $x \notin A$ . El hecho de que  $s$  tenga soporte compacto garantiza que  $\tilde{s}$  es continua.

La fila inferior es exacta, pues si  $s \in \Gamma[\overline{A} \cup (\overline{U} \setminus U)]$  se anula en  $\overline{U} \setminus U$ , teniendo en cuenta que  $\overline{A} \setminus A \subset \overline{U} \setminus U$ , tenemos que el conjunto de puntos donde  $s$  no se anula está contenido en  $A$ , y es cerrado en  $\overline{A}$  (por la continuidad de la aplicación  $m : \tilde{V} \longrightarrow \tilde{A}$ ), luego  $s|_A$  tiene soporte compacto y  $e(s|_A) = s$ .

Los dos homomorfismos verticales de la derecha son isomorfismos por el caso anterior, luego el teorema 3.1 nos da que  $j_A$  también lo es. ■

5) *El caso general.*

Dado  $s \in \Gamma_c[A]$  con soporte compacto  $K$ , tomamos un abierto  $U$  que contenga a  $K$  y que tenga clausura compacta (cubrimos  $K$  con un número finito de cerrados homeomorfos a bolas cerradas de  $\mathbb{R}^n$ ). Consideramos  $A' = A \cap U$  y  $s' = s|_{A'}$ . El caso anterior aplicado a  $A'$  y la conmutatividad del diagrama siguiente nos dan que  $s$  tiene antiimagen por  $j_A$ .

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U \setminus A') & \xrightarrow{i_*} & H_n(V, V \setminus A) \\ j_{A'} \downarrow & & \downarrow j_A \\ \Gamma_c[A'] & \xrightarrow{e} & \Gamma_c[A] \end{array}$$

Ahora tomamos  $\alpha \in H_p(V, V \setminus A)$  y para  $p = n$  suponemos además que  $j_A(\alpha) = 0$ . Basta probar que  $\alpha = 0$ . Sea  $\alpha = [z]$  y tomemos un abierto  $U$  de clausura compacta que contenga al soporte  $|z|$ . Tomamos  $A' = A \cap U$  y  $\alpha' = [z] \in H_p(U, U \setminus A')$ . Si  $p > n$  tenemos que  $\alpha' = 0$  y  $\alpha = i_*(\alpha') = 0$ . Si  $p = n$  el mismo diagrama anterior (teniendo en cuenta que  $e$  es inyectiva) nos da que  $j_{A'}(\alpha') = 0$ , luego  $\alpha' = 0$  y de nuevo  $\alpha = 0$ . ■

Si aplicamos el teorema para  $A = X$  obtenemos:

**Teorema 7.18** *Si  $V$  es una variedad topológica de dimensión  $n$ , entonces se cumple que  $H_p(V) = 0$  para todo  $p > n$ .*

Así pues, la homología de una variedad topológica  $n$ -dimensional es no trivial a lo sumo en el intervalo de dimensiones de 0 a  $n$ . Si no es compacta, el grupo de dimensión  $n$  también es nulo:

**Teorema 7.19** *Sea  $V$  una variedad topológica  $n$ -dimensional y  $A \subset V$  un cerrado conexo no compacto. Entonces  $H_n(V, V \setminus A) = 0$ . En particular, si  $V$  es conexa y no compacta,  $H_n(V) = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que  $\Gamma_c[A] = 0$ , pero si  $s \in \Gamma_c[A]$ , entonces por conexión  $s \circ m$  es constante, y como  $s$  se anula fuera de un compacto (que no puede ser  $A$ ), necesariamente  $s \circ m = 0$ , es decir,  $s = 0$ . ■

Aplicando el teorema 7.16 concluimos:

**Teorema 7.20** *Sea  $V$  una variedad topológica  $n$ -dimensional y  $A \subset V$  un subconjunto compacto  $\mathbb{A}$ -orientable con un número finito  $k$  de componentes conexas. Entonces  $H_n(V, V \setminus A) \cong \mathbb{A}^k$ .*

Para las variedades compactas conexas tenemos una caracterización muy simple de la orientabilidad en términos de su homología:

**Teorema 7.21** *Si  $V$  es una variedad  $n$ -dimensional compacta y conexa, entonces*

$$H_n(V) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } V \text{ es } \mathbb{A}\text{-orientable,} \\ \mathbb{A}_{(2)} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

*En particular, si  $\mathbb{A}$  es un dominio íntegro se cumple que*

$$H_n(V) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } V \text{ es } \mathbb{A}\text{-orientable,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que  $\mathbb{A}_{(2)}$  es el núcleo de la multiplicación por 2 en  $\mathbb{A}$ . Equivalentemente,  $\mathbb{A}_{(2)} = \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{A}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . La segunda parte del teorema es consecuencia de la primera. En efecto, si  $\mathbb{A}$  tiene característica 2 entonces  $V$  es  $\mathbb{A}$ -orientable por el teorema 7.9 y si  $\mathbb{A}$  tiene característica distinta de 2 entonces  $\mathbb{A}_{(2)} = 0$  (aquí usamos que la característica de un dominio íntegro es nula o prima). Probaremos primero este caso porque el argumento es mucho más simple.

Ante todo, si  $V$  es  $\mathbb{A}$ -orientable (para cualquier  $\mathbb{A}$ ) basta aplicar el teorema anterior. Supongamos ahora que  $H_n(V) \neq 0$  y veamos que  $V$  es orientable. Tenemos entonces que  $\Gamma[V] \neq 0$ , es decir, que existe una sección global  $s \in \Gamma[V]$ ,  $s \neq 0$ . Por conexión,  $s \circ m$  es constante y no nulo. Digamos que  $m(s(x)) = [a]$  para todo  $x \in V$ . Esto significa que  $s(x) = as'(x)$ , para cierto generador  $s'(x) \in H_n(V, V \setminus \{x\})$  unívocamente determinado (aquí suponemos que  $\mathbb{A}$  es un dominio íntegro). La aplicación  $x \mapsto (x, s'(x))$  es claramente continua, por lo que  $s'$  es una  $\mathbb{A}$ -orientación de  $V$ .

Veamos ahora un argumento más general, válido para un anillo  $\mathbb{A}$  arbitrario. Supongamos que  $V$  no es  $\mathbb{A}$ -orientable y sea  $s \in \Gamma[V]$  una sección no nula. Digamos que  $x \in V$  cumple  $s(x) \neq 0$ .

Podemos identificar  $H_n^{\mathbb{A}}(V, V \setminus \{x\}) = H_n^{\mathbb{Z}}(V, V \setminus \{x\}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}$  a través del isomorfismo natural. Si  $\alpha_x$  es una base de  $H_n^{\mathbb{Z}}(V, V \setminus \{x\})$ , entonces  $\alpha_x \otimes 1$  es una base de  $H_n^{\mathbb{Z}}(V, V \setminus \{x\}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}$ . Por lo tanto  $s(x) = (x, \alpha_x \otimes a)$ , para cierto  $a \in \mathbb{A}$  no nulo.

Es claro que  $s[V]$  es una componente conexa de  $\tilde{V}_{\mathbb{A}}$  (es fácil ver que es abierto y, ciertamente, es cerrado y conexo). Por otra parte, también es fácil comprobar que la aplicación  $\phi_a : (\tilde{V}_1)_{\mathbb{Z}} \rightarrow \tilde{V}_{\mathbb{A}}$  dada por  $(y, \alpha_y) \mapsto (y, \alpha_y \otimes a)$  es continua y  $(\tilde{V}_1)_{\mathbb{Z}}$  es conexo por el teorema 7.14 (si  $V$  fuera orientable sería  $\mathbb{A}$ -orientable). Por consiguiente  $\phi_a[(\tilde{V}_1)_{\mathbb{Z}}]$  es un conexo en  $\tilde{V}_{\mathbb{A}}$  que contiene a  $s(x)$ . Necesariamente,  $\phi_a[(\tilde{V}_1)_{\mathbb{Z}}] \subset s[V]$ . Ahora bien, la restricción de  $p$  a  $s[V]$  es la inversa de  $s$ . En particular es biyectiva, pero sucede que la restricción de  $p$  a  $\phi_a[(\tilde{V}_1)_{\mathbb{Z}}]$  ya es biyectiva, luego ha de ser  $s[V] = \phi_a[(\tilde{V}_1)_{\mathbb{Z}}]$ .

Pero  $(x, \alpha_x \otimes a)$  y  $(x, -\alpha_x \otimes a)$  son dos elementos de  $\phi_a[(\tilde{V}_1)_{\mathbb{Z}}]$  con la misma proyección, lo que obliga a que  $\alpha_x \otimes a = \alpha_x \otimes (-a)$  o, equivalentemente, a que  $\alpha_x \otimes 2a = 0$ . Puesto que  $\alpha_x \otimes 1$  es una base, esto sólo puede suceder si  $2a = 0$ .

En resumen,  $s$  es la sección  $s_a$  dada por  $s_a(x) = (x, \alpha_x \otimes a)$ , donde  $\alpha_x$  es cualquiera de las dos orientaciones locales en  $x$ . Es claro que  $s_a$  está definido para cualquier  $a \in \mathbb{A}_{(2)}$ , luego  $\Gamma[V] = \{s_a \mid a \in \mathbb{A}_{(2)}\}$ , y es claro que  $a \mapsto s_a$  es un isomorfismo. Así pues,  $\mathbb{A}_{(2)} \cong \Gamma[V] \cong H_n(V)$ . ■

Ahora es inmediato que las variedades compactas  $S^n$ ,  $M_g$ ,  $P^{2n+1}(\mathbb{R})$  y  $P^n(\mathbb{C})$  son orientables, mientras que las variedades  $N_h$  y  $P^{2n}(\mathbb{R})$  no lo son.

Ahora podemos reducir una  $\mathbb{A}$ -orientación de una variedad compacta conexa a una clase de homología:

**Teorema 7.22** *Si  $V$  es una variedad compacta conexa  $\mathbb{A}$ -orientable  $n$ -dimensional, las  $\mathbb{A}$ -orientaciones de  $V$  están en correspondencia biunívoca con los generadores de  $H_n(V)$ , de modo que si  $\zeta \in H_n(V)$  es un generador, su orientación  $\alpha$  asociada es la dada por  $\alpha_x = j_x^V(\zeta)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Según la observación posterior al teorema 7.16 tenemos que las  $\mathbb{A}$ -orientaciones de  $V$  (entendidas como secciones) son los generadores de  $\Gamma[V]$ , luego por 7.17 se corresponden con los generadores de  $H_n(V)$  a través del isomorfismo  $j_V$ . Si  $\zeta \in H_n(V)$ , su orientación asociada  $\alpha$  es la determinada por la sección  $j_V(\zeta)$ , o sea, la que cumple  $j_V(\zeta)(x) = (x, \alpha_x)$ , luego, por definición de  $j_V$ , es  $\alpha_x = j_x^V(\zeta)$ . ■

En las condiciones del teorema anterior, la clase  $\zeta$  que determina una  $\mathbb{A}$ -orientación de  $V$  prefijada se llama *clase fundamental* de  $V$  (respecto a dicha  $\mathbb{A}$ -orientación).

El teorema anterior nos aporta una pequeña información sobre los grupos de homología de dimensión  $n - 1$  sobre  $\mathbb{Z}$ :

**Teorema 7.23** *Sea  $V$  una variedad topológica conexa  $n$ -dimensional. Entonces la parte de torsión del grupo  $H_{n-1}(V)$  (sobre  $\mathbb{Z}$ ) es de orden 2 si  $V$  es compacta y no orientable, y es nula en caso contrario.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $V$  es compacta y orientable y  $m > 1$ , el teorema 5.37 nos da que

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &\cong H_n^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(V) \cong (H_n(V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \oplus \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(V), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \\ &\cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(V), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

de donde se sigue que  $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(V), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = 0$  para todo  $m > 1$ , lo que implica que  $H_{n-1}(V)$  no tiene torsión. Si  $V$  no es compacta llegamos a la misma conclusión, pues esta vez la cadena de isomorfismos empieza con el módulo trivial.

Si  $V$  es compacta no orientable y  $m$  es impar, el teorema anterior nos da también que  $H_n^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(V) = 0$ , por lo que concluimos igualmente que el módulo  $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(V), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  es trivial, y de aquí se sigue que el módulo de torsión de  $H_{n-1}(V)$  tiene orden potencia de 2. Ahora bien:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong H_n^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(V) \cong \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(V), \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \{x \in H_{n-1}(V) \mid 4x = 0\}.$$

Esto implica que  $H_{n-1}(V)$  no tiene elementos de orden 4 (o, de lo contrario,  $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(V)$  tendría al menos cuatro elementos) y sólo puede tener un elemento de orden 2. ■

### 7.3 Límites inductivos

Para enunciar los resultados más relevantes sobre la homología y la cohomología de las variedades topológicas necesitamos una construcción algebraica adicional.

**Definición 7.24** Un *conjunto dirigido* es un conjunto parcialmente ordenado  $I$  tal que si  $i_1, i_2 \in I$  existe un  $i \in I$  de modo que  $i_1 \leq i, i_2 \leq i$ . Un *sistema inductivo* (o *directo*) en una categoría es una familia de objetos  $\{M_i\}_{i \in I}$ , donde  $I$  es un conjunto dirigido, junto con una familia de morfismos  $\iota_{ij} : M_i \rightarrow M_j$ , definidos cuando  $i \leq j$ , tales que  $\iota_{ii}$  es la identidad y si  $i \leq j \leq k$  entonces  $\iota_{ij} \circ \iota_{jk} = \iota_{ik}$ .

Un *límite inductivo* (o *directo*) de un sistema inductivo es un objeto  $M$  junto con una familia de morfismos  $\iota_i : M_i \rightarrow M$  para cada  $i \in I$  tales que si  $i \leq j$  entonces  $\iota_{ij} \circ \iota_j = \iota_i$  y con la propiedad adicional de que si otro objeto  $N$  y otros morfismos  $\phi_i : M_i \rightarrow N$  cumplen también  $\iota_{ij} \circ \phi_j = \phi_i$ , entonces existe un único morfismo  $\phi : M \rightarrow N$  tal que  $\iota_i \circ \phi = \phi_i$  para todo  $i \in I$ .

De la definición se sigue inmediatamente que si un sistema inductivo tiene un límite inductivo, entonces éste es único salvo equivalencia. Lo representaremos por

$$M = \varinjlim_i M_i.$$

Similarmente, el morfismo  $\phi$  de la definición lo representaremos por  $\varinjlim_i \phi_i$ .

**Teorema 7.25** *Todo sistema inductivo de módulos tiene límite inductivo.*

DEMOSTRACIÓN: Dado un sistema inductivo  $\{M_i\}_{i \in I}$ , sea  $\tilde{M}$  la suma directa de los módulos  $M_i$ . Llamamos  $\tilde{\iota}_i : M_i \rightarrow \tilde{M}$  al monomorfismo canónico (es decir, el que lleva un  $x \in M_i$  al elemento de  $\tilde{M}$  cuya componente  $i$ -ésima es  $x$  y las restantes son nulas). Definimos  $M$  como el cociente de  $\tilde{M}$  respecto al submódulo generado por los elementos

$$\tilde{\iota}_j(\iota_{ij}(x)) - \tilde{\iota}_i(x), \quad i \leq j, \quad x \in M_i. \quad (7.3)$$

Sea  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  la proyección canónica y  $\iota_i = \tilde{\iota}_i \circ \pi$ . Entonces  $M$  y los homomorfismos  $\iota_i$  forman un límite inductivo del sistema dado.

En efecto, tomando clases en (7.3) obtenemos que  $\iota_j(\iota_{ij}(x)) = \iota_i(x)$ . Por otra parte, dados un módulo  $N$  y unos homomorfismos  $\phi_i : M_i \rightarrow N$  según la definición de límite inductivo, sea  $\tilde{\phi} : \tilde{M} \rightarrow N$  su suma directa. Las condiciones sobre los homomorfismos  $\phi_i$  hacen que  $\tilde{\phi}$  se anule sobre todos los elementos de la forma (7.3), por lo que induce un homomorfismo  $\phi : M \rightarrow N$  que cumple claramente lo requerido. La unicidad se sigue de que todo  $x \in M$  es de la forma  $x = \iota_{i_1}(x_{i_1}) + \cdots + \iota_{i_n}(x_{i_n})$ . ■

De la construcción del teorema anterior se sigue una propiedad técnica de utilidad sobre los límites inductivos de módulos:

**Teorema 7.26** Sea  $M = \varinjlim_i M_i$  un límite inductivo de módulos. Si un  $x \in M_i$  cumple  $\iota_i(x) = 0$ , entonces existe un  $j \geq i$  tal que  $\iota_{ij}(x) = 0$ .

DEMOSTRACIÓN: Es claro que podemos suponer que  $M$  es concretamente el límite inductivo construido en el teorema anterior. Entonces

$$\tilde{\iota}_i(x) = \sum_{uv} a_{uv} (\tilde{\iota}_v(\iota_{uv}(x_{uv})) - \tilde{\iota}_u(x_{uv})),$$

para ciertos pares  $(u, v) \in I \times I$  con  $u \leq v$ ,  $x_{uv} \in M_u$ ,  $a_{uv}$  escalares. Por definición de  $\tilde{\iota}_i$  esto significa que

$$x = \sum_{v=i} a_{vi} \iota_{vi}(x_{vi}) - \sum_{u=i} a_{iu} x_{iu} \quad (7.4)$$

$$0 = \sum_{v=k} a_{vk} \iota_{vk}(x_{vk}) - \sum_{u=k} a_{ku} x_{ku} \quad \text{para } k \neq i. \quad (7.5)$$

Tomemos un índice  $j \in I$  mayor que  $i$  y que todos los que aparecen en las ecuaciones anteriores. Aplicamos  $\iota_{ij}$  a (7.4),  $\iota_{kj}$  a (7.5) y sumamos:

$$\iota_{ij}(x) = \sum_{uv} a_{uv} (\iota_{vj}(\iota_{uv}(x_{uv})) - \iota_{uj}(x_{uv})) = 0.$$

■

Otro resultado útil es el siguiente:

**Teorema 7.27** Si  $\{M_i\}_{i \in I}$  es un sistema inductivo de módulos, entonces

$$\varinjlim_i M_i = \bigcup_{i \in I} \iota_i[M_i].$$

DEMOSTRACIÓN: Sea  $M$  el módulo de la derecha. Entonces el homomorfismo

$$\phi = \varinjlim \iota_i : \varinjlim M_i \longrightarrow M$$

cumple  $\iota_i \circ \phi = \iota_i$ , pero, viendo a  $\phi$  como aplicación  $\phi : \varinjlim M_i \longrightarrow \varinjlim M_i$ , tenemos que tanto  $\phi$  como la identidad cumplen la definición de límite inductivo. Así pues,  $\phi$  es la identidad, lo que implica la igualdad del enunciado. ■

En general, si  $\{M_i\}_{i \in I}$  y  $\{N_i\}_{i \in I}$  son dos sistemas inductivos en una cierta categoría y  $f_i : M_i \longrightarrow N_i$  son morfismos tales que  $\iota_{ij} \circ f_j = f_i \circ \iota_{ij}$ , entonces podemos aplicar la definición de límite inductivo (supuesto que ambos sistemas lo tengan) a los morfismos  $g_i = f_i \circ \iota_i$ , con lo que obtenemos un único morfismo  $f : \varinjlim M_i \longrightarrow \varinjlim N_i$  tal que  $\iota_i \circ f = f_i \circ \iota_i$ . Lo representaremos por  $\varinjlim f_i$ .

**Teorema 7.28** Todo sistema directo de complejos tiene límite inductivo.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\{C_i\}_{i \in I}$  un complejo inverso de módulos con homomorfismos  $\iota_{ij}$  (el teorema vale igualmente para complejos directos, pero lo vamos a usar para complejos inversos). Entonces,  $\{C_i^p\}_{i \in I}$  es un complejo directo de

módulos con los homomorfismos  $\iota_{ij}^p$ , luego existe su límite inductivo  $C^p$ . Sea  $d^p$  el límite inductivo de las cofronteras  $d_i^p$ . Tenemos que  $\iota_i^p \circ d = d_i \circ \iota_i^{p+1}$ .

Se cumple que el módulo graduado de los límites inductivos es un complejo con  $d$  como operador cofrontera. En efecto, si  $x \in C^p$ , entonces  $x = \iota_i^p(x_i)$ , para un cierto  $i \in I$  y un cierto  $x_i \in C_i^p$ , luego  $d(d(x)) = d(\iota_i^{p+1}(d_i(x_i))) = \iota_i^{p+2}(d_i(d_i(x_i))) = 0$ . Además es claro que los homomorfismos  $\iota_i^p$  determinan homomorfismos de complejos  $\iota_i : C_i \rightarrow C$ .

Si  $C'$  es otro complejo con homomorfismos  $\phi_i : C_i \rightarrow C'$  tales que  $\iota_{ij} \circ \phi_j = \phi_i$ , entonces lo mismo se cumple restringido a los submódulos de dimensión  $p$ , luego existe un único  $\phi^p : C^p \rightarrow C'^p$  tal que  $\iota_i^p \circ \phi^p = \phi_i^p$ .

Estos homomorfismos definen un homomorfismo de complejos  $\phi : C \rightarrow C'$ . En efecto, si  $x \in C^p$ , entonces  $x = \iota_i^p(x_i)$ , para un cierto  $i \in I$  y  $x_i \in C_i^p$ , luego

$$\begin{aligned} \phi^{p+1}(d(x)) &= \phi^{p+1}(d(\iota_i^p(x_i))) = \phi^{p+1}(\iota_i^{p+1}(d(x_i))) \\ &= \phi_i^{p+1}(d(x_i)) = d(\phi_i^p(x_i)) = d(\phi^p(\iota_i^p(x_i))) = d(\phi^p(x)). \end{aligned}$$

Es fácil ver que  $\phi$  es único. ■

**Teorema 7.29** *El funtor de homología (o cohomología) conmuta con los límites inductivos de complejos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $C = \varinjlim_i C_i$  un límite inductivo de complejos inversos.

Es claro que los homomorfismos inducidos  $\bar{\iota}_{ij}^p : H^p(C_i) \rightarrow H^p(C_j)$  determinan un sistema inductivo de módulos (para un  $p$  fijo). Lo que hemos de probar es que el módulo  $H^p(C)$  con los homomorfismos  $\bar{\iota}_i : H^p(C_i) \rightarrow H^p(C)$  es el límite inductivo de este sistema. Obviamente los homomorfismos conmutan según la definición.

Veamos ahora que  $H^p(C)$  cumple los teoremas 7.26 y 7.27, es decir, en primer lugar probamos que si  $\alpha_i \in H^p(C_i)$  cumple  $\bar{\iota}_i(\alpha_i) = 0$ , entonces existe un  $j \geq i$  tal que  $\bar{\iota}_{ij}(\alpha_i) = 0$ .

En efecto, sea  $\alpha_i = [z_i]$ . Tenemos que  $\iota_i(z_i) = d(c)$ , para cierto  $c \in C^{p-1}$ . Por el teorema 7.27,  $c = \iota_j(c_k)$ , para cierto  $k \in I$  (podemos tomar  $k \geq i$ ) y cierto  $c_k \in C_k^{p-1}$ . Entonces  $\iota_k(\iota_{ik}(z_i) - d(c_k)) = 0$ , luego por 7.26 existe un índice  $j \geq k$  tal que  $\iota_{kj}(\iota_{ik}(z_i) - d(c_k)) = 0$ , es decir,  $\iota_{ij}(z_i) = d(\iota_{kj}(c_k))$ . Por consiguiente  $\bar{\iota}_{ij}(\alpha_i) = 0$ .

Ahora veamos que todo  $\alpha \in H^p(C)$  es de la forma  $\bar{\iota}_i(\alpha_i)$ , para un  $i \in I$  y un  $\alpha_i \in H^p(C_i)$ .

En efecto, si  $\alpha = [z]$ , con  $z \in Z^p(C)$ , existe un  $j \in I$  y un  $z_j \in C_j^p$  tal que  $z = \iota_j(z_j)$ . Entonces  $\iota_j(d(z_j)) = d(\iota_j(z_j)) = d(z) = 0$ . Por el teorema 7.26, existe un  $i \geq j$  tal que  $z_i = \iota_{ji}(z_j)$  cumple  $d(z_i) = \iota_{ji}(d(z_j)) = 0$ , luego  $z_i$  es un cociclo y  $z = \iota_i(z_i)$ . Por consiguiente  $\alpha = \bar{\iota}_i([z_i])$ .

Supongamos que tenemos homomorfismos  $\phi_i : H^p(C_i) \rightarrow N$ , para un cierto módulo  $N$ , tales que  $\bar{\iota}_{ij} \circ \phi_j = \phi_i$ . Entonces definimos  $\phi : H^p(C) \rightarrow N$  mediante  $\phi(\alpha) = \phi_i(\alpha_i)$ , donde  $\alpha_i \in H^p(C_i)$  cumple  $\alpha = \iota_i(\alpha_i)$ .



La definición es correcta, pues si  $\bar{\iota}_j(\alpha_i) = \bar{\iota}_j(\alpha'_j)$ , podemos tomar un índice  $k \in I$  tal que  $k \geq i, j$ , y entonces  $\phi_i(\alpha_i) = \phi_k(\iota_{ik}(\alpha_i))$ ,  $\phi_j(\alpha'_j) = \phi_k(\iota_{jk}(\alpha'_j))$ . Por consiguiente podemos suponer que  $i = j$ , es decir, tenemos que  $\bar{\iota}_i(\alpha_i) = \bar{\iota}_i(\alpha'_i)$  y hemos de probar que  $\phi_i(\alpha_i) = \phi_i(\alpha'_i)$ . Equivalentemente, hemos de probar que si  $\alpha_i \in H^p(C_i)$  cumple  $\bar{\iota}_i(\alpha_i) = 0$ , entonces  $\phi_i(\alpha_i) = 0$ . Ahora bien, sabemos que existe un  $j \in I$  tal que  $\bar{\iota}_{ij}(\alpha_i) = 0$ , con lo que  $\phi_i(\alpha_i) = \phi_j(\bar{\iota}_{ij}(\alpha_i)) = 0$ .

Es claro que  $\phi$  cumple la definición de límite inductivo y así mismo es fácil probar la unicidad. ■

Observemos que una sucesión exacta de módulos se puede identificar con un complejo acíclico, es decir, con un complejo cuyos grupos de (co)homología son triviales. Teniendo esto en cuenta es inmediato el teorema siguiente:

**Teorema 7.30** *El límite inductivo de un sistema de sucesiones exactas es una sucesión exacta.*

Notemos que el teorema vale tanto para sucesiones exactas finitas como infinitas, pues toda sucesión exacta finita se puede prolongar hasta una sucesión exacta infinita. En particular tenemos que un límite inductivo de monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo, respectivamente.

Veamos un último resultado sobre límites inductivos. Si  $I$  es un conjunto dirigido y  $J \subset I$ , diremos que  $J$  es *cofinal* en  $I$  si para todo  $i \in I$  existe un  $j \in J$  tal que  $j \geq i$ . Si  $\{M_i\}_{i \in I}$  es un sistema inductivo, entonces  $\{M_i\}_{i \in J}$  (con los homomorfismos  $\iota_{ij}$ , para  $i, j \in J$ ) es también un sistema inductivo. El teorema siguiente se prueba sin dificultad.

**Teorema 7.31** *Si  $\{M_i\}_{i \in I}$  es un sistema inductivo de módulos y  $J \subset I$  es cofinal, entonces*

$$\varinjlim_{i \in I} M_i = \varinjlim_{i \in J} M_i.$$

## 7.4 La dualidad de Poincaré

En esta sección probaremos un resultado fundamental que relaciona la homología y la cohomología de una variedad topológica orientable. Ahora bien, si la variedad no es compacta, la cohomología que hemos de considerar no es la cohomología singular, sino la cohomología con soportes compactos, que introducimos a continuación.

**Definición 7.32** Si  $V$  es una variedad topológica, definimos

$$C_c^p(V) = \bigcup_K C^p(V, V \setminus K),$$

donde  $K$  recorre los subconjuntos compactos de  $V$ . Equivalentemente, se trata del conjunto de las cocadenas singulares de dimensión  $p$  que se anulan sobre los simplices cuyo soporte está fuera de un cierto compacto. Las llamaremos *cocadenas singulares con soporte compacto*.

Es claro que  $C_c^p(V)$  es un submódulo de  $C^p(V)$ . Más aún, es claro que la cofrontera de una cocadena con soporte compacto tiene soporte compacto, por lo que los módulos  $C_c^p(V)$  forman un complejo  $C_c(V)$ . A los grupos de cohomología de este complejo los llamaremos *grupos de cohomología singular con soporte compacto* de  $V$ , y los representaremos por  $H_c^p(V)$ .

Obviamente, si  $V$  es compacta entonces  $H_c^p(V) = H^p(V)$  para todo  $p$ .

La cohomología con soportes compactos se obtiene de la cohomología singular mediante un límite inductivo. En general, si  $\{M_i\}_{i \in I}$  es un sistema inductivo formado por submódulos de un módulo  $M$  y se cumple  $i \leq j$  si y sólo si  $M_i \subset M_j$ , entonces el límite inductivo de los módulos  $M_i$  respecto a las inclusiones es  $\bigcup_i M_i$  (también con las inclusiones). La comprobación es inmediata.

De aquí se sigue que

$$C_c^p(V) = \varinjlim_K C^p(V, V \setminus K),$$

donde en la familia de los subespacios compactos de  $V$  consideramos el orden dado por la inclusión.

Notemos que si  $K \subset K'$ , entonces la inclusión  $i : (V, V \setminus K') \rightarrow (V, V \setminus K)$  induce la inclusión  $i_*^p : C^p(V, V \setminus K) \rightarrow C^p(V, V \setminus K')$ . Estas inclusiones son las que determinan la estructura de sistema inductivo en los módulos de cocadenas singulares.

Más aún, según el teorema 7.28, podemos escribir

$$C_c(V) = \varinjlim_K C^*(V, V \setminus K)$$

como límite de complejos. A su vez, el teorema 7.29 nos da que

$$H_c^p(V) = \varinjlim_K H^p(V, V \setminus K),$$

donde los homomorfismos del sistema de grupos de cohomología son los inducidos por las inclusiones  $\iota_{KK'} = i_*^p : H^p(V, V \setminus K) \rightarrow H^p(V, V \setminus K')$ . Así mismo, los homomorfismos  $\iota_K : H^p(V, V \setminus K) \rightarrow H_c^p(V)$  son los inducidos por las inclusiones  $C^p(V, V \setminus K) \rightarrow C_c^p(V)$ .

En general, una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  no determina un homomorfismo entre los grupos de cohomología con soporte compacto. En general hemos de exigir una propiedad adicional:

**Definición 7.33** Una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios topológicos es *propia* si para todo compacto  $K \subset Y$  se cumple que  $f^{-1}[K]$  es compacto.

Obviamente, si  $X$  es compacto toda aplicación continua es propia. En general, si  $f$  es propia y  $K \subset Y$  es compacto, entonces  $f[X \setminus f^{-1}[K]] \subset Y \setminus K$ , luego  $f$  induce homomorfismos  $H^p(Y, Y \setminus K) \rightarrow H^p(X, X \setminus f^{-1}[K])$ . Componiendo con  $\iota_{f^{-1}[K]}$  obtenemos homomorfismos

$$f_K^* : H^p(Y, Y \setminus K) \rightarrow H_c^p(X).$$

Estos homomorfismos conmutan obviamente con los  $\iota_{KK'}$ , por lo que inducen un homomorfismo

$$f^* : H_c^p(Y) \longrightarrow H_c^p(X).$$

Es fácil ver que  $H^p$  es un funtor contravariante en la categoría de los espacios topológicos con los morfismos determinados por las aplicaciones propias.

Consideremos ahora una variedad topológica orientable  $n$ -dimensional  $V$  y fijemos una orientación, que podemos identificar con una sección  $s \in \Gamma[V]$ . Para cada compacto  $K \subset V$ , el teorema 7.17 nos da un isomorfismo

$$j_K : H_n(V, V \setminus K) \longrightarrow \Gamma[K].$$

Llamaremos  $\zeta_K \in H_n(V, V \setminus K)$  a la única clase de homología que cumple  $j_K(\zeta_K) = s|_K$  y la llamaremos *clase fundamental* de la orientación dada en el compacto  $K$ .

Observemos que si  $V$  es compacta y conexa entonces  $\zeta_V$  es la clase fundamental de  $V$  tal y como la hemos definido en la página 191, luego esta definición generaliza a la anterior.

Por la conmutatividad del diagrama (7.2), si  $K \subset K'$  son compactos en  $V$  y  $j_K^{K'} : H_n(V, V \setminus K') \longrightarrow H_n(V, V \setminus K)$  es el homomorfismo inducido por la inclusión, se cumple que  $j_K^{K'}(\zeta_{K'}) = \zeta_K$ .

Similarmente, si  $K \subset U \subset V$ , donde  $K$  es compacto y  $U$  es abierto, y consideramos a  $U$  con la orientación inducida por  $s|_U$ , entonces  $\zeta_K^U$  se corresponde con  $\zeta_K^V$  a través del homomorfismo inducido por la inclusión.

Llamaremos  $\zeta_{K \cap} : H^p(V, V \setminus K) \longrightarrow H_{n-p}(V)$  al homomorfismo inducido por el producto mixto. La consistencia de las clases fundamentales y la naturalidad del producto mixto hacen que el diagrama siguiente sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^p(V, V \setminus K) & \xrightarrow{\zeta_{K \cap}} & H_{n-p}(V) \\ \downarrow \iota_{KK'} & \nearrow \zeta_{K' \cap} & \\ H^p(V, V \setminus K') & & \end{array}$$

Esto nos permite definir el homomorfismo

$$D = \varinjlim_K \zeta_{K \cap} : H_c^p(V) \longrightarrow H_{n-p}(V).$$

Si  $V$  es una variedad compacta y conexa entonces  $H_c^p(V) = H^p(V)$  y  $D$  es simplemente la aplicación  $x \mapsto \zeta_V \cap x$ .

**Teorema 7.34 (Teorema de Dualidad de Poincaré)** *Si  $V$  es una variedad topológica orientable de dimensión  $n$ , entonces  $D : H_c^p(V) \longrightarrow H_{n-p}(V)$  es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Dividimos la prueba en varios pasos.

1) Si el teorema vale para los abiertos  $U_1, U_2$  y  $U = U_1 \cap U_2$ , entonces vale para  $W = U_1 \cup U_2$ .

Tomemos compactos  $K_i \subset U_i$  y consideremos la sucesión de cohomología Mayer-Vietoris asociada a las tríadas  $(W, W, W)$  y  $(W, W \setminus K_1, W \setminus K_2)$ :

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(W, W \setminus (K_1 \cap K_2)) & \rightrightarrows & H^p(W, W \setminus K_1) \oplus H^p(W, W \setminus K_2) & \rightrightarrows & H^p(W, W \setminus (K_1 \cup K_2)) & \rightrightarrows & H^{p+1}(W, W \setminus (K_1 \cap K_2)) \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ H^p(U, U \setminus (K_1 \cap K_2)) & & H^p(U_1, U_1 \setminus K_1) \oplus H^p(U_2, U_2 \setminus K_2) & & & & H^{p+1}(U, U \setminus (K_1 \cap K_2)) \end{array}$$

Las flechas verticales son escisiones (isomorfismos) que nos permiten sustituir los grupos de arriba por los de abajo. Combinando la sucesión que obtenemos con la sucesión de homología de Mayer-Vietoris de la tríada  $(W, U_1, U_2)$  obtenemos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(U, U \setminus (K_1 \cap K_2)) & \rightrightarrows & H^p(U_1, U_1 \setminus K_1) \oplus H^p(U_2, U_2 \setminus K_2) & \rightrightarrows & H^p(W, W \setminus (K_1 \cup K_2)) & \rightrightarrows & H^{p+1}(U, U \setminus (K_1 \cap K_2)) \\ \downarrow \zeta_{K_1 \cap K_2} \cap & & \downarrow \zeta_{K_1} \cap \oplus \zeta_{K_2} \cap & & \zeta_{K_1 \cup K_2} \cap \downarrow & & \zeta_{K_1 \cap K_2} \cap \downarrow \\ H_{n-p}(U) & \longrightarrow & H_{n-p}(U_1) \oplus H_{n-p}(U_2) & \longrightarrow & H_{n-p}(W) & \longrightarrow & H_{n-p-1}(U) \end{array}$$

Es fácil ver que el cuadrado izquierdo y el central son conmutativos. Veamos por ejemplo la conmutatividad de la mitad del cuadrado izquierdo correspondiente a la primera componente de la suma directa. Basta tener en cuenta que las clases fundamentales correspondientes a los grupos de la columna de la izquierda del diagrama siguiente se corresponden a través de los homomorfismos, así como la naturalidad del producto mixto aplicada a los tres cuadrados.

$$\begin{array}{ccccc} H_n(U, U \setminus (K_1 \cap K_2)) \otimes_{\mathbb{A}} H^p(U, U \setminus (K_1 \cap K_2)) & \xrightarrow{\cap} & H_{n-p}(U) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H_n(W, W \setminus (K_1 \cap K_2)) \otimes_{\mathbb{A}} H^p(W, W \setminus (K_1 \cap K_2)) & \xrightarrow{\cap} & H_{n-p}(W) & & \\ \uparrow & & \downarrow & & \\ H_n(W, W \setminus K_1) \otimes_{\mathbb{A}} H^p(W, W \setminus K_1) & \xrightarrow{\cap} & H_{n-p}(W) & & \\ \uparrow & & \downarrow & & \\ H_n(U_1, U_1 \setminus K_1) \otimes_{\mathbb{A}} H^p(U_1, U_1 \setminus K_1) & \xrightarrow{\cap} & H_{n-p}(U_1) & & \end{array}$$

Respecto al cuadrado derecho, vamos a probar que es conmutativo salvo un factor  $(-1)^{p+1}$ . Para ello hemos de calcular los homomorfismos de conexión. Recordando la prueba del teorema de Mayer-Vietoris, las sucesiones correspondientes se obtienen a partir de las sucesiones de complejos

$$\begin{array}{c} 0 \rightarrow \left( \frac{C(W)}{C(W \setminus K_1) + C(W \setminus K_2)} \right)^* \rightarrow C^*(W, W \setminus K_1) \oplus C^*(W, W \setminus K_2) \rightarrow C^*(W, W \setminus (K_1 \cap K_2)) \rightarrow 0 \\ \uparrow \\ C^*(W, W \setminus (K_1 \cap K_2)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C(U) & \longrightarrow & C(U_1) \oplus C(U_2) & \longrightarrow & C(U_1) + C(U_2) \longrightarrow 0 \\
& & & & & & \downarrow \\
& & & & & & C(W)
\end{array}$$

Los homomorfismos verticales inducen isomorfismos en cohomología (resp. homología). El diagrama que hemos de estudiar es, concretamente,

$$\begin{array}{ccc}
H^p(W, W \setminus (K_1 \cup K_2)) & \xrightarrow{\Delta} & H^{p+1}(W, W \setminus (K_1 \cap K_2)) \\
\downarrow \zeta_{K_1 \cup K_2} \cap & & \downarrow i^* \\
& & H^{p+1}(U, U \setminus (K_1 \cap K_2)) \\
& & \downarrow \zeta_{K_1 \cap K_2} \cap \\
H_{n-p}(W) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-p-1}(U)
\end{array}$$

Partimos de una clase  $\alpha = [\omega] \in H^p(W, W \setminus (K_1 \cup K_2))$ . Para calcular  $\Delta(\alpha)$  tomamos primero  $(\omega_1, \omega_2) \in C^p(W, W \setminus K_1) \oplus C^p(W, W \setminus K_2)$  tal que  $\omega = \omega_1 - \omega_2$ . Como  $\omega$  es un cociclo tenemos  $d\omega_1 = d\omega_2$ , luego  $d\omega_i \in C^{p+1}(W, W \setminus (K_1 \cap K_2))$ . Por consiguiente  $\Delta(\alpha) = [d\omega_1]$ .

Ahora vamos a calcular  $\Delta(\zeta_{K_1 \cup K_2} \cap \alpha)$ . En general, para cada abierto  $G$  y cada compacto  $K \subset G$ , escogemos un representante  $\tilde{\zeta}_K^G \in Z_n(G, G \setminus K)$  de la clase  $\zeta_K^G$ . En algunos casos podemos hacer elecciones consistentes. Por ejemplo, podemos tomar  $\tilde{\zeta}_{K_i}^W = \tilde{\zeta}_{K_i}^{U_i}$ , o  $\tilde{\zeta}_{K_1 \cap K_2}^U = \tilde{\zeta}_{K_1 \cap K_2}^U$ .

Para calcular  $\Delta$  necesitamos un representante de  $\zeta_{K_1 \cup K_2} \cap \alpha$ . En principio tomamos  $\tilde{\zeta}_{K_1 \cup K_2} \cap \omega = \tilde{\zeta}_{K_1 \cup K_2} \cap \omega_1 - \tilde{\zeta}_{K_1 \cup K_2} \cap \omega_2$ .

Ahora bien, otro representante de  $\zeta_{K_i}^W$  es  $\tilde{\zeta}_{K_i \cup K_2}$ , luego ambos son homólogos en  $C_n(W, W \setminus K_i)$ , de donde a su vez  $\tilde{\zeta}_{K_1 \cup K_2} \cap \omega_i$  es homólogo (en  $C_{n-p}(W)$ ) a  $\tilde{\zeta}_{K_i}^W \cap \omega_i = \tilde{\zeta}_{K_i}^{U_i} \cap \omega_i|_{C_p(U_i)}$ . De aquí se sigue que  $\tilde{\zeta}_{K_1}^U \cap \omega_1|_{C_p(U_1)} - \tilde{\zeta}_{K_2}^U \cap \omega_2|_{C_p(U_2)}$  es homólogo a  $\tilde{\zeta}_{K_1 \cup K_2} \cap \omega$  y podemos usar esta descomposición para calcular  $\Delta$ . Concretamente tenemos que

$$\partial(\tilde{\zeta}_{K_1}^{U_1} \cap \omega_1|_{C_p(U_1)}) = \partial(\tilde{\zeta}_{K_2}^{U_2} \cap \omega_2|_{C_p(U_2)}) \in Z_{n-p-1}(U),$$

luego  $\Delta(\zeta_{K_1 \cup K_2} \cap \alpha) = [\partial(\tilde{\zeta}_{K_1}^{U_1} \cap \omega_1|_{C_p(U_1)})]$ .

Hemos de comparar este resultado con  $\zeta_{K_1 \cap K_2}^U \cap i^*(\Delta(\alpha))$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}
\zeta_{K_1 \cap K_2}^U \cap i^*(\Delta(\alpha)) &= [\tilde{\zeta}_{K_1 \cap K_2}^U \cap (d\omega_1)|_{C_{p+1}(U)}] = [\tilde{\zeta}_{K_1 \cap K_2}^U \cap (d\omega_1|_{C_p(U_1)})|_{C_{p+1}(U)}] \\
&= [\tilde{\zeta}_{K_1 \cap K_2}^U \cap d\omega_1|_{C_p(U_1)}] = (-1)^{p+1}[\partial(\tilde{\zeta}_{K_1}^{U_1} \cap \omega_1|_{C_p(U_1)})],
\end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula de la derivada de un producto mixto. Efectivamente, tenemos que

$$\zeta_{K_1 \cap K_2}^U \cap i^*(\Delta(\alpha)) = (-1)^{p+1} \Delta(\zeta_{K_1 \cup K_2} \cap \alpha).$$

Tomando límites inductivos obtenemos un diagrama conmutativo (salvo signo)

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_c^p(U) & \longrightarrow & H_c^p(U_1) \oplus H_c^p(U_2) & \longrightarrow & H_c^p(W) & \longrightarrow & H_c^{p+1}(U) \\
 \downarrow D & & \downarrow D \oplus D & & \downarrow D & & \downarrow D \\
 H_{n-p}(U) & \longrightarrow & H_{n-p}(U_1) \oplus H_{n-p}(U_2) & \longrightarrow & H_{n-p}(W) & \longrightarrow & H_{n-p-1}(U)
 \end{array}$$

Aquí hemos usado que los límites inductivos conmutan con las sumas directas, lo cual se comprueba fácilmente, por lo que lo dejamos a cargo del lector. La fila superior es exacta por el teorema 7.30, y dos de cada tres flechas verticales son isomorfismos por hipótesis, luego el teorema 3.1 (que vale también para diagramas conmutativos salvo signo) nos da que los homomorfismos  $D$  para  $W$  también son isomorfismos.

2) Si el teorema vale para una familia de abiertos  $\{U_i\}_{i \in I}$  totalmente ordenada por la inclusión, entonces vale para su unión.

Llamemos  $U$  la unión. Podemos suponer ordenados los índices de modo que  $i \leq j$  equivalga a  $U_i \subset U_j$ . Es claro que  $C(U) = \bigcup_{i \in I} C(U_i)$ , por lo que

$$C(U) = \varinjlim_i C(U_i),$$

donde los homomorfismos  $\iota_{ij}$  son las inclusiones. Por el teorema 7.29 tenemos que

$$H_{n-p}(U) = \varinjlim_i H_{n-p}(U_i).$$

Por otra parte, si  $i \leq j$  y  $K \subset U_i$ , consideramos la composición

$$H^p(U_i, U_i \setminus K) \longrightarrow H^p(U_j, U_j \setminus K) \xrightarrow{\iota_K} H_c^p(U_j),$$

donde la flecha de la izquierda representa al isomorfismo inverso de la escisión. Estos homomorfismos inducen a su vez otros  $\iota_{ij} : H_c^p(U_i) \longrightarrow H_c^p(U_j)$ , con los que la familia  $\{H_c^p(U_i)\}_i$  se convierte en un sistema inductivo.

Reemplazando  $U_j$  por  $U$  obtenemos homomorfismos  $\iota_i : H_c^p(U_i) \longrightarrow H_c^p(U)$ . El lector puede comprobar que

$$H_c^p(U) = \varinjlim_i H_c^p(U_i).$$

Para nuestra prueba nos basta con el hecho de que  $\iota_{ij} \circ \iota_j = \iota_i$ . En efecto, dado  $x \in H_c^p(U_i)$ , existen un  $K \subset U_i$  y un  $y \in H^p(U_i, U_i \setminus K)$  tales que  $x = \iota_K(y)$ . Basta considerar el prisma siguiente, en el que las caras rectangulares son conmutativas y el triángulo de la izquierda (formado por inversos de escisiones)

también.

$$\begin{array}{ccc}
 H^p(U_i, U_i \setminus K) & \xrightarrow{\iota_K} & H_c^p(U_i) \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \iota_i \\
 & H^p(U_j, U_j \setminus K) & \xrightarrow{\iota_K} H_c^p(U_j) \\
 & \swarrow & \downarrow \iota_j \\
 H^p(U, U \setminus K) & \xrightarrow{\iota_K} & H_c^p(U)
 \end{array}$$

Ahora consideramos el siguiente diagrama conmutativo, para  $K \subset U_i$ :

$$\begin{array}{ccc}
 H_c^p(U) & & \\
 \uparrow \iota_K & \searrow D & \\
 H^p(U, U \setminus K) & \xrightarrow{\zeta_K \cap} & H_{n-p}(U) \\
 \uparrow & & \uparrow i_* \\
 H^p(U_i, U_i \setminus K) & \xrightarrow{\zeta_K \cap} & H_{n-p}(U_i)
 \end{array}$$

Si a la izquierda pusiéramos la escisión, el cuadrado sería conmutativo por la naturalidad del producto mixto, pero es claro que sigue siéndolo si sustituimos la escisión por su inversa. Tomando límites en  $K$  obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 H_c^p(U) & \xrightarrow{D} & H_{n-p}(U) \\
 \uparrow \iota_i & & \uparrow i_* \\
 H_c^p(U_i) & \xrightarrow{D} & H_{n-p}(U_i)
 \end{array}$$

El mismo razonamiento es válido si cambiamos  $U$  por un  $U_j$  con  $j \geq i$ . Ahora ya es claro que  $D_U$  es un isomorfismo: si  $D_U(x) = 0$ , entonces existe un compacto  $K$  tal que  $x = \iota_K(y)$ , con  $y \in H^p(U, U \setminus K)$ . Sea  $U_i$  tal que  $K \subset U_i$ . Tomando una antiimagen de  $y$  en  $H^p(U_i, U_i \setminus K)$  por la escisión y su imagen  $z \in H_c^p(U_i)$  tenemos que  $\iota_i(z) = x$ . Así pues,  $i_*(D_{U_i}(z)) = 0$  y por el teorema 7.26 existe un  $j \geq i$  tal que  $D_{U_j}(\iota_{ij}(z)) = \iota_{ij}(D_{U_i}(z)) = 0$ . Por hipótesis  $D_{U_j}$  es un isomorfismo, luego  $\iota_{ij}(z) = 0$ , de donde  $x = \iota_j(\iota_{ij}(z)) = 0$ .

La suprayectividad es mucho más simple.

3) *El teorema vale para abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .*

Lo probamos primeramente en el caso en que  $U$  es la bola abierta de centro 0 y radio 1. Observemos que todo compacto  $K \subset U$  está contenido en una bola cerrada de centro 0 y radio  $< 1$ , es decir, estas bolas forman un conjunto cofinal de compactos. Podemos aplicar el teorema 7.31, de modo que

$$H_c^p(U) = \varinjlim_{\tilde{K}} H^p(U, U \setminus \tilde{K}),$$

donde  $K$  recorre las bolas cerradas de centro 0 y radio  $< 1$ . De aquí se sigue que  $H_c^p(U) = 0$  salvo si  $p = n$  (y así mismo  $H_{n-p}(U) = 0$ ). En el caso exceptuado vamos a calcular

$$\zeta_K \cap : H^n(U, U \setminus K) \longrightarrow H_0(U).$$

Para ello observamos que  $H_0(U) \cong \mathbb{A}$ . Más concretamente, una base de  $H_0(U)$  la forma la clase  $g$  de cualquier 0-símplice. Usando la aproximación de Alexander-Whitney, para cada  $n$ -símplice  $\sigma$  y cada  $n$ -cocadena  $\omega$  tenemos que  $\sigma \cap \omega = \omega(\sigma)\sigma_0$ , luego, tomando clases,  $[\sigma] \cap [\omega] = \langle [\sigma], [\omega] \rangle g$ .

Por linealidad esto vale para clases arbitrarias, luego en particular tenemos que  $\zeta_K \cap x = \langle \zeta_K, x \rangle g$ , para todo  $x \in H^n(U, U \setminus K)$ .

Con la notación del teorema 5.51, tenemos  $\zeta_K \cap x = h(x)(\zeta_K)g$ . Por este mismo teorema  $h$  es un isomorfismo y  $\zeta_K \cap$  es la composición de  $h$  con la evaluación en  $\zeta_K$  —que es un isomorfismo porque  $\zeta_K$  es un generador de  $H_n(U, U \setminus K)$ — y con la multiplicación por  $g$  —que es un isomorfismo porque  $g$  es un generador de  $H_0(U)$ . Así pues,  $D$  es un isomorfismo, por ser el límite inductivo de un sistema de isomorfismos.

Por el teorema 1.5, todo abierto convexo en  $\mathbb{R}^n$  es homeomorfo a una bola abierta, luego en realidad tenemos probado el teorema para abiertos conexos cualesquiera. De aquí se sigue inmediatamente que es cierto para uniones finitas de abiertos convexos. Razonamos por inducción sobre el número  $m$  de convexos. Lo tenemos para  $m = 1$  y si  $U$  es unión de  $m + 1$  convexos, llamamos  $U'$  a la unión de  $m$  de ellos y  $U''$  al que queda. Entonces  $U' \cap U''$  es unión de a lo sumo  $m$  convexos, luego por hipótesis de inducción el teorema vale para  $U'$ ,  $U''$  y  $U' \cap U''$ . Por el apartado 1) también vale para  $U$ .

En particular tenemos probado el teorema para uniones finitas de bolas abiertas. Por el apartado 2) vale también para uniones numerables, pero todo abierto de  $\mathbb{R}^n$  es una unión numerable de bolas abiertas.

#### 4) El teorema vale en general.

Tenemos que el teorema vale para los abiertos de  $V$  homeomorfos a abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . La intersección de dos de estos abiertos es también de este tipo, luego el apartado 1) y un argumento inductivo idéntico al del apartado anterior nos da que el teorema vale para uniones finitas de abiertos coordenados. Por el apartado 2) vale también para uniones numerables. Si la variedad  $V$  es “razonable”, por ejemplo, si cumple el segundo axioma de numerabilidad, entonces  $V$  es unión de una cantidad numerable de abiertos coordenados, con lo que cumple el teorema.

En el caso general podemos razonar usando el lema de Zorn. En efecto, el apartado 2) nos da que la familia de los abiertos que cumplen el teorema tiene un maximal  $U$  respecto a la inclusión. Si  $U \neq V$ , podemos tomar un abierto coordenado  $U' \neq U$ , y entonces  $U \cap U'$  cumple también el teorema porque es homeomorfo a un abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Por 1) tenemos que  $U \cup U'$  también cumple el teorema, en contra de la maximalidad de  $U$ . ■

Veamos algunas consecuencias sencillas de este teorema, aunque en la sección siguiente podremos apreciar algo mejor su importancia.



Según vimos al final del capítulo V, los números de Betti pueden calcularse indistintamente con los grupos de homología o cohomología, por lo que el teorema de Poincaré nos da inmediatamente la siguiente relación:

**Teorema 7.35** *Si  $V$  es una variedad compacta  $\mathbb{A}$ -orientable de dimensión  $n$ , entonces sus números de Betti cumplen  $b_p = b_{n-p}$  para todo índice  $p$ .*

Por otra parte, el teorema 5.52 nos da la siguiente relación entre los módulos de torsión de los grupos de homología:

**Teorema 7.36** *Si  $\mathbb{A}$  es un dominio de ideales principales,  $V$  es una variedad compacta orientable de dimensión  $n$  y  $T_p$  es el módulo de torsión de  $H_p(V)$ , entonces  $T_p \cong T_{n-p-1}$ , para todo índice  $p$ .*

La relación entre los números de Betti implica inmediatamente lo siguiente:

**Teorema 7.37** *Si  $V$  es una variedad compacta  $\mathbb{A}$ -orientable de dimensión impar, entonces  $\chi(V) = 0$ .*

De este modo, al contrario de lo que sucede con las superficies compactas, la característica de Euler no distingue las variedades tridimensionales. Menos obvia es la propiedad siguiente:

**Teorema 7.38** *Si  $V$  es una variedad compacta conexa orientable de dimensión  $n = 4k + 2$ , entonces  $\chi(V)$  es par.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que basta probar que  $b_{2k+1}$  es par. Sabemos que podemos calcularlo con cualquier anillo de coeficientes de característica 0. Tomaremos un cuerpo, por ejemplo  $\mathbb{A} = \mathbb{Q}$ . El producto exterior es una forma bilineal

$$\cup : H^{2k+1}(V) \times H^{2k+1}(V) \longrightarrow H^n(V) \cong \mathbb{Q}.$$

Como  $2k + 1$  es impar, la anticonmutatividad del producto hace que esta forma bilineal sea antisimétrica, es decir, se cumple  $x \cup y = -y \cup x$ , para todo  $x, y \in H^{2k+1}(V)$ . Vamos a probar que es regular, es decir, que si  $x \cup y = 0$  para todo  $y$ , entonces  $x = 0$ .

Puesto que trabajamos con un cuerpo, el producto de Kronecker induce un isomorfismo  $H^{2k+1}(V) \cong H_{2k+1}(V)^*$ . Si  $x \neq 0$  entonces existe un cierto  $w \in H_{2k+1}(V)$  tal que  $\langle w, x \rangle \neq 0$ . Sea  $y \in H^{2k+1}(V)$  la antiimagen de  $w$  por el isomorfismo de Poincaré, es decir,  $w = \zeta_K \cap y$ . Entonces

$$\langle \zeta_K, y \cup x \rangle = \langle \zeta_K \cap y, x \rangle \neq 0.$$

Así pues,  $y \cup x \neq 0$ .

En general, si un espacio vectorial  $E$  de dimensión finita tiene definida una forma bilineal antisimétrica regular  $F$ , su dimensión ha de ser par. Recordemos el argumento: si  $x_1 \in E$  es no nulo, existe  $y_1 \in E$  tal que  $F(x_1, y_1) \neq 0$ . Ha de ser  $y_1 \neq \lambda x_1$  porque la antisimetría da  $F(x_1, x_1) = 0$ . Definimos

$$E_1 = \{x \in E \mid F(x, x_1) = F(x, y_1) = 0\}.$$

Es fácil ver que  $E_1$  es un subespacio vectorial tal que  $E = \langle x_1, y_1 \rangle \oplus E_1$ . Repitiendo el argumento llegamos a una base con un número par de vectores. ■

Como siguiente aplicación calcularemos el álgebra de cohomología de los espacios proyectivos complejos. Recordemos que su homología viene dada por el teorema 4.13. Además,  $P^n(\mathbb{C})$  tiene estructura de complejo celular con una única celda en cada dimensión  $2p$ , para  $0 \leq p \leq n$ , de modo que su esqueleto de dimensión  $2n - 2$  es precisamente  $P^{n-1}(\mathbb{C})$ . Sea  $i : P^{n-1}(\mathbb{C}) \rightarrow P^n(\mathbb{C})$  la inclusión. La sucesión exacta del par  $(P^n(\mathbb{C}), P^{n-1}(\mathbb{C}))$  junto con el teorema 4.11 (y su traducción a cohomología) nos da que

$$i^* : H^{2p}(P^n(\mathbb{C})) \rightarrow H^{2p}(P^{n-1}(\mathbb{C}))$$

es un isomorfismo para  $0 \leq p < n$ . Vamos a probar lo siguiente:

**Teorema 7.39** *Si  $\alpha \in H^2(P^n(\mathbb{C}))$  es un generador de este grupo, entonces  $\alpha$  es también un generador del álgebra de cohomología de  $P^n(\mathbb{C})$ , es decir,  $\alpha^p$  es un generador de  $H^{2p}(P^n(\mathbb{C}))$  para  $0 \leq p \leq n$ .*

DEMOSTRACIÓN: Razonamos por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 1$  es trivial. Supuesto cierto para  $n - 1$ , con la notación anterior,  $i^*(\alpha)$  genera  $H^2(P^{n-1}(\mathbb{C}))$ , luego por hipótesis de inducción  $i^*(\alpha)^p$  genera  $H^{2p}(P^{n-1}(\mathbb{C}))$  para  $0 \leq p \leq n - 1$ . Como  $i^*$  es un isomorfismo (de álgebras), también  $\alpha^p$  genera  $H^{2p}(P^n(\mathbb{C}))$ . Sólo falta probar que esto se cumple también para  $p = n$ .

Sea  $\zeta \in H_{2n}(P^n(\mathbb{C}))$  la clase fundamental (que es un generador). Sabemos que  $\alpha^{n-1}$  genera  $H^{2n-2}(P^n(\mathbb{C}))$ . Por el isomorfismo de Poncaré,  $\zeta \cap \alpha^{n-1}$  genera  $H_2(P^n(\mathbb{C}))$ .

Como la homología de  $P^n(\mathbb{C})$  no tiene torsión, el producto de Kronecker induce un isomorfismo entre  $H^2(P^n(\mathbb{C}))$  y  $H_2(P^n(\mathbb{C}))^*$ . De aquí se sigue que  $\langle \zeta \cap \alpha^{n-1}, \alpha \rangle = \langle \zeta, \alpha^n \rangle$  ha de ser un generador de  $\mathbb{A}$ . A su vez, el isomorfismo natural entre  $H^{2n}(P^n(\mathbb{C}))$  y  $H_{2n}(P^n(\mathbb{C}))^*$  implica que  $\alpha^n$  genera  $H^{2n}(P^n(\mathbb{C}))$ . ■

No podemos aplicar sin más un argumento similar a los espacios proyectivos reales  $P^n(\mathbb{R})$  porque los de dimensión par no son orientables. No obstante sí lo son sobre el anillo de coeficientes  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  y, sobre este anillo tenemos que  $H^p(P^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  para  $0 \leq p \leq n$ . El mismo argumento que acabamos de emplear nos da el teorema siguiente:

**Teorema 7.40** *Si  $\alpha \in H^1(P^n(\mathbb{R}))$  es un generador de este grupo, entonces  $\alpha$  es también un generador del álgebra de cohomología de  $P^n(\mathbb{R})$ , es decir,  $\alpha^p$  es un generador de  $H^p(P^n(\mathbb{R}))$  para  $0 \leq p \leq n$ .*

## 7.5 La dualidad de Alexander

Terminamos el capítulo con un teorema del que se deducen varias consecuencias topológicas interesantes. Para plantearlo hemos de introducir unos nuevos

grupos de cohomología. Sea  $V$  una variedad topológica,  $A$  un subespacio cerrado y  $U = V \setminus A$ . Para cada compacto  $K \subset U$  el teorema de escisión nos da que la inclusión  $i : (U, U \setminus K) \rightarrow (V, V \setminus K)$  induce un isomorfismo entre los grupos de cohomología. Consideramos su inverso

$$H^p(U, U \setminus K) \rightarrow H^p(V, V \setminus K).$$

Estos isomorfismos conmutan con las inclusiones que obtenemos al cambiar  $K$ , por lo que determinan un único homomorfismo  $i : H_c^p(U) \rightarrow H_c^p(V)$ . Nos proponemos formar una sucesión exacta que contenga a estos dos grupos de cohomología (para todo  $p$ ) enlazados con los grupos de cohomología que ahora vamos a definir.

La familia de todos los entornos abiertos de  $A$  en  $W$  forma un sistema inductivo con el orden dado por la inversa de la inclusión, es decir,  $W \leq W'$  si y sólo si  $W' \subset W$ . Los grupos  $H^p(W)$  forman un sistema inductivo con los homomorfismos inducidos por las inclusiones, por lo que podemos formar el límite inductivo

$$\check{H}^p(A) = \varinjlim_{\overline{W}} H^p(W).$$

Puede demostrarse que estos módulos dependen únicamente de la topología de  $A$ . Nosotros probaremos únicamente un caso particular. Observemos que los homomorfismos  $H^p(W) \rightarrow H^p(A)$  inducidos por las inclusiones determinan un homomorfismo límite  $\check{H}^p(A) \rightarrow H^p(A)$ . Se dice que  $A$  está *tensamente sumergido* en  $V$  si dicho homomorfismo es un isomorfismo. Nos limitaremos a dar una condición suficiente para que esto ocurra. (Obviamente, en tal caso, la estructura de  $\check{H}^p(A)$  depende únicamente de  $A$ .)

**Teorema 7.41** *Sea  $V$  una variedad topológica metrizable y  $A$  un subespacio cerrado de  $V$ . Si  $A$  es un retracto absoluto de entornos entonces el homomorfismo natural  $\kappa : \check{H}^p(A) \rightarrow H^p(A)$  es un epimorfismo. Si  $V$  es también un retracto absoluto de entornos, entonces  $\kappa$  es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $r : W \rightarrow A$  una retracción, donde  $W$  es un entorno abierto de  $A$  y sea  $i : A \rightarrow W$  la inclusión. Entonces  $ir = 1$ , luego  $r^*i^* = 1$ , lo que prueba que  $i^*$  es un epimorfismo, y es claro entonces que  $\kappa$  también lo es.

Supongamos ahora que  $V$  es también un retracto absoluto de entornos. Sea  $U$  un entorno de  $A$ , sea  $U'$  un entorno menor con una retracción  $r : U' \rightarrow A$ . Vamos a hallar un entorno aún menor  $W$  tal que si  $i : A \rightarrow U$  y  $j : W \rightarrow U'$  son las inclusiones entonces  $(r|_W) \circ j$  es homotópica a  $i$ , de modo que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^p(U) & \xrightarrow{\quad} & H^p(A) \\ \downarrow & & \uparrow \\ H^p(U') & \xrightarrow{j^*} & H^p(W) \\ & \searrow i^* & \nearrow (r|_W)^* \\ & H^p(A) & \end{array}$$

De este modo, si  $\alpha \in \check{H}^p(A)$  cumple  $\kappa(\alpha) = 0$ , ha de existir un entorno  $U$  de  $A$  tal que  $\alpha = \iota_U(\alpha')$ , con  $\alpha' \in H^p(U)$ . Así  $i^*(\iota_{UU'}(\alpha')) = \kappa(\alpha) = 0$ , de donde  $j^*(\iota_{UU'}(\alpha')) = 0$ . Ahora bien,  $j^* = \iota_{U'W}$ , luego  $\iota_{U'W}(\alpha') = 0$  y, consecuentemente,  $\alpha = \iota_W(\iota_{U'W}(\alpha')) = 0$ . Por consiguiente  $\kappa$  es un monomorfismo.

Definimos en  $(\{0\} \times U') \cup (I \times A) \cup (\{1\} \times U')$  (subespacio cerrado de  $I \times U'$ ) la aplicación

$$F(t, x) = \begin{cases} x & \text{si } t = 0 \text{ y } x \in U', \\ r(x) & \text{si } t = 1 \text{ y } x \in U', \\ x & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Claramente  $F$  es continua y, como  $U'$  es un retracto absoluto de entornos, se extiende a una aplicación continua en un entorno de su dominio, el cual contendrá un subespacio de la forma  $I \times W$ , donde  $W$  es un entorno de  $A$  contenido en  $U'$ . La extensión de  $F$  a este entorno (es decir, la restricción de la extensión) es la homotopía buscada. ■

Supongamos ahora que  $V$  es una variedad compacta y sea  $A$  un subespacio cerrado. Para cada entorno  $W$  de  $A$  en  $V$ , tenemos que  $K = V \setminus W$  es un subespacio compacto de  $U = V \setminus A$ . Consideramos la composición

$$H^p(W) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(V, W) \longrightarrow H^{p+1}(U, U \setminus K),$$

donde  $\delta^*$  es el homomorfismo de conexión y el segundo homomorfismo es la escisión. Es inmediato comprobar que si cambiamos  $W$  por un entorno menor obtenemos un diagrama conmutativo, por lo que podemos formar el límite inductivo de estos homomorfismos

$$\delta^* : \check{H}^p(A) \longrightarrow H_c^{p+1}(U).$$

Recordemos el homomorfismo  $i : H_c^p(U) \longrightarrow H^p(V)$  que hemos definido al principio de la sección y consideremos también  $j : H^p(V) \longrightarrow \check{H}^p(A)$  el homomorfismo  $\iota_V$  asociado al límite inductivo que define a  $\check{H}^p(A)$ .

**Teorema 7.42** *Si  $V$  es una variedad topológica compacta,  $A$  es un subespacio cerrado y  $U = V \setminus A$ , entonces la sucesión*

$$\dots \longrightarrow H_c^p(U) \xrightarrow{i} H^p(V) \xrightarrow{j} \check{H}^p(A) \xrightarrow{\delta^*} H_c^{p+1}(U) \longrightarrow \dots$$

*es exacta.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $U$ . Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(U, U \setminus K) & \longrightarrow & H^p(V, V \setminus K) & \longrightarrow & H^p(V) & \longrightarrow & H^p(V \setminus K) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \\ H_c^p(U) & \xrightarrow{i} & H_c^p(V) & \xrightarrow{1} & H^p(V) & \xrightarrow{j} & \check{H}^p(A) \end{array}$$

Es fácil ver que la composición de los homomorfismos de la fila superior es nula, luego también  $ij = 0$  (más concretamente, para cada  $\alpha \in H_c^p(U)$  encontramos un  $K$  tal que  $\alpha$  tiene antiimagen en la primera fila, etc.)

Si  $\alpha \in H^p(V)$  cumple  $j(\alpha) = 0$ , existe un  $K$  tal que la imagen de  $\alpha$  en  $H^p(V \setminus K)$  es nula. Por exactitud,  $\alpha$  tiene una antiimagen en  $H^p(V, V \setminus K)$ , luego también tiene una antiimagen por  $i$ . Esto prueba la exactitud en  $H^p(V)$ .

Para  $\check{H}^p(A)$  razonamos de forma análoga con el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(V) & \longrightarrow & H^p(W) & \longrightarrow & H^{p+1}(V, W) & \longrightarrow & H^{p+1}(U, U \setminus K) \\ \downarrow 1 & & \downarrow & & & & \downarrow \\ H^p(V) & \xrightarrow{j} & \check{H}^p(A) & \xrightarrow{\delta^*} & & & H_c^{p+1}(U) \end{array}$$

donde  $W$  es un entorno de  $A$  y  $K = V \setminus W$ .

En efecto, dada  $\alpha \in H^p(V)$ , será  $j(\alpha) = \iota_W(\beta)$ , para cierto entorno  $W$  de  $A$  y cierto  $\beta \in H^p(W)$ . Así, si  $\alpha = [\omega]$ , entonces  $\beta = [\omega|_{C_p(W)}]$ . Al continuar el recorrido por la fila superior pasamos a  $[d\omega] = 0$ . Así pues, la imagen de  $\alpha$  en  $H_c^{p+1}(U)$  por la fila superior es nula, luego también por la fila inferior, es decir,  $j \circ \delta^* = 0$ .

Por otra parte, si  $\alpha \in \check{H}^p(A)$  cumple  $\delta^*(\alpha) = 0$ , tomemos  $W$  tal que  $\alpha = \iota_W(\beta)$ , para cierto  $\beta \in H^p(W)$ . Tomando  $W$  suficientemente pequeño podemos exigir que la imagen de  $\beta$  en  $H^{p+1}(U, U \setminus K)$  sea nula, con lo que también lo será su imagen en  $H^{p+1}(V, W)$  (porque el tramo que media es un isomorfismo). Ahora bien, la sucesión  $H^p(V) \longrightarrow H^p(W) \longrightarrow H^{p+1}(W)$  es exacta, luego  $\beta$  tiene antiimagen en  $H^p(V)$ , la cual es, a su vez, una antiimagen de  $\alpha$  por  $j$ .

Finalmente, para probar la exactitud en  $H_c^{p+1}(U)$  consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(W) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{p+1}(V, W) & \longrightarrow & H^{p+1}(U, U \setminus K) & \longrightarrow & H^{p+1}(V, W) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \check{H}^p(A) & \xrightarrow{\delta^*} & & \xrightarrow{\delta^*} & H_c^{p+1}(U) & \xrightarrow{i} & H^{p+1}(V) \end{array}$$

Observamos que los dos últimos homomorfismos de la fila superior son mutuamente inversos (son la escisión y su inversa), luego al componer toda la fila superior y la columna derecha obtenemos la sucesión exacta de cohomología  $H^p(W) \longrightarrow H^{p+1}(W) \longrightarrow H^{p+1}(V)$ . De aquí se sigue inmediatamente que  $\delta^* \circ i = 0$ .

Por otra parte, si  $\alpha \in H_c^{p+1}(U)$ , tomamos un compacto  $K$  tal que  $\alpha = \iota_K(\beta)$ , con  $\beta \in H^{p+1}(U, U \setminus K)$ . Tenemos que la imagen de  $\beta$  en  $H^{p+1}(V, W)$  tiene imagen nula en  $H^{p+1}(V)$  luego, por la exactitud de la sucesión de cohomología, dicha imagen tiene una antiimagen en  $H^p(W)$ . A su vez, la imagen de ésta en  $\check{H}^p(A)$  es una antiimagen de  $\alpha$  por  $\delta^*$ . ■

Como primera aplicación de esta sucesión exacta vamos a dar una interpretación de la cohomología con soportes compactos en un caso particular:

**Teorema 7.43** *Sea  $V$  una variedad topológica compacta y  $U$  un abierto en  $V$ . Sea  $A = V \setminus U$ . Entonces los homomorfismos*

$$H^p(U, U \setminus K) \longrightarrow H^p(V, V \setminus K) \longrightarrow H^p(V, A)$$

(la inversa de la escisión seguida de la inclusión) inducen al tomar límite en  $K$  un isomorfismo  $H_c^p(U) \cong H^p(V, A)$ .

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \check{H}^{p-1}(A) & \longrightarrow & H_c^p(U) & \longrightarrow & H^p(V) & \longrightarrow & \check{H}^p(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \kappa & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \kappa & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^{p-1}(A) & \longrightarrow & H^p(V, A) & \longrightarrow & H^p(V) & \longrightarrow & H^p(A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

(Dejamos como ejercicio comprobar que es, efectivamente, conmutativo.)

Por el teorema 7.41 (teniendo en cuenta 1.15 y que toda variedad compacta es metrizable por 1.9) tenemos que los homomorfismos  $\kappa$  son isomorfismos, luego basta aplicar el teorema 3.1. ■

Por ejemplo, considerando a  $\mathbb{R}^n$  como subespacio de  $S^n$ , vemos que la cohomología con soportes compactos de  $\mathbb{R}^n$  es la cohomología singular de  $S^n$  relativa a un punto.

Ahora probamos un resultado análogo al teorema de dualidad de Poincaré. Para ello consideramos una variedad compacta  $n$ -dimensional  $\mathbb{A}$ -orientable  $V$  y un cerrado  $A$ . Sea  $\zeta_A \in H_n(V, V \setminus A)$  la clase fundamental que determina la  $\mathbb{A}$ -orientación de  $V$ . Para cada entorno  $W$  de  $A$ , el teorema de escisión nos da el isomorfismo  $H_n(W, W \setminus A) \cong H_n(V, V \setminus A)$ . Llamaremos también  $\zeta_A \in H_n(W, W \setminus A)$  a la antiimagen de la clase fundamental por la escisión.

El producto mixto (6.16) nos proporciona un homomorfismo

$$\zeta_A \cap : H^p(W) \longrightarrow H_{n-p}(W, W \setminus A).$$

Componiéndolo con la escisión podemos considerar que

$$\zeta_A \cap : H^p(W) \longrightarrow H_{n-p}(V, V \setminus A).$$

La naturalidad del producto mixto nos da que  $\zeta_A \cap$  conmuta con las inclusiones al cambiar  $W$ , luego podemos tomar el límite en  $W$ :

$$D_A : \check{H}^p(A) \longrightarrow H_{n-p}(V, V \setminus A).$$

**Teorema 7.44 (Teorema de dualidad de Alexander)** *Sea  $V$  una variedad topológica compacta  $\mathbb{A}$ -orientable y  $A$  un subespacio cerrado. Entonces los homomorfismos  $D_A$  que acabamos de definir son isomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN: Basta comprobar que el diagrama siguiente es conmutativo salvo signos:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_c^p(U) & \longrightarrow & H^p(V) & \longrightarrow & \check{H}^p(A) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow D_U & & \downarrow D_V & & \downarrow D_A \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n-p}(U) & \longrightarrow & H_{n-p}(V) & \longrightarrow & H_{n-p}(V, V \setminus A) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

(aquí  $D_U$  y  $D_V$  son los isomorfismos de Poincaré).

En efecto, si esto es así, tomando una porción de cinco grupos de esta sucesión con  $D_A$  en el medio y modificando el signo de los isomorfismos de Poincaré podemos aplicar el teorema 3.1.

El primer cuadrado es, de hecho, conmutativo, y esto se prueba pasando al límite la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^p(U, U \setminus K) & \longleftarrow & H^p(V, V \setminus K) \\ \zeta_K^U \cap \downarrow & & \zeta_K^V \cap \downarrow \\ H_{n-p}(U) & \longrightarrow & H_{n-p}(V) \end{array}$$

A su vez, ésta se sigue de la naturalidad del producto mixto y de que la inclusión transforma  $\zeta_K^U$  en  $\zeta_K^V$ .

El segundo cuadrado también es conmutativo: si  $\alpha \in H^p(V)$ , entonces  $D_A(j(\alpha)) = \zeta_A \cap \alpha$ , mientras que por el otro camino obtenemos la imagen de  $\zeta_V \cap \alpha$  en  $H_{n-p}(V, V \setminus A)$ . Basta considerar la naturalidad del producto mixto y que la inclusión transforma  $\zeta_A$  en  $\zeta_V$ .

Falta estudiar el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^p(A) & \xrightarrow{\delta^*} & H_c^{p+1}(U) \\ D_A \downarrow & & \downarrow D_U \\ H_{n-p}(V, U) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{n-p-1}(U) \end{array}$$

Fijando un entorno  $W$  de  $K$  o, equivalentemente, un compacto  $K = V \setminus W$ , basta estudiar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^p(W) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{p+1}(V, W) \\ \zeta_A^V \cap \downarrow & & \downarrow \\ H_{n-p}(W, W \setminus A) & & H^{p+1}(U, U \setminus K) \\ \downarrow & & \downarrow \zeta_K^U \cap \\ H_{n-p}(V, V \setminus A) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{n-p-1}(U) \end{array}$$

Partimos de  $\alpha = [\omega] \in H^p(W)$ . Para calcular  $\delta^*(\alpha)$  tomamos una extensión  $\tilde{\omega} \in C^p(V)$  y entonces  $\delta^*(\alpha) = [d\tilde{\omega}]$ . A su vez de aquí pasamos a  $[d\tilde{\omega}|_{C_{p+1}(U)}]$  y a  $[\tilde{\zeta}_K^U \cap d\tilde{\omega}|_{C_{p+1}(U)}]$ , donde  $\tilde{\zeta}_K^U$  es un representante de  $\zeta_K^U$ .

Más aún, aplicando la regla de derivación de un producto mixto vemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_K^U \cap d\tilde{\omega}|_{C_{p+1}(U)} &= \tilde{\zeta}_K^U \cap d(\tilde{\omega}|_{C_p(U)})|_{C_{p+1}(U)} = \\ &= \partial\tilde{\zeta}_K^U \cap \tilde{\omega}|_{C_p(U)} - (-1)^p \partial(\tilde{\zeta}_K^U \cap \tilde{\omega}|_{C_p(U)}). \end{aligned}$$

Ahora bien, el último término es una frontera de una cadena de  $C_{n-p}(U)$ , luego la imagen de  $\alpha$  en  $H_{n-p-1}(U)$  es simplemente  $[\partial\tilde{\zeta}_K^U \cap \tilde{\omega}|_{C_p(U)}]$ . Más aún, puesto que  $\tilde{\zeta}_K^U \in Z_n(U, U \setminus K)$ , tenemos que  $\partial\tilde{\zeta}_K^U \in C_{n-1}(U \setminus K) = C_{n-1}(W \setminus A)$ , por lo que la naturalidad del producto mixto nos permite sustituir  $\tilde{\omega}|_{C_p(U)}$  por  $\omega|_{C_p(W \setminus A)}$  y éste a su vez por  $\omega$ . En resumen hemos llegado a  $[\partial\tilde{\zeta}_K^U \cap \omega]$ .

Por el otro camino tenemos  $\delta_*(\zeta_A^W \cap \alpha) = [\partial(\tilde{\zeta}_A^W \cap \omega)] = (-1)^p [\partial\tilde{\zeta}_A^W \cap \omega]$ .

La demostración estará concluida si probamos que, eligiendo adecuadamente los representantes  $\tilde{\zeta}_A^W$  y  $\tilde{\zeta}_K^U$  de las clases fundamentales, podemos exigir que  $\partial\tilde{\zeta}_A^W = -\partial\tilde{\zeta}_K^U$ . En efecto, sea  $\zeta_V \in H_n(V)$  la clase fundamental de  $V$ . Aplicando la subdivisión baricéntrica varias veces a un representante de  $\zeta_V$  podemos obtener otro  $\tilde{\zeta}_V$  tal que todos los símlices que lo componen tienen su soporte en  $W$  o en  $U$  (teoremas 2.35 y 2.38). Llamemos  $\tilde{\zeta}_A^W$  a la parte de  $\tilde{\zeta}_V$  con soporte en  $W$  y  $\tilde{\zeta}_K^U$  al resto (con soporte en  $U$ ), de modo que  $\tilde{\zeta}_V = \tilde{\zeta}_A^W + \tilde{\zeta}_K^U$ . Falta probar que estos sumandos son realmente representantes de las clases fundamentales correspondientes. Ahora bien, la clase  $\zeta_A^V \in H_n(V, V \setminus A)$  tiene por representante a  $\tilde{\zeta}_V$ , luego también a  $\tilde{\zeta}_A^W$ , pues el resto tiene soporte en  $U = V \setminus A$ , y  $\zeta_A^W$  es la antiimagen de  $\zeta_A^V$  por la inclusión, luego también admite como representante a  $\tilde{\zeta}_A^W$ . Similarmente se razona con la otra clase. ■

Las aplicaciones principales del teorema de dualidad que acabamos de demostrar son teoremas de separación. Veremos únicamente el caso principal, para lo cual demostramos primero lo siguiente:

**Teorema 7.45** *Sea  $A$  una subvariedad compacta de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, para todo  $p$ ,*

$$H^p(A) \cong H_{n-p-1}(\mathbb{R}^n \setminus A),$$

donde en el segundo miembro consideramos la homología reducida.

DEMOSTRACIÓN: Consideramos a  $\mathbb{R}^n$  como  $S^n$  menos un punto. Por el teorema 7.41 podemos identificar  $\check{H}^p(A)$  con  $H^p(A)$ . Tenemos los isomorfismos:

$$H^p(A) \xrightarrow{D_A} H_{n-p}(S^n, S^n \setminus A) \longleftarrow H_{n-p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-p-1}(\mathbb{R}^n \setminus A).$$

■

Como consecuencia:



**Teorema 7.46 (Teorema general de separación)** *Si  $A$  es una subvariedad compacta de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $n-1$  con  $k$  componentes conexas, entonces  $\mathbb{R}^n \setminus A$  tiene  $k+1$  componentes conexas.*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos como anillo de coeficientes  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Por el teorema de Poincaré y el teorema anterior vemos que  $H_0(A) \cong H^{n-1}(A) \cong H_0(\mathbb{R}^n \setminus A)$ , donde en el primer grupo consideramos la homología completa y en el último la reducida. ■

A su vez esto nos da la siguiente aplicación:

**Teorema 7.47** *Una variedad compacta no orientable de dimensión  $n$  no puede sumergirse en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$  y sea  $k$  el número de componentes conexas de  $A$ . Tomamos coeficientes en  $\mathbb{Z}$  y así

$$\text{rang} H_n(A) = \text{rang} H^n(A) = \text{rang} H_0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) = k,$$

pues por el teorema anterior  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A$  tiene  $k+1$  componentes conexas y el último grupo es respecto a la homología reducida. Ahora bien, si  $A$  es no orientable alguna de sus componentes conexas es no orientable, y por 7.21, el rango de  $H_n(A)$  ha de ser menor que  $k$ . ■

En particular las superficies  $N_h$  no pueden sumergirse en  $\mathbb{R}^3$ .



# Capítulo VIII

## Homotopía

A cada espacio topológico se le puede asociar otra familia de grupos similares a los grupos de homología en cuanto a su utilidad, pero diferentes en muchos hechos sustanciales. Se trata de los llamados grupos de homotopía. Un estudio en profundidad de los grupos de homotopía sería, por lo menos, tan extenso como el que hemos llevado a cabo sobre la homología singular, pero aquí nos limitaremos a exponer los resultados más elementales, necesarios para complementar la teoría que ya conocemos. Más concretamente, nos limitaremos a estudiar (someramente) los grupos de homotopía de dimensión 1.

### 8.1 El grupo fundamental

Si  $X$  es un espacio topológico, un *bucle* en un punto  $x \in X$  es un arco (continuo)  $\sigma : I \rightarrow X$  tal que  $\sigma(0) = \sigma(1)$ . Diremos que dos bucles  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$  en  $x$  son *homotópicos* si existe una homotopía  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que  $F_0 = \sigma_0$ ,  $F_1 = \sigma_1$  y  $F_t(0) = F_t(1) = x$  para todo  $t \in I$ .

Es claro que la homotopía de bucles en un punto  $x$  es una relación de equivalencia. Definimos el *grupo fundamental* de  $X$  en el punto  $x$  como el conjunto de todas las clases de homotopía de bucles en  $x$ . Lo representaremos por  $\pi_1(X, x)$ .

El conjunto  $\pi_1(X, x)$  adquiere estructura de grupo con la operación dada por  $[\sigma][\tau] = [\sigma\tau]$ , donde

$$(\sigma\tau)(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \tau(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (8.1)$$

Ante todo hemos de comprobar que esta definición no depende de los representantes de cada clase, es decir, que si  $[\sigma] = [\sigma']$  y  $[\tau] = [\tau']$  entonces  $[\sigma\tau] = [\sigma'\tau']$ .

Ahora bien, si  $F$  es una homotopía de  $\sigma$  a  $\sigma'$  y  $G$  es una homotopía de  $\tau$  a  $\tau'$ , entonces una homotopía de  $\sigma\tau$  a  $\sigma'\tau'$  es

$$H_t(s) = \begin{cases} F_t(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ G_t(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

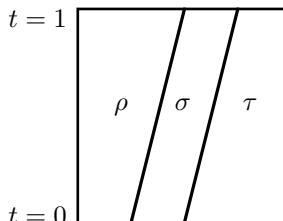
Veamos ahora que este producto define realmente una estructura de grupo. Para probar la asociatividad observamos que

$$((\rho\sigma)\tau)(s) = \begin{cases} \rho(4s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/4, \\ \sigma(4s-1) & \text{si } 1/4 \leq s \leq 1/2, \\ \tau(2s-1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

$$(\rho(\sigma\tau))(s) = \begin{cases} \rho(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \sigma(4s-2) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ \tau(4s-3) & \text{si } 3/4 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Una homotopía entre estos dos bucles viene dada por  $t = 1$

$$F_t(s) = \begin{cases} \rho\left(\frac{4s}{t+1}\right) & \text{si } t \geq 4s-1, \\ \sigma(4s-t-1) & \text{si } 4s-1 \geq t \geq 4s-2, \\ \tau\left(\frac{4(s-(t+2)/4)}{2-t}\right) & \text{si } 4s-2 \geq t. \end{cases}$$



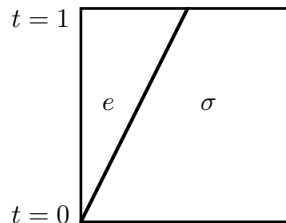
Esta definición se deduce de la figura y de la geometría elemental.

El elemento neutro es la clase del bucle dado por  $e(s) = x$ . En efecto, para cualquier bucle  $\sigma$  tenemos que

$$(e\sigma)(s) = \begin{cases} x & \text{si } s \leq 1/2, \\ \sigma(2s-1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

y una homotopía entre este bucle y  $\sigma$  es la dada por  $t = 1$

$$F_t(s) = \begin{cases} x & \text{si } s \leq t/2, \\ \sigma\left(\frac{s-t/2}{1-t/2}\right) & \text{si } t/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$



Por consiguiente  $[e][\sigma] = [\sigma]$ . Similarmente se comprueba que  $[\sigma][e] = [\sigma]$ .

La clase inversa de una clase  $[\sigma]$  es la clase  $[\sigma^{-1}]$ , donde  $\sigma^{-1}(s) = \sigma(1-s)$ . Es fácil comprobar que la definición no depende de la elección del representante, así como que una homotopía entre  $\sigma\sigma^{-1}$  y  $e$  viene dada por

$$F_t(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{si } s \leq \frac{1}{2}(1-t), \\ \sigma(1-t) & \text{si } \frac{1}{2}(1-t) \leq s \leq \frac{1}{2}(1+t), \\ \sigma^{-1}(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2}(1+t) \leq s. \end{cases}$$

(dejamos el dibujo correspondiente a cuenta del lector).

Por consiguiente  $[\sigma]^{-1}[\sigma] = [e]$ . Similarmente se llega al mismo resultado con los factores en orden inverso. En general, el grupo fundamental  $\pi_1(X, x)$  no es abeliano.

Al igual que en el caso de la homología singular, las aplicaciones continuas inducen homomorfismos entre los grupos fundamentales. Concretamente, si

$f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$  es una aplicación entre pares (es decir, una aplicación continua tal que  $f(x) = y$ ), entonces podemos definir  $f_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$  mediante  $f_*([\sigma]) = [\sigma \circ f]$ . Es fácil comprobar que la definición no depende del representante de la clase. Además es inmediato que  $(\sigma\tau) \circ f = (\sigma \circ f)(\tau \circ f)$ , por lo que  $f_*$  es claramente un homomorfismo de grupos. También es obvio que  $1_* = 1$  y que  $(fg)_* = f_*g_*$ , de modo que  $\pi_1$  es un funtor de la categoría de los pares  $(X, x)$  en la categoría de los grupos.

Esto implica en particular que si  $f$  es un homeomorfismo  $f_*$  es un isomorfismo de grupos, luego el grupo fundamental es un invariante topológico.

Es evidente que el grupo  $\pi_1(X, x)$  depende únicamente de la componente arcoconexa de  $x$  en  $X$ . Así pues, no perdemos generalidad si suponemos que  $X$  es arcoconexo. Tomemos dos puntos  $x, y \in X$  y fijemos un arco  $\alpha$  en  $X$  tal que  $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$ .

Para cada bucle  $\sigma$  en  $x$  tenemos que  $(\alpha^{-1}\sigma)\alpha$  es un bucle en  $y$  (notemos que la definición (8.1) y la de  $\alpha^{-1}$  tienen sentido para arcos cualesquiera, no necesariamente bucles). Además, si  $\sigma$  y  $\tau$  son bucles homotópicos, es fácil construir una homotopía entre  $(\alpha^{-1}\sigma)\alpha$  y  $(\alpha^{-1}\tau)\alpha$ . Por consiguiente podemos definir una aplicación

$$h_\alpha : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, y)$$

mediante  $h_\alpha([\sigma]) = [(\alpha^{-1}\sigma)\alpha]$ . Esta aplicación resulta ser un isomorfismo de grupos.

En efecto: Es fácil ver que  $((\alpha^{-1}\sigma)\alpha)((\alpha^{-1}\tau)\alpha)$  es homotópico a  $(\alpha^{-1}(\sigma\tau))\alpha$ . La homotopía se construye análogamente a la que hemos dado para probar que  $\sigma\sigma^{-1}$  es homotópico a  $e$ . Por consiguiente  $h_\alpha$  es un homomorfismo de grupos. También es fácil ver que una antiimagen de una clase  $[\tau] \in \pi_1(X, y)$  es  $[(\alpha\tau)\alpha^{-1}]$ , por lo que  $h_\alpha$  es suprayectivo. Finalmente, si  $h_\alpha([\sigma]) = 1$ , esto significa que  $(\alpha^{-1}\sigma)\alpha$  es homotópico a la constante  $e_y$ . Es fácil ver entonces que el bucle  $(\alpha((\alpha^{-1}\sigma)\alpha))\alpha^{-1}$  es homotópico a  $(\alpha e)\alpha^{-1}$ , es cual es homotópico a  $e_x$ . Ahora bien, es fácil construir una homotopía entre  $(\alpha((\alpha^{-1}\sigma)\alpha))\alpha^{-1}$  y  $((\alpha\alpha^{-1})\sigma)(\alpha\alpha^{-1})$ , que a su vez es homotópico a  $e_x\sigma e_x$ , que es claramente homotópico a  $\sigma$ . Concluimos, pues, que  $[\sigma] = 1$ .

Así pues, si  $X$  es un espacio arcoconexo podemos hablar simplemente de su grupo fundamental  $\pi_1(X)$ , entendiendo que nos referimos a cualquiera de los grupos  $\pi_1(X, x)$  con  $x \in X$ , ya que todos ellos son isomorfos.

En particular tiene sentido definir un espacio *simplemente conexo* como un espacio (arcoconexo) cuyo grupo fundamental es trivial. Veamos algunas equivalencias:

**Teorema 8.1** *Sea  $X$  un espacio topológico arcoconexo. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- a)  $X$  es simplemente conexo,
- b) Toda aplicación continua  $f : S^1 \longrightarrow X$  es homotópica a una constante.

- c) Toda aplicación continua  $f : S^1 \rightarrow X$  se extiende a una aplicación continua en el disco  $B^2$ .
- d) Todo par de arcos en  $X$  que unen un punto  $x$  con un punto  $y$  son homotópicos a través de una homotopía  $F$  tal que  $F_t(0) = x$ ,  $F_t(1) = y$  para todo  $t \in I$ .

DEMOSTRACIÓN: a)  $\rightarrow$  b) Basta considerar el bucle en  $x = f(1, 0)$  dado por  $\sigma(s) = f(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ . Una homotopía (de bucles) entre  $\sigma$  y el bucle constante induce obviamente una homotopía (de funciones) entre  $f$  y la función constante igual a  $x$ .

b)  $\rightarrow$  c) Sea  $f : S^1 \rightarrow X$  una aplicación continua y sea  $F : I \times S^1 \rightarrow X$  una homotopía tal que  $F_0$  es constante y  $F_1 = f$ .

Consideramos ahora la aplicación continua  $p : I \times S^1 \rightarrow B^2$  dada por  $p(t, u) = tu$ . Claramente es suprayectiva y cada punto de  $B^2$  tiene una única antiimagen excepto  $(0, 0)$ , que tiene como antiimágenes a todos los puntos de la forma  $(0, u) \in I \times S^1$ . Ahora bien, como todos éstos tienen la misma imagen por  $F$ , es claro que existe una única aplicación  $\tilde{f} : B^2 \rightarrow X$  que hace conmutativo al diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} I \times S^1 & \xrightarrow{F} & X \\ p \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ B^2 & & \end{array}$$

Como  $F_1 = f$ , es claro que  $\tilde{f}$  extiende a  $f$  y, teniendo en cuenta que  $p$  y  $F$  son continuas, así como que  $p$  es cerrada por la compacidad de  $I \times S^1$ , se concluye inmediatamente que  $\tilde{f}$  es continua.

c)  $\rightarrow$  d) Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos arcos que unen  $x$  con  $y$ . Definimos  $f : S^1 \rightarrow X$  mediante

$$f(u, v) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{u+1}{2}\right) & \text{si } v \geq 0, \\ \beta\left(\frac{u+1}{2}\right) & \text{si } v \leq 0. \end{cases}$$

Claramente  $f$  es continua, luego por hipótesis se extiende a una aplicación continua  $\tilde{f} : B^2 \rightarrow X$ . Definimos

$$F_t(s) = \tilde{f}(2s - 1, (1 - 2t)\sqrt{1 - (2s - 1)^2}).$$

Es fácil ver que  $F$  es una homotopía entre  $\alpha$  y  $\beta$  en las condiciones del enunciado.

d)  $\rightarrow$  a) Si  $\sigma$  es un bucle en un punto  $x \in X$ , basta aplicar el apartado anterior a  $\sigma$  y el bucle constante  $x$ . ■

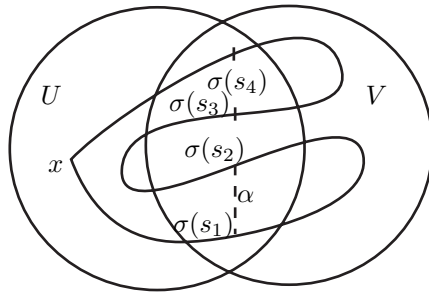
Del teorema 1.24 se sigue que todo subespacio convexo de  $\mathbb{R}^n$  es simplemente conexo. En particular lo es  $\mathbb{R}^n$  y cualquier bola abierta o cerrada en  $\mathbb{R}^n$ . Intuitivamente es evidente que  $S^n$  es simplemente conexo para  $n \geq 2$ , aunque una prueba formal no es inmediata. La obtendremos a partir del teorema siguiente:

**Teorema 8.2** *Sea  $X$  un espacio topológico arcoconexo y  $U, V$  abiertos simplemente conexos en  $X$  tales que  $X = U \cup V$  y  $U \cap V$  es arcoconexo. Entonces  $X$  es simplemente conexo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\sigma$  un bucle en un punto  $x \in X$ . Aplicando el teorema 2.37 al cubrimiento de  $I$  formado por  $U' = \sigma^{-1}[U]$  y  $V' = \sigma^{-1}[V]$  podemos encontrar números reales  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$  tales que  $\sigma[s_i, s_{i+1}]$  está contenido en uno de los abiertos  $U$  o  $V$ . Eliminando puntos si es preciso, podemos suponer que

$$\sigma[s_0, s_1] \subset U, \quad \sigma[s_1, s_2] \subset V, \quad \sigma[s_2, s_3] \subset U, \quad \text{etc.}$$

En particular, (si  $n \geq 2$ )  $\sigma(s_1)$  y  $\sigma(s_2)$  están en  $U \cap V$ , luego podemos tomar un arco  $\alpha$  en  $U \cap V$  que los una. Es claro que  $\sigma$  es homotópico al bucle  $\sigma|_{[0, s_1]} \sigma|_{[s_1, s_2]} \alpha^{-1} \sigma|_{[s_2, 1]}$ .



Ahora bien,  $\sigma|_{[s_1, s_2]} \alpha^{-1}$  es un bucle en  $\sigma(s_1)$  contenido en  $V$ . Como  $V$  es simplemente conexo es homotópico a la constante  $\sigma(s_1)$ , con lo que es fácil ver que  $\sigma$  es homotópico a  $\sigma|_{[0, s_1]} \alpha \sigma|_{[s_2, 1]}$ . En otras palabras, hemos sustituido el tramo  $\sigma|_{[s_1, s_2]}$  por el arco  $\alpha$ , contenido en  $U$ . Repitiendo este proceso llegamos a que  $\sigma$  es homotópico a un bucle en  $x$  totalmente contenido en  $U$  y, como  $U$  es simplemente conexo, éste será homotópico a la constante  $x$ . Por consiguiente  $X$  es simplemente conexo. ■

El teorema anterior se aplica si  $X = S^n$  y  $U, V$  son los abiertos que resultan de quitarle a  $X$  el polo norte y el polo sur respectivamente. Así ambos son homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$ , luego son simplemente conexos, y si  $n \geq 2$  la intersección es arcoconexa, luego concluimos que  $S^n$  es simplemente conexo. Por el contrario,  $S^1$  no es simplemente conexo, como probaremos en la sección siguiente.

En general, el cálculo de grupos fundamentales es más complicado que el cálculo de los grupos de homología singular, por lo que no lo abordaremos en profundidad. Además de los resultados que obtendremos en la sección siguiente, probaremos el siguiente teorema elemental:

**Teorema 8.3** *Dados espacios topológicos  $X$  e  $Y$  y un punto  $(x, y) \in X \times Y$ , se cumple*

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

DEMOSTRACIÓN: Las proyecciones  $p_X$  y  $p_Y$  determinan un homomorfismo

$$(p_X)_* \times (p_Y)_* : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \longrightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

No es difícil comprobar que su inverso viene dado por  $f([\sigma], [\tau]) = [(\sigma, \tau)]$ , donde  $(\sigma, \tau)$  es el bucle dado por  $(\sigma, \tau)(s) = (\sigma(s), \tau(s))$ . ■

## 8.2 Cubrimientos

Introducimos ahora un concepto de gran utilidad en diversos contextos. Aquí nos servirá para calcular algunos grupos fundamentales.

**Definición 8.4** Un *cubrimiento* de un espacio topológico  $X$  es una aplicación continua suprayectiva  $p : \tilde{X} \longrightarrow X$  tal que para todo  $x \in X$  existe un abierto conexo  $U$  que contiene a  $x$  tal que la restricción de  $p$  a cada componente conexa de  $p^{-1}[U]$  es un homeomorfismo sobre  $U$ .

También se dice que  $\tilde{X}$  es un *espacio recubridor* de  $X$ . El espacio  $X$  se llama *espacio base* del cubrimiento,  $p$  es la *proyección* y  $U$  es un *entorno fundamental* de  $x$ .

Por ejemplo, la proyección canónica  $p : S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  es un cubrimiento del espacio proyectivo. En general, hay propiedades de un espacio topológico  $X$  que se representan más claramente en términos de un espacio recubridor adecuado. En tales casos resulta útil “elevar” al espacio recubridor las aplicaciones en  $X$  en el sentido que definimos seguidamente:

**Definición 8.5** Sea  $p : \tilde{X} \longrightarrow X$  un cubrimiento y  $f : Y \longrightarrow X$  una aplicación continua. Una *elevación* de  $f$  a  $\tilde{X}$  es una aplicación  $\tilde{f} : Y \longrightarrow \tilde{X}$  tal que  $f = \tilde{f} \circ p$ .

En general una aplicación no tiene por qué poder elevarse a un cubrimiento dado, pero si existe la elevación es casi única:

**Teorema 8.6** Sea  $p : \tilde{X} \longrightarrow X$  un cubrimiento y  $f : Y \longrightarrow X$  una aplicación continua. Si  $g_1, g_2 : Y \longrightarrow \tilde{X}$  son elevaciones de  $f$  que coinciden sobre un punto de  $Y$  y este espacio es conexo, entonces  $g_1 = g_2$ .

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$Y_0 = \{y \in Y \mid g_1(y) = g_2(y)\}.$$

Obviamente  $Y_0$  es cerrado en  $Y$  y por hipótesis no es vacío. Bastará probar que es abierto. Ahora bien, si  $y \in Y_0$  tomamos un entorno fundamental  $U$  de  $f(y)$  y llamamos  $U_0$  a la componente conexa de  $p^{-1}[U]$  que contiene a  $g_1(y) = g_2(y)$ . Sea  $W = f^{-1}[U] \cap g_1^{-1}[U_0] \cap g_2^{-1}[U_0]$ . Claramente  $U$  es un entorno de  $y$  en  $Y$ , en el cual  $g_1|_W = f \circ (p|_{U_0})^{-1} = g_2|_W$ . Por consiguiente  $W \subset Y_0$ . ■

La conexión de estos conceptos con la homotopía se basa en que los arcos siempre pueden ser elevados:



**Teorema 8.7** Si  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  es un cubrimiento,  $x \in X$ ,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  cumple  $p(\tilde{x}) = x$  y  $\alpha : I \rightarrow X$  es un arco de origen en  $x$ , entonces  $\alpha$  admite una única elevación a  $\tilde{X}$  con origen en  $\tilde{x}$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $U$  un entorno fundamental de  $x$  y sea  $U_0$  la componente conexa de  $p^{-1}[U]$  que contiene a  $\tilde{x}$ . De este modo  $p|_{U_0} : U_0 \rightarrow U$  es un homeomorfismo. Sea  $t_0 > 0$  tal que  $[0, t_0] \subset \alpha^{-1}[U]$ . Entonces  $g_0 = \alpha|_{[0, t_0]} \circ (p|_{U_0})^{-1} : [0, t_0] \rightarrow U_0$  es una elevación de  $\alpha|_{[0, t_0]}$  tal que  $g_0(0) = \tilde{x}$ . Sea  $s$  el supremo del conjunto

$$J = \{t \in I \mid \alpha|_{[0, t]} \text{ admite una elevación a } \tilde{X} \text{ con origen en } \tilde{x}\}.$$

Acabamos de probar que  $s > 0$ . Vamos a probar que  $s = 1 \in J$ . Sea  $U$  un entorno fundamental de  $\alpha(s)$ . Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $]s - \epsilon, s] \subset \alpha^{-1}[U]$  (si  $s < 1$  tomamos  $\epsilon$  de modo que  $]s - \epsilon, s + \epsilon[ \subset \alpha^{-1}[U]$ ).

Existe un  $t \in J$  tal que  $s - \epsilon < t < s$ . Sea  $g : [0, t] \rightarrow \tilde{X}$  una elevación de  $\alpha|_{[0, t]}$ . Sea  $U_0$  la componente conexa de  $p^{-1}[U]$  que contiene a  $g(t)$  (notemos que  $p(g(t)) = \alpha(t) \in U$ ). Entonces  $\alpha|_{]s - \epsilon, s[} \circ (p|_{U_0})^{-1}$  coincide con  $g$  en  $]s - \epsilon, t]$ , pues, para todo  $t'$  en este intervalo,  $(p|_{U_0})^{-1}(\alpha(t')) = g(t')$  equivale a  $\alpha(t') = p(g(t'))$ . Esto nos permite extender  $g$  a una elevación  $g' : [0, s] \rightarrow \tilde{X}$ , luego  $s \in J$ . Más aún, si  $s < 1$  tenemos en realidad una extensión a  $[0, s + \epsilon[$ , lo que contradice la definición de  $s$ . La unicidad se debe al teorema anterior. ■

Veamos ahora que las elevaciones de arcos son compatibles con las homotopías:

**Teorema 8.8** Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un cubrimiento, sean  $\sigma_0, \sigma_1 : I \rightarrow X$  dos arcos en  $X$  y  $F : I \times I \rightarrow X$  una homotopía entre ellos. Sea  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  tal que  $p(\tilde{x}) = \sigma_0(0)$ . Entonces existe una única homotopía  $G : I \times I \rightarrow \tilde{X}$  entre la elevación de  $\sigma_0$  con origen en  $\tilde{x}$  y una única elevación de  $\sigma_1$  tal que  $G \circ p = F$ .

DEMOSTRACIÓN: Para cada  $(t, s) \in I \times I$  consideramos un entorno fundamental de  $F(t, s)$  y su antiimagen en  $I \times I$ . Así formamos un cubrimiento abierto de  $I \times I$ . Por el teorema 2.37 existe una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  de modo que cada  $F[[t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]]$  está contenido en un abierto fundamental.

Sea  $U$  un abierto fundamental que contenga a  $[t_0, t_1] \times [t_0, t_1]$  y sea  $U_0$  la componente conexa de  $p^{-1}[U]$  que contiene a  $\tilde{x}$ . Definimos  $G$  sobre este cuadrado como  $F \circ (p|_{U_0})^{-1}$ .

Ahora repetimos el argumento con  $[t_0, t_1] \times [t_1, t_2]$ . Consideramos un abierto fundamental  $U$  de su imagen por  $F$  y tomamos la componente conexa  $U_0$  de  $p^{-1}[U]$  que contiene a  $G[[t_0, t_1] \times \{t_1\}]$ . De este modo obtenemos una función continua sobre el rectángulo que coincide con la que ya teníamos definida en el cuadrado anterior sobre la arista común. Por consiguiente podemos extender  $G$  a una función en  $[t_0, t_1] \times [t_0, t_2]$ . Siguiendo así terminamos con  $G$  definida sobre  $[t_0, t_1] \times I$ .

A continuación consideramos  $[t_1, t_2] \times [t_0, t_1]$  y extendemos  $G$  mediante una función continua en este intervalo que coincida con la parte de  $G$  ya definida en la arista  $\{t_1\} \times [t_0, t_1]$ . A continuación definimos  $G$  sobre  $[t_1, t_2] \times [t_1, t_2]$  de modo

que coincida con la ya definida sobre las aristas  $\{t_1\} \times [t_1, t_2] \cup [t_1, t_2] \times \{t_1\}$  (lo cual es posible porque este conjunto es conexo, por lo que su imagen por  $G$  está en la misma componente conexa del correspondiente  $p^{-1}[U]$ ). Mediante este proceso acabamos con  $G$  definida sobre  $[t_0, t_2] \times I$  y, repitiendo el argumento, llegamos a una extensión a  $I \times I$ .

Es claro que la función  $G$  cumple lo pedido. En definitiva,  $G$  es una elevación de  $F$  al cubrimiento, luego es única una vez determinado  $G(0, 0) = \tilde{x}$ . ■

El proceso de construcción de  $G$  muestra que si  $F_t(0)$  y  $F_t(1)$  son constantes, entonces  $G_t(0)$  y  $G_t(1)$  también lo son. En efecto: al tratar con  $[t_0, t_1] \times [t_0, t_1]$  tenemos que  $G_t(0)$  es la antiimagen por  $p|_{U_0}$  de  $F_t(0)$ , luego es constante en  $[t_0, t_1]$ . Similarmente vemos que  $G_t(0)$  es constante en  $[t_1, t_2]$ , etc. Lo mismo sucede con  $G_t(1)$ . En particular esto se aplica cuando  $F$  es una homotopía entre bucles:

**Teorema 8.9** *Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un cubrimiento, sea  $x \in X$  y sea  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  tal que  $p(\tilde{x}) = x$ . Entonces las elevaciones a  $\tilde{X}$  con origen en  $\tilde{x}$  de dos bucles homotópicos en  $x$  son homotópicas y tienen el mismo extremo.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que si  $F$  es una homotopía entre dos bucles  $\sigma$  y  $\tau$  en un punto  $x$ , entonces la elevación  $G$  de  $F$  con  $G_0(0) = \tilde{x}$  tiene constantes  $G_t(0)$  y  $G_t(1)$ , luego  $G_1$  es la elevación de  $\tau$  a  $\tilde{x}$  y ambas tienen, pues, el mismo extremo. ■

Notemos que, en general, la elevación de un bucle a un cubrimiento no tiene por qué ser un bucle. Por ejemplo, un arco que une dos puntos antípodas de  $S^n$  es la elevación de un bucle de  $P^n(\mathbb{R})$  por el cubrimiento canónico.

Del teorema anterior deducimos:

**Teorema 8.10** *Si  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  es un cubrimiento,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  y  $p(\tilde{x}) = x$ , entonces  $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$  es un monomorfismo de grupos.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $p_*([\sigma]) = 1$ , entonces el bucle  $\sigma \circ p$  es homotópico a la constante  $e_x$ . Aplicando el teorema anterior obtenemos que la elevación de  $\sigma \circ p$  con origen en  $\tilde{x}$  (que —teniendo en cuenta la unicidad— es  $\sigma$ ) es homotópica a la elevación de  $e_x$  con origen en  $\tilde{x}$ , que ha de ser  $e_{\tilde{x}}$ . Así pues,  $[\sigma] = 1$ . ■

Observemos que en general  $p_*$  no es suprayectivo, pues esto significaría que todo bucle en  $x$  se eleva a un bucle en  $\tilde{x}$ , y ya hemos comentado que esto no tiene por qué ocurrir.

Aún podemos precisar más la situación: dado un cubrimiento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  y un punto  $x \in X$ , para cada  $\tilde{x} \in p^{-1}[x]$  y cada  $\pi = [\sigma] \in \pi_1(X, x)$ , tenemos que el extremo de la elevación de  $\sigma$  con origen en  $\tilde{x}$  es un punto de  $p^{-1}[x]$  que depende únicamente de la clase  $\pi$ . Así pues, podemos llamarlo  $\tilde{x}\pi$ . Tenemos así definida una aplicación

$$p^{-1}[x] \times \pi_1(X, x) \rightarrow p^{-1}[x].$$

Es fácil ver que esta aplicación es una *acción* del grupo fundamental sobre la fibra  $p^{-1}[x]$ , lo cual quiere decir que  $\tilde{x}1 = \tilde{x}$  y que  $(\tilde{x}\pi_1)\pi_2 = \tilde{x}(\pi_1\pi_2)$ .

Más aún, si  $\tilde{X}$  es arcoconexo vemos que la acción es *transitiva*, es decir, que dados  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}[x]$  existe un  $\pi \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$  tal que  $\tilde{x}_1\pi = \tilde{x}_2$  (basta considerar un arco  $\alpha$  que conecte  $\tilde{x}_1$  con  $\tilde{x}_2$  y tomar  $\pi = [\alpha \circ p]$ .)

Por otra parte, el *estabilizador* de un punto  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ , es decir, el subgrupo de  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$  formado por los elementos que fijan a  $\tilde{x}$ , es precisamente el subgrupo  $p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]$ . En efecto, basta observar que  $\sigma$  se eleva a un bucle en  $\tilde{x}$  si y sólo si es la imagen por  $p$  de un bucle en  $\tilde{x}$ .

Argumentos básicos de la teoría de grupos nos dan ahora cierta información sobre los cubrimientos:

**Ejercicio:** Probar que si  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  es un cubrimiento con  $\tilde{X}$  arcoconexo y  $x \in X$ , entonces el cardinal de  $p^{-1}[x]$  es el índice de  $p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]$  en  $\pi_1(X, x)$ . En particular todas las fibras tienen el mismo cardinal.

Pero la consecuencia principal de estos hechos es el teorema siguiente, que nos permite calcular la estructura de varios grupos fundamentales. Necesitamos una definición:

**Definición 8.11** Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un cubrimiento. Llamaremos *grupo de transformaciones* del cubrimiento al grupo de los homeomorfismos  $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  que dejan invariantes las fibras de  $p$ , es decir, que cumplen  $f \circ p = p$  (claramente es un grupo con la composición).

Notemos que si  $f$  es una transformación de un cubrimiento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ , entonces  $f$  es una elevación de  $p$  a  $\tilde{X}$ , luego podemos aplicar el teorema 8.6 para concluir que dos transformaciones que coincidan en un punto son iguales. En particular una transformación con un punto fijo es la identidad.

Otro hecho sencillo de probar es que si  $\pi \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$  y  $p(\tilde{x}) = x$ , entonces  $f(\tilde{x} \cdot \pi) = f(\tilde{x}) \cdot \pi$ , para toda transformación  $f$  del cubrimiento. En efecto, si  $\pi = [\sigma]$  y  $\tilde{\sigma}$  es la elevación de  $\sigma$  a  $\tilde{X}$  con origen en  $\tilde{x}$ , entonces  $\tilde{\sigma} \circ f$  es la elevación de  $\sigma$  a  $\tilde{X}$  con origen en  $f(\tilde{x})$ , pues se cumple ciertamente que  $\tilde{\sigma} \circ f \circ p = \tilde{\sigma} \circ p = \sigma$ . Por consiguiente,  $f(\tilde{x}) \cdot \pi = (\tilde{\sigma} \circ f)(1) = f(\tilde{\sigma}(1)) = f(\tilde{x} \cdot \pi)$ .

**Teorema 8.12** Si  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  es un cubrimiento tal que  $\tilde{X}$  es simplemente conexo y localmente arcoconexo, entonces su grupo de transformaciones es isomorfo al grupo fundamental de  $X$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Llamemos  $G$  al grupo de transformaciones del cubrimiento y fijemos un punto  $x \in X$ . El hecho de que  $\tilde{X}$  sea simplemente conexo se traduce en la siguiente propiedad algebraica: Si  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  cumple  $p(\tilde{x}) = x$  y  $\pi, \rho \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$  cumplen  $\tilde{x} \cdot \pi = \tilde{x} \cdot \rho$ , entonces  $\pi = \rho$  (en términos de la teoría de grupos, la acción de  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$  sobre  $p^{-1}[x]$  es fiel).

En efecto, sean  $\pi = [\sigma]$ ,  $\rho = [\tau]$ , sean  $\tilde{\sigma}$  y  $\tilde{\tau}$  las elevaciones de  $\sigma$  y  $\tau$  a  $\tilde{X}$  con origen en  $\tilde{x}$ . Estamos suponiendo que  $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\tau}(1)$ . De este modo,  $\tilde{\sigma}$  y  $\tilde{\tau}$  son dos

arcos en  $\tilde{X}$  con el mismo origen y el mismo extremo. Por el teorema 8.1 existe una homotopía entre ambos que deja invariantes a los extremos. Al componerla con  $p$  obtenemos una homotopía de bucles entre  $\sigma$  y  $\tau$ , luego  $\pi = \rho$ .

Así pues, fijando  $\tilde{x} \in p^{-1}[x]$ , sabemos que para cada transformación  $f \in G$  existe un  $\pi \in \pi_1(X, x)$  tal que  $f(\tilde{x}) \cdot \pi = \tilde{x}$  y acabamos de probar que es único. Si lo llamamos  $\phi(f)$  tenemos una aplicación  $\phi : G \rightarrow \pi_1(X, x)$  que verifica la relación  $\tilde{x} = f(\tilde{x}) \cdot \phi(f)$ . Es fácil ver que se trata de un homomorfismo de grupos, pues aplicando una transformación  $g$  a esta relación obtenemos que  $g(\tilde{x}) = g(f(\tilde{x})) \cdot \phi(f)$  y multiplicando por  $\phi(g)$  queda

$$\tilde{x} = g(\tilde{x}) \cdot \phi(g) = g(f(\tilde{x})) \cdot \phi(f)\phi(g).$$

Así pues,

$$(f \circ g)(\tilde{x}) \cdot \phi(f \circ g) = \tilde{x} = (f \circ g)(\tilde{x}) \cdot \phi(f)\phi(g),$$

de donde  $\phi(f \circ g) = \phi(f)\phi(g)$ .

Por otra parte, si  $\phi(f) = 1$  entonces  $\tilde{x} = f(\tilde{x})$ , luego  $f = 1$ . Así pues,  $\phi$  es un monomorfismo. Falta probar que es suprayectivo. Para ello hemos de probar que para cada  $\pi \in \pi_1(x, X)$  existe  $f \in G$  tal que  $\tilde{x} = f(\tilde{x})\pi$  o, lo que es lo mismo, que  $f(\tilde{x}) = \tilde{x}\pi^{-1}$ . Más en general, basta probar que si  $\tilde{x}, \hat{x} \in p^{-1}[x]$  entonces existe  $f \in G$  tal que  $f(\tilde{x}) = \hat{x}$ .

Dado  $z \in \tilde{X}$ , consideramos un arco  $\alpha$  que una  $\tilde{x}$  con  $z$  y llamamos  $\alpha'$  a la elevación a  $\tilde{X}$  con extremo en  $\hat{x}$  del arco  $\alpha \circ p$ . Definimos  $f(z) = \alpha'(1)$ . En primer lugar comprobamos que esta definición no depende de la elección de  $\alpha$ .

En efecto, si  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  son dos arcos que unen  $\tilde{x}$  con  $z$ , entonces son homotópicos mediante una homotopía que deja invariantes sus extremos (por el teorema 8.1). Consecuentemente  $\alpha_0 \circ p$  y  $\alpha_1 \circ p$  son homotópicos mediante una homotopía que deja invariantes sus extremos. Por el teorema 8.8 y la observación posterior tenemos que  $\alpha'_0$  y  $\alpha'_1$  tienen el mismo extremo, luego dan lugar al mismo valor para  $f(z)$ .

Es claro que  $f(\tilde{x}) = \hat{x}$ , luego basta probar que  $f \in G$ . Es claro que  $f \circ p = p$ . También es fácil ver que  $f$  es biyectiva, pues su inversa se obtiene sin más que intercambiar los papeles de  $\tilde{x}$  y  $\hat{x}$ . Por esta misma razón basta comprobar que  $f$  es continua, ya que entonces su inversa también lo será.

Tomemos  $z \in \tilde{X}$ . Sea  $U$  un entorno fundamental de  $p(z)$  y sean  $U_0$  y  $U_1$  las componentes conexas de  $p^{-1}[U]$  que contienen a  $z$  y  $f(z)$  respectivamente. Como  $\tilde{X}$  es localmente arcoconexo,  $U_0$  y  $U_1$  son abiertos arcoconexos tales que  $p|_{U_0}$  y  $p|_{U_1}$  son homeomorfismos sobre  $U$ . Por consiguiente  $g = p|_{U_0} \circ (p|_{U_1})^{-1}$  es un homeomorfismo de  $U_0$  en  $U_1$ . Basta probar que  $g = f|_{U_0}$ .

Tomamos  $w \in U_0$ . Existe un arco  $\beta$  en  $U_0$  que une  $z$  con  $w$ . Sea  $\alpha$  un arco que una  $\tilde{x}$  con  $z$ . Así, el producto  $\alpha\beta$  es un arco que une  $\tilde{x}$  con  $w$ . Es claro que  $\beta' = \beta \circ g$  es la elevación a  $\tilde{X}$  con origen en  $f(z)$  del arco  $\beta \circ p$ , ya que  $\beta \circ g \circ p = \beta \circ p$ . Por otra parte, si llamamos  $\alpha'$  a la elevación de  $\alpha \circ p$  con origen en  $\hat{x}$  (y, por consiguiente, con extremo en  $f(z)$ ), es claro que  $\alpha'\beta'$  es la elevación a  $\tilde{X}$  de  $\alpha\beta$  con origen en  $\hat{x}$ . Ahora bien, el extremo de  $\alpha'\beta'$  es, por una parte  $f(w)$  y, por otra,  $\beta'(1) = g(w)$ . ■

En general, calcular grupos de transformaciones de cubrimientos es mucho más fácil que calcular directamente grupos de homotopía. Veamos algunas aplicaciones de este resultado:

**Teorema 8.13**  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ .

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el cubrimiento  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  definido mediante  $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ . Claramente estamos en las condiciones del teorema anterior, luego sabemos que  $\pi_1(S^1)$  es isomorfo al grupo  $G$  de los homeomorfismos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumplen  $f(t) = t + 2k\pi$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y cierto  $k \in \mathbb{Z}$ . Notemos que en principio  $k$  depende de  $t$ , pero como

$$k(t) = \frac{f(t) - t}{2\pi},$$

tenemos que  $k$  es una función continua de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{Z}$ , luego por conexión es constante. Así pues, cada transformación  $f$  tiene asociado un entero  $k_f$  de modo que  $f(t) = t + 2k_f\pi$ . Es claro que la aplicación  $G \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por  $f \mapsto k_f$  es un isomorfismo de grupos. ■

Si componemos los isomorfismos de los dos teoremas anteriores vemos que a cada bucle en  $\pi_1(S^1, x)$  le estamos asignando el número de vueltas que da a la circunferencia teniendo en cuenta el sentido de giro. Veamos otro ejemplo:

**Teorema 8.14** Si  $n \geq 2$  entonces  $\pi_1(P^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

DEMOSTRACIÓN: Basta considerar como cubrimiento la proyección natural  $p : S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$ . Puesto que cada fibra tiene dos puntos, sólo hay dos transformaciones posibles, la identidad y la aplicación antipodal. ■

Notemos que para  $n = 1$  tenemos que  $P^1(\mathbb{R})$  es homeomorfo a  $S^1$ . Notemos que la clase de homotopía asociada a la aplicación antipodal es la formada por los bucles cuya elevación une dos puntos antípodas de  $S^n$ .

No vamos a calcular más grupos fundamentales. Respecto a la relación entre el grupo fundamental y la homología singular, puede probarse que, para un espacio conexo localmente arcoconexo  $X$  el grupo  $H_1(X)$  (con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ ) es isomorfo al cociente de  $\pi_1(X)$  sobre su subgrupo derivado, es decir,  $H_1(X)$  es el mayor cociente abeliano de  $\pi_1(X)$ .

## 8.3 Un criterio de elevación

Terminamos el capítulo con un criterio que determina cuándo una aplicación continua puede elevarse a un cubrimiento, junto con una aplicación interesante. En toda la sección suponemos que los espacios son conexos y localmente arcoconexos. El criterio es el siguiente:

**Teorema 8.15** Consideremos un cubrimiento  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  y una aplicación continua arbitraria  $f : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ . Entonces  $f$  admite una elevación  $\tilde{f} : (Y, y) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$  si y sólo si  $f_*[\pi_1(Y, y)] \subset p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]$ .

DEMOSTRACIÓN: Obviamente la condición es necesaria, pues si existe  $\tilde{f}$  tal que  $\tilde{f} \circ p = f$ , entonces  $f_*[\pi_1(Y, y)] = p_*[f_*[\pi_1(Y, y)]] \subset p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]$ . Veamos la suficiencia.

Para cada punto  $y' \in Y$ , tomamos un arco  $\alpha$  de  $y$  a  $y'$ . Entonces  $\alpha \circ f$  es un arco de  $x$  en  $f(y')$ . Consideramos su elevación  $\alpha'$  a  $\tilde{X}$  con origen en  $\tilde{x}$  y definimos  $\tilde{f}(y') = \alpha'(1)$ .

La definición de  $\tilde{f}(y')$  no depende de la elección de  $\alpha$ , pues si  $\alpha_1$  es otro arco que une  $y$  con  $y'$ , entonces consideramos  $\alpha\alpha_1^{-1}$ , que es un bucle en  $y$ . Si  $\pi$  es su clase de homotopía, entonces  $f_*(\pi)$  es la clase de  $(\alpha \circ f)(\alpha_1 \circ f)^{-1}$ . Por hipótesis existe un bucle  $\beta$  en  $\tilde{x}$  tal que  $\beta \circ p = (\alpha \circ f)(\alpha_1 \circ f)^{-1}$  (en principio  $\beta \circ p$  sería homotópico a  $(\alpha \circ f)(\alpha_1 \circ f)^{-1}$ , pero la homotopía induciría una homotopía entre  $\beta$  y otro bucle para el que tendríamos la igualdad indicada por el teorema 8.8 y la observación posterior). Es claro que la elevación de  $\alpha \circ f$  con origen en  $\tilde{x}$  es  $\beta(t/2)$  y la elevación de  $\alpha_1 \circ f$  es  $\beta(1 - t/2)$ . En particular ambas tienen extremo  $\beta(t/2)$ , luego  $\alpha$  y  $\alpha_1$  determinan el mismo valor para  $\tilde{f}(y')$ .

Por construcción  $\tilde{f} \circ p = f$ . Sólo falta ver que  $\tilde{f}$  es continua. Tomemos un punto  $y' \in Y$  y sea  $U$  un entorno fundamental de  $f(y')$ . Sea  $U_0$  la componente conexa de  $p^{-1}[U]$  que contiene a  $\tilde{f}(z)$ . Sea  $U_1 = f^{-1}[U]$ . Entonces, la aplicación  $g = f|_{U_1} \circ (p|_{U_0})^{-1} : U_1 \rightarrow U_0$  es continua y basta probar que  $g = \tilde{f}|_{U_1}$ . En efecto, si  $y'' \in U_1$ , entonces podemos tomar un arco  $\alpha$  que una  $y$  con  $y'$  y un arco  $\beta$  en  $U_1$  que una  $y'$  con  $y''$ . Podemos usar  $\alpha\beta$  para calcular  $\tilde{f}(y'')$ . Para ello observamos que  $\alpha\beta \circ f = (\alpha \circ f)(\beta \circ f)$  y la elevación de este arco con origen en  $\tilde{x}$  es  $\alpha'(\beta \circ g)$ . Por consiguiente,  $\tilde{f}(w) = g(\beta(1)) = g(y')$ . ■

En particular toda aplicación  $f : Y \rightarrow X$  definida sobre un espacio simplemente conexo  $Y$  se eleva a cualquier cubrimiento de  $X$ . Como aplicación del criterio de elevación demostramos un famoso teorema. Lo probamos primero en una forma abstracta y después veremos su interpretación geométrica:

**Teorema 8.16 (Borsuk-Ulam)** *Si  $n > m \geq 1$  no existe ninguna aplicación continua  $g : S^n \rightarrow S^m$  que conmute con las aplicaciones antipodales.*

DEMOSTRACIÓN: Una tal aplicación induciría a su vez una aplicación continua  $f : P^n(\mathbb{R}) \rightarrow P^m(\mathbb{R})$ . Vamos a usar el criterio de elevación para probar que  $f$  se eleva a una aplicación  $\tilde{f} : P^n(\mathbb{R}) \rightarrow S^m$ .

Fijando  $z \in S^n$ ,  $y = p(z)$ ,  $\tilde{x} = g(z)$  y  $x = p(\tilde{x})$ , hemos de probar que  $f_*[\pi_1(P^n(\mathbb{R}), y)] \subset p_*[\pi_1(S^m, \tilde{x})]$ .

El caso  $m = 1$  es claro, pues el único homomorfismo de  $\pi_1(P^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  en  $\pi_1(P^1(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$  es el trivial. Supongamos  $m > 1$ .

Consideramos el homomorfismo entre las álgebras de cohomología (con coeficientes en  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ )

$$f^* : H^*(P^m(\mathbb{R})) \rightarrow H^*(P^n(\mathbb{R})).$$

Vamos a usar la estructura de estas álgebras, que hemos determinado en el teorema 7.40. Sean  $\alpha_n$  y  $\alpha_m$  generadores respectivos.

Como  $0 = f^*(\alpha_m^{m+1}) = f^*(\alpha_m)^{m+1}$  y  $n > m$ , tenemos que  $f^*(\alpha_m) \neq \alpha_n$ , pero  $H^1(P^n(\mathbb{R}))$  no tiene más elementos que  $\alpha_n$  y 0, luego ha de ser  $f^*(\alpha_m) = 0$ . Por consiguiente,  $f^* = 0$ .

Sean  $i : P^1(\mathbb{R}) \rightarrow P^n(\mathbb{R})$  y  $j : P^1(\mathbb{R}) \rightarrow P^m(\mathbb{R})$  las inclusiones naturales ( $i([u, v]) = [u, v, 0, \dots, 0]$ , e igualmente con  $j$ ). Vamos a probar que  $j^* : H^1(P^m(\mathbb{R})) \rightarrow H^1(P^1(\mathbb{R}))$  es un isomorfismo.

En efecto, tenemos la sucesión exacta

$$\rightarrow H_1(P^1(\mathbb{R})) \xrightarrow{j_*} H_1(P^m(\mathbb{R})) \rightarrow H_1(P^m(\mathbb{R}), P^1(\mathbb{R})) = 0,$$

donde el último término es nulo por el teorema 4.11. Por consiguiente  $j_*$  es un epimorfismo y, como todos los grupos son isomorfos a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , de hecho es un isomorfismo. Dualizando concluimos que lo mismo vale para  $j^*$ .

Así pues,  $j^*(\alpha_m) \neq 0$ , mientras que  $(i \circ f)^*(\alpha_m) = 0$  (porque  $f^* = 0$ ), luego  $j$  no es homotópica a  $i \circ f$ .

Consideremos la aplicación  $r : I \rightarrow P^1(\mathbb{R})$  dada por  $t(s) = [(\cos \pi s, \sin \pi s)]$ . Los bucles  $\sigma = r \circ i$  y  $\tau = r \circ j$  se elevan a arcos en  $S^n$  y  $S^m$  respectivamente que unen dos puntos antípodas, luego, según la observación tras el teorema 8.14, estos bucles generan los correspondientes grupos fundamentales. Una homotopía de bucles entre  $r \circ i \circ f$  y  $\tau = r \circ j$  permitiría construir fácilmente una homotopía entre  $i \circ f$  y  $j$ . Así pues,  $f_*([\sigma]) \neq [\tau]$ , o, lo que es lo mismo,  $f_*([\sigma]) = 0$ . En resumen,  $f_* = 0$ .

Esto justifica que podemos aplicar el criterio de elevación, con lo que  $f$  se eleva a  $\tilde{f}$ , según el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{g} & S^m \\ p' \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ P^n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{f} & P^m(\mathbb{R}) \end{array}$$

Vemos entonces que  $p' \circ \tilde{f}$  y  $g$  son dos elevaciones de  $p' \circ f$ . Si  $x \in S^n$ , o bien  $(\tilde{f}(p'(x)) = g(x)$ , o bien  $\tilde{f}(p'(x)) = -g(x)$ , pero esto equivale a  $\tilde{f}(p'(-x)) = g(-x)$ . En ambos casos las dos elevaciones coinciden en un punto, luego  $p' \circ f = g$ , pero esto es absurdo, ya que el miembro izquierdo toma el mismo valor en puntos antípodas y el miembro derecho toma valores opuestos en puntos antípodas. ■

La interpretación geométrica prometida es la siguiente: “si aplastamos una esfera en un plano, necesariamente dos puntos antípodas han de coincidir” (y lo mismo vale para dimensiones superiores). En efecto:

**Teorema 8.17 (Teorema de Borsuk-Ulam)** *Si  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación continua, existe  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos la función  $f'(x) = f(x) - f(-x)$ . Hemos de probar que  $f'$  toma el valor 0. En caso contrario podemos definir una aplicación continua  $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$  mediante  $g(x) = f'(x)/\|x\|$  y claramente  $g$  conmuta con las aplicaciones antipodales. ■

Es fácil demostrar la primera versión del teorema de Borsuk-Ulam a partir de la segunda. Terminamos con un par de aplicaciones:

**Teorema 8.18 (Teorema del bocadillo de jamón)** *Dados  $n$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  de medida de Lebesgue finita, existe un hiperplano que divide a cada uno de ellos en dos partes de igual medida.*

DEMOSTRACIÓN: Cada punto  $p \in S^n$  determina un semiespacio  $E_p$  en  $\mathbb{R}^n$ , a saber, el dado por la ecuación

$$p_1x_1 + \cdots + p_nx_n + p_{n+1} > 0.$$

Fijado  $D \subset \mathbb{R}^n$  de medida de Lebesgue finita, definimos  $D_p = D \cap E_p$ . Vamos a probar que la función  $f_D : S^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_D(p) = \mu(D_p)$  es continua (donde  $\mu$  es la medida de Lebesgue).<sup>1</sup>

Sea  $\chi_{D_p}$  la función característica de  $D_p$ . Entonces  $f_D(p) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{D_p}(x) dx$ . Tomemos una sucesión  $\{p^k\}$  en  $S^n$  que converja a  $p$ . Es claro que si  $x \in \mathbb{R}^n$  cumple  $p_1x_1 + \cdots + p_nx_n + p_{n+1} > 0$  (resp.  $< 0$ ) existe un natural  $k_0$  tal que si  $k > k_0$  entonces  $p_1^kx_1 + \cdots + p_n^kx_n + p_{n+1}^k > 0$  (resp.  $< 0$ ). Por consiguiente la sucesión  $\chi_{D_{p^k}}(x)$  converge a  $\chi_{D_p}(x)$ . Esto vale para todo  $x$  salvo a lo sumo los pertenecientes al hiperplano  $p_1x_1 + \cdots + p_nx_n + p_{n+1} = 0$ . Como los hiperplanos tienen medida nula, concluimos que la sucesión  $\chi_{D_{p^k}}$  converge casi por todas partes a  $\chi_{D_p}$ . Por otra parte, las funciones  $\chi_{D_{p^k}}$  están mayoradas por la función característica de  $D$ , que es integrable Lebesgue. Aplicando el teorema de la convergencia dominada concluimos que

$$f_D(p) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{D_p}(x) dx = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{D_{p^k}}(x) dx = \lim_k f_D(p^k),$$

lo que prueba la continuidad de  $f_D$ .

Ahora ya es fácil probar el teorema: dados  $n$  conjuntos  $D_1, \dots, D_n$  de medida finita en  $\mathbb{R}^n$ , las funciones  $f_{D_k}$  definen una función  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Por el teorema anterior existe un punto  $p \in S^n$  tal que  $f(p) = f(-p)$ , es decir, tal que  $f_{D_k}(p) = f_{D_k}(-p)$  para  $k = 1, \dots, n$ . Ahora bien,  $f_{D_k}(p)$  y  $f_{D_k}(-p)$  son las medidas de las dos partes en que el hiperplano  $p_1x_1 + \cdots + p_nx_n + p_{n+1} = 0$  divide a  $D_k$ , luego ambas partes tienen la misma medida. ■

**Teorema 8.19 (Lusternik-Schnirelmann)** *Si  $S^n$  está cubierta por  $n+1$  cerrados, entonces uno de ellos contiene dos puntos antípodas.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $A_1, \dots, A_{n+1}$  un cubrimiento de  $S^n$  por conjuntos cerrados y supongamos que, para  $i = 1, \dots, n$ , cada  $A_i$  es disjunto del conjunto  $A'_i$  formado por sus puntos antípodas. Existe una función continua  $f_i : S^n \rightarrow \mathbb{R}$  que toma el valor 0 sobre  $A_i$  y el valor 1 sobre  $A'_i$  (esto es el lema de Urysohn o, alternativamente, podemos tomar una partición de la unidad subordinada al cubrimiento abierto  $S^n \setminus A_i, A^n \setminus A'_i$ , ver 9.6 en el capítulo siguiente).

<sup>1</sup>Esta demostración me la comunicó el profesor M. Valdivia, a quien agradezco sinceramente su amabilidad.



Las funciones  $f_i$  definen una función continua  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Por el teorema de Borsuk-Ulam existe un punto  $p \in S^n$  tal que  $f(p) = f(-p)$ . El punto  $p$  no puede estar en ningún  $A_i$  con  $1 \leq i \leq n$ , pues en tal caso  $f_i(p) = 0$ ,  $f_i(-p) = 1$ . Similarmente,  $-p$  no puede estar en ninguno de estos conjuntos. Por lo tanto,  $p$  y  $-p$  están ambos en  $A_{n+1}$ . ■



Segunda parte

**Geometría diferencial**



## Capítulo IX

# Variedades diferenciales

En esta segunda parte estudiaremos la homología y la cohomología de las variedades diferenciales. Los primeros capítulos están dedicados a exponer los conceptos y resultados básicos de la geometría diferencial que vamos a necesitar. Suponemos que el lector está familiarizado con el cálculo diferencial en  $\mathbb{R}^n$  y sería conveniente que conociera también los hechos básicos sobre la geometría diferencial de las superficies en  $\mathbb{R}^3$ , si bien no vamos a suponer conocido ningún resultado sobre esto.

El primer trabajo relevante sobre geometría diferencial fueron, sin duda, las *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss, donde estudió lo que después definiremos como subvariedades (bidimensionales) de  $\mathbb{R}^3$ , superficies, en definitiva. En su estudio de las superficies, Gauss se apoyó fuertemente en el espacio  $\mathbb{R}^3$  que las contiene, pero sus resultados más profundos mostraban que muchos conceptos aparentemente “externos” de las superficies, es decir, definidos en términos de vectores de  $\mathbb{R}^3$ , en realidad son “internos” en el sentido de que pueden ser determinados sin conocer nada más que la propia superficie.

Por ejemplo, el concepto de “curva geodésica” en una superficie  $S$  puede definirse como una curva  $\gamma$  contenida en  $S$  cuya segunda derivada sea perpendicular a (el plano tangente de)  $S$  en todo punto, de modo que “vista desde  $S$ ” no tiene segunda derivada y es, por tanto, el equivalente a una recta en  $S$ . Aquí hemos usado los conceptos externos de “plano tangente”, “derivada de  $\gamma$ ” (como curva en  $\mathbb{R}^3$ ) y “perpendicularidad” (en  $\mathbb{R}^3$ ), luego parece que la única forma de saber si una curva en  $S$  es o no geodésica sea trabajando con ella en  $\mathbb{R}^3$ . Sin embargo veremos que el plano tangente en el sentido geométrico externo puede sustituirse por un concepto algebraico que depende únicamente de la variedad (y es, pues, interno), y así mismo es posible asociar internamente a cada curva  $\gamma$  su primera derivada en este plano tangente algebraico. Respecto a la segunda derivada, es externa, pero la proyección sobre el plano tangente de la segunda derivada resulta ser de nuevo un concepto interno que puede definirse directamente, sin pasar por la segunda derivada en sí. Esto permite caracterizar internamente las geodésicas de una superficie.

La mejor manera de reconocer el carácter interno de los conceptos más im-

portantes de la geometría diferencial es partir de una definición interna de variedad diferencial, es decir, una definición que no la presuponga sumergida en un espacio  $\mathbb{R}^n$ . De todos modos puede probarse que toda variedad en el sentido general que vamos a dar al término puede sumergirse en un espacio  $\mathbb{R}^n$ , con lo que la definición abstracta interna resulta ser equivalente a la clásica externa.

## 9.1 Definición y hechos básicos

La definición interna de variedad diferencial se obtiene particularizando la definición de variedad topológica. La única dificultad es que podemos hablar de funciones continuas sobre cualquier espacio topológico, mientras que sólo tenemos definidas las funciones diferenciables sobre abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Por ello no podemos definir una variedad diferencial como un espacio topológico en el que todo punto tenga un entorno difeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , sino que hemos de exigir la diferenciabilidad de un modo indirecto:

**Definición 9.1** Una *carta* de dimensión  $n$  en un espacio topológico  $V$  es un par  $(U, x)$ , donde  $U$  es un abierto de  $V$  y  $x : U \rightarrow \tilde{U}$  es un homeomorfismo de  $U$  en un abierto  $\tilde{U}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Un *atlas* de dimensión  $n$  y clase  $C^k$  en un espacio topológico  $V$  es una familia de cartas de dimensión  $n$  tales que sus dominios forman un cubrimiento abierto de  $V$  y si  $(U_1, x_1), (U_2, x_2)$  son dos cartas del atlas, entonces la función  $x_1^{-1} \circ x_2$  es de clase  $C^k$  en su dominio (o sea, en  $x_1[U_1 \cap U_2]$ , que es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ).

Notemos que la función  $x_1^{-1} \circ x_2$  es, de hecho, un difeomorfismo de clase  $C^k$ , pues su inversa es  $x_2^{-1} \circ x_1$ , que también es de clase  $C^k$  por la definición de atlas.

Una *estructura diferencial* en un espacio topológico  $V$  es un atlas maximal respecto de la inclusión. Es fácil ver que todo atlas  $\mathcal{A}$  de clase  $C^k$  determina una única estructura diferencial de clase  $C^k$ , a saber la dada por todas las cartas  $(U, x)$  tales que las funciones  $x \circ y^{-1}$  y  $y^{-1} \circ x$  son de clase  $C^k$  en sus dominios, para toda carta  $(U', y)$  de  $\mathcal{A}$ .

Una *variedad diferencial* de clase  $C^k$  y de dimensión  $n$  es un par  $(V, \mathcal{A})$ , donde  $V$  es un espacio topológico de Hausdorff con una base numerable y  $\mathcal{A}$  es una estructura diferencial de clase  $C^k$  y de dimensión  $n$  en  $V$ .

En lo sucesivo, cuando hablemos de variedades diferenciales sobrentendremos que son variedades de clase  $C^\infty$ . Así mismo, cuando digamos que una aplicación es diferenciable se entenderá que es de clase  $C^\infty$ . Como es habitual, escribiremos  $V$  en lugar de  $(V, \mathcal{A})$ . Cuando hablemos de una carta de la variedad  $V$  se entenderá que nos referimos a una carta de su estructura diferencial. Un atlas de  $V$  será un conjunto de cartas de  $V$  cuyos dominios cubren a  $V$ .

Si  $V$  es una variedad diferencial y  $p \in V$ , diremos que  $(U, x)$  es una *carta* alrededor de  $p$  si es una carta de  $V$  y  $p \in U$ . Para cada  $q \in U$ , decimos que  $x(q) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de *coordenadas* de  $q$  respecto de la carta dada. Las funciones  $x_i$  que resultan de componer  $x$  con las proyecciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$  se

llaman *funciones coordenadas* de la carta dada. Por ello a las cartas se las llama también *sistemas de coordenadas* y los dominios de las cartas se llaman *abiertos coordenados*.

Conviene destacar lo siguiente: si  $\mathcal{A}$  es un atlas de una variedad  $V$ , entonces una carta  $(U, x)$  en el espacio topológico  $V$  es una carta de  $V$  si y sólo si las composiciones  $x^{-1} \circ y$  e  $y^{-1} \circ x$  son diferenciables para toda carta  $(U', y)$  de  $\mathcal{A}$  cuyo dominio corte a  $U$ .

Es inmediato comprobar que si componemos una carta de una variedad con un difeomorfismo entre abiertos de  $\mathbb{R}^n$  obtenemos otra carta, así como que la restricción de una carta a un abierto menor es también una carta. Por ejemplo, una *carta cúbica* centrada en  $p$  es una carta  $(U, x)$  tal que  $x(p) = 0$  y  $x[U] = ]-1, 1[^n$ . Según lo dicho, es claro que todo punto  $p \in V$  tiene una carta cúbica centrada en  $p$ .

**Ejemplos** 1) Todo abierto en  $\mathbb{R}^n$  es una variedad tomando como única carta la identidad. Más en general, todo abierto  $U$  en una variedad diferencial  $V$  es una variedad diferencial con las cartas de  $V$  definidas sobre los abiertos de  $U$ . ■

2) Vamos a definir una estructura diferencial sobre la esfera  $S^n$ . La aplicación definida sobre el hemisferio  $x_{n+1} > 0$  dada por

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

es claramente un homeomorfismo entre éste y la bola  $B^n$ . Lo mismo sucede con la aplicación definida igual sobre el hemisferio  $x_{n+1} < 0$ . Obtenemos un atlas de  $S^n$  considerando aplicaciones análogas sobre todos los hemisferios  $x_i > 0$  y  $x_i < 0$  (eliminando la coordenada  $i$ -ésima). Al componer dos de estas cartas (con dominios no disjuntos), por ejemplo la inversa de la correspondiente a  $x_{n+1} < 0$  con la correspondiente a  $x_n > 0$ , obtenemos la aplicación

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-2}, -\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}),$$

que claramente es diferenciable. ■

3) Consideremos ahora el espacio proyectivo  $P^n(\mathbb{R})$ . Llamamos  $U_i$  al conjunto de los puntos de  $P^n(\mathbb{R})$  cuya coordenada  $i$ -ésima es no nula (para cada  $i = 1, \dots, n+1$ ). Es claro que esta condición no depende del representante que se escoja del punto, así como que los conjuntos  $U_i$  forman un cubrimiento abierto de  $P^n(\mathbb{R})$ . Para  $i = n+1$  definimos la carta  $U_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left( \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right),$$

y análogamente para los otros índices. Es inmediato comprobar que estas cartas determinan un atlas de  $P^n(\mathbb{R})$ . La proyección canónica  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n(\mathbb{R})$  es diferenciable, así como su restricción  $S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$ . ■

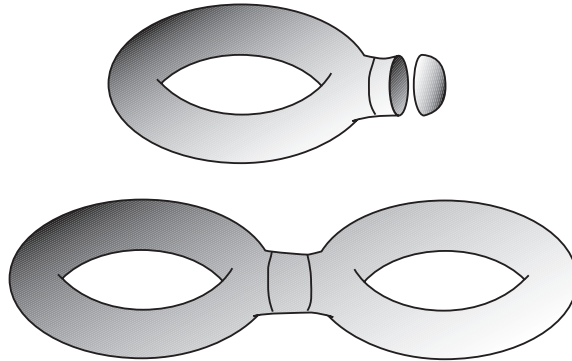
4) El espacio proyectivo complejo  $P^n(\mathbb{C})$  es una variedad diferencial de dimensión  $2n$  con la estructura diferencial construida exactamente igual que en el caso real (identificando  $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ ). ■

5) Si  $V_1$  y  $V_2$  son variedades diferenciales de dimensiones  $m$  y  $n$ , entonces  $V_1 \times V_2$  es una variedad diferencial tomando como cartas alrededor de un punto  $(p, q)$  a los productos  $(x \times y)(u, v) = (x(u), y(v))$ , donde  $x$  es una carta alrededor de  $p$  e  $y$  es una carta alrededor de  $q$ . Más en general, el producto de un número finito de variedades diferenciales es de nuevo una variedad diferencial tomando como cartas los productos de cartas. ■

**Suma conexa de variedades** Sean  $V$  y  $W$  dos variedades de la misma dimensión  $n$  y sean  $p \in V$ ,  $q \in W$ . Es claro que podemos tomar cartas  $x$  e  $y$  alrededor de  $p$  y  $q$  respectivamente cuyas imágenes sean las bolas abiertas de radio 3 en  $\mathbb{R}^n$  y tales que  $x(p) = y(q) = 0$ .

Sean  $V'$  y  $W'$  los abiertos que resultan de eliminar las antiimágenes por las cartas de la bola cerrada de radio  $1/2$ . Si llamamos  $x$  e  $y$  a la restricción de las cartas, ahora ambas tienen por imagen la corona esférica  $1/2 < \|a\| < 3$ . Sustituycamos  $y$  por la composición de  $y$  con el difeomorfismo  $a \mapsto a/\|a\|^2$ , de modo que su imagen es ahora la corona  $1/3 < \|a\| < 2$ .

Llamamos *suma conexa* de las variedades  $V$  y  $W$  al espacio cociente  $V \# W$  que resulta de identificar los puntos con la misma imagen a través de las cartas  $x$  e  $y$ . Claramente se trata de un espacio de Hausdorff e, identificando a  $V'$  y  $W'$  con subespacios del cociente de forma natural, las dos cartas  $x$  e  $y$  determinan una única carta  $z$  con imagen en la corona  $1/3 < \|a\| < 3$ , de modo que los puntos identificados son los que tienen coordenadas  $1/2 < \|z\| < 2$ .



Es fácil ver que  $V \# W$  es una variedad diferencial tomando como cartas a  $z$  y a las cartas de  $V$  y  $W$  que no cortan a la antiimagen por las cartas originales del disco  $\|a\| \leq 2$ .

Notemos que la suma conexa puede definirse para variedades topológicas arbitrarias (no necesariamente diferenciales). No es difícil probar que otra elección en las cartas que se identifican da lugar a un espacio topológico homeomorfo. A su vez, la homogeneidad de las variedades topológicas nos da que la suma



conexa de variedades no depende (salvo homeomorfismo) de la elección de los puntos  $p$  y  $q$ .

**Ejercicio:** Usando dos veces (en cada caso) la sucesión de Mayer-Vietoris comprobar que  $M_g \# M_{g'} \cong M_{g+g'}$  y  $N_h \# N_{h'} \cong N_{h+h'}$ . Deducir que toda superficie compacta admite una estructura diferenciable.

## 9.2 Aplicaciones diferenciables

La finalidad más inmediata de las estructuras diferenciables es la de extender el concepto de función diferenciable a espacios más generales que los abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Efectivamente, vamos a definir el concepto de diferenciable de una aplicación entre variedades.

**Definición 9.2** Sea  $f : V \rightarrow W$  una aplicación entre dos variedades diferenciables. Diremos que  $f$  es *diferenciable* (en realidad de clase  $C^\infty$ ) en un punto  $p \in V$  si existen cartas  $(U, x)$  alrededor de  $p$  y  $(U', y)$  alrededor de  $f(p)$  de modo que la aplicación  $x^{-1} \circ f \circ y$  es diferenciable (de clase  $C^\infty$ ) en  $x(p)$ . Diremos que  $f$  es *diferenciable* si lo es en todos los puntos de  $V$ . Un *difeomorfismo* entre variedades es una biyección diferenciable con inversa diferenciable.

Es fácil ver que la diferenciable de una función no depende de las cartas con que se comprueba. La aplicación  $x^{-1} \circ f \circ y$  se llama *lectura* de  $f$  en las cartas dadas. Comentemos algunos hechos sencillos:

- a) Una aplicación  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , donde  $U$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$  es diferenciable en el sentido que acabamos de introducir si y sólo si lo es en el sentido usual, pues su lectura respecto a la identidad como carta en  $U$  y la identidad como carta en  $\mathbb{R}^m$  es ella misma.
- b) Es fácil comprobar que la composición de aplicaciones diferenciables entre variedades es diferenciable, así como que toda aplicación diferenciable es continua.
- c) Una carta  $x : U \rightarrow \tilde{U}$  es un difeomorfismo, pues su lectura respecto a la propia  $x$  como carta de  $U$  y la identidad como carta de  $\tilde{U}$  es la identidad en  $\tilde{U}$ .
- d) Recíprocamente, si  $U$  es un abierto en una variedad  $V$  y  $x : U \rightarrow \tilde{U}$  es un difeomorfismo entre  $U$  y un abierto de (un semiespacio de)  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $(U, x)$  es una carta de  $V$ . (Pues las aplicaciones  $x^{-1} \circ y$  e  $y^{-1} \circ x$  son diferenciables, para todas las cartas  $y$  de un atlas cualquiera.)
- e) Si  $U$  es un abierto en una variedad  $V$ , la inclusión  $i : U \rightarrow V$  es diferenciable (pues sus lecturas respecto a una misma carta en  $U$  y en  $V$  se reducen a la identidad). Por consiguiente, la restricción a un abierto de una aplicación diferenciable es diferenciable.

- f) Las proyecciones  $\pi_i : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_i$  en un producto de variedades son diferenciables, al igual que las inclusiones dadas por  $\iota_b(a) = (a, b)$ , para  $b \in V_2$  y  $\iota_a(b) = (a, b)$ , para  $a \in V_1$ .

En efecto, la lectura de  $\pi_i$  respecto de una carta  $x_1 \times x_2$  en  $V_1 \times V_2$  y  $x_i$  en  $V_i$  es la restricción de una proyección en  $\mathbb{R}^{m+n}$  sobre sus primeras o sus últimas componentes. La lectura de  $\iota_b$  respecto a las cartas  $x_1$  y  $x_1 \times x_2$  es la restricción de una inclusión similar de  $\mathbb{R}^m$  a  $\mathbb{R}^{m+n}$  (insertando las coordenadas de  $b$ ).

- g) Una aplicación  $f : V \longrightarrow W_1 \times W_2$  es diferenciable si y sólo si lo son sus funciones coordenadas, es decir, las composiciones con las dos proyecciones.
- h) La inclusión  $i : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  es diferenciable. En efecto, su lectura con respecto, por ejemplo, a la proyección en las  $n$  primeras componentes y la identidad en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es la aplicación

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, \pm \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}),$$

que claramente es diferenciable.

- i) La proyección natural  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  es diferenciable, pues su lectura respecto a la identidad y una carta adecuada del espacio proyectivo es la aplicación  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1/x_{n+1}, \dots, x_n/x_{n+1})$  (o la aplicación similar con otra coordenada en el denominador), que claramente es diferenciable. Por consiguiente también es diferenciable su restricción a  $S^n$ . Similarmente ocurre con el espacio  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ .

En varias ocasiones vamos a necesitar aplicaciones diferenciables que cumplan ciertas condiciones. Ahora veremos cómo construirlas. Partimos de la función

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

que es de clase  $C^\infty$ . En efecto, una simple inducción prueba que las derivadas de  $h$  para  $x > 0$  son de la forma

$$\frac{e^{-1/x}}{x^n} P(x),$$

donde  $P(x)$  es un polinomio, de donde se sigue fácilmente que  $h$  es derivable en 0, que todas las derivadas valen 0 en 0 y que todas son continuas.

Dados números reales  $0 < a < b$ , la función  $h_1(x) = h(x - a)$  se anula sólo en los números  $x \leq a$  y la función  $h_2(x) = h(b - x)$  se anula sólo si  $x \geq b$ , luego su producto  $h_{ab}$  se anula fuera del intervalo  $]a, b[$  y es estrictamente positiva en él.

Sea  $M = \int_a^b h_{ab}(x) dx > 0$ . Entonces la función

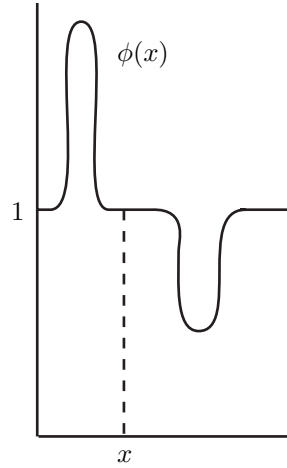
$$\phi_{ab}(x) = \frac{1}{M} \int_a^x h_{ab}(t) dt$$

es de clase  $C^\infty$ , toma el valor 0 para  $x \leq a$  y toma el valor 1 para  $x \geq b$ . Además es creciente.

Con más precisión, veamos que podemos construir una aplicación diferenciable estrictamente creciente  $r : ]0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$  que coincide con la identidad en alrededor de 0 y 1 y, para ciertos números prefijados  $0 < x < y < 1$ , cumple  $r(x) = y$ .

Definimos  $r$  como la integral de una función  $\phi$ , a la que hemos de exigir lo siguiente:  $\phi$  vale 1 alrededor de 0 y 1, es estrictamente positiva, su integral hasta  $x$  vale  $y$  y su integral hasta 1 vale 1.

Para ello construimos independientemente dos funciones  $\phi_1$  en  $[0, x]$  y  $\phi_2$  en  $[x, 1]$  de modo que ambas valgan 1 alrededor de  $x$ , con lo que su unión será diferenciable en todo el intervalo unidad. La construcción de  $\phi_1$  no ofrece ninguna dificultad, mientras que  $\phi_2$  presenta el problema de garantizar que sea positiva. Para ello observamos que el rectángulo de base  $[x, 1]$  y altura 1 tiene área  $1 - x > y - x$ , luego podemos construir un rectángulo de base  $[u, v]$  con  $x < u < v < 1$  y altura  $h < 1$  cuya área sea  $y - x$ . Tomamos una función  $\psi : [x, 1] \rightarrow [0, h]$  que valga  $h$  en  $[u, v]$  y 0 alrededor de  $x$  y 1, con lo que su integral será mayor que  $y - x$ , luego existe un número  $0 < s < 1$  tal que  $s\psi$  tiene integral  $y - x$  y es estrictamente menor que 1. Definimos  $\phi_2 = 1 - s\psi$ .



Según la nota posterior al teorema 1.7, para conseguir un difeomorfismo  $f$  de la bola abierta unitaria en sí misma que sea igual a la identidad en una corona y cumpla  $f(a) = b$  para ciertos puntos prefijados  $a$  y  $b$ , es suficiente construir unas funciones  $r$  y  $\alpha$  tales que  $r$  cumpla lo que acabamos de conseguir y  $\alpha$  se anule alrededor de 0 y 1 y tome un valor prefijado en un punto prefijado, lo cual se consigue fácilmente. Ahora la prueba del teorema 1.8 se adapta inmediatamente al caso de variedades diferenciales:

**Teorema 9.3** *Si  $V$  es una variedad diferencial,  $G$  es un abierto conexo y  $x, y$  son dos puntos de  $G$ , existe un difeomorfismo  $f : V \rightarrow V$  que deja fijos los puntos de  $V \setminus G$  y cumple  $f(x) = y$ .*

Como consecuencia puede probarse que la suma conexa de dos variedades diferenciales es independiente (salvo difeomorfismo) de la elección de los puntos alrededor de los cuales las identificamos.

Otro resultado de interés sobre existencia de funciones diferenciables es el siguiente:

**Teorema 9.4** Sea  $V$  una variedad diferencial, sea  $p \in V$  y  $U$  un entorno de  $p$ . Entonces existe una función diferenciable  $f : V \rightarrow [0, 1]$  que se anula en  $V \setminus U$  y es constante igual a 1 en un entorno compacto de  $p$ .

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un abierto coordenado  $U'$  alrededor de  $p$ . Sea  $x$  una carta en  $U'$  cuya imagen sea la bola abierta de centro 0 y radio 3 y tal que  $x(p) = 0$ . Tomamos una función  $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  que valga 1 para  $x \leq 1$  y valga 0 para  $x \geq 2$ . La función  $f_0 = x \circ u$  toma el valor 1 en la antiimagen por  $x$  de la bola cerrada de radio 1 (un entorno compacto de  $p$ ) y se anula fuera de la antiimagen de la bola cerrada de radio 2, luego podemos extenderla a una función  $f$  diferenciable en  $V$  que se anule en  $V \setminus U'$ . ■

**Particiones de la unidad** Las particiones de la unidad son funciones auxiliares que permiten pegar aplicaciones definidas en un entorno de cada punto en términos de cartas. Concretamente:

**Definición 9.5** Una *partición de la unidad* en una variedad diferencial  $V$  es un conjunto  $\{\phi_i\}_{i \in I}$  de aplicaciones  $\phi_i : V \rightarrow [0, 1]$  diferenciables tal que la familia de *soportes*

$$\text{sop } \phi_i = \overline{\{p \in V \mid \phi_i(p) \neq 0\}}$$

es *localmente finita* (es decir, todo punto tiene un entorno que corta a un número finito de soportes) y además

$$\sum_{i \in I} \phi_i(p) = 1, \quad \text{para todo } p \in V.$$

Notemos que la suma tiene sentido porque todos los  $\phi_i(p)$  son nulos salvo un número finito de ellos.

Diremos que una partición de la unidad en  $V$  está *subordinada* a un cubrimiento abierto de  $V$  si cada función de la partición tiene su soporte contenido en uno de los abiertos del cubrimiento. Hemos de probar que todo cubrimiento abierto en una variedad tiene una partición de la unidad subordinada. En la prueba de este resultado usaremos por primera vez, a través del teorema 1.17, el hecho de que toda variedad diferencial tiene —por definición— una base numerable.

**Teorema 9.6** Sea  $V$  una variedad diferencial y  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto. Entonces existe una partición de la unidad  $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  subordinada a  $\mathcal{U}$  formada por funciones de soporte compacto. Si no exigimos soporte compacto podemos tomarla de la forma  $\{\phi_i\}_{i \in I}$  de modo que  $\text{sop } \phi_i \subset U_i$  y todas las funciones  $\phi_i$  sean nulas salvo a lo sumo una cantidad numerable.

DEMOSTRACIÓN: El teorema 1.17 nos permite tomar un refinamiento localmente finito  $\mathcal{V}$  del cubrimiento dado formado por abiertos de clausura compacta, y a su vez, usando el teorema 9.4, podemos tomar un refinamiento  $\{V'_n\}_{n=0}^{\infty}$  formado por abiertos cuya clausura está contenida en uno de los abiertos  $V_n \in \mathcal{V}$

y exista una función diferenciable  $\psi_n : V \rightarrow [0, 1]$  con soporte contenido en  $V_n$  que valga 1 en  $V'_n$ . Obviamente los soportes de las funciones  $\psi_n$  son compactos y forman una familia localmente finita. Sea

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n.$$

En un entorno de cada punto,  $\psi$  es suma de un número finito de funciones diferenciables, luego es diferenciable. Además  $\psi > 0$  porque para cada  $q \in V$  existe un  $n$  tal que  $q \in V_n$ , luego  $\psi_n(q) = 1$ .

Consecuentemente, las funciones  $\phi_n = \psi_n/\psi$  son diferenciables, cada  $\phi_n$  tiene el mismo soporte que  $\psi_n$ , luego es claro que  $\{\phi_n\}$  es una partición de la unidad subordinada a  $\mathcal{U}$  con soportes compactos.

Si no exigimos soportes compactos, para cada  $n \in \mathbb{N}$  escogemos  $i_n \in I$  tal que  $\text{sop } \phi_n \subset U_{i_n}$ . Sea  $I' = \{i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Para cada  $i \in I'$  definimos

$$\tilde{\phi}_i = \sum_{i_n=i} \phi_n.$$

Si  $i \in I \setminus I'$  tomamos  $\tilde{\phi}_i = 0$ . Las funciones  $\tilde{\phi}_i$  forman una partición de la unidad con  $\text{sop } \tilde{\phi}_i \subset U_i$ . ■

## 9.3 El espacio tangente

Hasta aquí no hemos echado de menos un espacio  $\mathbb{R}^n$  que contenga a las variedades diferenciables. El primer momento en que notamos su falta es al tratar de definir el espacio tangente a una variedad en un punto. Para una subvariedad  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  (concepto que aún no hemos definido), el espacio tangente en un punto  $p$  es un subespacio (vectorial) de  $\mathbb{R}^n$  cuyo trasladado afín por  $p$  se “confunde” con  $V$  en un entorno de  $p$ , en un sentido precisable analíticamente, de modo que las aplicaciones diferenciables entre variedades se confunden con aplicaciones lineales entre los espacios tangentes en un entorno de cada punto. Según comentábamos al principio del capítulo, es posible sustituir este concepto externo de espacio tangente por otro equivalente interno, definido algebraicamente a partir de la estructura diferencial de la variedad. Nos ocupamos de ello en esta sección.

**Definición 9.7** Sea  $V$  una variedad diferencial y sea  $p \in V$ . Definimos el conjunto de las funciones diferenciables locales en  $p$  como el conjunto  $C_p^\infty(V)$  formado por todas las funciones diferenciables  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definidas sobre un entorno abierto  $U$  de  $p$  en  $V$ .

En  $C_p^\infty(V)$  se puede definir puntualmente una suma, un producto y un producto por un escalar (real) de forma natural (el dominio de la suma o el producto de dos funciones locales es la intersección de sus dominios), no obstante, con ello no obtenemos una estructura de espacio vectorial, ya que, por ejemplo,

$f - f \neq g - g$  salvo que  $f$  y  $g$  tengan el mismo dominio. Este inconveniente se subsana tomando clases de equivalencia:

Definimos el *espacio de gérmenes diferenciables* en  $p$  como el conjunto cociente  $G_p(V)$  de  $C_p^\infty(V)$  respecto a la relación de equivalencia en virtud de la cual dos funciones locales  $f$  y  $g$  son equivalentes si y sólo si coinciden en un entorno de  $p$ .

La suma, el producto y el producto escalar en  $C_p^\infty(V)$  inducen operaciones análogas en  $G_p(V)$ , pero ahora tenemos una estructura de álgebra conmutativa y unitaria. Notemos que si  $\omega \in G_p(V)$ , podemos hablar de  $\omega(p)$  como el valor que toma en  $p$  cualquiera de las funciones locales que forman  $\omega$ .

Definimos el *espacio tangente* a  $V$  en  $p$  como el conjunto  $T_p(V)$  formado por todas las aplicaciones  $v : C_p^\infty(V) \rightarrow \mathbb{R}$  que cumplen:

$$v(r\alpha + s\beta) = rv(\alpha) + sv(\beta) \quad (9.1)$$

$$v(\alpha\beta) = v(\alpha)\beta(p) + \alpha(p)v(\beta), \quad (9.2)$$

para todo  $\alpha, \beta \in C_p^\infty(V)$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$ . Tales aplicaciones se llaman *derivaciones* en  $C_p^\infty(V)$ , aunque normalmente las llamaremos *vectores tangentes* a  $V$  en  $p$ .

Observemos que si  $v \in T_p(V)$  y  $c_\lambda$  es la función constante igual a  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $v(c_\lambda) = 0$ . En efecto, basta observar que  $c_1 = c_1 c_1$ , por lo que

$$v(c_1) = v(c_1) \cdot 1 + 1 \cdot v(c_1) = 2v(c_1),$$

luego  $v(c_1) = 0$ . En general  $v(c_\lambda) = v(\lambda c_1) = \lambda v(c_1) = 0$ . ■

Otro hecho notable sobre derivaciones es su carácter local:

**Teorema 9.8** *Sea  $V$  una variedad diferencial,  $p \in V$ ,  $v \in T_p(V)$  y consideremos dos funciones  $f, g \in C_p^\infty(V)$  que coinciden en un entorno de  $p$ . Entonces  $v(f) = v(g)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que si  $f$  se anula en un entorno  $U$  de  $p$  entonces  $v(f) = 0$ . Por el teorema 9.4 existe una función  $h : V \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable tal que  $f(p) = 1$  y  $f|_{V \setminus U} = 0$ . Sea  $r = 1 - h$ . Entonces  $f = fr$ , pues  $f$  es nula en  $U$  y  $r$  vale 1 fuera de  $U$ . Por consiguiente

$$v(f) = v(fr) = v(f)r(p) + f(p)v(r) = v(f) \cdot 0 + 0 \cdot v(r) = 0. \quad \blacksquare$$

Por consiguiente, cada derivación  $v \in T_p(V)$  induce una aplicación sobre el álgebra de gérmenes  $v : G_p(V) \rightarrow \mathbb{R}$ . La propiedad (9.1) se traduce en que  $v$  es lineal (lo cual no tenía sentido como aplicación en  $C_p^\infty(V)$  porque este conjunto no es un espacio vectorial) y se sigue cumpliendo la relación (9.2), ahora para gérmenes  $\alpha$  y  $\beta$ . Recíprocamente, toda aplicación lineal en  $G_p(V)$  que cumpla (9.2) —lo que se llama una derivación en  $G_p(V)$ — determina una única derivación en el espacio tangente  $T_p(V)$ .

Así pues, podemos identificar el espacio tangente  $T_p(V)$  con el espacio de las derivaciones del álgebra de gérmenes de  $p$ .

Otra consecuencia del teorema anterior es que si  $U$  es un abierto en una variedad  $V$  y  $p \in U$ , entonces podemos identificar a  $T_p(U)$  con  $T_p(V)$ . En efecto, la inclusión  $C_p^\infty(U) \rightarrow C_p^\infty(V)$  induce un isomorfismo  $G_p(U) \rightarrow G_p(V)$ , el cual induce a su vez un isomorfismo canónico entre los dos espacios tangentes. Concretamente, si  $v \in T_p(U)$  y  $f \in C_p^\infty(V)$  tiene dominio  $U'$ , al considerar a  $v$  como elemento de  $T_p(V)$  tenemos que  $v(f) = v(f|_{U \cap U'})$ .

**Definición 9.9** Sea  $V$  una variedad diferencial, sea  $p \in V$  y  $x$  una carta alrededor de  $p$ . Definimos la aplicación

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p : C_p^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

como la dada por

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p = \left. \frac{\partial (x^{-1} \circ f)}{\partial x_i} \right|_{x(p)}$$

En otras palabras,  $x^{-1} \circ f$  es una función diferenciable en un abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al punto  $x(p)$ , y la derivada de  $f$  respecto a  $x_i$  se define como la derivada parcial de esta función respecto de la  $i$ -ésima variable en el punto  $x(p)$ .

Por razones tipográficas a veces escribiremos  $\partial_{x_i}|_p$  (o incluso  $\partial_i|_p$  si las coordenadas se sobrentienden) en lugar de  $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$ . Es claro que  $\partial_{x_i}|_p \in T_p(V)$ . Su interpretación es clara: la derivada parcial de una función  $f$  respecto a la coordenada  $x_i$  en  $p$  es el incremento infinitesimal que experimenta  $f$  por cada unidad que aumentamos desde  $p$  la coordenada  $x_i$ .

Vamos a demostrar que estas derivadas parciales son una base de  $T_p(V)$ . Para ello necesitamos un resultado técnico:

**Teorema 9.10** Sea  $U$  un abierto convexo en  $\mathbb{R}^n$ , sea  $y^0 \in U$  y  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación diferenciable. Entonces existen funciones diferenciables  $F_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  tales que, para todo  $y \in U$ ,

$$F(y) = F(y^0) + \sum_{i=1}^n F_i(y)(y_i - y_i^0),$$

y además  $F_i(y^0) = \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{y^0}$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $g(t) = F(t(y - y^0) + y^0)$ , bien definida porque  $U$  es convexo. Claramente  $g(0) = F(y^0)$ ,  $g(1) = F(y)$ . Además  $g$  es derivable y

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{t(y-y^0)+y^0} (y_i - y_i^0).$$

Por consiguiente

$$F(y) = F(y^0) + \int_0^1 g'(t) dt = F(y^0) + \sum_{i=1}^n F_i(y)(y_i - y_i^0),$$

donde

$$F_i(y) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{t(y-y^0)+y^0} dt.$$

Claramente las funciones  $F_i$  son de clase  $C^\infty$  y

$$F_i(y^0) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{y^0} dt = \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{y^0}.$$

■

**Teorema 9.11** *Sea  $V$  una variedad diferencial, sea  $x$  una carta alrededor de un punto  $p \in V$  y sea  $v \in T_p(V)$ . Entonces*

$$v = \sum_{i=1}^n v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea  $f \in C_p^\infty(V)$  y consideremos un entorno  $U$  de  $p$  contenido tanto en el dominio de  $f$  como en el de  $x$  y cuya imagen por  $x$  sea convexa. En dicho entorno  $f = x \circ (x^{-1} \circ f) = x \circ F$ , donde  $F$  está en las hipótesis del teorema anterior (con  $y^0 = x(p)$ ). Así pues, para todo  $q \in U$ , tenemos

$$f(q) = F(x(q)) = F(x(p)) + \sum_{i=1}^n F_i(x(q))(x_i(q) - x_i(p)),$$

luego

$$f = c_{f(p)} + \sum_{i=1}^n (x \circ F_i)(x_i - c_{x_i(p)}).$$

Como  $v$  es una derivación,

$$v(f) = \sum_{i=1}^n v(x_i)(x \circ F_i)(p) = \sum_{i=1}^n v(x_i) \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{x(p)} = \sum_{i=1}^n v(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p.$$

■

En particular tenemos que las derivadas parciales  $\partial_{x_i}|_p$  son un sistema generador del espacio tangente. A continuación probamos que son una base. Admitiendo esto, acabamos de ver que la coordenada de una derivación  $v$  correspondiente al vector básico  $\partial_{x_i}|_p$  es  $v(x_i)$ .

**Teorema 9.12** *Sea  $V$  una variedad diferencial y  $x$  una carta alrededor de un punto  $p \in V$ . Entonces las derivadas  $\partial_{x_i}|_p$  forman una base del espacio tangente  $T_p(V)$ .*



DEMOSTRACIÓN: Sólo falta probar que las derivadas son linealmente independientes (en particular distintas dos a dos). Supongamos que

$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + \cdots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p = 0.$$

Aplicamos esta igualdad a la función  $x_i$  y observamos que

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \Big|_p = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

La conclusión es, entonces, que cada  $\alpha_i = 0$ . ■

De este modo, a cada punto  $p$  de una variedad diferencial  $V$  de dimensión  $n$  le hemos asociado un espacio vectorial  $T_p(V)$  de dimensión  $n$ .

**Abiertos en  $\mathbb{R}^n$**  Es importante recalcar que en general no existe nada parecido a una base canónica de  $T_p(V)$ , sino que tenemos una base asociada a cada carta, sin que podamos seleccionar ninguna de forma natural. La única excepción se da cuando  $V$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$ , en cuyo caso podemos tomar como base canónica la asociada a la carta identidad  $x$ . En tal caso las funciones coordenadas  $x_i$  son las restricciones a  $v$  de las proyecciones  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y la derivada respecto a  $x_i$  de una función  $f \in C_p^\infty(V)$  es su derivada parcial respecto a la  $i$ -ésima variable en el sentido usual.

Más concretamente, si  $v \in \mathbb{R}^n$ , es fácil ver que la derivada direccional en  $p$  en la dirección de  $v$  —representémosla por  $D_p(*, v)$ — pertenece a  $T_p(V)$ , y la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_p(V) \\ v &\longmapsto D_p(*, v) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales que hace corresponder la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  con la base canónica de  $T_p(V)$  formada, según hemos convenido, por las derivadas parciales.

El teorema 9.11 nos da una expresión sencilla para el isomorfismo inverso  $\theta_p : T_p(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , a saber,

$$\theta_p(v) = (v(x_1), \dots, v(x_n)). \quad (9.3)$$

Veremos que a través de estos isomorfismos los conceptos de la geometría diferencial se particularizan a los del cálculo diferencial en el caso de abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .

Conviene observar que en realidad la definición de  $\theta_p$  no depende de la base canónica, en el sentido de que si  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  es una base arbitraria de  $\mathbb{R}^n$  e  $y_1, \dots, y_n$  son las funciones coordenadas asociadas, entonces

$$\theta_p(v) = \sum_{i=1}^n v(y_i) \bar{e}_i. \quad (9.4)$$

En efecto, sabemos que esta expresión es correcta para la base canónica  $e_1, \dots, e_n$  y las coordenadas  $x_1, \dots, x_n$ . Sea  $e_i = \sum_j \alpha_{ij} \bar{e}_j$  y sea  $x_i = \sum_j \beta_{ij} y_j$ . Usando que  $x_i(e_j) = \delta_{ij} = y_i(\bar{e}_j)$  se concluye que las matrices  $(\alpha_{ij})$  y  $(\beta_{ij})$  son mutuamente inversas, lo que a su vez nos da que

$$\theta_p(v) = \sum_{i=1}^n v(x_i) e_i = \sum_{i,j,k} \beta_{ij} v(y_j) \alpha_{ik} \bar{e}_k = \sum_k v(y_k) \bar{e}_k.$$

Así, la expresión (9.4) define de hecho un isomorfismo  $\theta_p : T_p E \rightarrow E$  para cualquier espacio vectorial real  $E$  de dimensión  $n$  (considerado como variedad de modo que las cartas son los isomorfismos con  $\mathbb{R}^n$ ).

**Cambio de base** Volviendo a la situación general, si  $p$  es un punto de una variedad  $V$  y  $x, y$  son dos cartas alrededor de  $p$ , tenemos dos bases de  $T_p(V)$ . Teniendo en cuenta el teorema 9.11 es claro que si  $x$  e  $y$  son dos cartas alrededor de un punto  $p$ , entonces

$$\left. \frac{\partial}{\partial y_i} \right|_p = \left. \frac{\partial x_1}{\partial y_i} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p + \dots + \left. \frac{\partial x_n}{\partial y_i} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p.$$

En otras palabras, la matriz de cambio de base es la formada por las derivadas parciales de las coordenadas  $x_j$  respecto de las coordenadas  $y_i$ .

**Derivadas sucesivas** Observemos que si  $V$  es una variedad diferencial,  $p \in V$ ,  $f \in C_p^\infty(V)$  y  $x$  es un sistema de coordenadas alrededor de  $p$ , entonces tenemos definidas las funciones  $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p$  (en la intersección de los dominios de  $x$  y  $f$ ). Es claro que están en  $C_p^\infty(V)$ , pues sus lecturas en la carta  $x$  son las derivadas parciales de la función  $x^{-1} \circ f$ . En particular podemos calcular las derivadas segundas

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_p = \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \left( \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p \right),$$

las cuales determinan funciones

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

que están en  $C_p^\infty(V)$ , pues sus lecturas en  $x$  son las derivadas segundas de  $x^{-1} \circ f$ . Por este mismo motivo es claro que las derivadas cruzadas de una función son iguales.

**La diferencial de una aplicación** Generalizamos ahora el concepto de diferencial para aplicaciones entre variedades cualesquiera.

**Definición 9.13** Sea  $f : V \rightarrow W$  una aplicación diferenciable entre variedades y sea  $p \in V$ . Definimos la *diferencial* de  $f$  en  $p$  como la aplicación  $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(W)$  dada por

$$df|_p(v)(u) = v(f \circ u), \quad \text{para todo } u \in C_{f(p)}^\infty(W).$$

Es inmediato comprobar que  $df|_p(v) \in T_{f(p)}(W)$ , así como que  $df|_p$  es una aplicación lineal. En el caso en que  $V$  y  $W$  sean abiertos en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ , respectivamente, la diferencial que acabamos de definir se corresponde con la usual a través de los isomorfismos canónicos  $\theta_p$  definidos por (9.3), es decir, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_p(V) & \xrightarrow{df|_p} & T_{f(p)}(W) \\ \theta_p \downarrow & & \downarrow \theta_{f(p)} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{df|_p} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

En efecto, se comprueba inmediatamente que cuando partimos del vector básico  $\partial_{x_i}|_p$  llegamos por ambos caminos a la  $m$ -tupla cuya  $j$ -ésima coordenada es  $\partial_{x_i} f_j|_p$ .

En el contexto general, la regla de la cadena resulta inmediata:

**Teorema 9.14** *Si  $f : V \rightarrow W$  y  $g : W \rightarrow X$  son aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables y  $p \in V$ , entonces*

$$d(f \circ g)|_p = df|_p \circ dg|_{f(p)}.$$

DEMOSTRACIÓN: En efecto, si  $v \in T_p(M)$  y  $u \in C_p^\infty(X)$ , entonces

$$d(f \circ g)|_p(v)(u) = v(f \circ g \circ u) = df|_p(v)(g \circ u) = dg|_{f(p)}(df|_p(v))(u).$$

■

Uniendo esto al hecho obvio que de la diferencial de la identidad en cada punto es la identidad del correspondiente espacio tangente, concluimos que las diferenciales de los difeomorfismos entre variedades son isomorfismos de espacios vectoriales.

Es fácil calcular la matriz de una diferencial respecto de las bases asociadas a dos cartas. Concretamente, si  $f : V \rightarrow W$  es una aplicación diferenciable,  $p \in V$ ,  $x$  es una carta alrededor de  $p$  e  $y$  es una carta alrededor de  $f(p)$ , llamamos  $f_j = f \circ y_j$ , que son funciones definidas en un entorno de  $p$ . Entonces, la coordenada de la imagen de  $\partial_{x_i}|_p$  correspondiente a  $\partial_{y_j}|_{f(p)}$  es

$$df|_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) (y_j) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_p.$$

Así pues, la matriz de  $df|_p$  respecto a las bases asociadas a  $x$  e  $y$  es la *matriz jacobiana* de  $f$  en  $p$ , dada por

$$J_p(f) = \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_p \right).$$

**El espacio cotangente** Sea  $V$  una variedad diferencial,  $p \in V$  y  $f \in C_p^\infty(V)$ . Si  $U$  es el dominio de  $f$ , a través de la identificación natural entre  $T_p(U)$  y  $T_p(V)$  podemos considerar que  $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(\mathbb{R})$ . Ahora bien, mediante el isomorfismo natural  $\theta_{f(p)} : T_{f(p)}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos considerar que  $df_p : T_p(V) \rightarrow \mathbb{R}$ . Veamos la expresión de  $df|_p$  con estas identificaciones. Concretamente, si  $v \in T_p(V)$ , estamos llamando  $df|_p(v)$  a lo que en principio sería  $\theta_{f(p)}(df|_p(v)) = df|_p(v)(x)$ , donde  $x$  es la identidad en  $\mathbb{R}$ . Así pues,

$$df|_p(v) = v(f).$$

Definimos el *espacio cotangente* de  $V$  en  $p$  como el espacio dual  $T_p^*(V)$ , es decir, el espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales de  $T_p(V)$  en  $\mathbb{R}$ . Acabamos de probar que si  $f \in C_p^\infty(V)$  entonces  $df|_p \in T_p^*(V)$ .

Si  $x$  es una carta alrededor de  $p$ , entonces

$$dx_i|_p \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \Big|_p = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Esto significa que  $dx_i|_p$  es la base dual de la base asociada a  $x$  en  $T_p(V)$ , de donde se sigue a su vez que, si  $f \in C_p^\infty(V)$ , entonces

$$df|_p = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_p dx_1|_p + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_p dx_n|_p.$$

Si  $f : V \rightarrow W$  es una aplicación diferenciable entre variedades y  $p \in V$ , definimos la *codiferencial* de  $f$  en  $p$  como la aplicación  $df_p^* : T_{f(p)}^*(W) \rightarrow T_p^*(V)$  dual de la diferencial  $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(W)$ .

## 9.4 Subvariedades

Introducimos ahora el concepto de subvariedad, gracias al cual conectaremos el concepto abstracto de variedad diferencial con el clásico de subvariedad de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 9.15** Sea  $V$  una variedad diferencial y  $W$  un subespacio de  $V$  dotado también de una estructura de variedad diferencial (con la topología relativa). Diremos que  $W$  es una *subvariedad*<sup>1</sup> de  $V$  si la inclusión  $i : W \rightarrow V$  es diferenciable y  $di|_p$  es inyectiva en cada punto  $p \in W$ .

Notemos que la diferenciabilidad de la inclusión equivale a que las inversas de las cartas sean diferenciables como aplicaciones en  $V$ . La hipótesis sobre la diferencial se traduce en que cada espacio tangente  $T_p(W)$  se transforma en un

<sup>1</sup>Al exigir que la topología de  $W$  sea la topología relativa estamos definiendo lo que habitualmente se conoce como "subvariedad regular". Únicamente vamos a considerar subvariedades regulares.

subespacio de la misma dimensión en  $T_p(V)$ . A su vez esto se interpreta como que  $W$  no forma ángulos en  $V$ . Por ejemplo, la aplicación

$$f(t) = \begin{cases} (-e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) & \text{si } t < 0, \\ (0, 0) & \text{si } t = 0, \\ (e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

es un homeomorfismo entre  $\mathbb{R}$  y un subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^2$ , que determina en éste una estructura diferenciable, pero la lectura de la inclusión en la carta dada (y la identidad en  $\mathbb{R}^2$ ) es precisamente  $f$ , cuya diferencial en 0 es nula, luego lo mismo le sucede a  $di|_{(0,0)}$ . Por consiguiente  $W$  no es una subvariedad de  $\mathbb{R}^2$ . En efecto,  $W$  presenta un “pico” en  $(0, 0)$ .

Es claro que si  $W$  es una subvariedad de  $V$ , entonces podemos identificar a cada espacio  $T_p(W)$  con un subespacio de  $T_p(V)$  a través de la diferencial de la inclusión.

Más concretamente, si  $V$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^m$  y  $x : U \rightarrow \tilde{U}$  es una carta de  $V$ , llamemos  $X = x^{-1} : \tilde{U} \rightarrow U$ . Entonces un vector  $\partial_{x_i}|_p$ , para  $p \in U$ , se corresponde con el vector de coordenadas  $di|_p(\partial_{x_i})(r_j)$  en  $\mathbb{R}^m$ , donde  $r_j$  son las coordenadas de la identidad en  $\mathbb{R}^m$ .

Concretamente,

$$di|_p(\partial_{x_i})(r_j) = \left. \frac{\partial r_j|_V}{\partial x_i} \right|_p = \left. \frac{\partial X \circ r_j}{\partial x_i} \right|_{x(p)} = \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right|_{x(p)},$$

luego  $\partial_{x_i}|_p$  se corresponde con el vector

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x_i} \right|_{x(p)}.$$

Así pues, hemos probado lo siguiente:

**Teorema 9.16** *Si  $V$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^m$  de dimensión  $n$  y  $X : \tilde{U} \rightarrow V$  es la inversa de una carta en  $V$ , entonces, para cada  $x \in X$ , la base de  $T_{X(x)}(V)$  asociada a la carta se corresponde, a través de la identificación de este espacio con un subespacio de  $\mathbb{R}^m$ , con la formada por los vectores*

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x_i} \right|_x, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Ejemplo** Vamos a comprobar que si  $p \in S^n$ , entonces  $T_p S^n$  se corresponde con el subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$  formado por los vectores ortogonales a  $p$ .

Para ello consideramos la aplicación  $r : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$r(x) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2.$$

Claramente es diferenciable y si  $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  es la inclusión, la composición  $i \circ r$  es constante igual a 1, luego su diferencial en  $p$  es nula. Por

consiguiente, la imagen de  $di|_p$  está contenida en el núcleo de  $dr|_p$ . Teniendo en cuenta las dimensiones concluimos la igualdad. Observemos que

$$dr|_p = 2p_1 dx_1|_p + \cdots + 2p_{n+1} dx_{n+1}|_p.$$

A través del isomorfismo canónico, el núcleo de  $dr|_p$  en  $T_p\mathbb{R}^{n+1}$  se corresponde con el núcleo de  $dr|_p$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  considerando ahora la diferencial en el sentido usual del análisis, es decir, como la aplicación  $x \mapsto 2px$  (producto escalar). Ahora es evidente que dicho núcleo está formado por los vectores de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ortogonales a  $p$ . ■

Vamos a probar que cada subespacio topológico de una variedad diferencial  $V$  admite a lo sumo una estructura diferencial que lo convierta en subvariedad. Esencialmente se trata de una consecuencia del teorema de la función inversa. Empezamos enunciándolo en el contexto de la geometría diferencial:

**Teorema 9.17 (Teorema de la función inversa)** *Sea  $f : V \rightarrow W$  una función diferenciable entre variedades y sea  $p \in V$  un punto tal que la diferencial  $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(W)$  es un isomorfismo. Entonces existe un entorno  $U$  de  $p$  en  $V$  tal que  $f[U]$  es abierto en  $W$  y  $f|_U : U \rightarrow f[U]$  es un difeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que ambas variedades han de tener la misma dimensión  $n$ . Sea  $(U', x)$  una carta alrededor de  $p$  y  $(U'', y)$  una carta alrededor de  $f(p)$  de modo que  $f[U'] \subset U''$ . Entonces  $x^{-1} \circ f \circ y$  es una aplicación diferenciable entre dos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  cuya diferencial en  $x(p)$  es un isomorfismo.

Por el teorema de la función inversa existe un entorno  $G$  de  $x(p)$  tal que  $(x^{-1} \circ f \circ y)[G]$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y la restricción de  $x^{-1} \circ f \circ y$  es un difeomorfismo. Basta tomar  $U = x^{-1}[G]$ . ■

**Definición 9.18** Sea  $V$  una variedad diferencial. Un conjunto de funciones  $x_1, \dots, x_m \in C_p^\infty(V)$  es *independiente* en  $p$  si las diferenciales  $dx_1|_p, \dots, dx_m|_p$  son linealmente independientes en  $T_p^*(V)$ .

Obviamente, las funciones coordenadas de una carta son siempre funciones independientes. Recíprocamente tenemos el teorema siguiente:

**Teorema 9.19** *Sea  $V$  una variedad diferencial de dimensión  $n$  e  $y_1, \dots, y_n$  un conjunto de  $n$  funciones independientes en un punto  $p \in V$ . Entonces  $y_1, \dots, y_n$  forman un sistema de coordenadas alrededor de  $p$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $U$  un entorno de  $p$  en el que estén definidas todas las funciones  $y_i$ . Definimos  $y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mediante  $y(q) = (y_1(q), \dots, y_n(q))$ . Claramente  $y$  es diferenciable.

Llamemos  $x_1, \dots, x_n$  a las proyecciones en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, a las funciones coordenadas correspondientes a la carta identidad. Consideremos la codiferencial  $dy_p^* : T_{y(p)}^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_p^*(V)$ . Tenemos que

$$dy_p^*(dx_i|_{y(p)}) = dy|_p \circ dx_i|_{y(p)} = dy_i|_p.$$

Así pues,  $dy_p^*$  transforma la base  $dx_i|_{y(p)}$  de  $T_{y(p)}^*(\mathbb{R}^n)$  en la base  $dy_i|_p$  de  $T_p^*(V)$ . Por consiguiente  $dy_p^*$  es un isomorfismo, luego también lo es  $dy_p$ . Por el teorema anterior  $y$  se restringe a un difeomorfismo en un entorno de  $p$ , es decir, a una carta. ■

Un poco más en general tenemos:

**Teorema 9.20** *Sea  $V$  una variedad diferencial de dimensión  $n$  e  $y_1, \dots, y_m$  un conjunto de  $m \leq n$  funciones independientes en un punto  $p \in V$ . Entonces  $y_1, \dots, y_m$  forman parte de un sistema de coordenadas alrededor de  $p$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $x$  una carta alrededor de  $p$ . Entonces  $dy_1|_p, \dots, dy_m|_p$  puede completarse hasta una base de  $T_p^*(V)$  mediante algunas de las diferenciales  $dx_i|_p$ . Digamos que  $dy_1|_p, \dots, dy_m|_p, dx_{m+1}|_p, \dots, dx_n|_p$  forman dicha base. Por el teorema anterior  $y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n$  forman un sistema de coordenadas alrededor de  $p$ . ■

Con esto podemos probar un resultado notable sobre subvariedades:

**Teorema 9.21** *Sea  $f : V \rightarrow W$  una aplicación entre variedades y supongamos que  $W$  es una subvariedad de  $X$ . Entonces  $f$  es diferenciable si y sólo si lo es como aplicación  $f : V \rightarrow X$ .*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es obvia. Supongamos que  $f : V \rightarrow X$  es diferenciable y tomemos un punto  $p \in V$ . Sea  $(U, x)$  una carta en  $X$  alrededor de  $f(p)$ . Consideremos la inclusión  $i : W \rightarrow X$ . Como  $di|_{f(p)}$  es inyectiva, tenemos que  $di_{f(p)}^*$  es suprayectiva, luego los elementos

$$di_{f(p)}^*(dx_i|_{f(p)}) = di|_{f(p)} \circ dx_i|_{f(p)} = d(x_i|_{U \cap W})|_{f(p)}$$

son un sistema generador de  $T_{f(p)}^*(W)$ . Eliminando algunos de ellos obtenemos una base. Si llamamos  $m$  a la dimensión de  $X$  y  $n$  a la de  $W$ , tenemos que  $n$  de las funciones  $x_i|_{U \cap W}$  son independientes en  $f(p)$ , luego por 9.19 forman un sistema coordinado (de  $W$ ) alrededor de  $f(p)$ . En otras palabras, si llamamos  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  a una cierta proyección (es decir, una aplicación que elimina las componentes adecuadas), la composición  $x \circ \pi$  se restringe a una carta en  $W$  alrededor de  $f(p)$ . La lectura de  $f$  (como aplicación de  $V$  en  $W$ ) respecto a una carta cualquiera  $y$  alrededor de  $p$  y la carta  $x \circ \pi$  alrededor de  $f(p)$  es  $y^{-1} \circ f \circ x \circ \pi$ . Las tres primeras funciones forman una función diferenciable pues son una lectura de  $f$  como aplicación en  $X$ , y al componer con  $\pi$  seguimos teniendo una función diferenciable. Así pues,  $f$  es diferenciable en un entorno de  $p$ , y esto vale para todo  $p \in V$ . ■

A su vez de aquí deducimos lo que habíamos anunciado:

**Teorema 9.22** *Sea  $V$  una variedad diferencial y  $W \subset V$ . Entonces  $W$  admite a lo sumo una estructura diferencial que lo convierte en subvariedad de  $V$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sean  $W$  y  $W'$  el mismo conjunto  $W$  con dos estructuras diferenciales que lo conviertan en subvariedad de  $V$ . Entonces la identidad en  $W$  es diferenciable como aplicación  $W \rightarrow V$ , luego también lo es como aplicación  $W \rightarrow W'$ , e igualmente al revés, luego la identidad es un difeomorfismo, lo que significa que ambas estructuras diferenciales son la misma. ■

Así, por ejemplo, en la sección 9.1 definimos una estructura diferencial en  $S^n$  tomando como cartas las proyecciones cartesianas en  $\mathbb{R}^n$ . También podríamos haber considerado las proyecciones estereográficas, o muchas otras aplicaciones. Ahora sabemos que todas ellas dan lugar a la misma estructura diferencial.

En general queda el problema de determinar si un subconjunto dado de una variedad admite o no estructura de variedad. Un criterio sencillo se obtiene a partir del concepto de valor regular de una función diferenciable:

**Definición 9.23** Sea  $f : V \rightarrow W$  una aplicación diferenciable entre variedades. Un punto  $p \in V$  es un *punto crítico* de  $f$  si  $df|_p : T_p V \rightarrow T_{f(p)} W$  no es suprayectiva. Un punto  $q \in W$  es un *valor crítico* de  $f$  si es la imagen de un punto crítico de  $f$ . En caso contrario se dice que  $q$  es un *valor regular* (y aquí incluimos el caso en que  $q$  no tiene antiimágenes en  $V$ ).

La relación con las subvariedades se obtiene del teorema siguiente:

**Teorema 9.24** Sea  $f : V \rightarrow R$  una aplicación diferenciable entre variedades diferenciales y sea  $p \in V$  tal que  $df|_p$  sea suprayectiva. Entonces existe un sistema de coordenadas  $x$  alrededor de  $p$  y un sistema  $y$  alrededor de  $f(p)$  de modo que  $x^{-1} \circ f \circ y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la proyección en las  $n$  primeras coordenadas.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  a la proyección en las primeras coordenadas. Representaremos a  $\mathbb{R}^m$  como  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ .

Tomemos coordenadas  $x'$  e  $y$  alrededor de  $p$  y  $f(p)$  tales que  $x'(p) = 0$  e  $y'(f(p)) = 0$ . Sea  $h = x'^{-1} \circ f \circ y : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces  $dh|_0$  es suprayectiva. Componiendo  $x$  con un automorfismo de  $\mathbb{R}^m$  podemos suponer que el núcleo de  $dh|_0$  es  $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$ . Sea  $g : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $g(x, y) = (h(x, y), y)$ . Claramente  $g \circ \pi = h$ , luego el núcleo de  $dg|_0$  está contenido en  $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$ , pero por otra parte es fácil ver que  $dg|_0$  es la identidad en este subespacio, luego  $dg|_0$  es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa  $g$  es un difeomorfismo en un entorno de 0. Tomamos  $x = x' \circ g$ , que es un sistema de coordenadas alrededor de  $p$ , y ahora  $x^{-1} \circ f \circ y = g^{-1} \circ h = \pi$ . ■

Como consecuencia:

**Teorema 9.25** Sea  $f : V \rightarrow R$  una aplicación diferenciable entre variedades de dimensiones  $m$  y  $n$  respectivamente, sea  $r \in R$  un valor regular de  $f$  tal que  $W = f^{-1}[r] \neq \emptyset$ . Entonces  $W$  es una subvariedad de  $V$  de dimensión  $m - n$ .

DEMOSTRACIÓN: Para cada punto  $p \in W$  tenemos que  $df|_p$  es suprayectiva, luego el teorema anterior nos da una carta  $(U, x)$  alrededor de  $p$  tal que  $U \cap W$



está formado por los puntos de  $U$  cuyas  $n$  primeras coordenadas son nulas. Tomamos como carta alrededor de  $p$  la composición  $\tilde{x}$  de  $x|_{U \cap W}$  con la proyección en las  $m - n$  últimas coordenadas. Claramente  $\tilde{x}$  es un homeomorfismo, cuya inversa se obtiene completando con ceros y aplicando  $x^{-1}$ . Es inmediato comprobar que estas cartas determinan un atlas para  $W$ . Además, la lectura de la inclusión respecto a un par de cartas  $\tilde{x}$  y  $x$  es la identidad, luego  $W$  es una subvariedad de  $V$ . ■

Por ejemplo, es claro que 1 es un valor regular para  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2$ , y entonces el teorema anterior nos da una prueba alternativa de que  $S^n$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Terminamos la sección con la prueba de un importante teorema sobre existencia de valores regulares de una aplicación. Concretamente, el teorema de Sard afirma que el conjunto de valores críticos de cualquier aplicación diferenciable tiene medida nula, pero para dar sentido a esto hemos de generalizar el concepto de “conjunto nulo” a variedades arbitrarias.

**Definición 9.26** Un subconjunto  $A$  de una variedad diferencial  $V$  es *nulo* si para toda carta  $(U, x)$  de  $V$  se cumple que  $x[U \cap A]$  es nulo para la medida de Lebesgue.

El teorema de cambio de variable (para difeomorfismos entre abiertos de  $\mathbb{R}^n$ ) implica que los difeomorfismos transforman conjuntos nulos en conjuntos nulos. Por ello la definición anterior puede debilitarse: es suficiente con que  $x[U \cap A]$  sea nulo cuando  $(U, x)$  varía en un atlas numerable  $\mathcal{A}$  de  $V$ . En efecto, podemos expresar

$$A = \bigcup_{(U,x) \in \mathcal{A}} (A \cap U),$$

de modo que si  $(U', x')$  es cualquier carta de  $V$ , tenemos que

$$x'[A \cap U'] = \bigcup_{(U,x) \in \mathcal{A}} x'[A \cap U \cap U'],$$

y basta probar que cada conjunto  $x'[A \cap U \cap U']$  es nulo. Ahora bien, este conjunto es la imagen del conjunto nulo  $x[A \cap U \cap U']$  por el difeomorfismo  $x^{-1} \circ x'$ .

No es difícil probar que si  $V$  es una variedad de Riemann (las introducimos en el capítulo siguiente), los conjuntos nulos en este sentido coinciden con los conjuntos nulos para la medida inducida por la métrica (ver la nota de la página 346). No obstante no vamos a necesitar este hecho. Nos bastará con observar que la unión numerable de conjuntos nulos es nula, que todo subconjunto de un conjunto nulo es nulo y que todo conjunto nulo tiene interior vacío. Todos estos hechos se deducen inmediatamente de las propiedades de la medida de Lebesgue.

Conviene destacar una consecuencia: si  $C \subset V$  tiene la propiedad de que para todo  $p \in C$  existe un entorno  $U$  en  $V$  tal que  $C \cap U$  es nulo, entonces  $C$

es nulo. En efecto, como  $V$  tiene una base numerable es posible cubrir  $C$  por una cantidad numerable de conjuntos cuya intersección con  $C$  es nula, luego  $C$  es nulo.

Ahora ya podemos enunciar el teorema que perseguimos:

**Teorema 9.27 (Teorema de Sard)** *Si  $f : V \rightarrow W$  es una aplicación diferenciable, entonces el conjunto de valores críticos de  $f$  es nulo.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $A \subset W$  es el conjunto de valores críticos de  $f$  y  $(U, x)$  es una carta de  $W$ , es claro que  $x[A \cap U]$  es el conjunto de valores críticos de  $f|_{f^{-1}[U]} \circ x$ , y hemos de probar que este conjunto es nulo, luego podemos suponer que  $W = \mathbb{R}^k$ .

Razonaremos por inducción sobre la dimensión  $n$  de  $V$ . El teorema es obviamente cierto si  $n = 0$ .

Llamemos  $C \subset V$  al conjunto de puntos críticos de  $f$ . Es fácil ver que es cerrado en  $V$  (si un punto tiene diferencial suprayectiva, la matriz de ésta en una carta dada tendrá un menor de orden  $k$  no nulo, luego lo mismo sucederá en un entorno). Llamemos  $D \subset C$  al conjunto de puntos de  $V$  donde la diferencial es nula. También es claro que  $D$  es cerrado. Hemos de probar que  $f[C]$  es nulo, para lo cual probaremos que  $f[D]$  y  $f[D \setminus C]$  son ambos nulos.

Sea  $f_1$  la primera función coordenada de  $f$ . Si un punto  $p \in V$  cumple  $df|_p = 0$ , entonces también  $df_1|_p = 0$ , luego si  $E$  es el conjunto de puntos críticos de  $f_1$  (que en este caso coincide con el conjunto de puntos donde  $df_1$  se anula), tenemos que  $f[D] \subset f_1[E] \times \mathbb{R}^{k-1}$ . Para probar que  $f[D]$  es nulo basta ver, pues, que  $f_1[E]$  es nulo, es decir, podemos suponer que  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Expresando  $V$  como unión numerable de abiertos coordenados, podemos suponer también que  $V$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

Llamemos  $D_i$  al conjunto de los puntos  $p \in V$  tales que todas las derivadas parciales de  $f$  de orden  $\leq i$  se anulan en  $p$ . Los conjuntos  $D_i$  son cerrados y satisfacen las inclusiones  $D = D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_n$ .

Veamos que  $f[D_n]$  es nulo. Para ello basta ver que  $f[D_n \cap Q] = 0$  para todo cubo cerrado  $Q \subset V$ . Sea  $s$  la longitud de los lados de  $Q$ . Para cada natural  $m$  podemos dividir  $Q$  en  $m^n$  cubos de lado  $s/m$  y diámetro  $sm^{-1}\sqrt{n}$ . Tomemos  $\bar{x} \in Q \cap D_n$  y sea  $Q'$  uno de los cubos pequeños que contienen a  $\bar{x}$ . Por el teorema de Taylor para funciones de  $n$  variables, existe una constante  $B$  (una cota en  $Q$  de las derivadas de orden  $n+1$  de  $f$ ) tal que si  $x \in Q'$  entonces

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq B\|x - \bar{x}\|^{n+1} \leq B \left( \frac{s\sqrt{n}}{m} \right)^{n+1}.$$

Esto significa que  $f[Q']$  está contenido en un intervalo de longitud  $A/m^{n+1}$ , donde  $A$  es una constante independiente de  $m$ . Entonces  $f[Q \cap D_n]$  está contenido en una unión de intervalos cuya medida (de la unión) es menor o igual que  $A/m$ . Esto prueba que  $f[Q \cap D_n]$  es un conjunto nulo.

Ahora probamos que cada  $f[D_i \setminus D_{i+1}]$  es nulo, lo que implica que  $f[D]$  es nulo, tal y como queremos probar.

Como  $D_{i+1}$  es cerrado en  $V$ , podemos cambiar  $V$  por  $V \setminus D_{i+1}$  y suponer que  $D_{i+1} = \emptyset$ . Así, cada  $\bar{x} \in D_i$  anula a todas las derivadas de  $f$  de orden  $\leq i$  pero no a una derivada de orden  $i + 1$ . Así pues,  $f$  tiene una derivada parcial  $g$  de orden  $i$  cuya diferencial es no nula en  $\bar{x}$ . Sea  $U_{\bar{x}}$  un entorno de  $\bar{x}$  donde  $dg$  no se anula. Basta probar que  $f[U_{\bar{x}}]$  es nulo, pues  $D_i$  puede cubrirse por una cantidad numerable de abiertos de este tipo. Equivalentemente, podemos suponer que  $dg$  no se anula en  $V$ .

De este modo,  $D_i \subset g^{-1}[0]$  y  $0$  es un valor regular de  $g$ . El teorema 9.25 nos da que  $V' = g^{-1}[0]$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión<sup>2</sup>  $n - 1$  y  $D_i$  está contenido en el conjunto de puntos críticos de  $f|_{V'}$ . Por hipótesis de inducción  $f[D_i] = f|_{V'}[D_i]$  es nulo.

Ahora nos falta demostrar que  $f[C \setminus D]$  es nulo. Al igual que antes, podemos cambiar  $V$  por  $V \setminus D$  y suponer que  $D = \emptyset$ , es decir, que  $df$  no se anula en ningún punto. Basta probar que todo punto  $x \in C$  tiene un entorno con imagen nula. Concretamente, puesto que  $df_x \neq 0$ , existe una coordenada de  $f$ , digamos  $f_k$ , cuya diferencial en  $x$  no es nula. Sea  $U_x$  un entorno de  $x$  donde  $df_k$  no se anule, es decir, donde todos los puntos son regulares para  $f_k$ . Basta probar que  $f[U_x]$  es nulo o, equivalentemente, podemos suponer que  $U_x = V$ .

Para cada  $t \in \mathbb{R}$  en la imagen de  $f_k$ , tenemos que  $V_t = f_k^{-1}[t]$  es una subvariedad de  $V$  de dimensión  $n - 1$ . Sea  $f_t = f|_{V_t} : V_t \rightarrow \mathbb{R}^{k-1} \times \{t\}$ . Es claro que la diferencial de  $f_t$  en cada punto de  $V_t$  está formada por las  $k - 1$  primeras componentes de la diferencial de  $f$  en el punto y, como la última no se anula, un punto de  $V_t$  es crítico para  $f$  si y sólo si lo es para  $f_t$ , es decir,  $C_{f_t} = C \cap V_t$ . Por hipótesis de inducción tenemos que  $f_t[C \cap V_t] = f[C] \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{t\})$  es nulo. El teorema de Fubini implica entonces que  $f[C]$  es nulo. ■

## 9.5 El fibrado de tangentes

Hasta ahora hemos asignado un espacio tangente a cada punto de una variedad diferenciable, pero no hemos mostrado ninguna relación entre los espacios correspondientes a puntos distintos. Vamos a ver que todos los espacios tangentes de una variedad se pueden estructurar como una nueva variedad diferencial. Sea, pues,  $V$  una variedad diferencial de dimensión  $n$ , y llamemos

$$TV = \bigcup_{p \in V} T_p(V).$$

Notemos que la unión es disjunta. Aunque en realidad es redundante, conviene representar a los elementos de  $TV$  como pares  $(p, v)$ , donde  $v \in T_p(V)$ . Si  $(U, x)$  es una carta en  $V$ , podemos considerar a  $TU$  como subconjunto de  $TV$  a través de las identificaciones naturales entre los espacios  $T_p(U)$  y  $T_p(V)$ . Consideramos la aplicación  $\tilde{x} : TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  dada por

$$\tilde{x}(p, v) = (x_1(p), \dots, x_n(p), v(x_1), \dots, v(x_n)).$$

<sup>2</sup>Si  $n = 1$  la conclusión es simplemente que  $V'$  es un conjunto numerable.

Es claro que  $\tilde{x}$  es inyectiva, pues si  $\tilde{x}(p, v) = \tilde{x}(q, w)$ , comparando las primeras componentes concluimos que  $p = q$  y comparando las segundas concluimos que  $v = w$ . (Las segundas componentes son las coordenadas de  $v$  y  $w$  respecto a la base de  $T_p(V)$  asociada a  $x$ .) Además la imagen de  $\tilde{x}$  es el abierto  $x[U] \times \mathbb{R}^n$ .

Es fácil ver que existe una única topología en  $TV$  para la que los conjuntos  $TU$  son abiertos y las aplicaciones  $\tilde{x}$  son homeomorfismos. La prueba resulta más clara en un contexto general:

**Teorema 9.28** *Sea  $V$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  un conjunto de pares  $(U, x)$ , donde los conjuntos  $U \subset V$  cubren  $V$  y  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  biyectiva de modo que si  $(U, x), (U', y) \in \mathcal{A}$ , entonces  $x[U \cap U']$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $x^{-1} \circ y$  es un homeomorfismo en la imagen. Entonces existe una única topología en  $V$  para la cual las aplicaciones de  $\mathcal{A}$  son homeomorfismos en la imagen (o sea, cartas). En particular, si las aplicaciones  $x^{-1} \circ y$  son diferenciables entonces  $\mathcal{A}$  determina en  $V$  una estructura de variedad diferencial con dicha topología.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que las antiimágenes por las cartas de los abiertos de  $\mathbb{R}^n$  forman la base de una topología en  $V$ . Para ello tomamos un punto  $p \in x^{-1}[G] \cap y^{-1}[H]$ , donde  $G$  y  $H$  son abiertos en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $A = G \cap x[y^{-1}[H]]$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $p \in x^{-1}[A] \subset x^{-1}[G] \cap y^{-1}[H]$ . ■

Así, si  $(TU, \tilde{x})$  y  $(TU', \tilde{y})$  son dos cartas de  $TV$ , tenemos que  $TU \cap TU' = T(U \cap U')$  y  $\tilde{x}[T(U \cap U')] = x[U \cap U'] \times \mathbb{R}^n$ , que es abierto en  $\mathbb{R}^{2n}$ . Además, si  $(u, v)$  está en este conjunto, entonces

$$\tilde{x}^{-1}(u, v) = \left( x^{-1}(u), \sum_{j=1}^n v_j \partial_{x_j} \Big|_{x^{-1}(u)} \right),$$

y

$$(\tilde{x}^{-1} \circ \tilde{y})(u, v) = ((x^{-1} \circ y)(u), w),$$

donde

$$w_i = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \Big|_{x^{-1}(u)} = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial (x^{-1} \circ y_i)}{\partial x_j} \Big|_u.$$

Es claro, pues, que  $\tilde{x}^{-1} \circ \tilde{y}$  es una función diferenciable en su dominio. ■

Así pues, si  $V$  es una variedad diferencial, podemos considerar a  $TV$  como variedad con la estructura determinada por las cartas  $\tilde{x}$ . A esta variedad  $TV$  se la conoce como *fibrado de tangentes* de  $V$ .

La aplicación  $\pi : TV \rightarrow V$  dada por  $\pi(p, v) = p$  es claramente diferenciable, pues su lectura en dos cartas  $\tilde{x}$  y  $x$  es la proyección en las  $n$  primeras componentes.

Si  $f : V \rightarrow W$  es una aplicación diferenciable entre variedades, podemos definir  $df : TV \rightarrow TW$  mediante  $df(p, v) = (f(p), df|_p(v))$ . También es una aplicación diferenciable, pues su lectura en dos cartas  $\tilde{x}$  y  $\tilde{y}$  es de la forma

$$(\tilde{x}^{-1} \circ df \circ \tilde{y})(u, v) = ((x^{-1} \circ f \circ y)(u), w),$$

donde

$$w_i = \sum_{j=1}^n v_j \left. \frac{\partial(x^{-1} \circ f \circ y_i)}{\partial x_j} \right|_u$$

Veamos ahora que cada  $T_p(V)$  es una subvariedad de  $TV$ . En general, todo espacio vectorial  $X$  de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{R}$  tiene una estructura natural de variedad diferencial, en la que cualquier isomorfismo entre  $X$  y  $\mathbb{R}^n$  es una carta. Con esta estructura en  $T_p(V)$  (para  $p \in U$ ), la inclusión

$$i_p : T_p(V) \longrightarrow TV$$

dada por  $i_p(v) = (p, v)$  es diferenciable pues, fijada una carta  $(U, x)$  alrededor de  $p$ , su lectura respecto al isomorfismo que a cada  $v \in T_p(V)$  le asigna sus coordenadas en la base  $\partial_{x_i}$  y la carta  $\tilde{x}$  es la identidad. Más aún, si llamamos  $y$  a la composición  $TU \xrightarrow{\tilde{x}} x[U] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , tenemos que  $i_p \circ y$  es el isomorfismo  $\alpha(v) = (dx_1|_p(v), \dots, dx_n|_p(v))$ . De aquí se sigue que  $i_p^{-1} = y|_{i_p[T_p(V)]} \circ \alpha^{-1}$  es continua, luego  $i_p$  es un homeomorfismo en la imagen. Por otra parte,  $di_p|_v \circ dy|_{(p,v)} = d\alpha|_v$  es un isomorfismo, luego  $di_p|_v$  es un monomorfismo. Esto termina la prueba de que  $T_p(V)$  es ciertamente una subvariedad de  $TV$ .

Los isomorfismos canónicos  $\theta_p : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  determinan una aplicación  $\theta : T\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ . Claramente es diferenciable, pues su lectura respecto de la carta inducida por la identidad es la aplicación  $(p, v) \mapsto v$ .

## 9.6 Tensores

Los espacios tangentes permiten adaptar a las variedades diferenciales conceptos y resultados propios del álgebra lineal. El concepto de tensor sistematiza y unifica esta adaptación.

**Definición 9.29** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo  $K$  y sea  $V^*$  su espacio dual. Definimos el espacio de los *tensores* de tipo  $(r, s)$  sobre  $V$  como el espacio vectorial

$$\mathcal{T}_s^r(V) = V \otimes \overset{r \text{ veces}}{\dots} \otimes V \otimes V^* \otimes \overset{s \text{ veces}}{\dots} \otimes V^*$$

(Se entiende que los productos tensoriales son respecto a  $K$ . Convenimos que  $\mathcal{T}_0^0(V) = K$ .) Los tensores de tipo  $(r, 0)$  se llaman *contravariantes*, mientras que los de tipo  $(0, s)$  se llaman *covariantes*. El álgebra tensorial de  $V$  se define como

$$\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{r,s} \mathcal{T}_s^r(V).$$

Ciertamente,  $\mathcal{T}(V)$  tiene estructura de álgebra (no conmutativa) con el *producto tensorial*  $\otimes$  inducido por

$$\begin{aligned} & (v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_s) \otimes (v'_1 \otimes \dots \otimes v'_{r'} \otimes \omega'_1 \otimes \dots \otimes \omega'_{s'}) \\ &= v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes v'_1 \otimes \dots \otimes v'_{r'} \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_s \otimes \omega'_1 \otimes \dots \otimes \omega'_{s'}. \end{aligned}$$

Para tensores de tipo  $(0, 0)$  (escalares), convenimos que  $\alpha \otimes T = \alpha T$ .

Si  $e_1, \dots, e_n$  es una base de  $V$  y  $e^1, \dots, e^n$  es su base dual en  $V^*$ , entonces una base de  $\mathcal{T}_s^r(V)$  viene dada por los tensores  $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$ .

En otras palabras, todo tensor  $T$  de tipo  $(r, s)$  se expresa de forma única como

$$T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s},$$

donde los escalares  $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$  reciben el nombre de *coordenadas* de  $T$  en la base  $e_1, \dots, e_n$ .

**Teorema 9.30** *Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita, existe un isomorfismo natural entre  $\mathcal{T}_s^r(V)$  y el espacio de las formas multilineales de  $(V^*)^r \times V^s$  determinado por que cada tensor puro de  $\mathcal{T}_s^r(V)$  se corresponde con la forma dada por*

$$\begin{aligned} & (v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_s)(\eta_1, \dots, \eta_r, w_1, \dots, w_s) \\ &= \eta_1(v_1) \dots \eta_r(v_r) \omega_1(w_1) \dots \omega_s(w_s). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: La aplicación que a cada  $(v_1, \dots, v_r, \omega_1, \dots, \omega_s)$  le hace corresponder la forma multilineal del enunciado es multilineal, luego induce una aplicación lineal de  $\mathcal{T}_s^r(V)$  en el espacio de las formas multilineales (esto justifica que —tal y como ya hemos hecho en el enunciado— identifiquemos cada tensor con la forma multilineal que le asociamos). Hemos de probar que se trata de un isomorfismo. Para ello fijamos una base  $e_1, \dots, e_n$  de  $V$  y vamos a comprobar que los tensores

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}.$$

se corresponden con una base del espacio de formas multilineales. En efecto, si  $F$  es una forma multilineal es fácil ver que

$$F = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} F(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1}, \dots, e^{j_s}) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}.$$

Por otra parte, si

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} = 0,$$

al hacer actuar esta forma multilineal sobre  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1}, \dots, e^{j_s})$  obtenemos que  $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = 0$ . ■

Así pues, los tensores de tipo  $(0, 0)$  son los escalares, los tensores de tipo  $(1, 0)$  son los elementos de  $V$  que, de acuerdo con el teorema anterior, se identifican con los elementos de  $V^{**}$ . Los tensores de tipo  $(0, 1)$  son los elementos de  $V^*$ , los tensores de tipo  $(0, 2)$  son las formas bilineales en  $V$ . Por ejemplo, el producto

escalar en  $\mathbb{R}^n$  es el tensor  $e^1 \otimes e^1 + \cdots + e^n \otimes e^n$ , donde  $e_1, \dots, e_n$  es la base canónica.

Los tensores de tipo  $(1, 1)$  pueden identificarse con los endomorfismos de  $V$  en virtud del teorema siguiente:

**Teorema 9.31** *Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita, existe un isomorfismo natural entre  $\mathcal{T}_1^1(V)$  y el espacio de los endomorfismos de  $V$ . Concretamente, a cada endomorfismo  $f$  le corresponde el tensor  $T(\omega, x) = \omega(f(x))$  y a cada tensor  $T$  le corresponde el endomorfismo*

$$f(x) = \sum_{i=1}^n T(e^i, x)e_i,$$

donde  $e_1, \dots, e_n$  es cualquier base de  $V$ .

DEMOSTRACIÓN: Es fácil comprobar que las dos correspondencias descritas son lineales y mutuamente inversas. ■

Observemos que si  $T$  y  $f$  se corresponden por el isomorfismo del teorema anterior, entonces  $T(e^i, e_j) = e^j(f(e_i))$ . El miembro izquierdo es la coordenada  $T_j^i$  de  $T$ , mientras que el miembro derecho es la entrada  $(i, j)$  de la matriz del endomorfismo  $f$  en la base dada. Así pues, el isomorfismo del teorema asigna a cada tensor  $T$  el endomorfismo que en una base dada tiene por matriz a la matriz de coordenadas de  $T$ .

Así mismo conviene observar que si  $v \in V$  y  $\omega \in V^*$  entonces el tensor  $v \otimes \omega$  se corresponde con el endomorfismo dado por  $(v \times \omega)(x) = \omega(x)v$ . En efecto:

$$(v \times \omega)(x) = \sum_{i=1}^n (v \times \omega)(e^i, x)e_i = \sum_{i=1}^n e^i(v)\omega(x)e_i = \omega(x)v.$$

**Definición 9.32** Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita, se llaman *contracciones tensoriales* a las aplicaciones lineales

$$C_l^k : \mathcal{T}_s^r(V) \longrightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(V), \quad \text{con } 1 \leq k \leq r, \quad 1 \leq l \leq s,$$

determinadas por la propiedad siguiente:

$$C_l^k(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^s) = \omega^l(v_k)v_1 \otimes \cdots \hat{v}_k \cdots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \hat{\omega}^l \cdots \otimes \omega^s,$$

donde el circunflejo indica que falta el término correspondiente.

En principio definimos  $C_l^k$  mediante esta relación para los tensores básicos correspondientes a una base  $e_1, \dots, e_n$  de  $V$ , pero por linealidad resulta inmediatamente que se cumple para tensores puros arbitrarios.

Es claro que si un tensor  $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$  tiene coordenadas  $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$  respecto a una base de  $V$ , entonces, las coordenadas de  $C_l^k(T)$  son

$$\sum_{t=1}^n T_{j_1, \dots, j_{l-1}, t, j_{l+1}, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_{k-1}, t, i_{k+1}, \dots, i_r}.$$

Por ejemplo, si  $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$ , entonces  $C_1^1(T)$  es la traza del endomorfismo de  $V$  asociado a  $T$  por el teorema anterior.

**Definición 9.33** Un *campo tensorial* de tipo  $(r, s)$  en una variedad diferencial  $V$  es una aplicación  $T$  que a cada punto  $p \in V$  le hace corresponder un tensor  $T_p \in \mathcal{T}_s^r(T_p(V))$ .

Representaremos por  $\tilde{\mathcal{T}}_s^r(V)$  el conjunto de todos los campos tensoriales en  $V$  de tipo  $(r, s)$ . Claramente tiene estructura de espacio vectorial real con las operaciones definidas puntualmente. Más aún, tiene estructura de módulo sobre el anillo de todas las funciones reales definidas sobre  $V$  (con la suma y el producto definidas también puntualmente). El conjunto

$$\tilde{T}(V) = \bigoplus_{r,s} \tilde{\mathcal{T}}_s^r(V)$$

tiene estructura de álgebra unitaria no conmutativa con el producto tensorial  $\otimes$  definido puntualmente.

Cada carta  $(U, x)$  de  $V$  determina los campos tensoriales

$$\partial_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx_{j_1} \otimes \cdots \otimes dx_{j_s} \in \tilde{\mathcal{T}}_s^r(U).$$

En cada punto  $p \in U$  constituyen una base de  $T_p^r(T_p(V))$ , luego si  $T \in \tilde{\mathcal{T}}_s^r(V)$ , entonces

$$T|_U = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \partial_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx_{j_1} \otimes \cdots \otimes dx_{j_s}, \quad (9.5)$$

para unas funciones  $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} : V \rightarrow \mathbb{R}$  unívocamente determinadas por  $T$ . Concretamente,

$$T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}(p) = T_p(dx_{i_1}|_p, \dots, dx_{i_r}|_p, \partial_{x_{j_1}}|_p, \dots, \partial_{x_{j_s}}|_p).$$

Estas funciones se llaman *coordenadas* del campo  $T$  respecto a la carta dada. Diremos que un campo tensorial  $T$  es *diferenciable* si sus coordenadas respecto a cualquier carta son diferenciables.

Es fácil ver que para que un campo tensorial  $T$  sea diferenciable es suficiente con que tenga coordenadas diferenciables respecto a las cartas de un atlas de  $V$ . En efecto, si  $(U, y)$  es otro sistema de coordenadas,  $p \in U$  y  $x$  es una carta alrededor de  $p$  en el atlas referido, podemos expresar cada campo  $\partial_{x_i}$  como combinación lineal de los campos  $\partial_{y_j}$  y los coeficientes son las funciones diferenciables  $\partial y_j / \partial x_i$ , e igualmente podemos expresar los campos  $dx_i$  como combinación lineal de los campos  $dy_j$  (la matriz de cambio de base es la inversa de la anterior, luego también está formada por funciones diferenciables). Al sustituir estas expresiones en (9.5) obtenemos las coordenadas de  $T$  respecto a la carta  $y$  como combinación lineal con coeficientes diferenciables de las coordenadas de  $T$  respecto de  $x$ .

**Definición 9.34** Llamaremos  $\mathcal{T}_s^r(V)$  al conjunto de los campos tensoriales diferenciables en la variedad  $V$ . Es claro que tiene estructura de espacio vectorial



real con las operaciones definidas puntualmente y es un  $C^\infty(V)$ -módulo, donde  $C^\infty(V)$  es el anillo de las funciones diferenciables de  $V$  en  $\mathbb{R}$  (también con las operaciones definidas puntualmente). Así mismo, el espacio

$$\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{r,s} \mathcal{T}_s^r(V)$$

tiene estructura de álgebra unitaria no conmutativa con el producto tensorial  $\otimes$  definido puntualmente.

Tenemos definidas (puntualmente) las *contracciones tensoriales*

$$C_l^k : \mathcal{T}_s^r(V) \longrightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(V).$$

Puesto que las coordenadas de una contracción se obtienen sumando las del tensor de partida, es claro que las contracciones de los campos tensoriales diferenciables son diferenciables.

En la práctica es costumbre llamar simplemente *tensores* a los campos tensoriales diferenciables en una variedad.

Observemos que  $\mathcal{T}_0^0(V) = C^\infty(V)$  es el anillo de las funciones diferenciables en  $V$ , los elementos de  $\mathfrak{X}(V) = \mathcal{T}_0^1(V)$  se llaman *campos vectoriales* en  $V$ . Definimos también  $\Lambda^1(V) = \mathcal{T}_1^0(V)$ . Notemos que si  $f \in C^\infty(V)$ , entonces  $df \in \Lambda^1(V)$ .

**Teorema 9.35** *Los campos vectoriales en una variedad  $V$  son las aplicaciones diferenciables  $X : V \longrightarrow TV$  tales que para todo  $p \in V$  se cumple  $X_p \in T_pV$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sólo hay que comprobar que si  $X : V \longrightarrow TV$  cumple la condición  $X_p \in T_pV$ , entonces  $X$  es diferenciable como aplicación si y sólo si lo es como tensor.

Ahora bien, considerando una carta  $x$  alrededor de un punto  $q$  y la carta inducida  $\tilde{x}$  alrededor de  $X_q$ , tenemos que  $X$  es diferenciable en  $q$  como aplicación si y sólo si lo es la composición  $X \circ \tilde{x}$ , pero ésta viene dada por

$$\tilde{x}(X_p) = (x_1(p), \dots, x_n(p), X_p(\partial_{x_1}|_p), \dots, X_p(\partial_{x_n}|_p)).$$

Las primeras coordenadas son ciertamente diferenciables y las últimas son las coordenadas de  $X$  como tensor, luego la diferenciable de  $X$  como aplicación equivale a la diferenciable de  $X$  como tensor. ■

**Ejemplo** Si  $X \in \mathfrak{X}(S^n)$  entonces podemos considerar la composición

$$S^n \xrightarrow{X} TS^n \xrightarrow{di} T\mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}^{n+1},$$

que es una aplicación diferenciable  $v : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  con la propiedad de que  $v(p)$  es ortogonal a  $p$  para todo  $p \in S^n$  (ver el ejemplo de la página 247). Recíprocamente, es fácil ver que toda aplicación  $v$  en estas condiciones determina un campo  $X \in \mathfrak{X}(S^n)$ . También es claro que  $X$  se anula en un punto  $p$

si y sólo si se anula  $v$ . Por consiguiente, si en la definición 3.12 añadimos la hipótesis de diferenciabilidad tenemos que los campos de vectores en  $S^n$  en el sentido de dicha definición coinciden con los campos vectoriales en  $S^n$  —según la definición general— que no se anulan en ningún punto, y el teorema 3.13 prueba que  $S^n$  tiene un campo vectorial que no se anula en ningún punto si y sólo si  $n$  es impar.<sup>3</sup> ■

Si  $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$ ,  $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Lambda^1(V)$  y  $v_1, \dots, v_s \in \mathfrak{X}(V)$ , podemos formar la aplicación

$$\bar{T}(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s) : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\bar{T}(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s)(p) = T_p(\omega_1|_p, \dots, \omega_r|_p, v_1|_p, \dots, v_s|_p).$$

Es fácil ver que es diferenciable (en un entorno de cada punto  $p$  se expresa como combinación de las funciones coordenadas de  $T$ ,  $\omega_i$ ,  $v_i$ ). Por consiguiente tenemos definida una aplicación

$$\bar{T} : \Lambda^1(V) \times \overset{r \text{ veces}}{\dots} \times \Lambda^1(V) \times \mathfrak{X}(V) \times \overset{s \text{ veces}}{\dots} \times \mathfrak{X}(V) \longrightarrow C^\infty(V)$$

que claramente es  $C^\infty(V)$ -multilineal. El teorema siguiente muestra que ésta es una forma alternativa de concebir los tensores en una variedad.

**Teorema 9.36 (Lema de localización)** *Si  $V$  es una variedad diferencial y*

$$\alpha : \Lambda^1(V) \times \overset{r \text{ veces}}{\dots} \times \Lambda^1(V) \times \mathfrak{X}(V) \times \overset{s \text{ veces}}{\dots} \times \mathfrak{X}(V) \longrightarrow C^\infty(V)$$

*es una aplicación  $C^\infty(V)$ -multilineal, entonces existe un único tensor  $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$  tal que  $\bar{T} = \alpha$ .*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos  $p \in V$ ,  $\omega_1^0, \dots, \omega_r^0 \in T_p^*(V)$ ,  $v_1^0, \dots, v_s^0 \in T_p(V)$ .

Es fácil construir campos  $\omega_i \in \Lambda^1(V)$ ,  $v_i \in \mathfrak{X}(V)$  tales que  $\omega_i|_p = \omega_i^0$ ,  $v_i|_p = v_i^0$ . Por ejemplo, tomamos una carta  $(U, x)$  alrededor de  $p$  y consideramos funciones  $f_{ij} \in C^\infty(V)$  tales que  $f_{ij}(p)$  sean las coordenadas de  $v_i^0$  en la base  $\partial_{x_j}|_p$  y se anulen fuera de un compacto contenido en  $U$ . Entonces los campos  $\sum_j f_{ij} \partial_{x_j}$  son diferenciables en  $V$  (entendiendo que valen 0 fuera de  $U$ , donde no están definidas las parciales) y toman el valor  $v_i^0$  en  $p$ . Similarmente con las formas  $\omega_i$ .

Definimos

$$T_p(\omega_1^0, \dots, \omega_r^0, v_1^0, \dots, v_s^0) = \alpha(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s).$$

Hemos de comprobar que esta definición no depende de los campos que hemos construido. Primeramente veremos que si un campo  $\omega_i$  o un campo  $v_i$  se anula en un abierto  $U$ , entonces  $\alpha(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s)|_U = 0$ .

<sup>3</sup>Se comprueba inmediatamente que los campos construidos en la prueba de 3.13 para  $n$  impar son de hecho diferenciables.

En efecto, para cada  $p \in U$  existe una función  $f \in C^\infty(V)$  que se anula en un entorno compacto de  $p$  y vale 1 fuera de  $U$ . Si  $\omega_i|_U = 0$ , entonces  $\omega_i = f\omega_i$ , luego

$$\begin{aligned}\alpha(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s)(p) &= \alpha(\omega_1, \dots, f\omega_i, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s)(p) \\ &= f(p) \alpha(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s)(p) = 0.\end{aligned}$$

Si se anula un campo  $v_i$  se razona igualmente.

Ahora veamos que si  $\omega_i|_p = 0$  o bien  $v_i|_p = 0$ , entonces

$$\alpha(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s)(p) = 0,$$

lo cual justifica que  $T_p$  está bien definido. Supongamos concretamente que  $v_i(p) = 0$ .

Tomemos una carta  $(U, x)$  alrededor de  $p$  y sea  $v_i|_U = \sum_k a_k \partial_{x_k}$ . Sea  $h \in C^\infty(V)$  una función que tome el valor 1 en un entorno compacto de  $p$  y que se anule fuera de otro compacto contenido en  $U$ . Podemos considerar que las funciones  $\tilde{a}_k = ha_k$  y los campos  $\tilde{w}_k = h\partial_{x_k}$  están definidos en todo  $V$ , entendiéndose que valen 0 fuera de  $U$ . Así, el campo

$$\tilde{v}_i = \sum_k \tilde{a}_k \tilde{w}_k \in \mathfrak{X}(V)$$

coincide con  $v_i$  en un entorno de  $p$  luego, por lo que hemos demostrado,

$$\alpha(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s)(p) = \sum_k \tilde{a}_k(p) \alpha(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, \tilde{w}_k, \dots, v_s)(p) = 0,$$

pues estamos suponiendo que  $\tilde{a}_k(p) = a_k(p) = 0$  para todo  $k$ .

Sólo falta probar que el campo tensorial  $T$  es diferenciable, pues claramente  $\bar{T} = \alpha$  y la unicidad también es obvia.

Fijada una carta  $(U, x)$ , es claro que, para cada  $p \in U$ ,

$$\begin{aligned}T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}(p) &= T_p(dx_{i_1}|_p, \dots, dx_{i_r}|_p, \partial_{x_{j_1}}|_p, \dots, \partial_{x_{j_s}}|_p) \\ &= \alpha(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s),\end{aligned}$$

donde  $\omega_k$  es cualquier forma tal que  $\omega_k|_p = dx_{i_k}|_p$  y  $v_k$  es cualquier campo tal que  $v_k|_p = \partial_{x_{j_k}}|_p$ . Ahora bien, podemos construir  $\omega_k$  y  $v_k$  de modo que coincidan con  $dx_{i_k}$  y  $\partial_{x_{j_k}}$  no sólo en  $p$  sino de hecho en un entorno  $U'$  de  $p$ , con lo que

$$T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}|_{U'} = \alpha(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s)|_{U'}$$

Así pues las coordenadas de  $T$  son diferenciables en un entorno de cada punto de  $U$ , luego son diferenciables en  $U$ . ■

Para terminar demostramos que los tensores covariantes pueden transportarse mediante aplicaciones diferenciables. En efecto, si  $f : V \rightarrow W$  es una

aplicación diferenciable entre variedades, definimos  $f_{\#} : \mathcal{T}_s^0(W) \longrightarrow \mathcal{T}_s^0(V)$  mediante

$$f_{\#}(T)_p(v_1, \dots, v_s) = T_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_s)).$$

Una comprobación rutinaria muestra que  $f_{\#}(T)$  es diferenciable, y es claro que  $f_{\#}$  es lineal. Más aún,  $(f \circ g)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$  y  $1_{\#} = 1$ . En particular es claro que si  $f$  es un difeomorfismo entonces  $f_{\#}$  es un isomorfismo.

Conviene observar también que si  $g \in C^{\infty}(W)$  entonces  $f_{\#}(g) = f \circ g$  y  $f_{\#}(dg) = d(f \circ g)$ .

# Capítulo X

## Variedades de Riemann

Una variedad topológica tiene una estructura topológica similar hasta cierto punto a la de  $\mathbb{R}^n$ , mientras que una variedad diferencial comparte además con  $\mathbb{R}^n$  las propiedades vectoriales. En este capítulo introduciremos una estructura adicional en las variedades que generaliza la estructura euclídea de  $\mathbb{R}^n$ , es decir, la posibilidad de determinar distancias entre puntos y medir ángulos entre curvas. Ésta es la noción de métrica de Riemann, aunque empezaremos estudiando en la primera sección el concepto de conexión afín: un aparato algebraico análogo a la estructura afín de  $\mathbb{R}^n$ .

### 10.1 Conexiones afines

En esta sección definiremos una derivación sobre el álgebra tensorial de una variedad diferenciable. En realidad nos limitaremos a estudiar algebraicamente una familia de derivaciones, y en la sección 10.3 construiremos una específica con un significado geométrico sencillo. Aunque de momento no es evidente en absoluto, la idea que conviene tener presente es que vamos a definir una derivada que determine la variación que experimenta un vector al ser trasladado sobre una variedad, de modo que las traslaciones de vectores con derivada nula se corresponderán con el movimiento de un vector paralelamente a sí mismo en  $\mathbb{R}^n$ . Empezamos introduciendo la noción general de derivación:

**Definición 10.1** Sea  $V$  una variedad diferencial. Una *derivación* en  $\mathcal{T}(V)$  es una aplicación lineal  $\mathcal{D} : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{T}(V)$  que cumpla

$$\mathcal{D}(T_1 \otimes T_2) = \mathcal{D}T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes \mathcal{D}T_2.$$

Diremos que  $\mathcal{D}$  es *homogénea* de grado  $(p, q)$  (con  $p, q \in \mathbb{Z}$ ) si transforma los tensores de tipo  $(r, s)$  en tensores de tipo  $(r + p, s + q)$ .

Si  $p$  o  $q$  es negativo entendemos que  $\mathcal{J}_s^r(V) = 0$  si  $r < 0$  o  $s < 0$ . En primer lugar observamos que las derivaciones son locales, en el sentido siguiente:

**Teorema 10.2** Si  $\mathcal{D}$  es una derivación en el álgebra tensorial de una variedad diferencial  $V$  y  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(V)$  coinciden en un entorno de un punto  $p$ , entonces  $(\mathcal{D}T_1)_p = (\mathcal{D}T_2)_p$ .

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que si  $T$  se anula en un entorno  $U$  de  $p$  entonces  $(\mathcal{D}T)_p = 0$ . Sea  $f \in C^\infty(V)$  tal que  $f$  se anule en un entorno de  $p$  y valga 1 fuera de un entorno de  $p$  contenido en  $U$ . Entonces  $T = fT = f \otimes T$ , luego

$$(\mathcal{D}T)_p = (\mathcal{D}f)_p \otimes T_p + f(p)(\mathcal{D}T)_p = 0 + 0 = 0.$$

■

Si  $V$  es una variedad diferencial, una *derivación* en  $C^\infty(V)$  es una aplicación lineal  $\mathcal{D} : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$  tal que

$$\mathcal{D}(fg) = (\mathcal{D}f)g + f\mathcal{D}g, \quad \text{para todo } f, g \in C^\infty(V).$$

Dada una derivación  $\mathcal{D}$  en  $C^\infty(V)$ , una *derivación* en  $\mathfrak{X}(V)$  (con respecto a la derivación dada) es una aplicación lineal  $\mathcal{D} : \mathfrak{X}(V) \rightarrow \mathfrak{X}(V)$  tal que

$$\mathcal{D}(fX) = (\mathcal{D}f)X + f\mathcal{D}X, \quad \text{para todo } f \in C^\infty(V), X \in \mathfrak{X}(V).$$

Igualmente se define una derivación en  $\Lambda^1(V)$  (respecto a una derivación en  $C^\infty(V)$ ). Es claro que una derivación de grado  $(0, 0)$  en  $\mathcal{T}(V)$  se restringe a tres derivaciones en  $C^\infty(V)$ ,  $\mathfrak{X}(V)$  y  $\Lambda^1(V)$ . Recíprocamente, tenemos el teorema siguiente:

**Teorema 10.3** Sea  $V$  una variedad diferencial y supongamos definido un par de derivaciones

$$\mathcal{D} : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V), \quad \text{y} \quad \mathcal{D} : \mathfrak{X}(V) \rightarrow \mathfrak{X}(V).$$

Entonces existe una única derivación  $\mathcal{D} : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{T}(V)$  de grado  $(0, 0)$  que extiende a las derivaciones dadas y que conmuta con las contracciones de tensores.

DEMOSTRACIÓN: Veamos primero la unicidad. Si  $\omega \in \Lambda^1(V)$ , sea  $X \in \mathfrak{X}(V)$ , de modo que  $\omega \otimes X \in \mathcal{T}_1^1(V)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\omega(X)) &= \mathcal{D}(C_1^1(\omega \otimes X)) = C_1^1(\mathcal{D}(\omega \otimes X)) \\ &= C_1^1(\mathcal{D}(\omega) \otimes X + \omega \otimes \mathcal{D}(X)) = (\mathcal{D}\omega)(X) + \omega(\mathcal{D}X). \end{aligned}$$

Así pues,

$$(\mathcal{D}\omega)(X) = \mathcal{D}(\omega(X)) - \omega(\mathcal{D}X). \quad (10.1)$$

Según el lema de localización, esto determina a  $\mathcal{D}$  sobre  $\Lambda^1(V)$ .

Sea ahora  $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$ . Fijemos  $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(V)$  y  $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Lambda^1(V)$ . Consideramos el tensor

$$T \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_r \in \mathcal{T}_{2s}^{2r}(V).$$

Llamamos  $C$  a la composición de las contracciones  $(i, s+i)$  y  $(r+j, j)$ . Así

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)) &= \mathcal{D}(C(T \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_r)) \\ &= C\left(\mathcal{D}T \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_r \right. \\ &\quad \left. + \sum_i T \otimes X_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{D}X_i \otimes \dots \otimes X_s \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_r \right. \\ &\quad \left. + \sum_j T \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{D}\omega_j \otimes \dots \otimes \omega_r\right) \\ &= (\mathcal{D}T)(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) + \sum_i T(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, \mathcal{D}X_i, \dots, X_s) \\ &\quad + \sum_j T(\omega_1, \dots, \mathcal{D}\omega_j, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s). \end{aligned}$$

Así pues,  $\mathcal{D}T$  está determinada por la relación

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}T)(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) &= \mathcal{D}(T(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)) \quad (10.2) \\ - \sum_i T(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, \mathcal{D}X_i, \dots, X_s) &- \sum_j T(\omega_1, \dots, \mathcal{D}\omega_j, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s). \end{aligned}$$

Veamos ahora la existencia de  $\mathcal{D}$ . En primer lugar, definimos  $\mathcal{D}$  sobre  $\Lambda^1(V)$  mediante (10.1). Esto es correcto por el lema de localización, pues es fácil ver que el miembro derecho es  $C^\infty(V)$ -lineal. También es inmediato que, así definida,  $\mathcal{D}$  es una derivación.

Ahora definimos  $\mathcal{D}$  para un tensor arbitrario de tipo  $(r, s)$  mediante (10.2). De nuevo es fácil comprobar que el miembro derecho es  $C^\infty(V)$ -multilineal.

Tampoco ofrece dificultad comprobar que  $\mathcal{D}$  es una derivación. Entonces, el teorema 10.2 sabemos que  $(\mathcal{D}T)_p$  depende únicamente de la restricción de  $T$  a un entorno de  $p$ . Teniendo esto en cuenta, para comprobar que  $\mathcal{D}$  conmuta con las contracciones de tensores basta probarlo localmente, es decir, sobre campos tensoriales definidos sobre un abierto coordenado. Un poco más en general, basta probar que  $\mathcal{D}$  conmuta, por ejemplo con  $C_1^1$ , sobre un tensor de la forma  $X_1 \otimes \dots \otimes X_r \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_s$ . De nuevo la comprobación no ofrece dificultad alguna. ■

**Ejemplo** Si  $V$  es una variedad diferencial, cada  $X \in \mathfrak{X}(V)$  determina una derivación en  $C^\infty(V)$  mediante  $f \mapsto X(f)$ .

Si  $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$ , definimos el *corchete de Lie* de  $X$  e  $Y$  como el campo vectorial

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)).$$

Por ejemplo, en el dominio de un sistema de coordenadas  $x$  tenemos que

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0.$$

Es fácil ver que si, fijado  $X \in \mathfrak{X}(V)$ , definimos

$$\mathcal{L}_X(f) = X(f), \quad \mathcal{L}_X(Y) = [X, Y], \quad \text{para } f \in C^\infty(V), Y \in \mathfrak{X}(V),$$

tenemos un par de derivaciones a las que podemos aplicar el teorema anterior. Obtenemos así una derivación  $\mathcal{L}_X : \mathfrak{T}(V) \rightarrow \mathfrak{T}(V)$  a la que se conoce como *derivada de Lie* respecto al campo  $X \in \mathfrak{X}(V)$ .

Usando que  $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X$ , es fácil obtener la expresión en coordenadas del corchete de Lie. Si se cumple

$$X = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

entonces

$$[X, Y] = \sum_k \sum_i \left( u_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (10.3)$$

Aunque la derivada de Lie tiene gran importancia en geometría diferencial, nosotros no vamos a necesitarla más que colateralmente. Las derivaciones que vamos a considerar estarán determinadas también por un campo vectorial, pero serán lineales respecto de éste, tal y como exigimos a continuación:

**Definición 10.4** Sea  $V$  una variedad diferencial. Una *conexión afín* o *derivada covariante* en  $V$  es una aplicación  $D : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \rightarrow \mathfrak{X}(V)$  tal que

- a) Si  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(V)$ ,  $f, g \in C^\infty(V)$ , entonces  $D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z$ .
- b) Si  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(V)$ , entonces  $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$ .
- c) Si  $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$ ,  $f \in C^\infty(V)$ , entonces  $D_X(fY) = fD_X Y + X(f)Y$ .

De este modo, para cada campo  $X \in \mathfrak{X}(V)$ , una conexión  $D$  determina una derivación  $D_X$  en  $\mathfrak{X}(V)$  respecto a la derivación  $f \mapsto X(f)$  de  $C^\infty(V)$ . Por el teorema anterior  $D_X$  se extiende a una única derivación de grado  $(0, 0)$  en  $\mathfrak{T}(V)$  que conmuta con las contracciones de tensores, luego podemos extender  $D$  a una aplicación  $D : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{T}(V) \rightarrow \mathfrak{T}(V)$  cuyas propiedades son:

- a) Si  $f \in C^\infty(V)$ , entonces  $D_X(f) = X(f)$ .
- b) Si  $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$ ,  $f, g \in C^\infty(V)$ ,  $T \in \mathfrak{T}(V)$ , entonces

$$D_{fX+gY}T = fD_X T + gD_Y T.$$

- c) Si  $X \in \mathfrak{X}(V)$ ,  $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}(V)$ , entonces

$$D_X(T_1 + T_2) = D_X T_1 + D_X T_2$$

y

$$D_X(T_1 \otimes T_2) = T_1 \otimes D_X T_2 + D_X T_1 \otimes T_2.$$



Ya sabemos que  $(D_X T)_p$  depende únicamente del valor de  $T$  en un entorno de  $p$ . Ahora probamos que la linealidad en  $X$  hace que  $(D_X T)_p$  sólo dependa de  $X_p$  (para un  $T$  dado).

**Teorema 10.5** *Si  $D$  es una conexión en una variedad  $V$ ,  $X \in \mathfrak{X}(V)$ ,  $T \in \mathcal{T}(V)$  y  $p \in V$ , entonces  $(D_X T)_p$  depende únicamente de  $X_p$  y de la restricción de  $T$  a un entorno de  $p$ .*

DEMOSTRACIÓN: Primero demostramos que  $(D_X T)_p$  sólo depende de la restricción de  $X$  a un entorno de  $p$ . Si el campo  $X$  se anula en un entorno  $U$  de  $p$ , tomamos una función  $f \in C^\infty(V)$  tal que  $f(p) = 0$  y que valga 1 fuera de un entorno compacto de  $p$  contenido en  $U$ . Entonces  $X = fX$ , luego

$$(D_X T)_p = (D_{fX} T)_p = f(p)(D_X T)_p = 0.$$

Ahora probamos que si  $X_p = 0$  entonces  $(D_X T)_p = 0$ . Para ello tomamos una carta  $(U, x)$  alrededor de  $p$ . Multiplicando las coordenadas de  $X$  en  $x$  y los vectores  $\partial_{x_i}$  por una función de  $C^\infty(V)$  adecuada podemos conseguir un campo  $X' = \sum_i v_i w_i \in \mathfrak{X}(V)$  tal que  $w_i$  coincida con  $\partial_{x_i}$  en un entorno de  $p$  y  $v_i$  coincida con la coordenada  $i$ -ésima de  $X$  en dicho entorno. Entonces  $X'$  coincide con  $X$  en un entorno de  $p$ , luego, por lo que ya hemos probado,

$$(D_X T)_p = \sum_i v_i(p)(D_{w_i} T)_p = 0$$

porque  $v_i(p) = 0$  para todo  $i$ . La parte sobre  $T$  ya está probada. ■

Así pues, si  $D$  es una conexión en  $V$ ,  $v \in T_p(V)$  y  $T \in \mathcal{T}(V)$ , tiene sentido hablar de  $(D_v T)_p$  (pues siempre es posible construir un campo  $X \in \mathfrak{X}(V)$  tal que  $X_p = v$ , pero  $(D_X T)_p$  no depende de la elección de  $X$ ).

**Coefficientes de una conexión** Consideremos ahora una carta  $(u, x)$  y dos campos  $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$ . Entonces

$$X|_U = \sum_i u_i \partial_{x_i}, \quad Y|_U = \sum_i v_i \partial_{x_i}.$$

Si  $D$  es una conexión en  $V$ , tenemos que

$$(D_X Y)|_U = \sum_{i,j} u_i D_{\partial_{x_i}}(v_j \partial_{x_j}) = \sum_{i,j} u_i v_j D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} + \sum_{i,j} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \partial_{x_j}.$$

Como  $D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} \in \mathfrak{X}(U)$ , existen funciones diferenciables  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_{x_k}. \quad (10.4)$$

Las funciones  $\Gamma_{ij}^k$  se llaman *coeficientes* de la conexión  $D$  en la carta  $x$ , y la determinan completamente en  $U$ , pues, según hemos obtenido,

$$(D_X Y)|_U = \sum_k \left( \sum_{i,j} u_i v_j \Gamma_{ij}^k + \sum_i u_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (10.5)$$

■

Vamos a probar que las conexiones “conectan” los distintos espacios tangentes de una variedad conexa, pero antes debemos probar que una conexión permite derivar campos tensoriales definidos únicamente sobre arcos regulares, en el sentido que explicamos a continuación:

**Definición 10.6** Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  un arco diferenciable<sup>1</sup> en una variedad  $V$ . Un *campo tensorial* de tipo  $(r, s)$  sobre  $\gamma$  es una aplicación  $T$  que a cada  $t \in [a, b]$  le asigna un tensor  $T(t) \in \mathcal{T}_s^r(T_{\gamma(t)}(V))$ .

En estas condiciones, si  $(U, x)$  es una carta alrededor de un punto  $\gamma(t_0)$ , existen unas funciones

$$T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} : \gamma^{-1}[U] \rightarrow \mathbb{R},$$

unívocamente determinadas por  $T$ , tales que, para todo  $t \in \gamma^{-1}[U]$  se cumple

$$T(t) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}(t) \partial_{x_{i_1}}|_{\gamma(t)} \otimes \cdots \otimes \partial_{x_{i_r}}|_{\gamma(t)} \otimes dx_{j_1}|_{\gamma(t)} \otimes \cdots \otimes dx_{j_s}|_{\gamma(t)}.$$

Diremos que el campo  $T$  es *diferenciable* si sus funciones coordenadas  $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$  son diferenciables, para cualquier carta alrededor de un punto de la imagen de  $\gamma$ . Es fácil ver que basta con que esto suceda para un conjunto de cartas que cubran dicha imagen.

En lo sucesivo sobrentenderemos que todos los campos tensoriales que consideramos son diferenciables.

Es claro que el conjunto de todos los campos tensoriales de tipo  $(r, s)$  sobre un arco dado es un espacio vectorial y un  $C^\infty([a, b])$ -módulo con las operaciones definidas puntualmente. Así mismo, la suma de todos estos espacios es un álgebra unitaria con el producto tensorial definido puntualmente. También tenemos definidas las contracciones de tensores.

Diremos que un arco  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  es *regular* si su derivada

$$\gamma'(t) = d\gamma|_t \left( \frac{d}{dt} \Big|_t \right) \in T_{\gamma(t)}(V)$$

no se anula en ningún punto. El teorema siguiente es la clave para aplicar una conexión a un campo definido únicamente sobre un arco:

**Teorema 10.7** Sea  $T$  un campo tensorial de tipo  $(r, s)$  definido sobre un arco regular  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  y sea  $t_0 \in [a, b]$ . Entonces existe un entorno  $U$  de  $\gamma(t_0)$  en  $V$  y un campo tensorial  $T' \in \mathcal{T}_s^r(U)$  tal que  $T = \gamma \circ T'$ . Además, si  $D$  es una conexión en  $V$ , entonces  $(D_{\gamma'(t_0)} T')_{\gamma(t_0)}$  no depende de  $T'$ .

<sup>1</sup>Entenderemos que esto significa que  $\gamma$  se extiende a una aplicación diferenciable definida sobre un intervalo abierto mayor.

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un sistema de coordenadas  $x$  alrededor de  $\gamma(t_0)$ . Entonces  $\gamma \circ x$  tiene derivada no nula en  $t_0$ , luego alguna de las funciones coordenadas  $\gamma \circ x_i$  tiene derivada no nula en  $t_0$ . Por el teorema de la función inversa (para funciones de una variable), tenemos que  $\gamma \circ x_i$  se restringe a un difeomorfismo entre un entorno de  $t_0$  y un entorno  $J$  de  $x_i^0 = x_i(\gamma(t_0))$ . Sea  $t = t(x_i)$  la función inversa y sea  $U = x_i^{-1}[J]$ , entorno coordenado de  $\gamma(t_0)$ .

Para cada  $p \in U$  tenemos que  $x_i(p) \in J$ , luego podemos definir  $T'_p = T_{t(x_i(p))}$ . Las funciones coordenadas de  $T'$  en  $U$  son la composición de  $x_i$  con  $t$  y con las funciones coordenadas de  $T$ , luego son diferenciables. Así pues,  $T \in \mathcal{T}_s^r(U)$  y, por construcción,  $T = \gamma \circ T'$ .

Para la segunda parte basta probar que si  $T'$  es un campo tensorial en un entorno de  $\gamma(t_0)$  tal que  $\gamma \circ T' = 0$ , entonces  $(D_{\gamma'(t_0)}T')_{\gamma(t_0)} = 0$ .

Tomemos un campo  $X \in \mathfrak{X}(V)$  tal que  $X_{\gamma(t_0)} = \gamma'(t_0)$ . Por definición,  $(D_{\gamma'(t_0)}T')_{\gamma(t_0)} = (D_X T')_{\gamma(t_0)}$ .

En un sistema de coordenadas alrededor de  $\gamma(t_0)$  tendremos que

$$T' = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \partial_{x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx_{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{j_s},$$

y al aplicar  $D_X$  resulta:

$$\begin{aligned} D_X T' &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} D_X(T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}) \partial_{x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx_{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{j_s} \\ &+ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} D_X(\partial_{x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx_{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{j_s}). \end{aligned}$$

El segundo sumando se anula en  $\gamma(t_0)$  porque por hipótesis se anulan las funciones coordenadas de  $T'$ . Respecto al primero, vemos que

$$D_X(T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r})_{\gamma(t_0)} = X_{\gamma(t_0)}(T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}) = \gamma'(t_0)(T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}) = \left. \frac{d(\gamma \circ T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r})}{dt} \right|_{t_0} = 0.$$

Así pues,  $(D_X T')_{\gamma(t_0)} = 0$ . ■

**Definición 10.8** Sea  $D$  una conexión en una variedad  $V$  y sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  un arco regular en  $V$ . Llamaremos *derivada covariante* a lo largo de  $\gamma$  inducida por  $D$  a la aplicación  $D/dt$ , definida sobre el álgebra de campos tensoriales a lo largo de  $\gamma$  en sí misma, dada por

$$\left. \frac{DT}{dt} \right|_{t_0} = (D_{\gamma'(t)}T')_{\gamma(t_0)}, \quad \text{para cada } t_0 \in [a, b],$$

donde  $T'$  es cualquier extensión de  $T$  a un entorno de  $\gamma(t_0)$  en el sentido del teorema anterior. (Ésta es la definición para campos homogéneos de tipo  $(r, s)$ . Para campos arbitrarios extendemos la definición por linealidad.)

En particular, si  $T \in \mathcal{T}(V)$ , se cumple

$$\frac{D(\gamma \circ T)}{dt} = D_{\gamma'(t)}T.$$

Es claro que la derivada covariante es local, es decir, que  $DT/dt|_{t_0}$  depende únicamente de la restricción de  $T$  a un entorno de  $t_0$ . Las demás propiedades se deducen inmediatamente a partir de las de la derivada de campos en  $V$ :

**Teorema 10.9** *Sea  $D$  una conexión en una variedad diferencial  $V$ . Entonces, la derivada covariante de campos tensoriales sobre un arco regular  $\gamma$  cumple las propiedades siguientes:*

a) *Conserva el grado de los tensores homogéneos y conmuta con las contracciones de tensores.*

b) *Si  $f \in C^\infty([a, b])$ , entonces  $\frac{Df}{dt} = \frac{df}{dt}$ .*

c) *Si  $T_1$  y  $T_2$  son campos tensoriales sobre  $\gamma$ , entonces*

$$\frac{D(T_1 + T_2)}{dt} = \frac{DT_1}{dt} + \frac{DT_2}{dt}$$

y

$$\frac{D(T_1 \otimes T_2)}{dt} = T_1 \otimes \frac{DT_2}{dt} + \frac{dT_1}{dt} \otimes T_2.$$

Necesitamos calcular la expresión en coordenadas de la derivada covariante de un campo vectorial  $v$  a lo largo de un arco  $\gamma$ . Sea  $(U, x)$  una carta alrededor de un punto  $\gamma(t_0)$ . Entonces, para  $t \in \gamma^{-1}[U]$  tenemos la expresión

$$v_t = \sum_j v_j(t) \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_{\gamma(t)}.$$

Aplicando las propiedades de la derivada covariante tenemos:

$$\frac{Dv}{dt} = \sum_j \left( \left. \frac{dv_j}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_{\gamma(t)} + v_j \frac{D(\gamma \circ \partial_{x_j})}{dt} \right) = \sum_j \left( \left. \frac{dv_j}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_{\gamma(t)} + v_j D_{\gamma'} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Ahora observamos que

$$\gamma' = \sum_i \frac{d(\gamma \circ x_i)}{dt} \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\gamma(t)},$$

con lo que

$$\frac{Dv}{dt} = \sum_j \left( \left. \frac{dv_j}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_{\gamma(t)} + v_j \sum_i \frac{d(\gamma \circ x_i)}{dt} (D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j})_{\gamma(t)} \right).$$

Sustituyendo  $D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j}$  por su expresión en coordenadas queda

$$\frac{Dv}{dt} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n v_j \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \frac{d(\gamma \circ x_i)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{\gamma(t)}. \quad (10.6)$$

Antes de extraer las consecuencias de esta expresión conviene considerar un ejemplo que motive nuestro propósito.

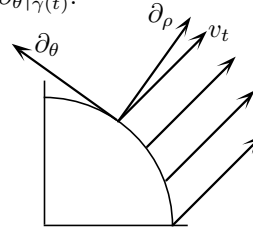
**Ejemplo** Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  el arco dado por  $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen } t)$ , digamos para  $t \in [0, \pi]$ . Un campo vectorial sobre  $\gamma$  es el dado por

$$v_t = \partial_x|_{\gamma(t)} + \partial_y|_{\gamma(t)},$$

donde  $x, y$  son las coordenadas de la carta identidad. Así pues, respecto de la identidad las coordenadas de  $v$  son constantes  $v_1 = v_2 = 1$ . Intuitivamente,  $v$  es un campo de vectores paralelos, por lo que, en cierto sentido, podemos decir que  $v$  es un campo “constante”. Concretamente, a través de los isomorfismos canónicos  $\theta_{\gamma(t)}$ , tenemos que  $v$  se identifica con el campo  $v : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $v_t = (1, 1)$ , y así sí que es constante, pero en términos de variedades abstractas esto no tiene sentido, ya que  $v_t$  es un elemento de  $T_{\gamma(t)}(\mathbb{R}^2)$ , es decir, cada  $v_t$  está en un espacio vectorial distinto. Tampoco podemos definir los campos constantes (o, más apropiadamente, paralelos) en una variedad como los campos con coordenadas constantes en una carta, pues esto dependerá de la carta que consideremos. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tenemos la carta determinada por las coordenadas polares, y es fácil ver que, respecto a esta carta,

$$v_t = (\cos t + \text{sen } t) \partial_\rho|_{\gamma(t)} + (\cos t - \text{sen } t) \partial_\theta|_{\gamma(t)}.$$

Así pues, las coordenadas de  $v$  ya no son constantes. En general, vemos que tiene sentido considerar que un campo vectorial es paralelo aunque sus coordenadas respecto de una carta varíen, porque la variación puede deberse a que los vectores básicos asociados a la carta no se trasladen paralelamente a sí mismos. ■



En una variedad abstracta no podemos definir la noción de “transporte paralelo” de un vector sobre una curva, porque —al contrario de lo que sucede en  $\mathbb{R}^n$ — no tenemos ningún criterio para “comparar” vectores de espacios tangentes distintos y decidir si son o no paralelos. Lo que nos falta es un análogo a la estructura afín de  $\mathbb{R}^n$ , pero esto es precisamente lo que aporta una conexión (recordemos que el “nombre completo” de las conexiones es “conexiones afines”). La clave para ver que las conexiones determinan una noción de “paralelismo” nos la proporciona el teorema siguiente.

**Teorema 10.10** Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  un arco regular en una variedad diferencial  $V$ , sea  $p = \gamma(a)$  y sea  $D$  una conexión en  $V$ . Para cada vector  $v_0 \in T_p(V)$  existe un único campo vectorial  $v$  sobre  $\gamma$  tal que  $v(a) = v_0$  y  $\frac{Dv}{dt} = 0$ .

DEMOSTRACIÓN: Tomemos una carta  $x$  alrededor de  $p$ . En vista de (10.6), un campo vectorial  $v$  a lo largo de  $\gamma$  tendrá derivada covariante nula en un entorno de  $a$  si y sólo si sus coordenadas  $v_k(t)$  en la carta  $x$  satisfacen las ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n v_j(\gamma \circ \Gamma_{ij}^k) \frac{d(\gamma \circ x_i)}{dt} = 0. \quad (10.7)$$

La teoría de ecuaciones diferenciales nos da que este sistema tiene solución única en un entorno de  $a$  si imponemos la condición inicial  $v_k(a) = v_k^0$ , donde  $v_k^0$  son las coordenadas del vector  $v_0$ .

En general, un campo vectorial en las condiciones del enunciado se llama *transporte paralelo* de  $v_0$  a lo largo de  $\gamma$ . Acabamos de probar que, para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, existe un único transporte paralelo de  $v_0$  sobre el arco  $\gamma_\epsilon = \gamma|_{[a, a+\epsilon]}$ . Tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeño podemos garantizar la existencia y unicidad de transporte paralelo sobre  $\gamma_\epsilon$  para los vectores de una base de  $T_p(V)$  y para el vector nulo. De aquí se sigue la existencia y unicidad del transporte paralelo de cualquier vector sobre  $\gamma_\epsilon$ . En efecto, una combinación lineal de campos vectoriales con derivada covariante nula tiene derivada covariante nula, y transporta a la combinación lineal correspondiente de los vectores de partida. Por otra parte, si dos campos son transportes paralelos de un mismo vector, su diferencia es un transporte paralelo del vector nulo, luego por la unicidad se trata del campo nulo.

Si en lugar de partir de  $a$  partimos de un punto  $t \in ]a, b[$ , podemos justificar la existencia de transporte paralelo tanto hacia la derecha como hacia la izquierda de  $t$ , es decir, existe un  $\epsilon > 0$  tal que todo vector de  $T_{\gamma(t-\epsilon)}(V)$  tiene transporte paralelo único a lo largo de  $\gamma|_{[t-\epsilon, t+\epsilon]}$ .

Ahora cubrimos cada  $t \in [a, b]$  por un entorno cerrado tal que existe transporte paralelo único de su extremo izquierdo a su extremo derecho. Por compacidad extraemos un subcubrimiento finito de los interiores de estos entornos y lo ordenamos en una sucesión finita de intervalos

$$I_0 = [a, a + \epsilon_0[, \quad I_1 = ]t_1 - \epsilon_1 t_1 + \epsilon_1[, \quad \dots, \quad I_m = ]b - \epsilon, b],$$

de modo que cada intervalo corta al siguiente y existe transporte paralelo único entre sus extremos.

Dado  $v_0 \in T_p(V)$ , el transporte paralelo  $v$  a lo largo de  $\gamma|_{[a, a+\epsilon_0]}$  es un campo vectorial que coincide en un intervalo con el transporte paralelo de  $v(t_1 - \epsilon)$  a lo largo de  $\gamma|_{[t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon]}$ , luego éste extiende a  $v$  hasta un transporte paralelo (diferenciable) de  $v$  a lo largo de  $\gamma|_{[a, t_1 + \epsilon]}$ . Encadenando de este modo los transportes llegamos a un transporte paralelo a lo largo de  $\gamma$ . La unicidad en cada tramo implica la unicidad global. ■

Recogemos en la definición siguiente el concepto de transporte paralelo que, por conveniencia, hemos introducido ya en la prueba del teorema anterior:

**Definición 10.11** Sea  $\gamma : [a, b] \longrightarrow V$  un arco regular en una variedad diferencial  $V$  y sea  $D$  una conexión en  $V$ . Llamaremos *transporte paralelo* a lo largo

de  $\gamma$  respecto a la conexión  $D$  a la familia de aplicaciones

$$\text{tp}_t^\gamma : T_{\gamma(a)}(V) \longrightarrow T_{\gamma(t)}(V), \quad t \in [a, b],$$

tales que, para cada  $v \in T_{\gamma(a)}(V)$ , el campo  $t \mapsto \text{tp}_t^\gamma(v)$  es el único campo vectorial sobre  $\gamma$  que tiene derivada covariante nula y cumple  $\text{tp}_a^\gamma(v) = v$ .

Por definición tenemos, pues, que  $\text{tp}_a^\gamma$  es la identidad en  $T_{\gamma(a)}(V)$ .

**Teorema 10.12** *En las condiciones de la definición anterior, el transporte paralelo*

$$\text{tp}_t^\gamma : T_{\gamma(a)}(V) \longrightarrow T_{\gamma(t)}(V)$$

*es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

DEMOSTRACIÓN: En la prueba del teorema anterior hemos justificado que el transporte paralelo es lineal. Además, si  $\text{tp}_t^\gamma(v) = 0$  para cierto  $v$  y cierto  $t$ , entonces, en un entorno de  $\gamma(t)$ , las coordenadas del campo  $\text{tp}_t^\gamma(v)$  (para  $v$  fijo) satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales (10.7), que obviamente es satisfecho por las funciones constantemente iguales a 0, y si dos soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales toman el mismo valor en un punto, son iguales. Así pues, si  $\text{tp}_t^\gamma(v) = 0$  para un cierto valor de  $t$ , se cumple esto mismo en un entorno de  $t$ . En otras palabras, el conjunto de puntos de  $[a, b]$  donde se anula el campo  $\text{tp}_t^\gamma(v) = 0$  es abierto, pero por continuidad es cerrado. La conclusión es que el campo es constante y, en particular,  $v = 0$ . Esto prueba que el transporte paralelo es inyectivo y, como los espacios tangentes tienen todos la misma dimensión, de hecho es biyectivo. ■

**Ejemplo** En  $\mathbb{R}^n$  podemos considerar la conexión afín determinada por que todos sus coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  respecto de la carta identidad son nulos. En tal caso, la fórmula (10.6) se reduce a

$$\frac{Dv}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dv_k}{dt} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{\gamma(t)}.$$

A través de los isomorfismos canónicos  $\theta_{\gamma(t)}$ , un campo  $v$  se identifica con el campo  $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  dado por  $v = (v_1, \dots, v_n)$ , y la igualdad anterior se reduce a

$$\frac{Dv}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

Por consiguiente, los campos paralelos son los campos con coordenadas constantes respecto a la carta identidad, y un vector en un espacio  $T_p(\mathbb{R}^n)$  es el transporte paralelo de otro en  $T_q(\mathbb{R}^n)$  a lo largo de cualquier arco de extremos  $p$  y  $q$  si y sólo si ambos se corresponden con el mismo vector de  $\mathbb{R}^n$  a través de los isomorfismos canónicos. ■

El transporte paralelo en  $\mathbb{R}^n$  entre los espacios tangentes a dos puntos no depende del arco a través del cual se realice (como es obvio). Formalmente

esto se debe a que la dependencia de  $\gamma$  en las ecuaciones (10.7) desaparece si los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  son nulos. No obstante, respecto a conexiones arbitrarias en variedades arbitrarias, el transporte paralelo sí depende de la trayectoria. Más adelante comprenderemos mejor este hecho.

Quizá el lector se sienta tentado a considerar en una variedad arbitraria la conexión afín determinada por que sus coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  son todos nulos, pero por desgracia esto no es posible, pues el hecho de que los coeficientes de una conexión sean nulos en una carta puede obligar a que no lo sean en otra (por ejemplo, en  $\mathbb{R}^2$  los coeficientes de la conexión que hemos definido en el ejemplo anterior no pueden ser nulos respecto a las coordenadas polares). Por consiguiente, habría que especificar un atlas en el que pudiéramos tomar nulos consistentemente los coeficientes de la conexión, y esto no es —casi nunca— posible. Ciertamente, en cualquier variedad cubrible con una única carta podemos considerar la conexión determinada por que sus coeficientes en dicha carta son nulos, pero aquí terminan las posibilidades de este “método”.

De cara a trabajar con una conexión lo más simple posible en una variedad, nos encontramos con que hay una condición sobre sus coeficientes que no depende de la carta en la que se consideren. Se trata de  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ . Si los coeficientes respecto a unas coordenadas cumplen esto en un punto, lo mismo sucede con los coeficientes respecto a cualquier otro sistema de coordenadas. Una forma de probarlo sería determinar las ecuaciones que transforman los coeficientes de unas coordenadas a otras y comprobar que así sucede, con lo cual sabríamos, pero no entenderíamos.

El hecho de que los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  puedan anularse respecto a unas coordenadas y no anularse respecto de otras prueba que no son las funciones coordenadas de ningún tensor. Esencialmente esto se debe a que la conexión  $D(X, Y)$  es lineal respecto a la primera componente pero no respecto a la segunda, mientras que los tensores son “completamente lineales”. En cambio, vamos a probar que  $\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$  sí que son las funciones coordenadas de un tensor, con lo que el hecho de que se anulen o no en un punto dependerá sólo de que dicho tensor sea o no el tensor nulo en el punto, lo cual no depende de las coordenadas.

Puesto que  $\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$  son las coordenadas de  $D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} - D_{\partial_{x_j}} \partial_{x_i}$ , estamos buscando un tensor que se anule en un punto si y sólo si

$$D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} - D_{\partial_{x_j}} \partial_{x_i} = 0 \quad \text{para todo } i, j.$$

Una forma exigir esto sin hacer referencia a coordenadas sería pedir que

$$D_X Y - D_Y X = 0 \quad \text{para todos los campos } X, Y \in \mathfrak{X}(V).$$

Sin embargo esto último es mucho más fuerte que la condición anterior. Para comprender exactamente la situación consideramos las expresiones en coordenadas

$$X = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$



Entonces (10.5) nos da que

$$D_X Y - D_Y X = \sum_k \left( \sum_{ij} u_i v_j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) + \sum_i \left( u_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Así queda claro que, aunque se den la simetrías  $\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0$ , habrá campos para lo cuales  $D_X Y - D_Y X \neq 0$ . Ahora bien, el término residual es precisamente la expresión en coordenadas del corchete de Lie (10.3), luego tenemos que

$$D_X Y - D_Y X - [X, Y] = \sum_k \sum_{ij} u_i v_j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Ahora el miembro izquierdo no depende de sistemas de coordenadas, mientras que el miembro derecho muestra que la expresión es  $C^\infty(V)$ -bilineal.

**Definición 10.13** Si  $D$  es una conexión en una variedad  $V$ , definimos su *torsión* como el operador

$$\text{Tor } D : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \longrightarrow \mathfrak{X}(V)$$

dado por  $(\text{Tor } D)(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$ .

Hemos probado que  $\text{Tor } D$  es bilineal y también es claro que  $(\text{Tor } D)(X, Y)_p$  depende únicamente de los valores de  $X$  e  $Y$  en un entorno de  $p$ . Teniendo en cuenta que  $[\partial_{x_i}, \partial_{x_j}] = 0$ , es claro que  $(\text{Tor } D)(X, Y)_p = 0$  si y sólo si  $\Gamma_{ij}^k(p) = \Gamma_{ji}^k(p)$ , para todo  $i, j, k$ . Con esto hemos probado que esta condición es independiente del sistema de coordenadas respecto al que se calculan los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  (tal y como afirmábamos) y la razón es que la torsión es esencialmente un tensor. La situación es similar a la que en el teorema 9.31 nos permitía representar los endomorfismos por tensores: conocer  $(\text{Tor } D)(X, Y)$  equivale a conocer  $\omega((\text{Tor } D)(X, Y))$ , para cada  $\omega \in \Lambda^1(V)$ . Así pues, podemos identificar la torsión con el tensor

$$\text{Tor } D : \Lambda^1(V) \times \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dado por  $(X, Y, \omega) \mapsto \omega(D_X Y - D_Y X - [X, Y])$ . Esta aplicación es claramente  $C^\infty(V)$ -multilineal, luego por el lema de localización determina un tensor de tipo (1, 2) cuyas coordenadas en una carta son

$$(\text{Tor } D)(dx_k, \partial_{x_i}, \partial_{x_j}) = dx_k(D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} - D_{\partial_{x_j}} \partial_{x_i}) = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

Diremos que una conexión  $D$  es una variedad  $V$  es *simétrica* si su torsión es nula, es decir, si  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  en cualquier carta.

Terminamos esta sección con un complemento natural a la existencia de transporte paralelo: la noción de transporte paralelo sobre un arco diferenciable a trozos. Diremos que un arco  $\gamma : [a, b] \longrightarrow V$  en una variedad  $V$  es *diferenciable (regular) a trozos* si existe una partición  $a = t_0 < \dots < t_m = b$  de modo que  $\gamma$  es diferenciable (regular) en cada intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ .

**Teorema 10.14** *Si  $V$  es una variedad diferencial conexa, dos puntos distintos cualesquiera de  $V$  pueden unirse por un arco regular a trozos.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que si  $(U, x)$  es una carta tal que  $x[U]$  es convexo, entonces dos puntos distintos cualesquiera  $p, q \in U$  pueden unirse por un arco regular. En efecto, basta tomar la composición con  $x^{-1}$  del segmento que une  $x(p)$  con  $x(q)$ .

Ahora consideremos el conjunto  $C$  formado por un punto  $p \in V$  y todos los puntos de  $V$  que pueden unirse con  $p$  mediante un arco regular a trozos. Acabamos de probar que  $C$  es abierto, pues si  $q \in C$  y tomamos una carta  $(U, x)$  alrededor de  $q$  con imagen convexa, entonces  $U \subset C$ , pues al encadenar un arco regular a trozos que una  $p$  con  $q$  y un arco regular que una  $q$  con cualquier punto  $r \in U$ , obtenemos un arco regular a trozos que une a  $p$  con  $r$ .

Similarmente concluimos que  $C$  es cerrado, pues si  $q \in V \setminus C$  y  $(U, x)$  es igual que antes, necesariamente  $U \subset V \setminus C$ . Por conexión  $V = C$ . ■

En realidad no es difícil probar que dos puntos cualesquiera de una variedad conexa pueden unirse por un arco regular (“limando las esquinas”), pero en la práctica es más cómodo trabajar con arcos regulares a trozos, pues así podemos encadenarlos libremente, aunque las uniones no sean diferenciables.

Se define el transporte paralelo a lo largo de un arco regular a trozos como la composición de los transportes paralelos sobre cada trozo donde es regular. Obviamente se siguen cumpliendo todas las propiedades que hemos visto sobre transporte paralelo.

## 10.2 Métricas de Riemann

Una métrica de Riemann consiste en asignar a cada espacio tangente de una variedad un producto escalar de forma “consistente”, es decir, a través de un tensor (diferenciable). Esto es suficiente para generalizar a variedades todas las nociones propias de la estructura euclídea de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 10.15** Una *métrica de Riemann* en una variedad diferencial  $V$  es un tensor  $g$  de tipo  $(0, 2)$ , simétrico y definido positivo, es decir, tal que si  $p \in V$  y  $v, w \in T_p(V)$ , entonces  $g_p(v, w) = g_p(w, v)$  y si  $v \in T_p(V)$  es no nulo entonces  $g_p(v, v) > 0$ .

Una *variedad de Riemann* es un par  $(V, g)$ , donde  $V$  es una variedad diferencial y  $g$  es una métrica. El tensor  $g$  se llama también *tensor métrico* de  $V$ . Su nombre clásico es el de *primera forma fundamental* de  $V$ . En definitiva,  $g$  asigna un producto escalar euclídeo a cada espacio tangente de  $V$ .

Si  $(U, x)$  es una carta de  $V$ , la expresión coordenada del tensor métrico será de la forma

$$g|_U = \sum_{ij} g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

La simetría de  $g$  equivale a que sus coordenadas satisfagan la relación  $g_{ij} = g_{ji}$ , para todo par de índices  $i, j$ .

Del hecho de que la métrica  $g$  sea definida positiva se deduce en particular que la matriz  $G = (g_{ij})$  tiene determinante no nulo en cada punto.

**Ejercicio:** Calcular la relación entre las coordenadas de una métrica en dos cartas distintas.

La métrica usual en  $\mathbb{R}^n$  viene dada por

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n.$$

Claramente, con esta métrica, los isomorfismos canónicos  $\theta_p : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  resultan isometrías cuando en  $\mathbb{R}^n$  consideramos el producto escalar usual.

Toda subvariedad  $W$  de una variedad de Riemann  $V$  adquiere de forma natural una métrica, a través del homomorfismo  $i_{\sharp} : \mathcal{T}_2^0(V) \rightarrow \mathcal{T}_2^0(W)$  inducido por la inclusión. Específicamente, si  $v, w \in T_p(W)$ , tenemos que

$$i_{\sharp}(g)_p(v, w) = g_p(di_p(v), di_p(w)).$$

Es claro que  $i_{\sharp}(g)$  es simétrico y, teniendo en cuenta que la diferencial  $di_p$  es inyectiva en cada punto  $p \in W$ , también es claro que  $i_{\sharp}(g)$  es definido positivo. En otras palabras,  $i_{\sharp}(g)_p$  es el producto escalar en  $T_p(W)$  que convierte a  $di_p$  en una isometría en su imagen.

**Subvariedades de  $\mathbb{R}^m$**  En particular toda subvariedad  $V$  de  $\mathbb{R}^m$  tiene definida una métrica natural. Concretamente, al identificar  $T_p(V)$  con un subespacio de  $\mathbb{R}^m$ , estamos componiendo  $di|_p$  con  $\theta_p$ , y ambas son isometrías (la segunda considerando en  $\mathbb{R}^m$  el producto escalar usual). Así pues, al identificar  $T_p(V)$  con un subespacio de  $\mathbb{R}^m$  la métrica inducida en  $V$  se corresponde con la restricción a  $T_p(V)$  del producto escalar de  $\mathbb{R}^m$ .

Si  $x$  es un sistema de coordenadas en  $V$  alrededor de un punto  $p$  y  $r_1, \dots, r_m$  son las coordenadas de la identidad en  $\mathbb{R}^m$ , tenemos que

$$\begin{aligned} g_{ij}(p) &= g_p(\partial_{x_i}|_p, \partial_{x_j}|_p) = g_p(di|_p(\partial_{x_i}|_p), di|_p(\partial_{x_j}|_p)) \\ &= \theta_p(di|_p(\partial_{x_i}|_p)) \cdot \theta_p(di|_p(\partial_{x_j}|_p)) = \sum_k di|_p(\partial_{x_i}|_p(r_k)) di|_p(\partial_{x_j}|_p(r_k)) \\ &= \sum_k \left. \frac{\partial x^{-1} \circ r_k}{\partial x_i} \right|_{x(p)} \left. \frac{\partial x^{-1} \circ r_k}{\partial x_j} \right|_{x(p)} = \left. \frac{\partial X}{\partial x_i} \right|_{x(p)} \cdot \left. \frac{\partial X}{\partial x_j} \right|_{x(p)}, \end{aligned}$$

donde  $X = x^{-1}$ .

En este contexto es preferible considerar a  $g_{ij}$  definido sobre la imagen de  $x$ , es decir,  $\tilde{g}_{ij} = X \circ g_{ij}$ , con lo que tenemos la relación

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial X}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial x_j}. \quad (10.8)$$

Esta expresión permite calcular fácilmente la métrica de cualquier subvariedad de  $\mathbb{R}^m$ . ■

De todos modos, no necesitamos sumergir una variedad en  $\mathbb{R}^n$  para encontrarle una métrica. Observemos que el teorema siguiente usa particiones de la unidad, luego se apoya en la existencia de bases numerables. Hasta ahora no habíamos empleado esta hipótesis (salvo en la prueba de la existencia de particiones de la unidad).

**Teorema 10.16** *Toda variedad diferencial admite una métrica de Riemann.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos una variedad diferencial  $V$ , fijemos un atlas  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  y tomemos una partición de la unidad subordinada  $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  (con  $\text{sop } \phi_\alpha \subset U_\alpha$ ).

La imagen de  $x_\alpha$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , luego tiene definida una métrica que puede trasladarse a  $U_\alpha$  mediante  $x_{\alpha\#}$ . Llamemos a esta métrica  $g_\alpha$ . El tensor  $\tilde{g}_\alpha = \phi_\alpha g_\alpha$  puede considerarse definido en toda  $V$ , entendiendo que es nulo fuera de  $U_\alpha$ .

Así mismo, podemos definir  $g = \sum_\alpha \tilde{g}_\alpha$ , bien definido porque casi todos los sumandos son nulos en cada punto. Claramente  $g$  es simétrico y, teniendo en cuenta que las funciones  $\phi_i$  toman valores en  $[0, 1]$ , es fácil ver que  $g$  es una métrica de Riemann. ■

Una métrica permite definir la longitud de un arco:

**Definición 10.17** La *longitud* de un arco diferenciable  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  en una variedad de Riemann es

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt, \quad (10.9)$$

donde  $\|v\|_p = \sqrt{g_p(v, v)}$ .

Es fácil ver que el integrando es una función continua no negativa, por lo que la longitud está bien definida. Además coincide con la definición usual en análisis cuando  $V$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$ . En particular es independiente de la parametrización de  $\gamma$ .

Más en general, definimos la *longitud* de un arco diferenciable a trozos como la suma de las longitudes de las restricciones del arco a cada uno de los intervalos donde es diferenciable. Notemos que la fórmula (10.9) vale para arcos diferenciables a trozos aunque el integrando no esté definido en un número finito de puntos.

Es costumbre definir el *elemento de longitud* de una superficie de Riemann  $V$  como

$$ds_p^2(v) = g_p(v, v).$$

Notemos que  $ds^2$  no es un tensor, porque cada  $ds_p^2$  no es una aplicación lineal, sino una forma cuadrática. No obstante,  $ds^2$  y  $g$  se determinan mutuamente, ya que

$$g_p(v, w) = \frac{1}{2}(ds_p^2(v + w) - ds_p^2(v) - ds_p^2(w)).$$

El elemento de longitud suele tener una expresión en coordenadas más sencilla que el tensor métrico. Por ejemplo, el elemento de longitud en  $\mathbb{R}^n$  es

$$ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2.$$

Según probamos al final de la sección anterior, en una variedad conexa todo par de puntos puede unirse por un arco diferenciable a trozos.<sup>2</sup>

**Definición 10.18** Si  $V$  es una variedad de Riemann conexa, definimos la *distancia* entre dos puntos  $p, q \in V$  como el ínfimo  $\rho(p, q)$  de las longitudes de los arcos diferenciables a trozos que unen  $p$  con  $q$ .

Vamos a probar que  $\rho$  es una distancia en  $V$  que induce la topología de  $V$ .

Obviamente  $\rho(p, q) \geq 0$  y  $\rho(p, p) = 0$ . La prueba de que si  $\rho(p, q) = 0$  entonces  $p = q$  es más delicada, y debemos posponerla.

Es fácil ver que  $\rho(p, q) = \rho(q, p)$ . De hecho, si  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  es un arco diferenciable a trozos que une  $p$  con  $q$ , entonces  $\gamma(a + b - t)$  es un arco diferenciable a trozos de la misma longitud que une  $q$  con  $p$ .

Dados tres puntos  $p, q, r \in V$ , si  $\gamma_1$  une  $p$  con  $q$  y  $\gamma_2$  une  $q$  con  $r$ , es claro que podemos formar un arco  $\gamma_1 \cup \gamma_2$  que une  $p$  con  $r$  y de modo que  $l(\gamma_1 \cup \gamma_2) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ . Por consiguiente

$$\rho(p, r) \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$

Tomando el ínfimo en  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  obtenemos la desigualdad triangular:

$$\rho(p, r) \leq \rho(p, q) + \rho(q, r).$$

Con esto tenemos probado que  $\rho$  es una pseudométrica en  $V$ , es decir, sólo nos falta probar que si  $\rho(p, q) = 0$  entonces  $p = q$ . Esto lo probaremos indirectamente: vamos a ver que la topología que  $\rho$  induce en  $V$  coincide con la topología original de  $V$ , de modo que la propiedad de Hausdorff implicará que  $\rho$  es una distancia.

Sea  $x : U \rightarrow \tilde{U}$  una carta de  $V$  alrededor de un punto  $p$ . Podemos suponer que  $x(p) = 0$ . En  $U$  tenemos definidas dos métricas de Riemann: la restricción de la métrica de  $V$ , a la que llamamos  $g$ , y la inducida por  $x$  a partir de la métrica euclídea  $g^e$  en  $\tilde{U}$ , a la que llamaremos  $\tilde{g}$ . Más concretamente, si  $q \in U$  y  $v, w \in T_q(V)$ , entonces

$$\tilde{g}_q(v, w) = g_{x(q)}^e(dx_q(v), dx_q(w)).$$

Es claro que  $dx_q(\partial_{x_i}|_q) = \partial_{x_i}|_{x(q)}$ , donde en el miembro izquierdo  $x_i$  son las coordenadas de  $x$  y en el miembro derecho son las coordenadas de la identidad en  $\tilde{U}$ . Por consiguiente, si  $v = \sum_i v_i \partial_{x_i}|_q$  y  $w = \sum_i w_i \partial_{x_i}|_q$ , entonces

$$\tilde{g}_q(v, w) = \sum_i v_i w_i.$$

<sup>2</sup>En el teorema exigíamos que los puntos fueran distintos para obtener un arco regular pero, si sólo exigimos diferenciabilidad, los arcos constantes unen cada punto consigo mismo. Obviamente tienen longitud 0.

Para cada  $q \in U$  y cada  $v = \sum_i v_i \partial_{x_i}|_q \in T_q(V)$ , definimos

$$\|v\|_1 = \sqrt{g_q(v, v)} = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(q) v_i v_j}, \quad \|v\|_2 = \sqrt{\tilde{g}_q(v, v)} = \sqrt{\sum_i v_i^2}.$$

Para cada arco  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  diferenciable a trozos definimos

$$l_1(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_1 dt, \quad l_2(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt.$$

En definitiva,  $l_1(\gamma)$  es la longitud de  $\gamma$  y  $l_2(\gamma)$  es la longitud de su lectura en  $\tilde{U}$ . Vamos a comparar ambas longitudes. Como  $0 = x(p) \in \tilde{U}$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \delta\} \subset \tilde{U}$ . Sea  $K = x^{-1}[B]$ , que es un entorno compacto de  $p$  contenido en  $U$ .

Definimos  $h : K \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$h(q, u) = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(q) u_i u_j}.$$

Claramente  $K \times S^{n-1}$  es compacto y la función  $h$  es continua y no se anula (el radicando es la norma del vector de  $T_q(V)$  de coordenadas  $u$  en la base  $\partial_{x_i}$ ), luego existen números reales  $M > m > 0$  tales que

$$m < h(q, u) < M,$$

para todo  $q \in K$  y todo  $u \in S^{n-1}$ . Equivalentemente,

$$m \sqrt{\sum_i u_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(q) u_i u_j} \leq M \sqrt{\sum_i u_i^2}.$$

Ahora bien, por la homogeneidad de los tres términos, esta desigualdad vale para todo  $u \in \mathbb{R}^n$ . De aquí se deduce que

$$m\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq M\|v\|_2$$

para todo  $v \in T_q(V)$  con  $q \in K$ . Usando la monotonía de la integral concluimos que

$$m l_2(\gamma) \leq l_1(\gamma) \leq M l_2(\gamma),$$

para todo arco diferenciable a trozos  $\gamma$  con imagen contenida en  $K$ .

Veamos ahora que si  $q \in V$  cumple  $\rho(p, q) < m\delta$ , entonces  $q \in U$ . En efecto, supongamos que  $q \in V \setminus U$ . Tomemos un arco diferenciable a trozos  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  que una  $p$  con  $q$ .

Por continuidad existe un  $t \in [a, b]$  tal que  $\gamma[a, t] \subset K$ . Sea  $t_0$  el supremo de los  $t$  que cumplen esto. Como  $K$  es cerrado, es claro que  $\gamma[a, t_0] \subset K$ . Podemos considerar el arco  $\eta : [a, t_0] \rightarrow B$  dado por  $\eta = \gamma \circ x$ . Es claro que  $\|\eta(t_0)\| = \delta$ , o de lo contrario podríamos tomar un  $t > t_0$  con  $\gamma[a, t] \subset K$ .

La longitud de un arco en  $\mathbb{R}^n$  es mayor o igual que la distancia entre sus extremos, luego  $l(\eta) \geq \delta$ . Ahora bien, como  $\gamma|_{[a,t_0]}$  tiene imagen en  $K$ , tenemos que

$$\delta \leq l(\eta) = l_2(\gamma|_{[a,t_0]}) \leq l_1(\gamma|_{[a,t_0]})/m \leq l_1(\gamma)/m,$$

para todo arco  $\gamma$  que una  $p$  con  $q$ . Por consiguiente  $\rho(p, q) \geq m\delta$ .

Esto ya nos garantiza que  $\rho$  es una distancia: si  $p \neq q$  tomamos un entorno coordenado  $U$  de  $p$  que no contenga a  $q$ . Según acabamos de probar, todo  $r \in V$  que cumpla  $d(p, r) < m\delta$  ha de estar en  $U$ , para ciertos  $m$  y  $\delta$ , luego  $\rho(p, q) \neq 0$ .

Más aún, hemos probado que todo entorno de un punto  $p \in V$  para la topología de  $V$  contiene una bola abierta de centro  $p$  para la métrica  $\rho$ . Ahora probamos el recíproco, es decir, que toda bola abierta  $B_\epsilon(p)$  contiene un entorno de  $p$  para la topología de  $V$ . Concretamente, el entorno

$$W = \{q \in U \mid \|x(q)\| < \min\{\delta, \epsilon/M\}\}.$$

En efecto, dado  $q \in W$ , el arco  $\gamma(t) = x^{-1}(tx(q))$  (para  $t \in [0, 1]$ ) es diferenciable, tiene imagen en  $K$  y une  $p$  con  $q$ . Además

$$l_1(\gamma)/M \leq l_2(\gamma) = \|x(q)\| < \epsilon/M,$$

por lo que  $\rho(p, q) \leq l_1(\gamma) < \epsilon$ .

Resumimos en el teorema siguiente lo que hemos demostrado:

**Teorema 10.19** *Si  $V$  es una variedad de Riemann conexa, entonces la distancia  $\rho$  definida como el ínfimo de las longitudes de los arcos que unen dos puntos dados es ciertamente una distancia en  $V$  que induce la topología de  $V$ .*

Teniendo en cuenta que toda variedad diferencial admite una métrica de Riemann, también hemos probado que toda variedad diferencial es metrizable (la conexión no es necesaria). Lo que sí es esencial es la exigencia de que las variedades tengan una base numerable (y sean espacios de Hausdorff).

**Definición 10.20** Un difeomorfismo  $f : V \rightarrow W$  entre variedades de Riemann es una *isometría* si  $f_*(g_W) = g_V$ .

En tal caso, para cada  $p \in V$ , se cumple que  $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_p(W)$  es una isometría respecto a los productos escalares  $g_p$  y  $g_{f(p)}$ .

De aquí se sigue inmediatamente que si  $\gamma$  es un arco diferenciable a trozos en  $V$  entonces  $l(\gamma) = l(\gamma \circ f)$ , lo que a su vez implica que  $f$  conserva las distancias entre puntos, es decir, que  $\rho_V(p, q) = \rho_W(f(p), f(q))$ .

También es claro que la composición de isometrías es una isometría y que la inversa de una isometría es una isometría.

**Ejercicio:** Demostrar que si  $f : V \rightarrow W$  es un difeomorfismo tal que  $\|df|_p(v)\| = \|v\|$  para todo  $p \in V$  y todo  $v \in T_p(V)$ , entonces  $f$  es una isometría.

### 10.3 La conexión de Levi-Civita

En esta sección probaremos que toda métrica de Riemann determina una conexión. Conviene estudiar primero el caso de las subvariedades de  $\mathbb{R}^m$ .

Sea  $V$  una subvariedad de  $\mathbb{R}^m$  y  $v$  un campo de vectores sobre un arco regular  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ . Al identificar cada  $v_t$  con  $\theta_{\gamma(t)}(di_{\gamma(t)}(v_t))$  podemos considerar que  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Específicamente, si fijamos (la inversa de) una carta  $X : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V$  alrededor de un punto  $\gamma(t_0)$ , alrededor de  $t_0$ , el arco  $\gamma$  se expresa como  $\gamma(t) = X(x(t))$ , donde  $x : ]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[ \rightarrow \tilde{U}$  es una curva diferenciable. Sabemos que la base asociada a la carta se corresponde a través de la identificación con la base formada por las derivadas parciales de  $X$ , de modo que, si las funciones coordenadas de  $v$  en la carta son  $v_1, \dots, v_n$ , estamos identificando  $v$  con el campo

$$v(t) = v_1(t) \left. \frac{\partial X}{\partial x_1} \right|_{x(t)} + \dots + v_n(t) \left. \frac{\partial X}{\partial x_n} \right|_{x(t)}, \quad \text{para } t \in ]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$$

Esta expresión muestra que  $v$  es diferenciable (en el sentido usual del análisis) cuando lo consideramos como aplicación en  $\mathbb{R}^m$ .

En este contexto, la variación de  $v$  viene expresada por su derivada  $v'$ , pero ésta tiene dos partes de naturaleza muy distinta. Podemos descomponerla de forma única como

$$v'(t) = Dv(t) + N(t),$$

donde  $Dv(t) \in T_{\gamma(t)}(V)$  y  $N(t)$  es ortogonal a  $T_{\gamma(t)}(V)$ .

Así,  $N$  es la variación de  $v$  necesaria para que éste permanezca tangente a  $V$  a medida que avanzamos por  $\gamma$ , mientras que  $Dv$  expresa la variación de  $v$  sobre la superficie  $V$ .

Por ejemplo, si  $\gamma$  representa la trayectoria de un coche que se mueve sobre la tierra y  $v = \gamma'$ , entonces  $v$  es la velocidad y  $v'$  es su aceleración. La aceleración normal  $N$  es la parte de la aceleración que obliga al coche a permanecer sobre la tierra, causada únicamente por la gravedad, mientras que la aceleración tangencial  $Dv$  recoge las variaciones del módulo de la velocidad y las variaciones de dirección sobre la superficie terrestre, y está producida por la fuerza del motor del coche. En ausencia de rozamiento, el coche con el motor parado se movería con  $Dv = 0$ , y su trayectoria sería una "recta" sobre la tierra, que en realidad sería una circunferencia, a causa de la aceleración normal. Es esta derivada tangencial  $Dv$  la que queremos definir para un campo de vectores arbitrario en una variedad arbitraria. En otras palabras, queremos probar que  $Dv$  es un concepto "interno", a pesar de que aquí lo hemos introducido a partir del concepto "externo"  $v'$ .

Derivando la expresión local que hemos obtenido para  $v(t)$  vemos que

$$v'(t) = \sum_{j=1}^n v'_j(t) \left. \frac{\partial X}{\partial x_j} \right|_{x(t)} + \sum_{i,j=1}^n v_j(t) \left. \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x(t)} x'_i(t). \quad (10.10)$$



El primer término es tangente a  $V$ , luego forma parte de  $Dv$ . Para descomponer ortogonalmente el segundo introducimos las funciones  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial X}{\partial x_k} + N_{ij}, \quad (10.11)$$

donde  $N_{ij}(x)$  es perpendicular a  $T_{X(x)}(V)$ . Sustituyendo en (10.10) y eliminando la parte normal obtenemos que

$$Dv(t) = \sum_{k=1}^n \left( v'_k + \sum_{i,j=1}^n v_j \tilde{\Gamma}_{ij}^k(x(t)) x'_i \right) \frac{\partial X}{\partial x_k} \Big|_{x(t)}. \quad (10.12)$$

Todos los elementos del miembro derecho son “internos”, es decir, tienen sentido en una variedad arbitraria. Sólo falta encontrar una definición interna las aplicaciones  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ . Para ello multiplicamos (10.11) por  $\partial X / \partial x_l$  y, teniendo en cuenta (10.8), obtenemos

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial X}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k \tilde{g}_{kl}.$$

Por otra parte, derivando en (10.8) respecto a los índices oportunos, se comprueba fácilmente que

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial X}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{g}_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{g}_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial x_l} \right).$$

En total llegamos a que

$$\sum_{k=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k \tilde{g}_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{g}_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{g}_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial x_l} \right).$$

A partir de aquí conviene trabajar con funciones definidas en  $U = X[\tilde{U}]$ . Así, si definimos  $\Gamma_{ij}^k = X^{-1} \circ \tilde{\Gamma}_{ij}^k$ , de modo que ahora  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces la ecuación anterior (válida para todo  $x \in \tilde{U}$ ) equivale a

$$\sum_{k=1}^n g_{kl} \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right), \quad (10.13)$$

(para todo  $p \in U$ ). Fijando  $i, j$  y variando  $k, l$ , tenemos un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas cuya matriz de coeficientes es  $(g_{kl})$ , que tiene determinante no nulo en cada punto, lo que nos permite despejar las funciones  $\Gamma_{ij}^k$  en términos de las coordenadas del tensor métrico y sus derivadas. En particular vemos que son funciones diferenciables. También conviene destacar que  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

Así pues, tenemos determinada la derivada  $D$  en términos de la métrica de  $V$ . Ahora reformulamos (10.12) en términos de los espacios tangentes abstractos.

Para ello observamos que  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k(x(t)) = \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))$ . El resultado es

$$Dv(t) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n v_j \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \frac{d(\gamma \circ x_i)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{\gamma(t)}.$$

Esta ecuación es idéntica a (10.6), luego vemos que  $D$  es la derivada covariante a lo largo de  $\gamma$  asociada a una conexión en  $V$  cuyos coeficientes en una carta dada vienen determinados por las ecuaciones (10.13). Además, hemos visto que se trata de una conexión simétrica.

En realidad no hemos probado que las ecuaciones (10.13) determinen una conexión en  $V$ . Sólo sabemos que determinan una derivada covariante a lo largo de cualquier curva. De todos modos esto lo probaremos enseguida para variedades arbitrarias, no necesariamente sumergidas en  $\mathbb{R}^m$ .

**Teorema 10.21** *Si  $V$  es una variedad de Riemann, existe una única conexión simétrica  $\nabla$  en  $V$  tal que  $\nabla_X g = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(V)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que la simetría equivale a que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(V).$$

Por otra parte, usando el argumento del teorema 10.3 para determinar  $(\nabla_X g)(Y, Z)$  vemos que, si  $C$  es la composición de las contracciones  $C_1^1$  y  $C_2^2$ ,

$$\begin{aligned} \nabla_X(g(Y, Z)) &= \nabla_X(C(g \otimes Y \otimes Z)) = C(\nabla_X(g \otimes Y \otimes Z)) \\ &= (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \end{aligned}$$

Así pues, si la derivada es nula tenemos que

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \text{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(V).$$

Como es habitual, probaremos primero la unicidad y de ella deduciremos la existencia. Dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(V)$ , se ha de cumplir

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\ Y(g(Z, X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \\ Z(g(X, Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras igualdades y restando la tercera queda:

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) &= g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) \\ &\quad + g(\nabla_X Z - \nabla_Z X, Y) + g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X) \\ &= g(2\nabla_X Y + [Y, X], Z) + g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Despejando:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2} (X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y))) \\ &\quad - g([Y, X], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X). \end{aligned} \quad (10.14)$$

Como  $g$  es definida positiva, esta igualdad (válida para todo  $Z$ ) determina a  $\nabla_X Y$ . (En general, si se cumple  $g(A, Z) = g(B, Z)$  para todo  $Z$ , ha de ser  $g(A - B, Z) = 0$  y en particular  $g(A - B, A - B) = 0$ , luego  $A - B = 0$ .)

Más explícitamente, para probar la existencia, observemos que si  $p \in V$ , entonces  $g_p : T_p(V) \times T_p(V) \rightarrow \mathbb{R}$  induce un isomorfismo  $T_p(V) \rightarrow T_p^*(V)$  (por ser definida positiva induce un monomorfismo, y como los dos espacios tienen la misma dimensión, es un isomorfismo). Fijados  $X$  e  $Y$ , el miembro derecho de (10.14) es una aplicación  $\mathfrak{X}(V) \rightarrow \mathbb{R}$  y se comprueba sin dificultad que es  $C^\infty(V)$ -lineal, luego al particularizar en  $p$  tenemos una aplicación lineal  $T_p(V) \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir, un elemento de  $T_p^*(V)$ . Definimos  $(\nabla_X Y)_p$  como el elemento de  $T_p(V)$  asociado a esta aplicación lineal. Así tenemos una aplicación  $p \mapsto (\nabla_X Y)_p$  que satisface (10.14). Hemos de probar que el campo vectorial  $\nabla_X Y$  así definido es diferenciable.

No necesitamos la diferenciabilidad de  $\nabla_X Y$  para justificar que es lineal en  $X$  y una derivación en  $Y$ . Esto se sigue de la unicidad de (10.14). Así mismo, si fijamos un sistema de coordenadas alrededor de un punto  $p \in V$  y definimos las funciones  $\Gamma_{ij}^k$  mediante (10.4), tenemos también que se cumple la igualdad (10.5), luego  $\nabla_X Y$  será diferenciable en  $p$  si lo son las funciones  $\Gamma_{ij}^k$ . (Aquí hemos usado que  $(\nabla_X Y)_p$  depende únicamente de la restricción de  $X$  e  $Y$  a un entorno de  $p$ , lo cual se cumple porque lo cumple el miembro derecho de (10.14)). Así pues, basta calcular los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$ .

Para ello evaluamos (10.14) en  $\partial_{x_i}$ ,  $\partial_{x_j}$ ,  $\partial_{x_l}$  y queda exactamente (10.13) lo que, al igual que allí, prueba que los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  son diferenciables.

Con esto tenemos probado que existe una conexión simétrica  $\nabla$  que cumple la ecuación (10.14). Falta probar que  $\nabla_X g = 0$  para todo campo  $X$ . Ahora bien, según hemos calculado,

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z).$$

Basta calcular los dos últimos miembros mediante (10.14) y operar. ■

**Definición 10.22** Se llama *conexión de Levi-Civita* de una variedad de Riemann  $V$  a la única conexión simétrica  $\nabla$  en  $V$  compatible con  $g$  (es decir, tal que  $\nabla_X g = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(V)$ ).

Los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  de  $\nabla$  se conocen como *símbolos de Christoffel* de la conexión respecto de un sistema de coordenadas dado. Están determinados por las ecuaciones (10.13).

En la primera parte de esta sección hemos probado que la derivada covariante de un campo vectorial a lo largo de un arco regular respecto de la conexión de Levi-Civita de una subvariedad de  $\mathbb{R}^m$  es la proyección sobre el espacio tangente de la derivada usual del campo en  $\mathbb{R}^m$ . Por consiguiente, un campo con derivada covariante nula sufre únicamente las variaciones necesarias para permanecer tangente a la variedad en cada punto, pero no “gira” sobre la variedad. Esto justifica que la conexión de Levi-Civita es la conexión natural en una variedad

de Riemann. Siempre que hablemos de derivación covariante o de transporte paralelo en una variedad de Riemann se sobrentenderá que la conexión es la que acabamos de definir.

Es claro que si  $\gamma$  es un arco regular en una variedad de Riemann  $V$ , se cumple

$$\frac{\nabla g}{dt} = 0,$$

lo cual, razonando igual que en el teorema anterior, se traduce en que para todo par de campos vectoriales  $Y, Z$  sobre  $\gamma$ , se cumple

$$\frac{dg(Y, Z)}{dt} = g\left(\frac{\nabla Y}{dt}, Z\right) + g\left(Y, \frac{\nabla Z}{dt}\right).$$

En particular, si  $Y$  y  $Z$  son transportes paralelos, vemos que  $g(Y, Z)$  permanece constante, es decir, que los transportes paralelos son isometrías entre los espacios tangentes.

**Ejemplo** Con la interpretación que hemos dado del transporte paralelo en subvariedades de  $\mathbb{R}^n$  no es difícil comprender que éste dependa en general de la trayectoria. Por ejemplo, si partimos de un vector en el polo norte de  $S^2$  y lo transportamos paralelamente por el meridiano hacia el que apunta, llegará al ecuador apuntando hacia el sur. Por el contrario, si lo transportamos por un meridiano perpendicular, llegará al ecuador horizontal, y si lo movemos por el ecuador hasta llegar al punto al que habíamos llegado antes, llegará también horizontal. Así pues, los dos caminos dan lugar a transportes paralelos que difieren en un ángulo recto. ■

## 10.4 Geodésicas

Las geodésicas son el análogo a las rectas de  $\mathbb{R}^n$  en una variedad diferencial. Las rectas pueden caracterizarse como las curvas con segunda derivada nula o, equivalentemente, con primera derivada constante. Esto tiene sentido en una variedad de Riemann arbitraria:

**Definición 10.23** Sea  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow V$  una curva diferenciable en una variedad de Riemann  $V$ . Diremos que es una *geodésica* si su derivada  $\gamma'$ , considerada como campo de vectores sobre  $\gamma$ , tiene derivada covariante nula.

Puesto que el transporte paralelo conserva la métrica, si  $\gamma$  es una geodésica, tenemos que  $\|\gamma'(t)\|$  es constante. En general, si una curva  $\gamma$  cumple que  $\|\gamma'(t)\| = 1$  para todo  $t$ , se dice que está *parametrizada por el arco*, porque la longitud del segmento comprendido entre  $\gamma(0)$  y  $\gamma(t_0)$  es

$$\int_0^{t_0} \|\gamma'(t)\| dt = t_0,$$

es decir, el parámetro es la longitud recorrida. Más en general, si una curva  $\gamma$  cumple que  $\|\gamma'(t)\| = k$  es constante, entonces se dice que está *parametrizada proporcionalmente al arco*, porque ahora la longitud entre  $\gamma(0)$  y  $\gamma(t_0)$  es  $kt_0$  (o, equivalentemente, que si doblamos el recorrido del parámetro doblamos la longitud de la curva). Según esto, la definición que hemos dado exige que las geodésicas (no constantes) estén parametrizadas proporcionalmente al arco, lo cual en ciertos contextos puede ser arbitrario. En particular, toda geodésica no constante es una curva regular.

Observemos que toda curva regular  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  puede “reparametrizarse” por el arco. Basta definir  $s(t) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt$ , que será una función diferenciable estrictamente creciente. Por consiguiente tendrá una inversa  $t(s)$ , de modo que  $\gamma^*(s) = \gamma(t(s))$  tiene la misma imagen que  $\gamma$  pero está parametrizada por el arco.

Podríamos generalizar la noción de geodésica estableciendo que una curva regular es una geodésica si su reparametrización por el arco es una geodésica en el sentido anterior, pero no vamos a hacer tal cosa. Bastará con que seamos conscientes de la restricción que hemos impuesto.

Al igual que hicimos con el transporte paralelo, obtendremos la existencia de geodésicas a partir de los teoremas de existencia de ecuaciones diferenciales.

**Existencia de geodésicas** Consideremos una curva  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = q$ . Fijemos una carta  $(U, x)$  alrededor de  $q$ . Podemos suponer que  $x(q) = 0$ . En un entorno de 0 tenemos la lectura  $x(t) = \gamma \circ x$  (no debemos confundir esta  $x(t)$  con la carta  $x(p)$ ). La derivada tendrá coordenadas

$$\gamma'(t) = \sum_k \frac{dx_k}{dt} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{\gamma(t)},$$

donde  $x_k(t)$  es  $x(t)$  compuesta con la proyección  $i$ -ésima. Ahora aplicamos la fórmula (10.6), en virtud de la cual

$$\frac{\nabla \gamma'}{dt} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{\gamma(t)}. \quad (10.15)$$

Llamemos  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = x^{-1} \circ \Gamma_{ij}^k$ , de modo que  $\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = \tilde{\Gamma}_{ij}^k(x(t))$ . En conclusión,  $\gamma'$  tiene derivada covariante nula alrededor de 0 si y sólo si la función  $x(t)$  cumple el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k(x(t)) \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (10.16)$$

La teoría de ecuaciones diferenciales nos da que existe una función

$$x : ]-\epsilon, \epsilon[ \times B_{\epsilon_1}(0) \times B_{\epsilon_2}(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

de clase  $C^\infty$  tal que  $x(t, x_0, v_0)$  es la única solución de la ecuación con las condiciones iniciales  $x(0, x_0, v_0) = x_0$ ,  $x'(0, x_0, v_0) = v_0$  (las dos bolas abiertas son bolas en  $\mathbb{R}^n$ ).

Notemos que  $x(0, 0, 0) = 0$  (pues  $x(t, 0, 0)$  es la función constante 0), luego reduciendo el dominio de  $x$  podemos suponer que

$$x : ]-\epsilon, \epsilon[ \times B_{\epsilon_1}(0) \times B_{\epsilon_2}(0) \longrightarrow \tilde{U}, \quad \epsilon < 1, \quad B_{\epsilon_1}(0) \subset \tilde{U}.$$

Ahora observemos que la función  $x((\epsilon/2)t, x_0, v_0)$  está definida en el abierto  $] -2, 2[ \times B_{\epsilon_1}(0) \times B_{\epsilon_2}(0)$  y también es solución de la ecuación diferencial. Por la unicidad ha de ser

$$x((\epsilon/2)t, x_0, v_0) = x(t, x_0, (\epsilon/2)v_0).$$

Así pues, cambiando  $\epsilon_2$  por  $\epsilon_2\epsilon/2$  podemos suponer que

$$x : ] -2, 2[ \times B_{\epsilon_1}(0) \times B_{\epsilon_2}(0) \longrightarrow \tilde{U}.$$

Por el mismo argumento, si  $|t| \leq 1$  tenemos que  $x(t, x_0, v_0) = x(1, x_0, tv_0)$ , de modo que podemos definir

$$\xi : B_{\epsilon_1}(0) \times B_{\epsilon_2}(0) \longrightarrow \tilde{U}$$

mediante  $\xi(x_0, v_0) = x(1, x_0, v_0)$  y así, la única solución del sistema de ecuaciones con condiciones iniciales  $(x_0, v)$  es la función  $\xi(x_0, tv)$ , definida para  $t \in ]-1, 1[$ .

Ahora transportamos esta función a la variedad  $V$  o, más exactamente, al fibrado de tangentes de  $V$ , para aprovechar así toda la información que tenemos sobre la dependencia de las condiciones iniciales. Sea  $\tilde{x} : TU \longrightarrow x[U] \times \mathbb{R}^n$  la carta de  $TV$  asociada a  $x$  y sea  $W$  la antiimagen por  $\tilde{x}$  de  $B_{\epsilon_1}(0) \times B_{\epsilon_2}(0)$ . Así  $W$  es un abierto en  $TV$ , entorno del punto  $(q, 0)$ , sobre el cual tenemos definida la composición de  $\tilde{x}$  con  $\xi$  y con  $x^{-1} : \tilde{U} \longrightarrow U$ . Llamémosla  $\exp : W \longrightarrow U$ . Obviamente es diferenciable. Notemos que si  $(p, v) \in W$ , entonces  $(p, tv) \in W$ , para todo  $t \in ]-1, 1[$ .

De este modo, si  $(p, v) \in W$  tenemos definida la curva  $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$  para  $t \in ]-1, 1[$ . Concretamente,

$$x(\gamma(t)) = \xi(x(p), tdx_1|_p(v), \dots, tdx_n|_p(v)).$$

Así, las coordenadas de  $\gamma_v$  satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales que caracterizan a las geodésicas, luego podemos concluir que  $\gamma_v$  es una geodésica que pasa por  $\gamma_v(0) = p$  y

$$\gamma'_v(0) = \sum_k dx_k|_p(v) \frac{\partial}{\partial x_k} = v.$$

Más aún, el teorema de unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales justifica que  $\gamma_v(t)$  es, salvo prolongación o restricción, la única geodésica que

pasa por  $p$  con tangente  $v$ . A su vez esto prueba que la aplicación  $\exp$  es independiente de la carta con la que la hemos construido.

Podemos repetir la construcción con cada punto  $q \in V$  y unir todos los entornos  $W_q$  de  $(q, 0)$  pues, por la unicidad, las funciones exponenciales asociadas a cada uno de ellos coincidirán sobre los dominios comunes. En resumen hemos probado lo siguiente:

**Teorema 10.24** *Sea  $V$  una variedad de Riemann y  $p \in V$ . Para cada vector  $v \in T_p(V)$  existe (salvo prolongación o restricción) una única geodésica  $\gamma_v$  en  $V$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'_v(0) = v$ . Además existe un abierto  $W$  en el fibrado de tangentes  $TV$  que contiene a todos los vectores nulos  $(p, 0)$  y sobre el que la aplicación  $\exp : W \rightarrow V$  dada por  $\exp_p v = \gamma_v(1)$  es diferenciable.*

Notemos que, en general,  $\exp_p$  sólo está definido para vectores suficientemente pequeños, mientras que  $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$  está definido para cualquier  $v$ , sólo que el dominio de variación de  $t$  será menor cuanto mayor sea  $v$ .

Sea  $W_p = W \cap T_p(V)$ , entorno de 0 en  $T_p(V)$ . La función  $\exp_p : W_p \rightarrow V$  es también diferenciable, pues es la composición de  $i_p$  con  $\exp$ .

La función exponencial proporciona una estrecha relación entre una variedad y sus espacios tangentes:

**Teorema 10.25** *Sea  $V$  una variedad de Riemann y  $p \in V$ . Existe un abierto  $G_p \subset W_p \subset T_p(V)$  (entorno de 0) tal que la restricción de  $\exp_p$  es un difeomorfismo en su imagen.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de la función inversa, basta probar que

$$d\exp_p|_0 : T_0(W_p) \rightarrow T_p(V)$$

es biyectiva. Para ello construiremos explícitamente su inversa. Sea  $v \in T_p(V)$ . Consideremos la curva  $\alpha : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow W_p$  dada por  $\alpha_v(t) = tv$ . Entonces  $\alpha'_p(0) \in T_0(W_p)$ . Definimos  $\phi : T_p(V) \rightarrow T_0(W_p)$  mediante  $\phi(v) = \alpha'_p(0)$ . Es claro que  $\phi$  es lineal. Ahora calculamos

$$d\exp_p|_0(\phi(v)) = d\exp_p|_0(\alpha'_p(0)) = d\exp_p|_0(d\alpha_v|_0(\partial_t)) = d(\alpha_v \circ \exp_p)|_0(\partial_t),$$

pero esto es la derivada en 0 de la curva  $\exp_p(tv)$ , o sea,  $v$ .

Así pues,  $\phi \circ \exp_p|_0 = 1$ . Como son aplicaciones lineales entre espacios de la misma dimensión, ambas son isomorfismos. ■

Conviene observar que la aplicación  $\phi$  que hemos definido en la prueba anterior no es más que la inversa del isomorfismo canónico  $\theta_0 : T_0(T_pV) \rightarrow T_pV$ , por lo que  $d\exp_p|_0 = \theta_0$ .

**Cartas geodésicas** Como primera aplicación usaremos la función exponencial para construir cartas en las que la métrica admite una expresión especialmente simple.

Dado un punto  $p$  en una variedad de Riemann  $V$ , tomamos un entorno  $U$  de  $p$  tal que  $\exp_p : G_p \rightarrow U$  sea un difeomorfismo. Fijemos una isometría  $\alpha : T_p(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces  $x = \exp_p^{-1} \circ \alpha$  es un difeomorfismo  $x : U \rightarrow \tilde{U}$ , donde  $\tilde{U}$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , o sea, es una carta alrededor de  $p$ . Además  $x(p) = 0$ .

Si  $\gamma_v(t)$  es la geodésica que pasa por  $p = \gamma_v(0)$  con tangente  $v \in T_p(V)$ , entonces  $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ , luego  $x(\gamma_v(t)) = t\alpha(v)$ . Así pues,  $\gamma_v \circ x$  es una recta en  $\mathbb{R}^n$  que pasa por 0. Recíprocamente, si  $\gamma$  es una curva que pasa por  $p = \gamma(0)$  y  $\gamma \circ x$  es una recta  $t \mapsto tv$ , entonces  $\gamma$  es la geodésica que pasa por  $p$  con derivada  $\alpha^{-1}(v)$ .

De aquí se sigue, en particular que, para cada  $v \in T_p(V)$ ,

$$dx_p(v) = dx_p(\gamma'_v(0)) = (\gamma_v \circ x)'(0) = \alpha(v).$$

Así pues,  $dx_p = \alpha$  es una isometría.

**Definición 10.26** Una *carta normal* alrededor de un punto  $p$  en una variedad de Riemann  $V$  es una carta  $(U, x)$  alrededor de  $p$  tal que  $dx_p$  sea una isometría y las geodésicas que pasan por  $p$  se corresponden a través de  $x$  con las rectas que pasan por  $0 = x(p)$ .

Acabamos de probar que todo punto tiene una carta normal a su alrededor.

**Teorema 10.27** Sea  $(U, x)$  una carta normal alrededor de un punto  $p$  de una variedad de Riemann  $V$ . Entonces, los coeficientes de la métrica en la carta cumplen

$$g_{ij}(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right|_p = 0.$$

Además  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ .

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que  $g_{ij}(p) = g_p(\partial_{x_i}|_p, \partial_{x_j}|_p)$ . Ahora bien,  $dx_p$  hace corresponder la base  $\partial_{x_i}|_p$  con la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y, como es una isometría, la base de las derivadas parciales es ortonormal, luego  $g_{ij}(p)$  toma el valor que indica el enunciado.

Dado  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , la curva  $\gamma(t) = x^{-1}(tv)$  es una geodésica, luego la expresión (10.15) se anula para todo  $t$ . Puesto que  $x_i(t) = tv_i$ , para  $t = 0$  se reduce a

$$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(p) v_i v_j = 0,$$

para todo  $v_i, v_j$ . Necesariamente entonces  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ .



Esto quiere decir que  $(\nabla_{\partial_{x_k}} \partial_{x_i})_p = 0$  y, usando que  $\nabla_{\partial_{x_k}} g = 0$ , tenemos que

$$\left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right|_p = \nabla_{\partial_{x_k}} (\partial_{x_i}, \partial_{x_j})_p = g_p((\nabla_{\partial_{x_k}} \partial_{x_i})_p, \partial_{x_j}|_p) + g_p(\partial_{x_i}|_p, (\nabla_{\partial_{x_k}} \partial_{x_j})_p) = 0.$$

■

Notemos que las condiciones del teorema anterior las cumplen los coeficientes de la métrica usual de  $\mathbb{R}^n$  en todo punto. Así pues, lo que tenemos es que localmente la métrica de cualquier variedad “se parece” a la de  $\mathbb{R}^n$ .

**La propiedad minimizante** Vamos a generalizar a variedades arbitrarias el hecho de que *el camino más corto entre dos puntos es la línea recta*. Básicamente se trata de que la curva que minimiza la distancia entre dos puntos de una variedad es la única geodésica que los une, pero aquí hay que imponer ciertas restricciones, ya que en general puede no haber ninguna geodésica que una dos puntos o puede haber varias, incluso infinitas. Para enunciar adecuadamente lo que queremos demostrar conviene introducir el concepto siguiente:

**Definición 10.28** Un arco diferenciable a trozos  $c : [a, b] \rightarrow V$  es *minimizante* (entre sus extremos  $p = c(a)$  y  $q = c(b)$ ) si  $l(c) = d(p, q)$ , donde —recordemos— la distancia  $d(p, q)$  está definida como el ínfimo de las longitudes de las curvas que unen  $p$  con  $q$ .

Observemos que en tal caso  $c$  es minimizante entre dos cualesquiera de los puntos por los que pasa,  $c(t_0)$  y  $c(t_1)$ , ya que si existiera un arco  $c'$  que uniera  $c(t_0)$  y  $c(t_1)$  con longitud menor que la de  $c|_{[t_0, t_1]}$ , al unir dicho arco con  $c|_{[a, t_0]}$  y con  $c|_{[t_1, b]}$  obtendríamos un arco que uniría  $p$  con  $q$  de longitud menor que la de  $c$ .

Vamos a probar que los arcos de geodésica suficientemente pequeños son minimizantes. Conviene observar que no es cierto en general que toda geodésica sea minimizante. Basta pensar en la esfera  $S^2$ , donde las geodésicas resultan ser los arcos de circunferencia de radio 1: los que tienen amplitud mayor que  $\pi$  radianes no son minimizantes entre sus puntos más alejados, pues la distancia entre ellos se realiza a través del arco complementario.

Necesitaremos algunos conceptos y resultados auxiliares. El primero es el de superficie parametrizada.

**Definición 10.29** Una *superficie parametrizada* en una variedad diferencial  $V$  es una aplicación diferenciable  $\alpha : J_1 \times J_2 \rightarrow V$ , donde  $J_1$  y  $J_2$  son dos intervalos en  $\mathbb{R}$  (en principio abiertos, pero si los tomamos cerrados entenderemos que  $\alpha$  se extiende a un producto de intervalos abiertos mayores).

Notemos que  $J_1 \times J_2$  es un abierto en  $\mathbb{R}^2$ , que podemos considerar como variedad diferencial con la carta identidad. Llamaremos  $(s, t)$  a sus coordenadas. Para cada punto  $(s_0, t_0) \in J_1 \times J_2$  definimos los vectores de  $T_{\alpha(s_0, t_0)}(V)$

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(s_0, t_0)} = d\alpha|_{(s_0, t_0)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right), \quad \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(s_0, t_0)} = d\alpha|_{(s_0, t_0)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Fijado un punto  $(s_0, t_0)$ , definimos las *curvas coordenadas*  $\alpha_{s_0}(t) = \alpha(s_0, t)$  y  $\alpha_{t_0}(s) = \alpha(s, t_0)$ . Claramente son diferenciables, y es inmediato comprobar que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, t_0)} = \alpha'_{t_0}(s_0), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s_0, t_0)} = \alpha'_{s_0}(t_0).$$

Podemos considerar a  $\frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, t)}$  como un campo vectorial sobre  $\alpha_{s_0}$ , claramente diferenciable, e igualmente cambiando  $s$  por  $t$ . Si las curvas coordenadas son regulares podemos hablar de las derivadas covariantes de estos campos. En tal caso se cumple:

$$\frac{\nabla}{dt} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, t)} \right) \Big|_{t_0} = \frac{\nabla}{ds} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s, t_0)} \right) \Big|_{s_0} \quad (10.17)$$

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un sistema de coordenadas  $x$  alrededor del punto  $\alpha(s_0, t_0)$  y llamemos  $x_i(s, t) = x_i(\alpha(s, t))$ . Entonces es claro que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, t)} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial s} \Big|_{(s_0, t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(s, t)}$$

(incidentalmente, esto prueba que se trata de un campo diferenciable). Ahora, el primer miembro de (10.17) es igual a

$$\begin{aligned} & \sum_i \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial s} \right) \Big|_{t_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(s_0, t_0)} + \frac{\partial x_i}{\partial s} \Big|_{(s_0, t_0)} \left( \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \Big|_{(s_0, t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_{\alpha(s_0, t_0)} \right) \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial s \partial t} \Big|_{(s_0, t_0)} + \sum_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial s} \Big|_{(s_0, t_0)} \frac{\partial x_j}{\partial t} \Big|_{(s_0, t_0)} (\nabla_{\partial_j} \partial_i) \Big|_{\alpha(s_0, t_0)}. \end{aligned}$$

Como esta expresión es simétrica en  $s$  y  $t$ , es claro que coincide con el segundo miembro de (10.17). ■

**Definición 10.30** Sea  $V$  una variedad diferencial,  $p \in V$  y  $\epsilon > 0$  tal que la bola cerrada  $\overline{B_\epsilon(0)} \subset T_p(V)$  esté contenida en un abierto donde  $\exp_p$  es un difeomorfismo. Definimos la *bola geodésica* y la *esfera geodésica* de centro  $p$  y radio  $\epsilon$  como  $B_\epsilon(p) = \exp_p[B_\epsilon(0)]$  y  $S_\epsilon(p) = \exp_p[\partial B_\epsilon(0)]$ , respectivamente.

El teorema siguiente, que será crucial en la prueba de la propiedad minimizante de las geodésicas, afirma esencialmente que las geodésicas que pasan por  $p$  atraviesan ortogonalmente las esferas geodésicas de centro  $p$ :

**Teorema 10.31 (Lema de Gauss)** Sea  $V$  una variedad diferencial,  $p \in V$  y  $S_\epsilon(p)$  una esfera geodésica de centro  $p$ . Supongamos que  $\sigma : ]-\delta, \delta[ \rightarrow S_\epsilon(p)$  es una curva regular que pasa por un punto  $q = \sigma(0)$  y sea  $v = \exp_p^{-1}(q)$ , de modo que  $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$  es una geodésica que une  $\gamma_v(0) = p$  con  $\gamma_v(1) = q$ . Entonces  $\gamma'_v(1)$  es ortogonal a  $\sigma'(0)$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $v : ]-\delta, \delta[ \rightarrow T_p(V)$  dada por  $v(s) = \exp_p^{-1}(\sigma(s))$ , de modo que  $\sigma(s) = \exp_p(v(s))$ . Así  $v(0) = v$  y por hipótesis se cumple que  $\|v(s)\| = \epsilon$  para todo  $s$ . Definimos  $\alpha : ]-\delta, \delta[ \times [0, 1] \rightarrow V$  mediante

$$\alpha(s, t) = \exp_p(tv(s)).$$

Claramente,  $\alpha_0(t) = \gamma_v(t)$  y  $\alpha_1(s) = \sigma(s)$ . Por consiguiente

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,t)} = \gamma'_v(t), \quad \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(s,1)} = \sigma'(s).$$

Queremos probar que

$$g_{\alpha(0,1)} \left( \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,1)}, \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,1)} \right) = 0.$$

Para ello definimos

$$f(t) = g_{\alpha(0,t)} \left( \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,t)}, \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,t)} \right).$$

Claramente es una función diferenciable en  $[0, 1]$  y queremos probar que  $f(1) = 0$ . Observemos que la función  $\alpha_0(s) = p$ , por lo que

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,0)} = \left. \frac{d\alpha_0}{ds} \right|_0 = 0.$$

A su vez, esto implica que  $f(0) = 0$ . Si probamos que  $f'$  se anula en  $]0, 1[$  podremos concluir que  $f$  es constante y, en particular, que  $f(1) = 0$ .

Observemos que para  $t > 0$  las curvas coordenadas de  $\alpha$  son regulares, por lo que tiene sentido la derivada covariante a lo largo de ellas. Usando que la derivada covariante del tensor métrico es nula (a lo largo de cualquier curva regular) vemos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{dt} \right|_{t_0} &= g_{\alpha(0,t_0)} \left( \left. \frac{\nabla}{dt} \left( \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,t)} \right) \right|_{t_0}, \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,t_0)} \right) \\ &\quad + g_{\alpha(0,t_0)} \left( \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(0,t_0)}, \left. \frac{\nabla}{dt} \left( \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,t)} \right) \right|_{t_0} \right). \end{aligned}$$

Ahora bien, el segundo sumando es nulo, pues  $\alpha_0(t) = \gamma_v(t)$  es una geodésica, luego la derivada covariante de su derivada a lo largo de  $\alpha_0(t)$  es nula. Al primer término le aplicamos (10.17) y luego volvemos a usar que el tensor métrico tiene derivada nula:

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t_0} = g_{\alpha(0,t_0)} \left( \left. \frac{\nabla}{ds} \left( \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(s,t_0)} \right) \right|_0, \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(0,t_0)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \alpha'_{t_0}(0) \left( g_{\alpha(s,t_0)} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s,t_0)}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s,t_0)} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \alpha'_{t_0}(0) (g_{\alpha(s,t_0)}(\gamma'_{v(s)}(t_0), \gamma'_{v(s)}(t_0))) \\
&= \frac{1}{2} \alpha'_{t_0}(0) (\|\gamma'_{v(s)}(t_0)\|^2) = \frac{1}{2} \alpha'_{t_0}(0) (\|\gamma'_{v(s)}(0)\|^2) \\
&= \frac{1}{2} \alpha'_{t_0}(0) (\|v(s)\|^2) = \frac{1}{2} \alpha'_{t_0}(0) (\epsilon^2) = 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Con esto ya podemos demostrar el resultado principal:

**Teorema 10.32** *Sea  $V$  una variedad diferencial,  $p \in V$  y  $\epsilon > 0$  tal que exista la bola geodésica  $B_\epsilon(p)$ . Sea  $q \in B_\epsilon(p)$  y  $v = \exp_p^{-1}(q)$ . Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$  el arco de geodésica  $\gamma(t) = \gamma_v(t)$  y sea  $c : [a, b] \rightarrow V$  un arco diferenciable a trozos que una  $c(a) = p$  con  $c(b) = q$ . Entonces  $l(c) \geq l(\gamma)$  y se da la igualdad si y sólo si  $c$  es una reparametrización de  $\gamma$ .*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que  $c : [a, b] \rightarrow B_\epsilon(p)$ . Es fácil ver que no perdemos generalidad si suponemos que  $c(s) \neq p$  para  $s \neq a$ . En tal caso podemos definir los arcos diferenciables a trozos

$$r(s) = \|\exp_p^{-1}(c(s))\|, \quad v(s) = \frac{\exp_p^{-1}(c(s))}{\|\exp_p^{-1}(c(s))\|},$$

de modo que  $c(s) = \exp_p(r(s)v(s))$ , para  $s > a$ .

Definimos, como antes,  $\alpha(s, t) = \exp_p(tv(s))$ , de modo que  $c(s) = \alpha(s, r(s))$ . Notemos que  $\alpha$  no es una superficie parametrizada, sino que tenemos tantas superficies como intervalos donde  $v$  es diferenciable.

Salvo en un número finito de puntos, tenemos que

$$\frac{dc}{ds} \Big|_{s_0} = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, r(s_0))} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s_0, r(s_0))} \frac{dr}{ds} \Big|_{s_0}.$$

El lema de Gauss nos da que las dos derivadas parciales que aparecen son ortogonales. En efecto, la parcial respecto de  $s$  es la derivada en  $s_0$  de la curva  $\alpha_{r(s_0)}(s) = \exp_p(r(s_0)v(s))$ , que está contenida en la esfera geodésica de radio  $r(s_0)$  y es regular en un entorno de  $s_0$  salvo que la parcial sea nula (en cuyo caso es obviamente ortogonal a la otra parcial). Por otra parte, la parcial respecto de  $t$  es la derivada de la geodésica  $\alpha_{s_0}(t) = \exp_p(tv(s_0))$ . Así pues,

$$g_{\alpha(s_0, r(s_0))} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, r(s_0))}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s_0, r(s_0))} \right) = 0.$$

Por consiguiente podemos aplicar el teorema de Pitágoras para calcular

$$\left\| \frac{dc}{ds} \Big|_{s_0} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, r(s_0))} \right\|^2 + \left\| \frac{dr}{ds} \Big|_{s_0} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s_0, r(s_0))} \right\|^2.$$

Como  $\alpha_{s_0}(t) = \gamma_{v(s_0)}(t)$ , el módulo de su derivada es constante igual a  $\|v(s_0)\| = 1$ , así pues, tenemos que

$$\|c'(s_0)\|^2 = \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, r(s_0))} \right\|^2 + \left| \frac{dr}{ds} \Big|_{s_0} \right|^2 \geq \left| \frac{dr}{ds} \Big|_{s_0} \right|^2 = r'(s_0)^2,$$

para todo  $s_0 > a$  donde  $c$  sea derivable. Así pues,

$$\begin{aligned} l(c) &= \int_a^b \|c'(s)\| ds \geq \int_a^b |r'(s)| ds \geq \left| \int_a^b r'(s) ds \right| = r(b) - r(a) \\ &= \|v\| - 0 = \int_0^1 \|v\| dt = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = l(\gamma). \end{aligned}$$

Si se da la igualdad entonces  $\|c'(s)\| = |r'(s)|$  donde están definidas, luego

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, r(s_0))} = 0.$$

Esto es la derivada de  $\alpha_{r(s_0)}(s) = \exp_p(r(s_0)v(s))$ , luego esta función es constante, luego también lo es  $v(s) = v(b) = v/r(b)$  y así

$$c(s) = \exp_p \left( r(s) \frac{v}{r(b)} \right) = \gamma \left( \frac{r(s)}{r(b)} \right)$$

es una reparametrización de  $\gamma$ .

Supongamos ahora que la imagen de  $c$  no está contenida en la bola geodésica  $B_\epsilon(p)$ . Esto significa que  $r(s) = \|\exp_p^{-1}(c(s))\|$  no es siempre menor que  $\epsilon$ , luego existe un  $s_0$  tal que  $c[a, s_0] \subset B_\epsilon(p)$  y  $r(s_0) > \|v\|$ . Sea  $v_0 = \exp_p^{-1}(c(s_0))$  y sea  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow V$  el segmento de geodésica  $\gamma_0(t) = \exp_p(tv_0)$ . Por la parte ya probada,

$$l(c) \geq l(c|_{[a, s_0]}) \geq l(\gamma_0) = \|v_0\| > \|v\| = l(\gamma).$$

Obviamente  $c$  no puede ser, en estas condiciones, una reparametrización de  $\gamma$ . ■

Así pues, tenemos que si  $B_\epsilon(p)$  es una bola geodésica,  $q = \exp_p(v) \in B_\epsilon(p)$  y  $\gamma$  es la (única) geodésica que une  $p$  con  $q$  contenida en la bola, entonces

$$d(p, q) = l(\gamma) = \|v\| = \|\exp_p^{-1}(q)\|.$$

En particular,  $\gamma$  es minimizante entre  $p$  y  $q$ . Otra consecuencia interesante es que  $B_\epsilon(p)$  coincide con la bola abierta con el mismo centro y el mismo radio para la métrica de la variedad, es decir, las bolas geodésicas de centro  $p$  son simplemente las bolas métricas de radio suficientemente pequeño. En particular todo punto puede unirse mediante una geodésica con los puntos de un entorno. En lo sucesivo no hablaremos de si existe o no la bola geodésica de radio  $\epsilon$ , sino de si la bola (métrica) de radio  $\epsilon$  es o no geodésica.

Si  $(U, x)$  es una carta normal alrededor de  $p$ , tenemos que  $x(q)$  se obtiene aplicando una isometría a  $\exp_p^{-1}(q)$ , luego  $d(p, q) = \|x(q)\|$ . Por consiguiente, una carta normal alrededor de un punto  $p$  transforma cada bola geodésica de centro  $p$  en la bola de centro 0 en  $\mathbb{R}^n$  del mismo radio.

**Ejercicio:** Probar que toda curva regular minimizante es, salvo reparametrización, una geodésica.

**Entornos convexos** Hasta ahora tenemos garantizada la existencia de geodésicas que pasan por un punto dado, pero sólo tenemos un resultado parcial sobre geodésicas que unen dos puntos dados: sabemos que todo punto  $p$  tiene un entorno  $U$  cuyos puntos pueden unirse con  $p$  mediante una única geodésica contenida en  $U$ . Ahora probaremos la existencia de entornos con una propiedad más fuerte:

**Definición 10.33** Un abierto  $U$  en una variedad de Riemann  $V$  es *convexo* si para todo par de puntos  $p, q \in U$  existe una única geodésica que los une contenida en  $U$ , la cual es además minimizante.

En esta definición no excluimos que pueda haber otras geodésicas que unan los puntos dados pero que no estén contenidas en  $U$ . Vamos a probar que, en una variedad de Riemann  $V$ , las bolas abiertas de radio suficientemente pequeño son convexas. Para demostrarlo necesitamos volver a la función exponencial definida sobre el fibrado de tangentes.

Vamos a probar que una base de entornos de un punto  $(q, 0)$  en  $TV$  está formada por los conjuntos de la forma

$$E_\delta = \{(p, v) \in TV \mid d(p, q) < \delta, \|v\| < \delta\}. \quad (10.18)$$

En efecto, fijamos una carta normal  $(U, x)$  alrededor de  $q$ , de modo que (para  $\delta$  suficientemente pequeño) la imagen de  $E_\delta$  por la carta  $\tilde{x}$  es el conjunto

$$\tilde{E}_\delta = \{(x, y) \in x[U] \times \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \delta, \|y\|_x < \delta\},$$

donde

$$\|y\|_x = \sqrt{\sum_{i,j} \tilde{g}_{ij}(x) y_i y_j}, \quad \tilde{g}_{ij} = x^{-1} \circ g_{ij}.$$

Basta probar que los conjuntos  $\tilde{E}_\delta$  son una base de entornos de  $(0, 0)$ . Como  $\|y\|_x$  es claramente continua en  $x[U] \times \mathbb{R}^n$ , ciertamente son conjuntos abiertos. La función

$$m(x) = \min_{\|y\|=1} \|y\|_x$$

es continua en  $x[U]$ . En efecto, dado  $x_0 \in X[U]$ , tomamos un entorno compacto  $K$  y usamos que  $F(x, y) = \|y\|_x$  es uniformemente continua en  $K \times S^{n-1}$ . Así, dado  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $\|x - x_0\| < \delta$ , entonces  $|\|y\|_x - \|y\|_{x_0}| < \epsilon$ . De aquí se concluye que  $|m(x) - m(x_0)| \leq \epsilon$ .

Ahora, fijado  $\epsilon > 0$ , tomamos  $\delta > 0$  tal que  $\delta < \epsilon$ , si  $\|x\| < \delta$  entonces  $m(x) \geq m > 0$  y  $\delta/m < \epsilon$ . Así, si  $(x, y) \in \tilde{E}_\delta$  con  $y \neq 0$ , tenemos que

$$\delta > \|y\|_x = \left\| \frac{\|y\|_x}{\|y\|} \right\| \|y\| \geq m(x)\|y\| \geq m\|y\|,$$

luego  $\|y\| < \epsilon$  (lo cual también es cierto si  $y = 0$ ). Así pues,  $\tilde{E}_\delta \subset B_\epsilon(0) \times B_\epsilon(0)$ , lo que prueba que todo entorno de  $(0, 0)$  contiene un  $\tilde{E}_\delta$ .

Sea ahora  $h : W \rightarrow V \times V$  dada por  $h(p, v) = (p, \exp_p(v))$ , claramente diferenciable. Tenemos  $dh|_{(q,0)} : T_{(q,0)}(W) \rightarrow T_{(q,q)}(V \times V)$ . Vamos a probar que es un isomorfismo.

Una base de  $T_{(q,0)}(W) = T_{(q,0)}(TV)$  la forman las derivadas

$$\partial_{x_1}|_{(q,0)}, \dots, \partial_{x_n}|_{(q,0)}, \partial_{y_1}|_{(q,0)}, \dots, \partial_{y_n}|_{(q,0)},$$

donde  $x_i(q, v) = x_i(q)$  e  $y_i(q, v) = dx_i|_q(v)$ . Por otra parte, una base de  $T_{(q,q)}(V \times V)$  la forman las derivadas

$$\partial_{x_1^1}|_{(q,q)}, \dots, \partial_{x_n^1}|_{(q,q)}, \partial_{x_1^2}|_{(q,q)}, \dots, \partial_{x_n^2}|_{(q,q)},$$

donde  $x_i^1(q_1, q_2) = x_i(q_1)$ ,  $x_i^2(q_1, q_2) = x_i(q_2)$ . Claramente,

$$\begin{aligned} dh|_{(q,0)}(\partial_{x_i}|_{(q,0)})(x_j^1) &= \left. \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \right|_{(q,0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \\ dh|_{(q,0)}(\partial_{y_i}|_{(q,0)})(x_j^1) &= \left. \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right|_{(q,0)} = 0, \\ dh|_{(q,0)}(\partial_{y_i}|_{(q,0)})(x_j^2) &= \left. \frac{\partial \exp \circ x_j}{\partial y_i} \right|_{(q,0)} = \left. \frac{\partial \exp_p \circ x_j}{\partial y_i} \right|_0, \end{aligned}$$

luego la matriz de  $h$  en las bases indicadas es de la forma

$$\left( \begin{array}{c|c} I_n & * \\ \hline 0 & J \end{array} \right),$$

donde  $J$  es la matriz de  $d\exp_q|_0$ . Teniendo en cuenta la demostración del teorema 10.25, concluimos que esta matriz tiene rango máximo, con lo que  $dh|_{(q,0)}$  es biyectiva.

Por el teorema de la función inversa concluimos que la función  $h$  se restringe a un difeomorfismo  $h : E \rightarrow G$  entre un entorno abierto  $E$  de  $(q, 0)$  en  $W$  y un entorno abierto  $G$  de  $(q, q)$  en  $V \times V$ .

Según hemos probado antes, podemos suponer que  $E = E_\delta$ , para cierto  $\delta > 0$ . Tomamos  $\epsilon > 0$  tal que la bola  $B_\epsilon(q)$  sea geodésica y  $B_\epsilon(q) \times B_\epsilon(q) \subset G$ . Vamos a ver que estas elecciones nos dan el teorema siguiente:

**Teorema 10.34** *Sea  $q$  un punto en una variedad de Riemann  $V$ . Entonces, existen  $\epsilon$  y  $\delta$  tales que la bola  $B_\epsilon(q)$  es geodésica y para todo  $p \in B_\epsilon(q)$  la bola  $B_\delta(p)$  es geodésica y  $B_\epsilon(q) \subset B_\delta(p)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Continuando el razonamiento anterior, para cada punto  $p \in B_\epsilon(q)$  tenemos que  $\{p\} \times B_\delta(0) = E_\delta \cap T_p(V)$  y, por consiguiente, su imagen por  $h$  es  $\{p\} \times B_\delta(p) = G \cap (\{p\} \times V)$ . Entonces,

$$\{p\} \times B_\epsilon(q) \subset G \cap (\{p\} \times V) = \{p\} \times B_\delta(p),$$

luego  $B_\epsilon(q) \subset B_\delta(p)$ .

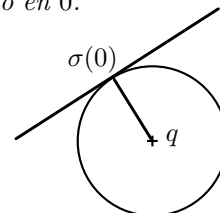
La restricción de  $h$  a  $\{p\} \times B_\delta(0)$  es simplemente  $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(p)$ . Tenemos que es biyectiva, es diferenciable porque es la composición de la inclusión  $B_\delta(0) \rightarrow E_\delta$  con  $h$ , y su inversa es diferenciable porque es la composición de la aplicación  $r \mapsto (p, r)$  con  $h^{-1}$ , que es diferenciable como aplicación de  $B_\delta(p) \rightarrow E_\delta$  y, como  $T_p(V)$  es una subvariedad de  $TV$ , es claro que  $B_\delta(0)$  es una subvariedad de  $E_\delta$ , luego  $\exp_p^{-1}$  también es diferenciable como aplicación en  $B_\delta(0)$  (por el teorema 9.21).

Así pues,  $\exp_p$  se restringe a un difeomorfismo en  $B_\delta(0)$  y, por consiguiente, la bola  $B_\delta(p)$  es geodésica. ■

En particular vemos que todo par de puntos en  $B_\epsilon(q)$  puede ser unido por una geodésica minimizante, pero de momento no podemos asegurar que esté contenida en  $B_\epsilon(q)$ , por lo que no tenemos la convexidad. Para ello necesitamos un cálculo sencillo con una interpretación geométrica muy simple. Continuamos con un punto  $q \in V$  y una carta normal  $(U, x)$  a su alrededor. Definimos  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mediante  $f(p) = d(p, q) = \|x(p)\|$ . Claramente  $f$  es diferenciable en  $U \setminus \{q\}$ . Vamos a probar lo siguiente:

*Existe un número real  $\theta > 0$  tal que si  $\sigma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow U$  es una geodésica no constante tal que  $0 < f(\sigma(0)) \leq \theta$  y  $\sigma'(0)(f) = 0$ , entonces  $g = \sigma \circ f$  tiene un mínimo relativo estricto en 0.*

La interpretación es ésta: si  $\theta$  es suficientemente pequeño como para que a esa distancia la métrica sea “euclídea” alrededor de  $q$ , la condición  $\sigma'(0)(f) = 0$  (es decir, que la derivada direccional de  $f$  en la dirección de  $\sigma'(0)$  sea nula) se da cuando  $\sigma'(0)$  es tangente a la esfera formada por los puntos equidistantes de  $q$ . Lo que vamos a probar es que entonces  $\sigma(0)$  es el punto de  $\sigma$  más cercano a  $q$ , tal y como muestra la figura.



Según lo dicho, hemos de elegir  $\theta$  para que a distancias menores la métrica sea “suficientemente euclídea”. Concretamente, dado que los símbolos de Christoffel se anulan en  $q$  (teorema 10.27), podemos tomar  $\theta > 0$  tal que si  $d(p, q) < \theta$  entonces

$$|\Gamma_{ij}^k(p)| < \frac{1}{n^3}.$$

Llamemos  $x_k(t) = \sigma \circ x_k$ , de modo que

$$\sigma'(t) = \sum_k \frac{dx_k}{dt} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{\sigma(t)}.$$



Notemos que podemos sustituir la curva  $\sigma(t)$  por  $\sigma(Mt)$ , para cualquier  $M > 0$  y así garantizar que

$$\sum_k \left( \frac{dx_k}{dt} \Big|_0 \right)^2 = 1. \quad (10.19)$$

Tenemos que

$$g(t) = \sqrt{\sum_k x_k^2(t)}$$

es una función diferenciable en  $[-\epsilon, \epsilon]$ . Además

$$g'(0) = \sigma'(0)(f) = 0,$$

luego basta probar que  $g''(0) > 0$ . Claramente

$$g'(t) = \frac{1}{g} \sum_k x_k \frac{dx_k}{dt},$$

$$g''(t) = \frac{1}{g} \sum_k \left( \left( \frac{dx_k}{dt} \right)^2 + x_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right) - \frac{g'}{g^2} \sum_k x_k \frac{dx_k}{dt},$$

$$\begin{aligned} g''(0) &= \frac{1}{g(0)} \sum_k \left( \left( \frac{dx_k}{dt} \Big|_0 \right)^2 + x_k(0) \frac{d^2 x_k}{dt^2} \Big|_0 \right) \\ &= \frac{1}{g(0)} \left( 1 - \sum_k x_k(0) \frac{d^2 x_k}{dt^2} \Big|_0 \right), \end{aligned}$$

donde hemos usado (10.19). Como  $\sigma$  es una geodésica, sus coordenadas satisfacen las ecuaciones (10.16), luego tenemos

$$g''(0) = \frac{1}{g(0)} \left( 1 - \sum_{i,j,k} x_k(0) \frac{dx_i}{dt} \Big|_0 \frac{dx_j}{dt} \Big|_0 \Gamma_{ij}^k(\sigma(0)) \right).$$

Tenemos que  $d(\sigma(0), q) = f(\sigma(0)) \leq \theta$ , luego  $|\Gamma_{ij}^k(\sigma(0))| < n^{-3}$ . Por otra parte, (10.19) implica que

$$\left| \frac{dx_i}{dt} \Big|_0 \right| \leq 1$$

y  $|x_k(0)| \leq f(\sigma(0)) \leq \theta \leq 1$  (podemos tomar  $\theta \leq 1$ ). En definitiva,

$$\left| \sum_{i,j,k} x_k(0) \frac{dx_i}{dt} \Big|_0 \frac{dx_j}{dt} \Big|_0 \Gamma_{ij}^k(\sigma(0)) \right| < \sum_{i,j,k} \frac{1}{n^3} = 1,$$

de donde  $g''(0) > 0$ . ■

Ahora ya podemos probar el resultado que perseguíamos:

**Teorema 10.35** *Si  $V$  es una variedad de Riemann y  $q \in V$ , para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño la bola abierta  $B_\epsilon(q)$  es convexa.*

DEMOSTRACIÓN: Sean  $\epsilon$  y  $\delta$  según el teorema 10.34 y sea  $\theta$  según el resultado anterior. Reduciéndolo podemos suponer  $\theta < \delta$ . Notemos así mismo que  $\epsilon$  puede tomarse arbitrariamente pequeño. Lo escogemos de modo que  $\epsilon < \theta/4$  y tal que la bola  $B_\epsilon(q)$  esté contenida en el entorno del enunciado.

Tomemos  $p, r \in B_\epsilon(q)$ , con lo que  $r \in B_{\theta/2}(p)$ . Por 10.34 sabemos que la bola  $B_\delta(p)$  es geodésica, luego la bola  $B_{\theta/2}(p)$  también lo es. El teorema 10.32 nos da una geodésica minimizante  $\sigma : [0, l] \rightarrow B_{\theta/2}(p)$  tal que  $\sigma(0) = p$ ,  $\sigma(l) = r$ . Falta probar que está contenida en  $B_\epsilon(q)$ , es decir, que  $f(\sigma(t)) < \epsilon$  para todo  $t$ .

Sea  $t_0 \in [0, l]$  un punto donde  $g = \sigma \circ f$  tome el valor máximo. Entonces

$$g(t_0) = f(\sigma(t_0)) = d(q, \sigma(t_0)) \leq d(q, p) + d(p, \sigma(t_0)) < \epsilon + \frac{\theta}{2} < \theta.$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que  $g(t_0) \geq \epsilon$ . Entonces  $t_0 \neq 0$  y  $t_0 \neq l$ , luego ha de ser  $g'(s) = \sigma'(s)(f) = 0$ . Podemos aplicar el resultado previo (en realidad tendríamos que cambiar  $\sigma(t)$  por  $\sigma(t - t_0)$ ) y concluir que  $g$  tiene un mínimo relativo estricto en  $t_0$ , lo cual contradice a que tenga un máximo.

Por último, notamos que  $\sigma$  es la única geodésica contenida en  $B_\epsilon(q)$  que une  $p$  con  $r$ , ya que, si hubiera otra, ambas estarían contenidas en la bola geodésica  $B_\delta(p)$ , lo cual es imposible. ■

El teorema 10.34 tiene otra consecuencia importante sobre las geodésicas:

**Teorema 10.36** *Toda curva regular a trozos minimizante en una variedad de Riemann es (salvo reparametrización) una geodésica (en particular es regular).*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\gamma$  una curva en las condiciones indicadas. Podemos suponerla parametrizada por el arco. Si  $t_0$  es un punto de su dominio, tomamos  $\epsilon$  y  $\delta$  en las condiciones del teorema 10.34 para  $q = \gamma(t_0)$ . Sea  $\eta > 0$  tal que  $\gamma[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \subset B_\epsilon(\gamma(t_0))$ . Entonces

$$\gamma(t_0 + \eta) \in B_\delta(\gamma(t_0) - \eta),$$

luego podemos aplicar 10.32 para concluir que  $\gamma|_{[t_0 - \eta, t_0 + \eta]}$  es (salvo reparametrización) una geodésica. Como está parametrizada por el arco, de hecho es una geodésica. En particular es regular en un entorno de  $t_0$  y su derivada covariante en  $t_0$  es nula. Como esto vale para todo  $t_0$ , concluimos que  $\gamma$  es una geodésica. ■

**Propiedades globales de las geodésicas** En general, dos puntos de una variedad de Riemann conexa no pueden unirse necesariamente por una geodésica. Pensemos por ejemplo en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  y dos puntos tales que el segmento que los une pase por el origen. El problema es que la geodésica que “debería” unirlos se ve interrumpida. En esta sección probaremos que si las geodésicas no se interrumpen entonces sí que es cierto.

**Definición 10.37** Una variedad de Riemann  $V$  es *geodésicamente completa* en un punto  $p \in V$  si todas las geodésicas que pasan por  $p$  están definidas en todo  $\mathbb{R}$ . Diremos que  $V$  es *geodésicamente completa* si lo es en todos sus puntos.

Si una variedad  $V$  es geodésicamente completa en un punto  $p$ , podemos definir  $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$  para todo vector  $v \in T_pV$ . Así tenemos definida la función exponencial  $\exp_p : T_pV \rightarrow V$ . Sabemos que es diferenciable en un entorno de 0, pero ahora podemos probar más:

**Teorema 10.38** Si  $V$  es una variedad de Riemann geodésicamente completa en un punto  $p$ , entonces  $\exp_p$  es diferenciable en  $T_pV$ .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $\exp_p$  no es diferenciable en algún punto. Sea  $R$  el supremo de todos los radios  $r$  tales que  $\exp_p$  es diferenciable en la bola abierta  $B_r(0)$ . Obviamente  $\exp_p$  es diferenciable en  $B_R(0)$ .

Vamos a probar que, cada  $w \in T_pV$  con  $\|w\| = R$  tiene un entorno en el que  $\exp_p$  es diferenciable. Por compacidad, la esfera de radio  $R$  puede ser cubierta por un número finito de estos entornos, y entonces es fácil encontrar una bola mayor donde  $\exp_p$  es diferenciable, con lo que tendremos una contradicción.

Sea  $q = \exp_p w$ . Sabemos que existe un  $\delta > 0$  tal que  $\exp : E_\delta \rightarrow V$  es diferenciable, donde  $E_\delta$  es el entorno de  $(q, 0)$  en  $T$  dado por (10.18).

Tomemos  $0 < r < 1$  tal que  $\gamma_w|_{[r,1]}$  sea minimizante y tenga longitud menor que  $\delta$ . Su longitud es concretamente  $(1-r)\|w\| = (1-r)R < \delta$ . Sea  $q_0 = \gamma_w(r)$ , de modo que  $d(q, p) < \delta$ .

Tomemos como carta de  $T_pV$  un isomorfismo en  $\mathbb{R}^n$ . Sean  $x_1, \dots, x_n$  las coordenadas correspondientes. Consideramos  $X : T_pV \rightarrow T(T_pV)$  dado por

$$X_v = \frac{1}{r}x_1(v) \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_v + \dots + \frac{1}{r}x_n(v) \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_v.$$

Se comprueba inmediatamente que  $X$  es diferenciable. Si  $\alpha_v(t) = tv$ , es claro que  $X_w = \alpha'_{r^{-1}w}(r)$ .

Sea  $\phi : B_R(0) \rightarrow TV$  la aplicación dada por

$$B_R(0) \xrightarrow{X} T(B_R(0)) \xrightarrow{d\exp_p} TV \xrightarrow{(1-r)} TV,$$

claramente diferenciable (la última aplicación es la multiplicación por  $1-r$ ). Explícitamente,

$$\phi(v) = (1-r)d\exp_p(X_v) = (1-r)d\exp_p(\alpha'_{r^{-1}v}(r)) = (1-r)\gamma'_{r^{-1}v}(r).$$

En particular  $\phi(rw) = (1-r)\gamma'_w(r) \in T_{q_0}V$ , luego

$$\|\phi(rw)\| = (1-r)\|w\| = (1-r)R < \delta.$$

Así pues,  $\phi(rw) \in E_\delta$  (es un vector de norma menor que  $\delta$  en un punto  $q_0$  que dista de  $q$  menos que  $\delta$ ). Como  $rw \in B_R(0)$  y  $\exp_p$  es continua en esta

bola, existe un entorno  $U_0$  de  $rw$  tal que  $\phi[U_0] \subset E_\delta$ . Sea  $U = r^{-1}U_0$ , que es un entorno de  $w$ . Definimos  $\psi : U \rightarrow V$  como la composición

$$U \xrightarrow{r} U_0 \xrightarrow{\phi} E_\delta \xrightarrow{\text{exp}} V,$$

claramente diferenciable. La prueba estará terminada si demostramos que  $\psi = \exp_p|_U$ . En efecto, si  $v \in U$ , sea  $v_1 = \phi(rv) = (1-r)\gamma'_w(r)$ , sea  $q_1 = \gamma_v(r)$ . Entonces (representando por  $\gamma^{q_1}$  las geodésicas que parten de  $q_1$ ), tenemos que

$$\psi(v) = \exp_{q_1}(v_1) = \gamma_{(1-r)\gamma'_w(r)}^{q_1}(1) = \gamma_{\gamma'_v(r)}^{q_1}(1-r) = \gamma_v^p(1) = \exp_p(v).$$

Aquí hemos usado que la geodésica que parte de  $\gamma_v(r)$  con tangente  $\gamma'_v(r)$  es simplemente la prolongación de  $\gamma_v(t)$ . Los parámetros se suman porque son proporcionales a la longitud de arco (con la misma proporción  $\|v\|$ ). ■

El teorema principal sobre geodésicas a nivel global es el siguiente:

**Teorema 10.39 (Hopf-Rinow)** *Si  $V$  es una variedad de Riemann conexa, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- a)  $V$  es geodésicamente completa.
- b)  $V$  es geodésicamente completa en un punto  $p \in V$ .
- c) Todo subespacio cerrado y acotado en  $V$  es compacto.
- d)  $V$  es completa como espacio métrico.

Además, si se da cualquiera de estas condiciones, entonces todo par de puntos de  $V$  pueden unirse por una geodésica minimizante.

DEMOSTRACIÓN: Obviamente a) implica b). Veamos que b) implica que todo punto  $q \in V$  puede unirse con  $p$  por una geodésica minimizante. Sea  $r = d(p, q) > 0$ . Consideremos una bola geodésica  $B_\epsilon(p)$  con  $\epsilon < r$  y tomemos  $v \in T_p V$  de norma 1 tal que  $p_0 = \exp_p(ev)$  minimice la distancia a  $q$  entre los puntos de la esfera geodésica  $S_\epsilon(p)$ . Sea  $\gamma_v$  la geodésica que parte de  $p$  con tangente  $v$ . Veamos que  $q = \gamma_v(r)$ . Notemos que  $l(\gamma_v|_{[0,r]}) = r$ , luego además  $\gamma_v$  será minimizante entre  $p$  y  $q$ .

Si  $s \in S_\epsilon(p)$ , entonces

$$d(p, q) \leq d(p, s) + d(s, q) = \epsilon + d(s, q) \leq \epsilon + d(p_0, q).$$

Por otra parte, si  $\alpha : [a, b] \rightarrow V$  es un arco que une  $p$  con  $q$ , existe un punto  $t_0 \in ]a, b[$  tal que  $\alpha(t_0) \in S_\epsilon(p)$  y así

$$l(\alpha) = l(\alpha|_{[a, t_0]}) + l(\alpha|_{[t_0, b]}) \geq \epsilon + d(p_0, q),$$

luego  $d(p, q) = \epsilon + d(p_0, q)$ . Equivalentemente,  $d(\gamma_v(\epsilon), q) = r - \epsilon$ .

Sea  $t_1$  el supremo de los  $t \in \mathbb{R}$  tales que  $d(\gamma_v(t), q) = r - t$ . Tenemos que  $\epsilon \leq t_1 \leq r$  y por continuidad es claro que  $d(\gamma_v(t_1), q) = r - t_1$ . Basta demostrar que  $t_1 = r$ .

En caso contrario, si  $t_1 < r$ , tomamos una esfera geodésica  $S_{\epsilon'}(\gamma_v(t_1))$  y consideramos en ella el punto  $p'_0$  más cercano a  $q$ . Igual que antes razonamos que  $d(\gamma_v(t_1), q) = \epsilon' + d(p'_0, q)$ , luego  $d(p'_0, q) = r - t_1 - \epsilon'$  y

$$d(p, p'_0) \geq d(p, q) - d(p'_0, q) = r - r + t_1 + \epsilon' = t_1 + \epsilon',$$

pero la unión de  $\gamma_v|_{[0, t_1]}$  con la geodésica que va de  $\gamma_v(t_1)$  a  $p'_0$  tiene longitud  $t_1 + \epsilon'$ , luego es minimizante y, por consiguiente, una geodésica. Necesariamente entonces es la propia  $\gamma_v$ . En particular  $d(p, p'_0) = t_1 + \epsilon'$  y  $\gamma_v(t_1 + \epsilon') = p'_0$ .

De este modo tenemos que  $d(\gamma_v(t_1 + \epsilon'), q) = r - (t_1 + \epsilon')$ , en contradicción con la elección de  $t_1$ .

Como consecuencia, la aplicación  $\exp_p : T_p V \rightarrow V$  es suprayectiva. Más aún, todo  $q \in V$  tiene una antiimagen  $v$  con  $\|v\| = d(p, q)$ . Por consiguiente todo conjunto acotado de  $V$  está contenido en la imagen de una bola cerrada de  $T_p V$ , que por continuidad será compacta. Es claro entonces que b) implica c).

Obviamente c) implica d): Toda sucesión de Cauchy es acotada, luego está contenida en un compacto, luego tiene una subsucesión convergente, luego converge.

Para probar que d) implica a) observamos que si  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow V$  es una geodésica que no puede prolongarse más allá de  $b$  (por ejemplo) entonces podemos tomar una sucesión  $\{t_m\}_m \subset ]a, b[$  convergente a  $b$ , con lo que  $\gamma(t_m)$  es una sucesión de Cauchy en  $V$  (ya que  $d(\gamma(t_m), \gamma(t_r)) = k|t_m - t_r|$ , donde  $k = \|\gamma'(0)\|$ ). Por hipótesis converge a un punto  $p \in V$ . Mediante el teorema 10.34 encontramos una bola geodésica  $B_\epsilon(q)$  tal que, si  $\gamma(t_m)$  está en ella, entonces una bola  $B_\delta(\gamma(t_m))$  es geodésica y contiene a  $q$ . Entonces, la geodésica  $\gamma$  ha de llegar a la frontera de esta bola, luego no puede terminar en  $q$ .

Si se cumple cualquiera de estas condiciones, entonces tenemos b) para todo punto  $p$ , luego hemos probado que cualquier par de puntos  $p$  y  $q$  pueden unirse por una geodésica minimal. ■

En particular todas las variedades compactas son geodésicamente completas.

**Cubrimientos simples** Si hemos estudiado con detalle la existencia de geodésicas y entornos convexos ha sido para probar el teorema siguiente —esencialmente topológico— que nos hará falta en el estudio de la homología y la cohomología de las variedades diferenciales.

**Definición 10.40** Un *cubrimiento simple* de una variedad diferencial  $V$  es un cubrimiento abierto localmente finito tal que cualquier intersección no vacía de sus abiertos es difeomorfa a un abierto estrellado de  $\mathbb{R}^n$ .

(Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es *estrellado* con vértice en un punto  $p \in A$  si para todo  $q \in A$  el segmento que une  $p$  con  $q$  está contenido en  $A$ .)

**Teorema 10.41** *Toda variedad diferencial tiene un cubrimiento simple.*

Consideremos una variedad diferencial  $V$  y fijemos en ella una métrica de Riemann (teorema 10.16). Sea  $\{G_n\}_n$  un cubrimiento abierto de  $V$  según el teorema 1.16. Cada compacto  $\overline{G}_n \setminus G_{n-1}$  puede cubrirse por un número finito de bolas abiertas convexas contenidas en  $G_{n+1} \setminus \overline{G}_{n-2}$  (se entiende que  $G_n = \emptyset$  si  $n < 0$ ). Llamemos  $\mathcal{U}_n$  a este conjunto finito de bolas. Podemos suponer que cumplen el teorema 10.34.

Sea  $\mathcal{V}_n = \bigcup_{i=n-2}^{n+2} \mathcal{U}_i$ , que es un cubrimiento finito del compacto  $\overline{G}_{n+2} \setminus G_{n-3}$ .

Sea  $\epsilon_n$  el número de Lebesgue de este cubrimiento, es decir, el que satisface el teorema 2.37.

Ahora, para cada  $q \in \overline{G}_n \setminus G_{n-1}$  tomamos una bola convexa de centro  $q$  y de diámetro menor que el mínimo de  $\epsilon_{n-1}/2$ ,  $\epsilon_n/2$  y  $\epsilon_{n+1}/2$ . Exigimos además que esté contenida en  $G_{n+1} \setminus \overline{G}_{n-2}$ . Extraemos un subcubrimiento finito  $\mathcal{U}'_n$ , de modo que la unión de todos ellos es un cubrimiento abierto de  $V$  localmente finito.

Supongamos ahora que  $C = U_1 \cap \dots \cap U_r$  es una intersección no vacía de abiertos de este cubrimiento. Sea  $W = U_1 \cup \dots \cup U_r$ . Tomemos un punto  $p \in C$ , que cumplirá  $p \in \overline{G}_n \setminus G_{n-1}$  para algún  $n$ . Entonces, cada  $U_i$  pertenece a  $\mathcal{U}'_{n-1} \cup \mathcal{U}'_n \cup \mathcal{U}'_{n+1}$ . Por consiguiente, su diámetro es menor que  $\epsilon_n/2$  y el diámetro de  $W$  es menor que  $\epsilon_n$ .

Por otra parte, es claro que  $W \subset G_{n+2} \setminus \overline{G}_{n-3} \subset \overline{G}_{n+2} \setminus G_{n-3}$ , luego por el teorema 2.37 concluimos que  $W$  está contenido en una de las bolas convexas del cubrimiento  $\mathcal{V}_n$ , digamos en  $B$  (de la que también sabemos que cumple 10.34).

Con esto podemos probar que  $C$  es convexo: si  $p$  y  $q$  son dos puntos cualesquiera de  $C$ , entonces, puesto que  $C \subset U_i \subset W \subset B$ , tenemos que  $p$  y  $q$  pueden unirse por una geodésica minimizante contenida en  $U_i$ , que ha de ser la misma para todo  $i$ , ya que todas ellas están contenidas en  $B$ , donde también tenemos unicidad. Así pues, la geodésica está contenida en  $C$ .

Si  $p \in C$ , por 10.34 sabemos que existe un  $\delta > 0$  tal que  $C \subset B \subset B_\delta(p)$  y la bola  $B_\delta(p)$  es geodésica. Por consiguiente,  $\exp_p$  se restringe a un difeomorfismo entre un entorno de 0 en  $T_p(V)$  y  $C$ . Como  $C$  es convexo, dicho entorno ha de ser estrellado con centro 0. Aplicando un isomorfismo podemos convertirlo en un abierto en  $\mathbb{R}^n$ . ■

## Capítulo XI

# Homología y cohomología diferenciable

En este capítulo introducimos una homología y una cohomología específicas para variedades diferenciales, si bien probaremos que son equivalentes a la homología y la cohomología singular de la variedad.

### 11.1 Homología singular diferenciable

La homología singular diferenciable de una variedad diferencial es la homología que se obtiene al considerar únicamente símlices diferenciables en el sentido de la definición siguiente:

**Definición 11.1** Sea  $V$  una variedad diferencial. Un  $p$ -símplice singular diferenciable es una aplicación  $\sigma : \Delta_p \rightarrow V$  que se extiende a una aplicación diferenciable en un entorno de  $\Delta_p$ .

Fijado un anillo de coeficientes  $\mathbb{A}$ , definimos  $C_p^\infty(V)$  como el  $\mathbb{A}$ -submódulo de  $C_p(V)$  generado por los  $p$ -símlices singulares diferenciables en  $V$ . A sus elementos los llamaremos  $p$ -cadenas singulares diferenciables en  $V$ . (Consideramos únicamente la homología completa, de modo que  $C_{-1}(V) = 0$ ). Estos módulos definen un submódulo graduado  $C^\infty(V)$  de  $C(V)$ . Veamos que es un subcomplejo:

Puesto que el  $p - 1$ -símplice  $(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$  se extiende a una aplicación diferenciable (afín) de  $\mathbb{R}^{p-1}$  en  $\mathbb{R}^p$ , es claro que si  $\sigma$  es un  $p$ -símplice diferenciable, entonces la composición  $\sigma^\sharp(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$  también es diferenciable, de donde se sigue a su vez que  $\partial\sigma$  es una  $p - 1$ -cadena diferenciable. Así pues, el operador frontera de  $C(V)$  se restringe a un operador frontera en  $C^\infty(V)$ , como queríamos probar.

Más en general, si  $U \subset V$  es un abierto, definimos el complejo cociente  $C^\infty(V, U) = C^\infty(V)/C^\infty(U)$ . En particular  $C^\infty(V) = C^\infty(V, \emptyset)$ .

Podemos definir los *grupos de homología singular diferenciable*  $H_p^\infty(V, U)$  como los grupos de homología del complejo  $C^\infty(V, U)$ .

Vamos a probar que la inclusión  $i : C^\infty(V) \rightarrow C(V)$  tiene una inversa homotópica, con lo que induce isomorfismos entre los grupos de homología, lo cual significa que al tratar con variedades diferenciales podemos sustituir la homología singular por la homología singular diferenciable. Necesitamos algunos hechos previos para obtener esto.

Ante todo, si  $f : (V, U_1) \rightarrow (W, U_2)$  es una aplicación diferenciable entre pares de variedades, es claro que  $f^\#$  se restringe a un homomorfismo  $f^\# : C^\infty(V, U_1) \rightarrow C^\infty(W, U_2)$ , el cual induce a su vez homomorfismos de módulos  $f_* : H_p^\infty(V, U_1) \rightarrow H_p^\infty(W, U_2)$ . En definitiva, la homología singular diferenciable es funtorial.

El lector no debería tener dificultades en adaptar las demostraciones de los teoremas básicos sobre la homología singular, como 2.13, 2.15, 2.16 o 2.17. Las modificaciones necesarias son mínimas. Por ejemplo, en 2.16 hemos de sustituir los arcos continuos (1-símplices) por arcos diferenciables a trozos, que ahora no son 1-símplices, sino 1-cadenas, pero para el caso es lo mismo. Para enunciar 2.17 hemos de considerar como variedad diferencial de dimensión 0 a todo espacio  $V = \{p\}$  con un único punto, de modo que las funciones diferenciables en  $V$  son las funciones constantes y  $T_p V = 0$ . Todos los conceptos y resultados de la geometría diferencial se particularizan trivialmente a este caso. Más aún, la homología singular diferenciable de un punto coincide exactamente con la topológica, luego la versión diferenciable de 2.17 es exactamente el mismo teorema.

Ocupémonos ahora del teorema de homotopía para la homología diferenciable. Para ello hemos de considerar homotopías diferenciables:

**Definición 11.2** Dos aplicaciones diferenciables  $f, g : V \rightarrow W$  entre variedades son *homotópicas* si existe una aplicación diferenciable  $H : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$  tal que  $H_0 = f$  y  $H_1 = g$ .

Al trabajar con aplicaciones diferenciables hay ciertas construcciones topológicas que requieren mayor atención. Por ejemplo, para justificar que la relación de homotopía es transitiva hemos de tomar una función diferenciable  $g : \mathbb{R} \rightarrow I$  creciente y tal que  $g(t) = 0$  para  $t \leq 0$  y  $g(t) = 1$  para  $t \geq 1/4$  (ver la sección 9.2). Si  $H$  es una homotopía entre dos funciones  $f_1$  y  $f_2$  y  $H'$  es una homotopía entre  $f_2$  y  $f_3$ , entonces una homotopía entre  $f_1$  y  $f_3$  viene dada por

$$H''(t, x) = \begin{cases} H(g(t), x) & \text{si } t \leq 1/2, \\ H'(g(t - 3/4), x) & \text{si } t \geq 1/2. \end{cases}$$

Notemos que hemos tenido que definir las homotopías sobre  $\mathbb{R} \times V$  en lugar de  $I \times V$  para que el dominio sea una variedad y tenga sentido hablar de diferenciableidad. En realidad el comportamiento de la homotopía para valores de  $t$  fuera del intervalo unidad es irrelevante. De hecho podemos exigir que permanezca constante:



**Teorema 11.3** Si dos aplicaciones diferenciables  $f, g : V \rightarrow W$  son homotópicas, existe una homotopía  $H$  entre ellas tal que  $H_t = f$  para  $t \leq 0$  y  $H_t = g$  para  $t \geq 1$ .

DEMOSTRACIÓN: Basta considerar una función diferenciable  $g : \mathbb{R} \rightarrow I$  que tome el valor 0 para  $t \leq 0$  y 1 para  $t \geq 1$ . Si  $H'$  es cualquier homotopía entre  $f$  y  $g$  basta tomar  $H(t, x) = H(g(t), x)$ . ■

Para probar el teorema de homotopía diferenciable seguimos la prueba del caso continuo con modificaciones mínimas. En primer lugar observamos que los símlices que forman el prisma canónico  $P_p$  se extienden a aplicaciones diferenciables (afines) de  $\mathbb{R}^{p+1}$  en  $\mathbb{R}^{p+1}$ .

Si  $\sigma : \Delta_p \rightarrow V$  es un  $p$ -símlice diferenciable y  $\sigma' : I \times \Delta_p \rightarrow \mathbb{R} \times V$  es el dado por  $\sigma'(t, x) = (t, \sigma(x))$ , es claro que  $\sigma'$  se extiende a una aplicación diferenciable en un entorno de  $I \times \Delta_p$ , luego  $P(\sigma) = \sigma'^{\#}(P_p)$  es un símlice diferenciable en  $\mathbb{R} \times V$ . Por consiguiente tenemos el homomorfismo

$$P : C_p^\infty(V) \rightarrow C_p^\infty(\mathbb{R} \times V).$$

Para cada aplicación diferenciable  $f : V \rightarrow W$  definimos la aplicación diferenciable  $f' : \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R} \times W$  mediante  $f'(t, p) = (t, f(p))$ , y tenemos que  $f^\#$  y  $f'^{\#}$  conmutan con los homomorfismos prisma exactamente igual que en el caso continuo.

Las relaciones (2.2) y (2.3) nos aprovechan sin modificación alguna, pues, definiendo  $f', g' : V \rightarrow \mathbb{R} \times V$  mediante  $f'(p) = (0, p)$  y  $g'(p) = (1, p)$ , obviamente diferenciables, al aplicar  $\sigma'^{\#}$  a la fórmula (2.3) exactamente igual que en el caso continuo obtenemos (2.4) y, por consiguiente, la relación

$$g'^{\#} - f'^{\#} = P \circ \partial + \partial \circ P.$$

Por último, consideramos una homotopía  $H : \mathbb{R} \times V \rightarrow W$  entre dos funciones diferenciables  $f$  y  $g$ , con lo que  $f = f' \circ H$ ,  $g = g' \circ H$ , y llamando  $P_H = P \circ H^\# : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(W)$ , al componer la relación anterior con  $H^\#$  resulta que

$$g^\# - f^\# = P_H \circ \partial + \partial \circ P_H,$$

es decir, que  $P_H$  es una homotopía entre  $f^\#$  y  $g^\#$ , luego  $f_* = g_*$ , como queríamos probar. ■

En particular, si  $V$  es una variedad contractible (es decir, tal que la identidad es diferenciablemente homotópica a una constante  $c_p$ ), entonces la homología diferenciable de  $V$  coincide con la de  $\{p\}$ .

Tampoco ofrece dificultad alguna probar que el operador de subdivisión bariocéntrica se restringe a un operador  $S : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$ . En efecto, los símlices que forman la subdivisión  $S(x_0, \dots, x_p)$  son afines, luego todos ellos se extienden a aplicaciones diferenciables (afines) de  $\mathbb{R}^p$  en sí mismo. Por consiguiente, si  $\sigma \in C_p^\infty(V)$ , se cumple que  $S(\sigma) = \sigma^\#(S(x_0, \dots, x_p)) \in C_p^\infty(V)$ .

Es fácil ver que la prueba de 2.34 se adapta fácilmente al caso diferenciable (sólo hay que comprobar que la homotopía  $H$  puede construirse de modo que transforme simplices diferenciables en cadenas diferenciables). Con modificaciones rutinarias obtenemos 2.38 y de aquí 2.43 (con la definición obvia de los grupos de homología  $H_p^\infty(V; \mathcal{U})$ ). No nos va a hacer falta el teorema de escisión.

Ahora ya podemos demostrar:

**Teorema 11.4** *Si  $V$  es una variedad diferenciable, la inclusión*

$$i : C^\infty(V) \longrightarrow C(V)$$

*induce isomorfismos  $H_p^\infty(V) \longrightarrow H_p(V)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\mathcal{U}$  un cubrimiento simple de  $V$ , es decir, un cubrimiento abierto localmente finito tal que cualquier intersección no vacía  $C$  de abiertos de  $\mathcal{U}$  es difeomorfa a un abierto estrellado de  $\mathbb{R}^n$ . Es claro que todo abierto estrellado es contractible (podemos suponer que el centro es 0, y entonces una homotopía diferenciable entre la función nula y la identidad es  $H_t(x) = tx$ ). Por consiguiente las intersecciones de abiertos de  $\mathcal{U}$  son contractibles y sus grupos de homología son triviales, es decir, todo  $p$ -ciclo (diferenciable) en  $V$  cuyo soporte esté contenido en una intersección de abiertos de  $\mathcal{U}$  (para  $p \geq 1$ ) es la frontera de una  $p+1$ -cadena (diferenciable) contenida en esa misma intersección.

Consideremos ahora el diagrama siguiente, formado por los homomorfismos que inducen las inclusiones:

$$\begin{array}{ccc} H_p^\infty(V; \mathcal{U}) & \longrightarrow & H_p(V; \mathcal{U}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_p^\infty(V) & \longrightarrow & H_p(V) \end{array}$$

Claramente es conmutativo y sabemos que las flechas verticales son isomorfismos, luego basta probar que la flecha superior lo es para que lo sea la inferior, que es lo que queremos demostrar.

Para ello construiremos una inversa homotópica de la inclusión, es decir, un homomorfismo de complejos  $\alpha : C(V; \mathcal{U}) \longrightarrow C^\infty(V; \mathcal{U})$  de modo que  $i_p \circ \alpha_p$  y  $\alpha_p \circ i_p$  sean homotópicas a la identidad, con lo que los homomorfismos inducidos por  $\alpha$  entre los grupos de homología serán los inversos de los inducidos por la inclusión.

Más concretamente, construiremos  $\alpha$  de modo que, para todo  $c \in C_p(V; \mathcal{U})$  y todo abierto  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $|c| \subset U$ , se cumpla que  $|\alpha_p(c)| \subset U$ . Más aún, si  $c \in C_p^\infty(V; \mathcal{U})$  entonces  $\alpha_p(c) = c$ .

Tomamos  $\alpha_p = 0$  para  $p < 0$  y como  $\alpha_0$  la identidad en  $C_0^\infty(V; \mathcal{U}) = C_0(V; \mathcal{U})$ . Supongamos construidos  $\alpha_i$  para  $i \leq p$  de modo que cumplan las condiciones indicadas (en particular de modo que conmuten con el operador frontera).

Sea  $\sigma$  un  $p + 1$ -símplice en  $V$  cuyo soporte esté contenido en alguno de los abiertos de  $\mathcal{U}$ , y sea  $C$  la intersección de todos los abiertos que contienen a este soporte (que son un número finito porque  $\mathcal{U}$  es localmente finito).

Es claro entonces que  $|\partial\sigma| \subset C$ , luego por hipótesis de inducción tenemos que  $|\alpha_p(\partial\sigma)| \subset C$ . Así mismo,

$$\partial\alpha_p(\partial\sigma) = \alpha_p(\partial\partial\sigma) = 0.$$

Así pues,  $\alpha_p(\partial\sigma)$  es un  $p$ -ciclo diferenciable en  $C$ , luego es la frontera de una  $p + 1$ -cadena diferenciable en  $C$ , a la que tomamos como  $\alpha_{p+1}(\sigma)$ . De este modo se cumple que

$$\partial\alpha_{p+1}(\sigma) = \alpha_p(\partial\sigma).$$

Notemos además que si  $\sigma$  es diferenciable entonces  $\partial\sigma$  también lo es, y por hipótesis de inducción  $\alpha_p(\partial\sigma) = \partial\sigma$ , luego podemos tomar  $\alpha_{p+1}(\sigma) = \sigma$ .

Extendemos la definición de  $\alpha_{p+1}$  por linealidad a todas las  $p + 1$ -cadenas, y es claro que  $\alpha_{p+1}$  cumple todos los requisitos.

En particular tenemos que  $i_p \circ \alpha_p = 1$ , luego sólo nos queda demostrar que  $\alpha_p \circ i_p$  es homotópico a la identidad. Así pues, hemos de construir un homomorfismo  $H : C(V; \mathcal{U}) \rightarrow C(V; \mathcal{U})$  de grado 1 tal que, para toda cadena  $c \in C(V; \mathcal{U})$  se cumpla  $\alpha(c) - c = H(\partial c) + \partial H(c)$ . Exigiremos también que si  $|c| \subset U \in \mathcal{U}$  entonces  $|H(c)| \subset U$ .

Definimos  $H_p = 0$  para  $p < 0$  y  $H_0(x) = c_x$  (el 1-símplice constante  $x$ ). Supuesto definido  $H_{p-1}$ , tomamos  $\sigma \in C_p(V; \mathcal{U})$ , y llamamos  $C$  a la intersección de los abiertos de  $\mathcal{U}$  que contienen a  $|\sigma|$ . Las hipótesis de inducción implican inmediatamente que  $\alpha(\sigma) - \sigma - H_{p-1}(\partial\sigma)$  es un  $p$ -ciclo (no necesariamente diferenciable) con soporte contenido en  $C$ , luego existe  $H_p(\sigma) \in C_{p+1}(V; \mathcal{U})$  con soporte contenido en  $C$  tal que  $\partial H(\sigma) = \alpha(\sigma) - \sigma - H(\partial\sigma)$ . Ahora basta extender la definición por linealidad a todas las  $p$ -cadenas y tenemos la homotopía buscada. ■

Para la homología relativa consideramos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^\infty(U) & \longrightarrow & C^\infty(V) & \longrightarrow & C^\infty(V, U) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C(U) & \longrightarrow & C(V) & \longrightarrow & C(V, U) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Al formar las sucesiones exactas de homología obtenemos un diagrama conmutativo en el que dos de cada tres flechas verticales son isomorfismos, luego por 3.1 todas lo son. En definitiva, el teorema anterior vale igualmente para la homología relativa. (En principio hemos probado que la inclusión induce un isomorfismo, pero según 5.10 esto equivale a que tenga una inversa homotópica.)

Notemos ahora que la inclusión  $i : C^\infty(V, U) \rightarrow C(V, U)$  induce una aplicación dual  $i^* : C^*(V, U) \rightarrow C_\infty^*(V, U)$  entre los complejos inversos duales, la cual induce también isomorfismos entre los grupos de cohomología:

$$H^p(V, U) \longrightarrow H_\infty^p(V, U).$$

(pues su inversa es la aplicación dual de la inversa homotópica de  $i$ ). Tenemos así la *cohomología diferenciable* de  $V$  (aunque no es ésta la cohomología que nos va a interesar en las variedades diferenciales). Explícitamente, el isomorfismo entre  $H^p(V, U)$  y  $H_\infty^p(V, U)$  asigna a la clase del cociclo  $\omega$  la clase de su restricción a  $C_\infty^p(V)$ .

Si suponemos concretamente que el anillo de coeficientes es  $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ , el teorema 5.51 nos da que  $H_\infty^p(V, U)$  y  $H^p(V, U)$  son naturalmente isomorfos a los espacios duales de  $H_p^\infty(V, U)$  y  $H_p(V, U)$ , respectivamente, y es fácil ver que el isomorfismo es simplemente el inducido de forma natural por el isomorfismo entre éstos últimos.

## 11.2 Tensores antisimétricos

Mientras la homología diferenciable es sólo una mínima variante de la homología singular, la cohomología que pretendemos definir en las variedades diferenciales no guarda, —en principio— relación alguna con la cohomología singular, por lo que el hecho de que termine siendo equivalente a la cohomología singular es un resultado notable.

La cohomología de De Rham surge de forma natural al sistematizar los resultados clásicos del cálculo vectorial en una teoría general de integración de formas diferenciales sobre variedades. En la sección siguiente introduciremos las formas diferenciales que determinan dicha cohomología, para lo cual necesitamos estudiar primero los tensores antisimétricos en un espacio vectorial. Por completitud introduciremos también los tensores simétricos.

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo de característica 0. Representamos por  $\mathcal{T}_k(V) = \mathcal{T}_k^0(V)$ . El grupo  $\Sigma_k$  de las permutaciones de  $\{1, \dots, k\}$  actúa de forma natural sobre  $\mathcal{T}_k(V)$  con la acción determinada por

$$(\sigma T)(v_1, \dots, v_k) = T(v_{\sigma^{-1}1}, \dots, v_{\sigma^{-1}k}).$$

Equivalentemente:

$$\sigma(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k) = \omega_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes \omega_{\sigma k}.$$

Diremos que un tensor  $T \in \mathcal{T}_k(V)$  es *simétrico* (resp. *antisimétrico*) si cumple  $\sigma T = T$  (resp.  $\sigma T = \text{sig } \sigma T$ ) para todo  $\sigma \in \Sigma_k$ .

En otras palabras,  $T$  es simétrico si  $T(v_1, \dots, v_k)$  no depende del orden de los vectores y es antisimétrico si al intercambiar dos de ellos cambia el signo.

Representaremos por  $S^k(V)$  y  $A^k(V)$  los subespacios de tensores covariantes simétricos y antisimétricos, respectivamente, de grado  $k$  en  $V$ . Convenimos que  $S^0(V) = A^0(V) = K$  (el cuerpo de escalares).

Podemos “simetrizar” un tensor arbitrario de  $V$  mediante el epimorfismo  $S : \mathcal{T}_k(V) \longrightarrow S^k(V)$  dado por

$$S(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sigma T.$$

Es claro que  $T$  es simétrico si y sólo si  $S(T) = T$ . Similarmente definimos el epimorfismo  $A : \mathcal{T}_k(V) \longrightarrow A^k(V)$  mediante

$$A(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} (\text{sig } \sigma) \sigma T.$$

También es claro que  $T$  es antisimétrico si y sólo si  $A(T) = T$ . Definimos los espacios vectoriales graduados

$$S(V) = \bigoplus_{k \geq 0} S^k(V), \quad A(V) = \bigoplus_{k \geq 0} A^k(V).$$

A partir de aquí nos centramos en el espacio  $A(V)$ , al que vamos a dotar de estructura de álgebra graduada. Para ello consideramos los homomorfismos

$$\wedge : A^k(V) \times A^r(V) \longrightarrow A^{k+r}(V)$$

dados por

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+r)!}{k! r!} A(\omega \otimes \eta).$$

Éstos inducen un producto  $\wedge$  en  $A(V)$ . Vamos a probar que es asociativo, con lo que  $A(V)$  será ciertamente un álgebra unitaria (notemos que si  $\alpha \in K$  entonces  $\alpha \wedge \omega = \alpha \omega$ ).

Para ello probamos primero la asociatividad del producto  $\omega \wedge_1 \eta = A(\omega \otimes \eta)$ . Consideramos el álgebra cociente  $\mathcal{Q} = \mathcal{T}^*/\mathcal{J}^*$ , donde

$$\mathcal{J}^* = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{J}_k(V)$$

e  $\mathcal{J}^*$  es el ideal bilátero generado por los cuadrados  $\omega \otimes \omega$ , con  $\omega \in V^*$ . Representemos por  $\cup$  el producto (obviamente asociativo) de  $\mathcal{Q}^*$ . La proyección  $\pi : \mathcal{T}^* \longrightarrow \mathcal{Q}^*$  se restringe a una aplicación lineal  $\pi : A \longrightarrow \mathcal{Q}^*$ . Basta probar que  $\pi$  es un isomorfismo de álgebras. En particular hemos de ver que

$$\pi(\alpha \wedge_1 \beta) = \pi(\alpha) \cup \pi(\beta).$$

La clave está en probar que

$$\pi(T) = \pi(A(T)), \quad \text{para todo } T \in \mathcal{T}_k(V). \quad (11.1)$$

Basta comprobarlo sobre tensores puros  $T = \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k$ , con  $\omega_i \in V^*$ . En efecto, como

$$(\omega_i + \omega_j) \otimes (\omega_i + \omega_j) \in \mathcal{J}^*,$$

concluimos que  $\omega_i \otimes \omega_j \equiv -\omega_j \otimes \omega_i$  (mód  $\mathcal{J}^*$ ), luego para todo  $\sigma \in \Sigma_k$  tenemos que

$$\pi(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k) = (\text{sig } \sigma) \pi(\omega_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma_k}).$$

Al sumar sobre  $\sigma$  obtenemos (11.1). Esta relación implica inmediatamente que  $\pi$  es suprayectiva. Para la inyectividad observamos que el homomorfismo

$A$  se anula sobre  $\mathcal{J}^*$ . En efecto, un elemento de  $\mathcal{J}^*$  es combinación lineal de tensores  $T = \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p$  con algún  $\omega_i = \omega_{i+1}$  y  $A$  debería cambiar de signo al permutar  $\omega_i$  con  $\omega_{i+1}$ , cuando obviamente queda igual. Así pues  $A(T) = 0$ .

Por consiguiente, si  $\pi(\omega) = 0$ , con  $\omega \in A(V)$ , entonces  $\omega \in \mathcal{J}^*$ , luego  $\omega = A(\omega) = 0$ .

Falta probar que  $\pi$  conserva los productos. Basta verlo sobre factores de la forma

$$\alpha = A(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k), \quad \beta = A(\eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_q).$$

En efecto, usando (11.1) vemos que

$$\begin{aligned} \pi(\alpha \wedge_1 \beta) &= \pi(A(A(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k) \otimes A(\eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_q))) \\ &= \pi(A(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k) \otimes A(\eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_q)) \\ &= \pi(A(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k)) \cup \pi(A(\eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_q)) = \pi(\alpha) \cup \pi(\beta). \end{aligned}$$

Con esto tenemos la asociatividad de  $\wedge_1$ . Es fácil ver que

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma = \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!} \alpha \wedge_1 \beta \wedge_1 \gamma,$$

con lo que la asociatividad de  $\wedge_1$  implica la de  $\wedge$ . Más aún, ahora es claro que si  $\omega_1, \dots, \omega_p \in V^*$ , entonces

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = k! A(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} (\text{sig } \sigma) \omega_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes \omega_{\sigma k}.$$

**Teorema 11.5** *Si  $V$  es un espacio vectorial, entonces  $A(V)$  es un álgebra unitaria anticonmutativa con el producto  $\wedge$ , es decir, si  $\omega \in A^k(V)$  y  $\eta \in A^r(V)$ , entonces*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kr} \eta \wedge \omega.$$

Además, si  $\omega_1, \dots, \omega_k \in V^*$ , se cumple que

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} (\text{sig } \sigma) \omega_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes \omega_{\sigma k}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sólo falta probar la anticonmutatividad. Usaremos los hechos que hemos obtenido antes del teorema. Podemos suponer

$$\omega = A(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k), \quad \eta = A(\eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_r).$$

Entonces, usando (11.1),

$$\begin{aligned} \pi(\omega) \cup \pi(\eta) &= \pi(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k) \cup \pi(\eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_r) \\ &= \pi(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_r). \end{aligned}$$

Hemos visto que cada vez que intercambiamos dos factores consecutivos la proyección cambia de signo. Para pasar a la izquierda todos los factores de la derecha necesitamos  $kr$  permutaciones, luego

$$\pi(\omega) \cup \pi(\eta) = (-1)^{kr} \pi(\eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_r \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k) = (-1)^{kr} \pi(\eta) \cup \pi(\omega).$$

Por consiguiente  $\cup$  es anticonmutativo, luego lo mismo vale para  $\wedge_1$  y también para  $\wedge$ . ■

**Definición 11.6** Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita, el álgebra graduada  $A(V)$  se llama *álgebra exterior* de  $V$  y el producto  $\wedge$  se llama *producto exterior* en  $A(V)$ .

Sea  $e_1, \dots, e_n$  una base del espacio vectorial  $V$  y  $e^1, \dots, e^n$  su base dual, sean  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ . El teorema anterior implica entonces que

$$(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_k = j_k \text{ para todo } k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De aquí se sigue:

**Teorema 11.7** Sea  $V$  un espacio vectorial y  $e_1, \dots, e_n$  una base de  $V$ . Para  $1 \leq k \leq n$ , una base de  $A^k(V)$  está formada por los tensores  $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ , donde los índices recorren todas las combinaciones con  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ .

DEMOSTRACIÓN: En efecto, si  $\omega \in A^k(V)$ , tenemos que

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}.$$

En efecto, ambos tensores coinciden sobre las  $k$ -tuplas  $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$  para índices crecientes y, por la antisimetría, también si los índices son cualesquiera. Por linealidad coinciden en todo  $V^k$ .

Por otra parte, si

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = 0,$$

haciendo actuar esta forma sobre  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$  obtenemos que  $\alpha_{i_1, \dots, i_k} = 0$ , luego los tensores del enunciado son linealmente independientes (en particular distintos dos a dos). ■

Respecto a los casos no considerados en el teorema, tenemos que  $A^0(V) = K$  y  $A^k(V) = 0$  para  $k > n$  por la antisimetría. (Un tensor antisimétrico se anula sobre  $k$ -tuplas con algún índice repetido y, por linealidad, también sobre  $k$ -tuplas linealmente dependientes. Por consiguiente si  $k > n$  los tensores antisimétricos de grado  $k$  son nulos.) Observemos de paso que  $A^1(V) = V^*$ .

De este modo, para  $0 \leq k \leq n$  tenemos que la dimensión de  $A^k(V)$  es  $\binom{n}{k}$ . La dimensión de  $A(V)$  es  $2^n$ .

## 11.3 Formas diferenciales

Las formas diferenciales de una variedad  $V$  son simplemente los campos tensoriales en  $V$  que son antisimétricos en cada punto:

**Definición 11.8** Si  $V$  es una variedad diferencial, llamamos  $\Lambda^k(V)$  al espacio vectorial de los tensores  $\omega \in \mathcal{T}_k^0(V)$  que verifican  $\omega_p \in A^k(T_p(V))$  para todo  $p \in V$ . Sus elementos se llaman *formas diferenciales* de grado  $k$ . El *álgebra exterior* de  $V$  es

$$\Lambda(V) = \bigoplus_k \Lambda^k(V).$$

Claramente es un álgebra graduada anticonmutativa con el *producto exterior*  $\wedge$  definido puntualmente. Así mismo tiene estructura de módulo sobre  $C^\infty(V)$ .

Del teorema 11.7 se sigue fácilmente que si  $V$  tiene dimensión  $n$  y  $1 \leq k \leq n$ , entonces un tensor  $\omega$  está en  $\Lambda^k(V)$  si y sólo si para cada punto de  $V$  existe una carta  $(U, x)$  a su alrededor y unas funciones diferenciables  $\omega_{i_1, \dots, i_k}$ , con  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  de modo que

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Observemos que  $\Lambda^0(V) = C^\infty(V)$ , así como que  $\Lambda^1(V)$  es el mismo espacio que definimos en el capítulo IX y que  $\Lambda^k(V) = 0$  para  $k > n$ .

Si  $f : V \rightarrow W$  es una aplicación diferencial, es fácil ver que las aplicaciones lineales  $f_\# : T_k^0(W) \rightarrow T_k^0(V)$  se restringen a aplicaciones lineales  $f_\# : \Lambda^k(W) \rightarrow \Lambda^k(V)$ . A su vez, éstas inducen un homomorfismo de álgebras  $f_\# : \Lambda(W) \rightarrow \Lambda(V)$ , es decir, se cumple que  $f_\#(\omega \wedge \eta) = f_\#(\omega) \wedge f_\#(\eta)$ . Obviamente se conserva el carácter funtorial, es decir, para la identidad tenemos  $1_\# = 1$  y  $(f \circ g)_\# = g_\# \circ f_\#$ .

**La evaluación** Vamos a considerar tres derivaciones sobre el álgebra exterior  $\Lambda(V)$  de una variedad diferencial  $V$ . Empezamos por la más simple de las tres:

**Definición 11.9** Sea  $V$  una variedad diferencial y  $X \in \mathfrak{X}(V)$ . Definimos la *evaluación* en  $X$  o *multiplicación interior* por  $X$  como el homomorfismo graduado  $i_X : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V)$  de grado  $-1$  dado por

$$i_X(\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}), \quad \text{para cada } \omega \in \Lambda^k(V).$$

Más precisamente,  $i_X(\omega)$ , así definido, es una forma multilineal de  $\mathfrak{X}(V)$  en  $C^\infty(V)$ , luego por el lema de localización determina un tensor que claramente es alternado, es decir, es una forma diferencial de  $V$ . En principio esto vale para  $k > 0$ , pero definimos  $i_X(f) = 0$  para todo  $f \in \Lambda^0(V)$ .

Una comprobación rutinaria muestra que  $i_X$  es una *antiderivación* del álgebra exterior, es decir, que es lineal y además cumple

$$i_X(\omega \wedge \eta) = i_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge i_X(\eta), \quad \omega \in \Lambda^p(V), \quad \eta \in \Lambda^q(V).$$

(Se calcula explícitamente la acción de ambos miembros sobre campos vectoriales arbitrarios usando la definición de  $\wedge$ .)



**La derivada de Lie** La siguiente derivación es simplemente la derivada de Lie asociada a un campo  $X \in \mathfrak{X}(V)$ . En principio la tenemos definida sobre toda el álgebra tensorial de  $V$ , pero es fácil ver que se restringe a un homomorfismo graduado  $\mathcal{L}_X : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V)$  de grado 0. Concretamente, usando que conmuta con las contracciones de tensores se sigue sin dificultad que

$$\mathcal{L}_X(\omega)(X_1, \dots, X_k) = X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, \mathcal{L}_X X_i, \dots, X_k),$$

para toda  $\omega \in \Lambda^k(V)$ , y esta expresión muestra claramente que  $\mathcal{L}_X \omega \in \Lambda^k(V)$ .

Aplicando esta expresión se concluye inmediatamente la relación

$$i_{[X,Y]} = i_Y \circ \mathcal{L}_X - \mathcal{L}_X \circ i_Y. \quad (11.2)$$

A su vez, de aquí deducimos que  $\mathcal{L}_X$  es una derivación de  $\Lambda(V)$ , es decir, que cumple

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_X \omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X \eta. \quad (11.3)$$

En efecto, podemos suponer que  $\omega \in \Lambda^p(V)$ ,  $\eta \in \Lambda^q(V)$  y razonamos por inducción sobre  $p+q$ . Si  $p+q=0$  es trivial. Si se cumple cuando  $p+q < k$  y suponemos  $p+q=k$ , entonces, para cada  $Y \in \mathfrak{X}(V)$  tenemos por (11.2) que

$$\begin{aligned} i_Y(\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta)) &= \mathcal{L}_X(i_Y(\omega \wedge \eta)) - i_{[X,Y]}(\omega \wedge \eta) \\ &= \mathcal{L}_X(i_Y(\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge i_Y \eta) - i_{[X,Y]}(\omega) \wedge \eta - (-1)^p \omega \wedge i_{[X,Y]} \eta. \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis de inducción esto es igual a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(i_Y(\omega)) \wedge \eta + i_Y(\omega) \wedge \mathcal{L}_X \eta + (-1)^p (\mathcal{L}_X \omega) \wedge i_Y \eta + (-1)^p \omega \wedge \mathcal{L}_X(i_Y \eta) \\ - i_{[X,Y]}(\omega) \wedge \eta - (-1)^p \omega \wedge i_{[X,Y]} \eta. \end{aligned}$$

Ahora aplicamos (11.2) y llegamos a

$$\begin{aligned} i_Y(\mathcal{L}_X(\omega)) \wedge \eta + (-1)^p (\mathcal{L}_X \omega) \wedge i_Y \eta + i_Y(\omega) \wedge \mathcal{L}_X \eta + (-1)^p \omega \wedge i_Y(\mathcal{L}_X \eta) \\ = i_Y((\mathcal{L}_X \omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X \eta). \end{aligned}$$

En resumen, tenemos que

$$i_Y(\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta)) = i_Y((\mathcal{L}_X \omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X \eta).$$

Ahora bien, de la definición de  $i_X$  se sigue inmediatamente que si dos formas  $\Omega$  y  $H \in \Lambda^k(V)$  con  $k \geq 1$  cumplen que  $i_Y(\Omega) = i_Y(H)$  para todo  $Y \in \mathfrak{X}(V)$ , entonces  $\Omega = H$ . Por consiguiente, podemos cancelar  $i_Y$  en la igualdad anterior y tenemos la relación buscada. ■

**La diferencial exterior** Introducimos ahora la derivación más importante del álgebra exterior. Si  $V$  es una variedad diferencial y  $f \in \Lambda^0(V) = C^\infty(V)$ , tenemos que  $df \in \Lambda^1(V)$ . Vamos a probar que este operador diferencial se extiende a una antiderivación de  $\Lambda(V)$ , unívocamente determinada por las condiciones del teorema siguiente:

**Teorema 11.10** *Si  $V$  es una variedad diferencial existe una única aplicación lineal  $d : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V)$  que cumple las propiedades siguientes:*

- a) *Si  $f \in \Lambda^0(V)$ , entonces  $df$  es la diferencial de  $f$  en el sentido usual.*
- b) *Para cada  $\omega \in \Lambda^k(V)$  se cumple que  $d\omega \in \Lambda^{k+1}(V)$ .*
- c) *Si  $\omega_1 \in \Lambda^p(V)$  y  $\omega_2 \in \Lambda^q(V)$ , entonces*

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

d)  $d^2 = d \circ d = 0$ .

- e) *Si  $\omega \in \Lambda(V)$  se anula en un abierto  $U \subset V$  entonces  $d\omega$  también se anula en  $U$ .*

Enseguida veremos que la propiedad e) es consecuencia de las anteriores luego, en definitiva, la *diferencial exterior*  $d$  es la única antiderivación de  $\Lambda(V)$  de grado 1 que extiende a la diferencial usual y tal que  $d^2 = 0$ .

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar probaremos que —según acabamos de afirmar— la última propiedad es consecuencia de las tres primeras. Para cada  $p \in V$  podemos tomar una función  $f \in C^\infty(V)$  que se anule fuera de  $U$  pero tal que  $f(p) = 1$ . Entonces la forma  $f\omega$  es nula y, como la diferencial es lineal, ha de ser

$$0 = d(f\omega) = df \wedge \omega + f \wedge d\omega,$$

luego  $d\omega(p) = (f \wedge d\omega)(p) = -df(p) \wedge \omega(p) = 0$ .

Notemos que la propiedad e) junto con la linealidad de la diferencial prueba que si dos formas coinciden en un abierto de  $V$  entonces sus diferenciales también coinciden.

Ahora probamos que si existe la diferencial es única. Tomemos un punto  $p \in V$  y sea  $(U, x)$  una carta alrededor de  $p$ . Tomemos una función  $f \in C^\infty(V)$  que valga 1 en un entorno de  $p$  y se anule fuera de  $U$ .

Si  $\omega \in \Lambda^k(V)$  entonces  $\omega|_U$  se expresa como

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

para ciertas funciones  $\omega_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$ .

La forma  $f\omega$  coincide con  $\omega$  en un entorno de  $p$  y sus coeficientes son las funciones  $\bar{\omega}_{i_1 \dots i_k} = f\omega_{i_1 \dots i_k}$ . Puesto que  $f$  se anula fuera de  $U$ , podemos considerar que  $\bar{\omega}_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(V)$ . Similarmente, las funciones  $y_i = f x_i$  extendidas

como 0 fuera de  $U$  son de clase  $C^\infty$  en  $V$  y coinciden con las  $x_i$  en un entorno de  $p$ . Por consiguiente  $dy_i$  coincide con  $dx_i$  en un entorno de  $p$ . Así pues, la forma  $f\omega$  (y por consiguiente  $\omega$ ) coincide con la forma

$$\bar{\omega} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \bar{\omega}_{i_1 \dots i_k} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$$

en un entorno de  $p$ . Ahora calculamos

$$d\bar{\omega} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\bar{\omega}_{i_1 \dots i_k} \wedge dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}, \quad (11.4)$$

pues una simple inducción prueba a partir de c) y d) que  $d(dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) = 0$ . Teniendo en cuenta que la diferencial depende sólo del comportamiento local de las formas llegamos a que

$$d\omega|_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_k}(p) \wedge dx_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{i_k}|_p.$$

Ahora bien, por la propiedad a) tenemos que el miembro derecho de la igualdad anterior es el mismo cualquiera que sea la función  $d$  que cumpla las propiedades del enunciado. En consecuencia la diferencial exterior es única.

Para probar la existencia partiremos de una expresión explícita que nos relacionará la diferencial exterior con la derivada de Lie. Concretamente, vamos a ver que si definimos  $d$  sobre cada  $\omega \in \Lambda^k(V)$  mediante

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_j (-1)^{j+1} X_j(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1})) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

entonces se cumplen las propiedades del enunciado (el circunflejo indica que falta el término correspondiente). Para  $k = 0$  esta definición debe entenderse como  $df(X) = X(f)$ , con lo que  $df$  es la diferencial usual, tal y como exige a).

Por el lema de localización es claro que  $d\omega$ , así definida, es ciertamente una forma diferencial de dimensión  $k + 1$ . Extendemos  $d$  a  $\Lambda(V)$  por linealidad y obviamente se cumple b). Probaremos c) indirectamente. Una comprobación rutinaria a partir de las definiciones nos da que

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X.$$

Ahora c) se demuestra con el mismo razonamiento con el que probamos (11.3), pero usando la relación anterior en lugar de (11.2).

Para probar d) observamos en primer lugar que si  $f \in \Lambda^0(V)$  entonces  $d(df) = 0$ . En efecto,

$$\begin{aligned} d(df)(X, Y) &= X(df(Y)) - Y(df(X)) - df([X, Y]) \\ &= X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X, Y](f) = 0. \end{aligned}$$

Usando c), de aquí se sigue que  $d(dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) = 0$ , para todas las funciones  $y_i \in C^\infty(V)$ , pero éste era el único caso particular de d) que hemos usado en la prueba de la unicidad, luego sabemos que si  $\omega$  es una forma arbitraria, en un entorno de cada punto  $p$ , la forma  $d\omega$  coincide con una forma de tipo (11.4), luego (por la propiedad e) en dicho entorno  $d(d\omega)$  coincide con  $d(d\bar{\omega})$ , y ésta es nula por c) y el caso particular de d) que hemos probado. ■

Tenemos, pues, que la diferencial exterior es una antiderivación de grado 1 del álgebra exterior. Además, en la prueba del teorema anterior hemos obtenido la relación

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X \quad (11.5)$$

entre las tres derivaciones que hemos introducido. De ella, junto al hecho de que  $d^2 = 0$ , se sigue inmediatamente que

$$\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X. \quad (11.6)$$

Todas estas relaciones se interpretan de forma natural en términos de la cohomología de De Rham, que introducimos a continuación.

## 11.4 La cohomología de De Rham

En la sección anterior hemos probado que el álgebra exterior  $\Lambda(V)$  de una variedad diferencial  $V$  tiene estructura de complejo inverso (de espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ ) con la diferencial exterior (entendiendo que  $\Lambda^k(V) = 0$  si  $k < 0$ ).

**Definición 11.11** Si  $V$  es una variedad diferencial, se llama *cohomología de De Rham* a la cohomología del complejo formado por el álgebra exterior con la diferencial exterior como operador cofrontera. Los cociclos de este complejo, es decir, las formas diferenciales tales que  $d\omega = 0$ , se llaman *formas cerradas*, mientras que las cofronteras —es decir, las formas diferenciales de tipo  $d\omega$ — se llaman *formas exactas*. Representaremos por  $H^k(V)$  al grupo de cohomología de De Rham de  $V$  de dimensión  $k$ .

Teniendo en cuenta que  $d$  es una antiderivación, es claro que el producto exterior induce de forma natural un producto en

$$H^*(V) = \bigoplus_k H^k(V),$$

que seguiremos representando por  $\wedge$ , de modo que  $H^*(V)$  resulta ser un álgebra anticonmutativa y unitaria.

La fórmula (11.6) afirma que la derivada de Lie  $\mathcal{L}_X$  es un homomorfismo de complejos de grado 0, mientras que (11.5) afirma que  $i_X$  es una homotopía entre  $\mathcal{L}_X$  y el homomorfismo nulo, por lo que  $\mathcal{L}_X$  induce el homomorfismo nulo en el álgebra de cohomología.

**Teorema 11.12** Sea  $f : V \rightarrow W$  una aplicación diferenciable entre variedades. Entonces  $f_\# : \Lambda(W) \rightarrow \Lambda(V)$  es un homomorfismo de complejos.

DEMOSTRACIÓN: Hemos de probar que si  $\omega \in \Lambda(W)$  entonces se cumple  $f_{\#}(d\omega) = df_{\#}(\omega)$ . Es claro que el valor de ambas formas en un punto  $p$  depende únicamente de los valores que toma  $\omega$  en un entorno de  $f(p)$ , luego no perdemos generalidad si suponemos que  $W$  es el dominio de una carta  $y$ . En tal caso basta probar que

$$f_{\#}(d(g dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k})) = d(f_{\#}(g dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k})).$$

Ahora bien, ambos miembros son  $d(f \circ g) \wedge d(f \circ y_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f \circ y_{i_k})$ . ■

Por consiguiente toda aplicación diferenciable entre variedades  $f : V \rightarrow W$  induce homomorfismos  $f_k^* : H^k(W) \rightarrow H^k(V)$  entre los grupos de cohomología. De hecho,  $f_{\#}$  es un homomorfismo de álgebras, luego lo mismo vale para el homomorfismo inducido  $f^* : H^*(W) \rightarrow H^*(V)$ .

Ahora es claro el carácter funtorial (contravariante) tanto de los complejos  $\Lambda(V)$  como de la cohomología de De Rham.

Aunque no es evidente en absoluto, el álgebra de cohomología de De Rham de una variedad diferencial  $V$  resulta ser naturalmente isomorfa al álgebra de cohomología singular de  $V$ . La prueba requerirá algunos resultados sobre la cohomología de De Rham que ya conocemos para la cohomología singular.

**El teorema de homotopía** Dada una variedad  $V$ , consideramos la variedad producto  $\mathbb{R} \times V$ . Trabajaremos únicamente con cartas de la forma  $\bar{x} = I \times x$ , donde  $I$  es la identidad en  $\mathbb{R}$  y  $x$  es una carta en  $V$ . De este modo, las funciones coordenadas de  $\bar{x}$  son las de  $x$  más la coordenada  $t$  (la proyección en la primera componente). Observemos que  $t$  está definida sobre todo  $\mathbb{R} \times V$ , por lo que  $dt \in \Lambda^1(\mathbb{R} \times V)$ .

Más aún, los vectores  $\partial_t|_{t_0}$  son independientes de la carta  $\bar{x}$  con la que se calculan, pues

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(t_0, p)} = \left. \frac{d(i_p \circ f)}{dt} \right|_{t_0},$$

donde  $i_p(t) = (t, p)$ . Así pues, determinan un campo vectorial  $\partial_t \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times V)$ .

Veamos el comportamiento de la antiderivación  $i_{\partial_t}$  en el caso en que  $V$  puede cubrirse por una sola carta  $x$ . Entonces  $i_{\partial_t}(dt) = 1$ ,  $i_{\partial_t}(dx_i) = 0$ . Estas la determinan completamente, pues implican que

$$i_{\partial_t}(f dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

$$i_{\partial_t}(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = 0.$$

Definimos las inclusiones  $j_t : V \rightarrow \mathbb{R} \times V$  dadas por  $j_t(p) = (t, p)$ , que a su vez nos dan las aplicaciones  $j_{t\#} : \Lambda(\mathbb{R} \times V) \rightarrow \Lambda(V)$ , que son homomorfismos de grado 0. Si  $V$  se puede cubrir por una sola carta tenemos

$$j_{t\#}(f) = j_t \circ f, \quad j_{t\#}(dt) = 0, \quad j_{t\#}(dx_i) = dx_i.$$

Finalmente, dados dos números reales  $a < b$ , definimos una aplicación lineal  $I_a^b : \Lambda(\mathbb{R} \times V) \longrightarrow \Lambda(V)$  de grado 0 que a cada  $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R} \times V)$  le asigna

$$I_a^b(\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \int_a^b j_{t\sharp}^b(\omega)_p(v_1, \dots, v_k) dt, \quad v_1, \dots, v_k \in T_p(V).$$

Veamos que efectivamente  $I_a^b(\omega) \in \Lambda(V)$ . Ante todo notemos que si  $x$  es una carta alrededor de  $p$ , entonces  $I_a^b(\omega)$  depende únicamente de la restricción de  $\omega$  al dominio de  $\bar{x}$ , por lo que podemos suponer que  $V$  es el dominio de  $x$ . También es claro que  $I_a^b$  es lineal, luego podemos suponer que

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

donde admitimos la posibilidad de que  $i_1 = 0$  con el convenio de que  $x_0 = t$ . Si aparece  $dt$ , entonces  $j_{t\sharp}^b(\omega) = 0$ , luego está obviamente en  $\Lambda(V)$ . En caso contrario

$$j_{t\sharp}^b(\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = f(t, p)(dx_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{i_k}|_p)(v_1, \dots, v_k),$$

luego

$$I_a^b(\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \left( \int_a^b f(t, p) dt \right) (dx_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{i_k}|_p)(v_1, \dots, v_k),$$

y en definitiva

$$I_a^b(\omega) = \left( \int_a^b f dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Se comprueba inmediatamente que la integral que aparece en esta expresión es diferenciable como función de  $p$ , luego también en este caso  $I_a^b(\omega) \in \Lambda(V)$ . ■

Ahora veamos que el operador  $I_a^b$  conmuta con la diferencial exterior, es decir, que  $d \circ I_a^b = I_a^b \circ d$ .

Como ambos miembros son operadores locales, no perdemos generalidad si suponemos que  $V$  puede cubrirse por una sola carta  $x$ , y por linealidad podemos considerar una forma de tipo

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Si  $i_1 = 0$ , es decir, si  $\omega$  contiene a  $dt$ , entonces  $d\omega$  se expresará como suma de formas, todas ellas con  $dt$ , luego tanto si hacemos actuar primero la diferencial como el operador integral obtenemos la forma nula. Si  $\omega$  no contiene a  $dt$ , entonces, tanto en un orden como en otro, llegamos a

$$\sum_{i \neq i_j} \left( \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

■

Ahora probamos una igualdad de la que se deducirá fácilmente el teorema de homotopía. Veamos que

$$j_{b\sharp}^b - j_{a\sharp}^b = d \circ i_{\partial_t} \circ I_a^b + i_{\partial_t} \circ I_a^b \circ d. \quad (11.7)$$

Puesto que el operador integral conmuta con la diferencial, podemos escribir el segundo miembro como  $(d \circ i_{\partial_t} + i_{\partial_t} \circ d) \circ I_a^b$ . De nuevo podemos restringirnos al rango de una carta y trabajar con una forma

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Una vez más hemos de distinguir si aparece  $dt$  o no. Si no aparece tenemos que  $d(i_{\partial_t}(\omega)) = 0$  y

$$i_{\partial_t}(d\omega) = \frac{\partial f}{\partial t} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Al aplicar  $I_a^b$  obtenemos, teniendo en cuenta la regla de Barrow,

$$\left( \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = (j_b \circ f - j_a \circ f) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = j_{b\#}(\omega) - j_{a\#}(\omega).$$

Supongamos ahora que  $\omega = f dt \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ . Entonces

$$d\omega = - \sum_{i \neq i_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \wedge dx_i \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

luego

$$i_{\partial_t}(d\omega) = - \sum_{i \neq i_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

y

$$d(i_{\partial_t}(\omega)) = \sum_{i \neq i_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} + \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Al sumar estos dos términos nos queda sólo el último sumando de la última igualdad y, como tiene  $dt$ , al aplicar  $I_a^b$  queda la forma nula. Así mismo es claro que  $j_{b\#}(\omega) - j_{a\#}(\omega) = 0$ . ■

Ahora ya es fácil probar el teorema de homotopía:

**Teorema 11.13** *Si  $f, g : V \rightarrow W$  son aplicaciones homotópicas entre variedades, entonces  $f_{\#}, g_{\#} : \Lambda(W) \rightarrow \Lambda(V)$  son homomorfismos homotópicos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $H : \mathbb{R} \times V \rightarrow W$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ . Definimos  $h = H_{\#} \circ i_{\partial_t} \circ I_0^1$ . Claramente  $h : \Lambda(W) \rightarrow \Lambda(V)$  es un homomorfismo de grado  $-1$ . Componiendo con  $H_{\#}$  en ambos miembros de (11.7) obtenemos

$$H_{\#} \circ (j_1 - j_0) = H_{\#} \circ d \circ i_{\partial_t} \circ I_0^1 + H_{\#} \circ i_{\partial_t} \circ I_0^1 \circ d.$$

El primer miembro es  $(j_1 \circ H)_{\#} - (j_0 \circ H)_{\#} = g_{\#} - f_{\#}$ . Teniendo en cuenta que  $H_{\#}$  conmuta con la diferencial, el segundo miembro es  $d \circ h + h \circ d$ , luego  $h$  es una homotopía. ■

En particular:

**Teorema 11.14** *Si  $V$  es una variedad contractible, entonces*

$$H^k(V) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

**La sucesión de Mayer-Vietoris** Sea  $V$  una variedad diferencial y  $U_1, U_2$  dos abiertos en  $V$  de modo que<sup>1</sup>  $V = U_1 \cup U_2$ ,  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Entonces  $U_1, U_2$  y  $U_1 \cap U_2$  son variedades diferenciales. Consideramos las inclusiones

$$j_1 : U_1 \cap U_2 \longrightarrow U_1, \quad j_2 : U_1 \cap U_2 \longrightarrow U_2, \quad i_1 : U_1 \longrightarrow V, \quad i_2 : U_2 \longrightarrow V.$$

A partir de ellas construimos la sucesión de aplicaciones lineales

$$0 \longrightarrow \Lambda(V) \xrightarrow{\alpha} \Lambda(U_1) \oplus \Lambda(U_2) \xrightarrow{\beta} \Lambda(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0. \quad (11.8)$$

dada por  $\alpha(\omega) = (i_{1\#}(\omega), i_{2\#}(\omega))$  y  $\beta(\omega_1, \omega_2) = j_{1\#}(\omega_1) - j_{2\#}(\omega_2)$ .

Representaremos las diferenciales de  $\Lambda(V)$ ,  $\Lambda(U_1)$ ,  $\Lambda(U_2)$  y  $\Lambda(U_1 \cap U_2)$  mediante  $d$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_{12}$  respectivamente. Es claro que  $\Lambda(U_1) \oplus \Lambda(U_2)$  es un complejo con el operador cofrontera dado por  $(d_1 \oplus d_2)(\omega_1, \omega_2) = (d_1\omega_1, d_2\omega_2)$ . Las aplicaciones  $\alpha$  y  $\beta$  son homomorfismos de complejos, luego inducen aplicaciones lineales

$$\bar{\alpha} : H(V) \longrightarrow H(U_1) \oplus H(U_2), \quad \bar{\beta} : H(U_1) \oplus H(U_2) \longrightarrow H(U_1 \cap U_2).$$

Veamos que la sucesión (11.8) es exacta. En primer lugar probamos que  $\beta$  es suprayectiva. Fijemos una partición de la unidad  $p_1, p_2$  en  $V$  subordinada al cubrimiento  $U_1, U_2$ , es decir,  $p_1 + p_2 = 1$ ,  $\text{sop } p_1 \subset U_1$ ,  $\text{sop } p_2 \subset U_2$ .

Tomemos  $\omega \in \Lambda(U_1 \cap U_2)$ . La función  $i_{1\#}(p_2)$  está definida en  $U_1$  y se anula en un entorno de cada punto de  $U_1 \setminus U_2$ , luego la forma  $\omega_1 = (i_{1\#}(p_2))\omega$  se puede extender a  $U_1$  haciéndola nula en  $U_1 \setminus U_2$ . Similarmente tenemos  $\omega_2 = (i_{2\#}(p_1))\omega \in \Lambda(U_2)$ . Es inmediato comprobar que  $\omega = \beta(\omega_1, -\omega_2)$ .

La inyectividad de  $\alpha$  es obvia: si  $\alpha(\omega) = 0$  entonces  $\omega$  se anula en  $U_1$  y en  $U_2$ , luego se anula en  $V$ .

Es claro que  $\alpha \circ \beta = 0$ . Tomemos ahora  $(\omega_1, \omega_2) \in \text{N}\beta$ , de modo que  $\omega_1(p) = \omega_2(p)$  para todo  $p \in U_1 \cap U_2$  y consecuentemente podemos definir  $\omega \in \Lambda(V)$  que extienda simultáneamente a  $\omega_1$  y a  $\omega_2$ , pero esto equivale a decir que  $\alpha(\omega) = (\omega_1, \omega_2)$ .

Así pues, el teorema 2.25 nos da la *sucesión de Mayer-Vietoris* de la tríada de abiertos  $(V, U_1, U_2)$ :

$$\dots \longrightarrow H^k(V) \xrightarrow{\bar{\alpha}} H^k(U_1) \oplus H^k(U_2) \xrightarrow{\bar{\beta}} H^k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\Delta} H^{k+1}(V) \longrightarrow \dots$$

La prueba del teorema siguiente es inmediata:

**Teorema 11.15** Si  $f : (V, U_1, U_2) \longrightarrow (W, U'_1, U'_2)$  es una aplicación diferenciable entre tríadas de abiertos en las variedades  $V$  y  $W$ , entonces los homomorfismos inducidos por  $f$  hacen conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(V) & \longrightarrow & H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) & \longrightarrow & H^p(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & H^{p+1}(V) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H^p(W) & \longrightarrow & H^p(U'_1) \oplus H^p(U'_2) & \longrightarrow & H^p(U'_1 \cap U'_2) & \longrightarrow & H^{p+1}(W) \end{array}$$

<sup>1</sup>Ver la observación al final de este apartado.



Aunque hemos supuesto que  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , es fácil ver que en caso contrario la aplicación  $\alpha$  es un isomorfismo, por lo que también tenemos trivialmente una sucesión de Mayer–Vietoris en la que cada  $H^k(U_1 \cap U_2) = 0$ .

**Uniones disjuntas** Por último observemos que si una variedad  $V$  se descompone como unión numerable de abiertos disjuntos dos a dos,  $V = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k$ , entonces

$$\Lambda^p(V) \cong \prod_{k=0}^{\infty} \Lambda^p(V_k).$$

El isomorfismo viene dado por  $\omega \mapsto (\omega|_{V_k})$ , es decir, es el producto de los homomorfismos inducidos por las inclusiones  $i_k : V_k \rightarrow V$ . Por consiguiente

$$H^p(V) \cong \prod_{k=0}^{\infty} H^p(V_k),$$

y el isomorfismo es el producto de los homomorfismos  $i_k^*$ .

## 11.5 El teorema de De Rham

En esta sección demostraremos que la cohomología de De Rham de una variedad diferencial es naturalmente isomorfa a la cohomología singular. Para ello necesitamos definir la integración de formas diferenciales sobre cadenas singulares diferenciables.

Consideremos en primer lugar un  $p$ -símplice diferenciable  $\sigma : \Delta_p \rightarrow V$  en una variedad diferencial  $V$  y una  $p$ -forma  $\omega \in \Lambda^p(V)$ . Por definición,  $\sigma$  se extiende a una aplicación diferenciable  $\tilde{\sigma} : U \rightarrow V$ , donde  $U$  es un abierto en  $\mathbb{R}^p$  que contiene al símplice canónico  $\Delta_p$ . Ésta define un homomorfismo  $\tilde{\sigma}_\# : \Lambda^p(V) \rightarrow \Lambda^p(U)$ . Es obvio que existe una única función  $f \in C^\infty(U)$  tal que  $\tilde{\sigma}_\#(\omega) = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$ , donde las funciones  $x_i$  son las coordenadas de la identidad en  $U$ . Definimos

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta_p} f(x) dx_1 \cdots dx_p,$$

donde la última integral es la integral de  $f$  en el sentido usual del análisis (integral de Riemann o de Lebesgue).

Observemos que esta definición no depende de la extensión  $\tilde{\sigma}$  de  $\sigma$ . En efecto, si  $\tilde{\sigma}_1$  y  $\tilde{\sigma}_2$  son dos extensiones de  $\sigma$  y  $x$  es un punto interior de  $\Delta_p$ , entonces ambas coinciden en un entorno de  $x$ , por lo que  $\tilde{\sigma}_{1\#}(\omega)$  y  $\tilde{\sigma}_{2\#}(\omega)$  coinciden en el punto  $x$ , luego las funciones correspondientes  $f_1$  y  $f_2$  coinciden en el interior de  $\Delta_p$ . Por continuidad coinciden en todo  $\Delta_p$  y las integrales correspondientes también coinciden.

Para  $p = 0$  definimos  $\int_{\sigma} \omega = \omega(\sigma(0))$ .

Si  $c = \sum_{i=1}^r a_i \sigma_i \in C_p^\infty(V)$  es una  $p$ -cadena singular diferenciable (con coeficientes en  $\mathbb{R}$ ), definimos

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^r a_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

Así tenemos definida una aplicación bilineal  $\int : C_p^\infty(V) \times \Lambda^p(V) \rightarrow \mathbb{R}$ . En primer lugar probamos que se comporta adecuadamente respecto a los homomorfismos inducidos por las aplicaciones diferenciables.

**Teorema 11.16** *Sea  $h : V \rightarrow W$  una aplicación diferenciable entre variedades, sea  $c \in C_p^\infty(V)$  y  $\omega \in \Lambda^p(W)$ . Entonces*

$$\int_c h_\#(\omega) = \int_{h^\#(c)} \omega.$$

DEMOSTRACIÓN: Por linealidad basta probarlo en el caso en que  $c = \sigma$  es un  $p$ -símplice. Si  $p = 0$  ambos miembros son  $\omega(h(\sigma(0)))$ . Supongamos  $p > 0$  y sea  $\tilde{\sigma}$  una extensión de  $\sigma$  a una función diferenciable en un entorno de  $\Delta_p$ . Entonces  $\tilde{\sigma} \circ h$  es una extensión diferenciable de  $\sigma \circ h = h^\#(\sigma)$ . Así pues, si

$$\tilde{\sigma}_\#(h_\#(\omega)) = (\tilde{\sigma} \circ h)_\#(\omega) = \widetilde{h^\#(\sigma)}_\#(\omega) = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p,$$

entonces los dos miembros de la igualdad del enunciado son la integral de  $f$  sobre  $\Delta_p$ . ■

Ahora probamos el teorema fundamental sobre integración de formas diferenciales sobre símlices:

**Teorema 11.17 (Teorema de Stokes para símlices)** *Sea  $V$  una variedad diferencial,  $c \in C_{p+1}^\infty(V)$ ,  $\omega \in \Lambda^p(V)$ . Entonces*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

DEMOSTRACIÓN: Por linealidad podemos suponer que  $c = \sigma$  es un  $p+1$ -símplice. El caso  $p = 0$  es simplemente la regla de Barrow. En efecto, tenemos que  $\sigma : [0, 1] \rightarrow V$ , luego  $\tilde{\sigma}_\#(d\omega) = d(\sigma \circ \omega) = (\sigma \circ \omega)' dx$  y

$$\int_\sigma d\omega = \int_0^1 (\sigma \circ \omega)' dx = \omega(\sigma(1)) - \omega(\sigma(0)) = \int_{\sigma(1) - \sigma(0)} \omega = \int_{\partial \sigma} \omega.$$

Supongamos, pues, que  $p > 0$  y veamos que podemos reducir la demostración al caso en que  $\sigma$  es la identidad  $I$  en  $\Delta_{p+1}$ . En efecto, basta observar que  $\sigma = I \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^\#(I)$ , luego el teorema anterior nos da que

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\tilde{\sigma}^\#(I)} d\omega = \int_I \tilde{\sigma}_\#(d\omega) = \int_I d\tilde{\sigma}_\#(\omega),$$

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\partial\tilde{\sigma}^\#(I)} \omega = \int_{\tilde{\sigma}^\#(\partial I)} \omega = \int_{\partial I} \tilde{\sigma}^\#(\omega).$$

Notemos que  $\tilde{\sigma}^\#(\omega) \in \Lambda^p(U)$ , donde  $U$  es un entorno de  $\Delta_{p+1}$  en  $\mathbb{R}^{p+1}$ . Así pues, podemos suponer que  $\sigma = I$  y  $\omega \in \Lambda^p(U)$ . Más aún, por linealidad podemos suponer que

$$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_{p+1},$$

con lo que

$$d\omega = df \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_{p+1} = (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{p+1}.$$

Para evitar confusión con las funciones coordenadas llamaremos  $e_0, \dots, e_{p+1}$  a los vértices del símplice canónico  $\Delta_{p+1}$ , es decir,

$$e_0 = (0, \dots, 0), \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_{p+1} = (0, \dots, 0, 1).$$

Con la notación de la sección 2.2 (salvo por lo que acabamos de decir), tenemos que

$$\sigma = (e_0, \dots, e_{p+1}), \quad \partial\sigma = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_{p+1}).$$

Si llamamos  $\tau_j = (e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_{p+1})$ , hemos de probar que

$$\int_{\sigma} (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{p+1} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \int_{\tau_j} f dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_{p+1}.$$

Ahora hemos de aplicar mecánicamente las definiciones. Empezaremos calculando el miembro derecho. Tomemos  $j > 0$ . Entonces  $\tau_j : \Delta_p \rightarrow U$  es la aplicación afín que hace corresponder los vértices  $e_0, \dots, e_p$  de  $\Delta_p$  con los vértices  $e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_{p+1}$  de  $\Delta_{p+1}$ . Es claro que se trata de la aplicación

$$\tau_j(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_p).$$

Por consiguiente

$$\tau_{j\#}(dx_k) = d(\tau_j \circ x_k) = \begin{cases} dx_k & \text{si } k < j, \\ 0 & \text{si } k = j, \\ dx_{k-1} & \text{si } k > j, \end{cases}$$

luego  $\tau_{j\#}(\omega) = 0$  salvo a lo sumo si  $j = 0$  o  $j = i$ . Además

$$\tau_{i\#}(\omega) = \tau_{i\#}(f) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p.$$

Por otra parte  $\tau_0(x_1, \dots, x_p) = \left(1 - \sum_{r=1}^p x_r, x_1, \dots, x_p\right)$ , luego

$$\tau_{0\#}(dx_k) = \begin{cases} -\sum_{r=1}^p dx_r & \text{si } k = 1, \\ dx_{k-1} & \text{si } k > 1. \end{cases}$$

Es fácil ver entonces que  $\tau_{0\#}(\omega) = -(-1)^i \tau_{0\#}(f) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$ . En resumen, tenemos que

$$\int_{\partial\sigma} \omega = (-1)^i \int_{\Delta_p} (\tau_{i\#}(f)(x) - \tau_{0\#}(f)(x)) dx_1 \cdots dx_p. \quad (11.9)$$

Por otra parte,

$$\int_{\sigma} d\omega = (-1)^{i+1} \int_{\Delta_{p+1}} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_{p+1}.$$

Vamos a aplicar el teorema de Fubini, integrando primero respecto a la coordenada  $i$ -ésima. Así,

$$\int_{\sigma} d\omega = (-1)^{i+1} \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}} \chi_{\Delta_{p+1}}(\iota(x, t)) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\iota(x, t)} dt \right) dx_1 \cdots dx_p,$$

donde  $\iota(x, t) = (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_i, \dots, x_p)$  y  $\chi_{\Delta_{p+1}}$  es la función característica de  $\Delta_{p+1}$ . Ahora bien,  $\iota(x, t) \in \Delta_{p+1}$  si y sólo si  $x \in \Delta_p$  y  $0 \leq t \leq s(x) = 1 - \sum_{r=1}^p x_r$ , luego

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} d\omega &= (-1)^{i+1} \int_{\Delta_p} \left( \int_0^{s(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\iota(x, t)} dt \right) dx_1 \cdots dx_p \\ &= (-1)^{i+1} \int_{\Delta_p} (f(\iota(x, s(x))) - f(\iota(x, 0))) dx_1 \cdots dx_p. \end{aligned}$$

Para terminar observamos que  $f(\iota(x, 0)) = f(\tau_i(x)) = \tau_{i\#}(f)(x)$ , por lo que, comparando con (11.9), sólo queda demostrar que

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_p} f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - \sum_{r=1}^p x_r, x_i, \dots, x_p) dx_1 \cdots dx_p \\ = \int_{\Delta_p} f(1 - \sum_{r=1}^p x_r, x_1, \dots, x_p) dx_1 \cdots dx_p, \end{aligned}$$

pero el teorema de cambio de variable aplicado a la aplicación que intercambia la primera coordenada con la  $i$ -ésima transforma una integral en la otra. ■

Como consecuencia del teorema de Stokes, la integral induce una forma bilineal

$$\int^* : H_p^\infty(V) \times H^p(V) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Equivalentemente, tenemos una aplicación lineal  $H^p(V) \longrightarrow H_\infty^p(V)$  entre la cohomología de De Rham y la cohomología singular diferenciable de  $V$ . Hemos de probar que es un isomorfismo.

Es inmediato comprobar que lo es para  $p = 0$  y si  $V$  es contractible entonces lo es para todo  $p$  (pues los grupos restantes son triviales).

Conviene usar el lenguaje de la teoría de categorías. Fijada una variedad  $V$ , consideramos la categoría que tiene por objetos a los abiertos de  $V$  y por morfismos

$$\text{hom}(U_1, U_2) = \begin{cases} \{\text{inclusión}\} & \text{si } U_1 \subset U_2, \\ \emptyset & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Sobre esta categoría,  $H^*$  y  $H_\infty^*$  son dos funtores contravariantes en la categoría de los complejos de espacios vectoriales y el homomorfismo  $\alpha : H^* \rightarrow H_\infty^*$  inducido por la integral es una transformación natural entre ellos.

En estos términos, antes hemos probado:

A)  $\alpha$  es un isomorfismo sobre los abiertos contractibles de  $V$ .

Ahora veremos que:

B) Si  $U_1$  y  $U_2$  son abiertos en  $V$  tales que  $\alpha_{U_1}$  y  $\alpha_{U_2}$  son isomorfismos, entonces  $\alpha_{U_1 \cap U_2}$  es un isomorfismo si y sólo si lo es  $\alpha_{U_1 \cup U_2}$ .

En efecto, basta considerar el diagrama formado por las sucesiones de Mayer-Vietoris

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^p(U_1 \cup U_2) & \longrightarrow & H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) & \longrightarrow & H^p(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow \\ & \downarrow \alpha_{U_1 \cup U_2} & & \downarrow \alpha_{U_1} \oplus \alpha_{U_2} & & \downarrow \alpha_{U_1 \cap U_2} & \\ \longrightarrow & H_\infty^p(U_1 \cup U_2) & \longrightarrow & H_\infty^p(U_1) \oplus H_\infty^p(U_2) & \longrightarrow & H_\infty^p(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow \end{array}$$

y comprobar que es conmutativo, pues entonces la conclusión se sigue del teorema 3.1.

La conmutatividad de los dos cuadrados que muestra el diagrama se sigue inmediatamente de la naturalidad de  $\alpha$ , pero falta probar la del cuadrado que contiene los homomorfismos de conexión:

$$\begin{array}{ccc} H^p(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{\Delta} & H^{p+1}(U_1 \cup U_2) \\ \downarrow \alpha_{U_1 \cap U_2} & & \downarrow \alpha_{U_1 \cup U_2} \\ H_\infty^p(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{\Delta} & H_\infty^{p+1}(U_1 \cup U_2) \end{array}$$

La comprobación es mera rutina: partimos de  $[\omega] \in H^p(U_1 \cap U_2)$  y para calcular  $\Delta([\omega])$  tomamos  $\omega_i \in \Lambda^p(U_i)$  tales que  $\omega = \omega_1|_{U_1 \cap U_2} - \omega_2|_{U_1 \cap U_2}$ , luego calculamos  $(d\omega_1, d\omega_2)$  y buscamos un  $\eta \in \Lambda^{p+1}(U_1 \cup U_2)$  tal que  $\eta|_{U_1} = d\omega_1$  y  $\eta|_{U_2} = d\omega_2$ . Entonces  $\Delta([\omega]) = [\eta]$ .

Sea  $\alpha_{U_1 \cap U_2}([\omega]) = [f]$ . Si definimos  $f_i \in C_\infty^p(U_i)$  mediante  $f_i(c) = \int_c \omega_i$ , tenemos que  $f = f_1|_{C_\infty^p(U_1 \cap U_2)} - f_2|_{C_\infty^p(U_1 \cap U_2)}$ , y si definimos  $h \in C_\infty^{p+1}(U_1 \cup U_2)$  como  $h(c) = \int_c \eta$ , tenemos que

$$h|_{C_\infty^{p+1}(U_i)}(c) = \int_c \eta|_{U_i} = \int_c d\omega_i = \int_{\partial c} \omega_i = f_i(\partial c) = df_i(c),$$

luego  $\Delta(\alpha_{U_1 \cap U_2}([\omega])) = \Delta([f]) = [h] = \alpha_{U_1 \cup U_2}([\eta]) = \alpha_{U_1 \cup U_2}(\Delta([\omega]))$ .

El último hecho que necesitamos es

C) Si  $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$  es una unión disjunta de abiertos de  $V$  tal que cada  $\alpha_{U_k}$  es un isomorfismo, entonces  $\alpha_U$  es un isomorfismo.

En efecto, es claro que  $C_p^\infty(U) = \bigcup_{k=0}^{\infty} C_p^\infty(U_k)$ , y así  $C_\infty^p(U) = \prod_{k=0}^{\infty} C_\infty^p(U_k)$ ,  $H_\infty^p(U) = \prod_{k=0}^{\infty} H_\infty^p(U_k)$ . El isomorfismo viene dado por  $[f] \mapsto ([f|_{C_\infty^p(U_k)}])$ . También sabemos que esto es cierto para la cohomología de De Rham:  $H^p(U) = \prod_{k=0}^{\infty} H^p(U_k)$  y el isomorfismo es  $[\omega] \mapsto ([\omega|_{U_k}])$ . Es fácil ver entonces que  $\alpha_U$  es el isomorfismo inducido por los isomorfismos  $\alpha_{U_k}$ .

Ahora ya podemos probar:

**Teorema 11.18 (de De Rham)** Si  $V$  es una variedad diferencial, entonces los homomorfismos  $\alpha_p : H^p(V) \rightarrow H_\infty^p(V)$  dados por

$$\alpha_p(\omega)(c) = \int_c^* \omega$$

son isomorfismos.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos ahora un cubrimiento simple  $\mathcal{U}$  de  $V$ . Las intersecciones finitas  $U_1 \cap \cdots \cap U_k$  de abiertos de  $\mathcal{U}$  son contractibles, luego por A) tenemos que  $\alpha$  es un isomorfismo para ellas. Veamos ahora que si  $G_1, \dots, G_r$  son intersecciones finitas de abiertos de  $\mathcal{U}$  entonces  $\alpha$  es un isomorfismo para  $G_1 \cup \cdots \cup G_r$ . Lo tenemos para  $r = 1$ . Si es cierto para  $r - 1$ , entonces  $G_r \cap (G_1 \cup \cdots \cup G_{r-1})$  es una unión de  $r - 1$  intersecciones finitas de abiertos de  $\mathcal{U}$ , luego  $\alpha$  es un isomorfismo para ella y por B) también lo es para la unión de los  $r$  abiertos.

Llamemos  $\mathcal{V}$  al conjunto de las uniones finitas de intersecciones finitas de abiertos de  $\mathcal{U}$ . Acabamos de probar que  $\alpha$  es un isomorfismo para los abiertos de  $\mathcal{V}$ . En particular lo es sobre las uniones finitas de abiertos de  $\mathcal{U}$ , luego si  $\mathcal{U}$  admite un subcubrimiento finito el teorema ya está probado.

En caso contrario, observamos que por C) tenemos que  $\alpha$  es un isomorfismo sobre las uniones numerables disjuntas de abiertos de  $\mathcal{V}$ . También por esta propiedad podemos suponer que  $V$  es conexa.

Sea  $U_0$  un abierto de  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ . Tenemos que  $U_0$  corta a un número finito de abiertos de  $\mathcal{U}$ . Llamemos  $U_1 \in \mathcal{V}$  a la unión de éstos (sin contar a  $U_0$ ). Entonces  $U_1$  corta a un número finito de abiertos de  $\mathcal{U}$  distintos de  $U_0$  y de los que forman  $U_1$ . Llamemos  $U_2 \in \mathcal{V}$  a la unión de estos abiertos. Como suponemos que  $\mathcal{U}$  no admite un subcubrimiento finito, este proceso se puede continuar hasta formar una sucesión  $\{U_k\}_{k=0}^{\infty}$  de abiertos de  $\mathcal{V}$  de modo que cada cual corta únicamente al anterior y al siguiente y todo abierto de  $\mathcal{U}$  que corta a un  $U_k$  está contenido en  $U_k$ , en  $U_{k-1}$  o en  $U_{k+1}$ .

Entonces  $V = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$ , pues la unión es abierta y cerrada en  $V$  y estamos suponiendo que  $V$  es conexa. Ahora bien, para  $i = 0, 1$ , tenemos que los abiertos

$V_i = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_{2k+i}$  son uniones disjuntas de abiertos de  $\mathcal{V}$ , luego  $\alpha$  es un isomorfismo para ambos, y lo mismo sucede con  $V_1 \cap V_2$ , luego por B) podemos concluir que  $\alpha_V$  es un isomorfismo. ■

Los isomorfismos del teorema anterior determinan un isomorfismo graduado

$$\alpha : H^*(V) \longrightarrow H_{\infty}^*(V).$$

Puede probarse que se trata de un isomorfismo de álgebras, es decir, que  $\alpha(\omega \wedge \eta) = \alpha(\omega) \cup \alpha(\eta)$ . No obstante la prueba es más complicada y no vamos a entrar en ello. La versión del teorema de De Rham que hemos demostrado es suficiente para obtener los hechos relevantes sobre la cohomología de De Rham. Así, por ejemplo, los números de Betti y la característica de Euler de una variedad diferencial pueden calcularse a partir de los grupos de cohomología de De Rham.

## 11.6 Cohomología con soportes compactos

Terminamos el capítulo definiendo una cohomología de De Rham con soportes compactos análoga a la cohomología singular con soportes compactos. De hecho vamos a probar que ambas son isomorfas. La definición es completamente natural:

**Definición 11.19** Si  $V$  es una variedad diferencial de dimensión  $n$  y  $\omega \in \Lambda^k(V)$ , llamaremos *soporte* de  $\omega$  a la clausura del conjunto de los puntos  $p \in V$  donde  $\omega_p \neq 0$ . Lo representaremos por  $\text{sop } \omega$ . Llamaremos  $\Lambda_c^k(V)$  al subconjunto de  $\Lambda^k(V)$  formado por las formas de soporte compacto.

Claramente  $\Lambda_c(V) = \bigoplus_k \Lambda_c^k(V)$  es un subcomplejo y una subálgebra de  $\Lambda(V)$ .

Si  $f : V \longrightarrow W$  es una aplicación diferenciable entre variedades y  $\omega \in \Lambda^k(W)$ , es fácil ver que  $\text{sop } f_{\#}(\omega) \subset f^{-1}[\text{sop } \omega]$ , por lo que si  $f$  es propia entonces  $f_{\#}$  se restringe a un homomorfismo graduado  $f_{\#} : \Lambda_c(W) \longrightarrow \Lambda_c(V)$ . Así pues,  $\Lambda_c(V)$  es un funtor sobre la categoría de variedades diferenciales con las aplicaciones diferenciables propias como morfismos.

La *cohomología de De Rham con soportes compactos*  $H_c(V)$  es la cohomología del complejo  $\Lambda_c(V)$ .

Más detalladamente, si  $K \subset V$  es un subconjunto compacto, llamamos  $\Lambda^k(V, V \setminus K)$  al conjunto de las  $k$ -formas diferenciales de  $V$  con soporte contenido en  $K$ . Es claro que estos espacios determinan un subcomplejo  $\Lambda(V, V \setminus K)$  y la integración sobre  $k$ -símplices determina un homomorfismo

$$\alpha : \Lambda^k(V, V \setminus K) \longrightarrow C_{\infty}^k(V, V \setminus K),$$

donde  $C_{\infty}^k(V, V \setminus K)$  se define como el subespacio de  $C_{\infty}^k(V)$  determinado por las cocadenas que se anulan sobre los  $k$ -símplices contenidos en  $V \setminus K$ .

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Lambda(V, V \setminus K) & \longrightarrow & \Lambda(V) & \longrightarrow & \Lambda(V \setminus K) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C_{\infty}^*(V, V \setminus K) & \longrightarrow & C_{\infty}^*(V) & \longrightarrow & C_{\infty}^*(V \setminus K) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Las flechas verticales son los homomorfismos determinados por la integración sobre simplices. Al formar la sucesión exacta de cohomología obtenemos un nuevo diagrama conmutativo donde dos de cada tres flechas verticales son isomorfismos por el teorema de De Rham. Por consiguiente, el teorema 3.1 nos da que la integración induce isomorfismos

$$\alpha_k : H^k(V, V \setminus K) \longrightarrow H_{\infty}^k(V, V \setminus K).$$

La inclusión induce isomorfismos  $H^k(V, V \setminus K) \longrightarrow H_{\infty}^k(V, V \setminus K)$ . También es claro que  $\Lambda_c(V)$  es el límite inductivo de los complejos  $\Lambda(V, V \setminus K)$ , por lo que  $H_c(V)$  es el límite inductivo de los complejos  $H^*(V, V \setminus K)$ , y los isomorfismos que hemos obtenido inducen isomorfismos naturales entre la cohomología de De Rham con soportes compactos, la cohomología singular diferenciable con soportes compactos (definida como el límite inductivo del sistema de complejos  $H_{\infty}^*(V, V \setminus K)$ ) y la cohomología singular con soportes compactos.

En particular, por el teorema de dualidad de Poincaré podemos concluir ahora que

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases} \quad (11.10)$$

Vamos a dar una prueba directa de este hecho. Para ello, dada una variedad  $V$  y un punto  $p \in V$ , definimos  $I_p^k(V)$  como el conjunto de las  $k$ -formas diferenciales en  $V$  que se anulan en un entorno de  $p$ . Es claro que los espacios  $I_p^k(V)$  determinan un subcomplejo  $I_p(V)$  de  $\Lambda(V)$ , por lo que podemos considerar el complejo cociente  $G_p(V)$ , a cuyos elementos (de dimensión  $k$ ) llamaremos *gérmenes* de  $k$ -formas diferenciales alrededor de  $p$ .

**Teorema 11.20** *Si  $V$  es una variedad diferencial y  $p \in V$ , se cumple que*

$$H^k(G_p(V)) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\pi : \Lambda(V) \longrightarrow G_p(V)$  la proyección canónica. Un cociclo de  $G_p^0(V)$  es de la forma  $\pi(f)$ , con  $f \in \Lambda^0(V)$ , tal que  $d\pi(f) = \pi(df) = 0$ . Esto significa que  $df \in I_p^0(V)$ , es decir, que  $df$  se anula en un entorno de  $p$ . Es claro entonces que  $f$  es constante en un entorno de  $p$ , luego  $\pi(f) = \pi(f(p))$ . Es claro entonces que  $H^0(G_p(V))$  está formado por las clases de las funciones constantes y es, por consiguiente, isomorfo a  $\mathbb{R}$ .

Tomemos ahora un cociclo  $\pi(\omega) \in G_p^k(V)$ , con  $k \geq 1$ . Como antes,  $d\omega$  se anula en un entorno  $U$  de  $p$ , que podemos tomar contractible. Entonces existe



$\eta \in \Lambda^{k-1}(U)$  tal que  $\omega|_U = d\eta$ . Multiplicando  $\eta$  por una función que valga 1 en un entorno de  $p$  y se anule fuera de  $U$  obtenemos una forma en  $\Lambda^{k-1}(V)$  (a la que seguiremos llamando  $\eta$ ) que coincide con  $\eta$  en un entorno de  $p$ , luego  $d\eta = \omega$  en un entorno de  $p$ . De este modo  $\pi(\omega) = \pi(d\eta) = d(\pi(\eta))$ , lo que prueba que  $H^k(G_p(V)) = 0$ . ■

Para calcular la cohomología con soportes compactos de  $\mathbb{R}^n$  identificamos a  $\mathbb{R}^n$  con  $S^n \setminus \{p\}$ , de modo que podemos identificar  $\Lambda_c(\mathbb{R}^n) = I_p(S^n)$ . Basta considerar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Lambda_c(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Lambda(S^n) \longrightarrow G_p(S^n) \longrightarrow 0.$$

Es fácil comprobar directamente que  $H_c^0(\mathbb{R}^n) = 0$ , con lo que tenemos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H_c^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^1(S^n) \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow H_c^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^k(S^n) \longrightarrow 0, \quad \text{para } k \geq 2.$$

De la primera se deduce que la segunda vale también para  $k = 1$  y de aquí se sigue (11.10).

Para construir la sucesión de Mayer-Vietoris para la cohomología con soportes compactos observamos que si  $U$  es un abierto en una variedad  $V$ , la inclusión induce una aplicación lineal  $i_{\sharp} : \Lambda_c(U) \longrightarrow \Lambda_c(V)$  que extiende a  $V$  cada  $k$ -forma en  $U$  haciéndola nula en  $V \setminus U$ . Esta aplicación induce a su vez otra sobre la cohomología:  $i^* : H_c(U) \longrightarrow H_c(V)$ .

Así, si  $V = U_1 \cup U_2$  es una descomposición de  $V$  en unión de abiertos, podemos formar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Lambda_c(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{i} \Lambda_c(U_1) \oplus \Lambda_c(U_2) \xrightarrow{j} \Lambda_c(V) \longrightarrow 0$$

dada por  $i(\omega) = (\omega, -\omega)$ ,  $j(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$  (aquí identificamos cada forma con sus extensiones).

De esta sucesión se deriva la sucesión de Mayer-Vietoris para la cohomología con soportes compactos.

También es fácil comprobar que si  $V = \bigcup_n V_n$  es una descomposición de  $V$  en unión de abiertos disjuntos, entonces las inclusiones  $i_n^* : H_c(U_n) \longrightarrow H_c(V)$  inducen un isomorfismo

$$\bigoplus_n H_c(U_n) \cong H_c(V)$$



## Capítulo XII

# La cohomología de De Rham

Dedicamos este capítulo a estudiar con detalle la cohomología de De Rham y su relación con la estructura diferencial de las variedades. En primer lugar describiremos la orientabilidad de las variedades diferenciales en términos de su estructura diferencial, lo que nos permitirá introducir la noción de integración de una  $n$ -forma diferencial de soporte compacto sobre una variedad  $n$ -dimensional. A través de esta integral podremos expresar de forma mucho más simple algunos conceptos de la cohomología de De Rham, como por ejemplo la dualidad de Poincaré.

### 12.1 Orientación de variedades diferenciales

Consideremos un homeomorfismo  $f : U \rightarrow V$  entre dos abiertos conexos de  $\mathbb{R}^n$ . Recordemos que la orientación de un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  se obtiene a partir de la de  $S^n$  considerando  $\mathbb{R}^n = S^n \setminus \{\infty\}$  y a través de los isomorfismos

$$H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n, S^n \setminus \{p\}) \longleftarrow H_n(U, U \setminus \{p\}),$$

es decir, si fijamos uno de los dos generadores  $\alpha \in H_n(S^n)$  (para la homología reducida), el homomorfismo de conexión seguido de la escisión nos da una orientación local  $\alpha_p$  en cada punto  $p$  de  $U$ .

Por otra parte,  $f$  induce un isomorfismo

$$f_* : H_n(U, U \setminus \{p\}) \longrightarrow H_n(V, V \setminus \{f(p)\}).$$

Es claro que  $\beta_q = f_*(\alpha_{f^{-1}(q)})$  es una orientación en  $V$ , por lo que se ha de cumplir  $f_*(\alpha_p) = \pm \alpha_{f(p)}$  para todo  $p \in U$ , donde, por conexión el signo es independiente de  $p$ . Diremos que  $f$  *conserva* o *invierte* la orientación según si dicho signo es positivo o negativo.

Supongamos ahora que  $f$  es un difeomorfismo, sea  $p \in U$  y llamemos  $L(x) = f(p) + df|_p(x - p)$ . Según la definición de diferenciabilidad tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - L(x)}{\|x - p\|} = 0.$$

Por otra parte,  $df|_p$  es un automorfismo de  $\mathbb{R}^n$ , luego no se anula sobre  $S^{n-1}$  y, por compacidad,  $K = \inf_{y \in S^{n-1}} \|df|_p(y)\| > 0$ . Tomamos  $\epsilon > 0$  tal que si  $0 < \|x - p\| < \epsilon$  entonces  $x \in U$  y

$$\|f(x) - L(x)\| < K\|x - p\| \leq \|x - p\| \left\| df|_p \left( \frac{x - p}{\|x - p\|} \right) \right\| = \|L(x) - f(p)\|.$$

De aquí se sigue que el segmento que une a  $f(x)$  con  $L(x)$  no contiene a  $f(p)$ , luego por el argumento del teorema 1.24 concluimos que  $f$  y  $L$  son homotópicas como aplicaciones  $(U, U \setminus \{p\}) \rightarrow (V, V \setminus \{f(p)\})$ , de donde a su vez llegamos a que  $f_* = L_*$ , es decir, tenemos que  $f$  conserva la orientación si y sólo si lo hace la aplicación afín  $L$ .

Es fácil comprobar que las traslaciones conservan la orientación. En efecto, si  $f$  es una traslación, podemos extenderla a un homeomorfismo de  $S^n$  en sí mismo mediante  $\tilde{f}(\infty) = \infty$ , y es fácil ver que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & H_n(S^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(U, U \setminus \{p\}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V \setminus \{p\}) \end{array}$$

y  $\tilde{f}$  es homotópica a la identidad. Aplicando esto dos veces concluimos que  $L$  conserva la orientación si y sólo si lo hace  $df|_p$ . En resumen:  $f$  conserva la orientación en  $p$  si y sólo si lo hace  $df|_p$ .

Para estudiar un automorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  basta estudiar el automorfismo que induce en  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Un teorema del álgebra lineal afirma que todo automorfismo  $f$  de determinante positivo es composición de transvecciones, es decir, de aplicaciones de la forma  $f(x) = x + u(x)h$ , donde  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación lineal y  $u(h) = 0$ . Es claro entonces que  $H_t(x) = x + tu(x)h$  es una homotopía entre  $f$  y la identidad en  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Así pues, los automorfismos de determinante positivo conservan la orientación.

Para probar que los automorfismos de determinante negativo invierten la orientación basta probar que así sucede con uno en concreto  $\alpha$ , ya que si  $\beta$  es cualquier otro, entonces  $\beta = \alpha \circ (\alpha^{-1} \circ \beta)$ , y el segundo tiene determinante positivo, luego conserva la orientación. Más aún, basta probar que existe un difeomorfismo  $f$  que invierte la orientación, pues su diferencial en un punto será entonces el automorfismo que buscamos.

En el capítulo III probamos que una aplicación ortogonal en  $\mathbb{R}^{n+1}$  induce en  $S^n$  el automorfismo  $\pm 1$ , donde el signo es el de su determinante. Podemos

tomar una simetría (con determinante  $-1$ ) que deje fijo a  $\infty$ , y al componerla con la proyección estereográfica obtenemos un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  en sí mismo que invierte la orientación. En resumen:

*Un difeomorfismo entre dos abiertos conexos de  $\mathbb{R}^n$  conserva la orientación si y sólo si su determinante jacobiano es positivo.*

Ahora generalizamos esto a variedades arbitrarias:

**Teorema 12.1** *Una variedad diferencial  $V$  es orientable si y sólo si tiene un atlas tal que si  $x$  e  $y$  son dos cualesquiera de sus cartas entonces el difeomorfismo  $x^{-1} \circ y$  tiene determinante jacobiano positivo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $\alpha$  es una orientación en  $V$  y fijemos una orientación  $\beta$  en  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que una carta  $x : U \rightarrow \tilde{U}$  está orientada si para todo  $p \in U$  se cumple que  $x_*(\alpha_p) = \beta_{x(p)}$ .

Notemos que  $x_*(\alpha)$  es una orientación de  $\tilde{U}$ , luego si  $U$  es conexo ha de ser  $x_*(\alpha) = \pm\beta$ . Así pues,  $x$  está orientada si y sólo si lo está en uno cualquiera de sus puntos. Además, si no lo está, al componerla con una simetría en  $\mathbb{R}^n$  obtenemos una carta orientada. Por consiguiente, todo punto tiene al menos una carta orientada a su alrededor o, equivalentemente, las cartas orientadas forman un atlas. Si  $x$  e  $y$  son dos cartas orientadas con dominio conexo común, el difeomorfismo  $x^{-1} \circ y$  conserva la orientación, luego tiene determinante positivo.

Recíprocamente, si existe un atlas como el indicado, cada carta orientada induce una orientación en su dominio (la correspondiente a una ordenación prefijada en  $\mathbb{R}^n$ ) y la condición sobre el determinante hace que dos cartas  $x$  e  $y$  alrededor de un mismo punto  $p$  induzcan en él la misma orientación:

$$x_*^{-1}(\alpha_{x(p)}) = y_*^{-1}(y_*(x_*^{-1}(\alpha_{x(p)}))) = y_*^{-1}(\alpha_{y(p)}).$$

Por consiguiente  $V$  es orientable. ■

La caracterización que acabamos de probar es la definición usual de orientabilidad de una variedad diferencial. Al relacionarla con la definición topológica hemos probado algo nada trivial: que la orientabilidad de una variedad depende únicamente de su topología, y no de su estructura diferenciable.

Ahora expresaremos la orientabilidad de una variedad diferencial en términos de formas diferenciales. Recordemos que si  $V$  es un espacio vectorial real de dimensión finita  $n$ , podemos dividir las bases (ordenadas) de  $V$  en dos clases de equivalencia, de modo que dos bases son de la misma clase si y sólo si la matriz de cambio de base tiene determinante positivo. Orientar un espacio vectorial  $V$  es seleccionar —arbitrariamente— una de estas dos clases, de modo que podemos hablar de bases orientadas o positivas (las de la clase elegida) y bases no orientadas o negativas (las de la otra clase). Esta selección podemos hacerla a través de un tensor antisimétrico  $\omega \in A^n(V)$  no nulo. Para ello observamos lo siguiente:

**Teorema 12.2** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$ , sea  $\omega \in A^n(V)$  y sean  $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$  vectores de  $V$  tales que  $w_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j$ , con  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ .

Entonces

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \det(\alpha_{ij}) \omega(v_1, \dots, v_n).$$

DEMOSTRACIÓN: En efecto:

$$\begin{aligned} \omega(w_1, \dots, w_n) &= \omega \left( \sum_{j_1=1}^n \alpha_{1j_1} v_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^n \alpha_{nj_n} v_{j_n} \right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n} \alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{nj_n} \omega(v_{j_1}, \dots, v_{j_n}) \end{aligned}$$

Los sumandos con índices repetidos son nulos. Los restantes corresponden a todas las permutaciones de  $n$  elementos:

$$\begin{aligned} \omega(w_1, \dots, w_n) &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \alpha_{1\sigma^{-1}1} \cdots \alpha_{n\sigma^{-1}n} \omega(v_{\sigma^{-1}1}, \dots, v_{\sigma^{-1}n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (\text{sig } \sigma) \alpha_{\sigma 1,1} \cdots \alpha_{\sigma n,n} \omega(v_1, \dots, v_n) = \det(\alpha_{ij}) \omega(v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

(En realidad queda el determinante de la matriz traspuesta, pero es lo mismo). ■

Así pues, si  $v_1, \dots, v_n$  es una base de  $V$ , un tensor no nulo  $\omega \in A^n(V)$  tiene el mismo signo sobre todas las bases orientadas como  $(v_1, \dots, v_n)$  y el signo opuesto sobre las bases con la orientación opuesta (y se anula sobre los vectores linealmente dependientes). Por consiguiente podemos determinar una orientación de  $V$  estipulando que las bases orientadas son aquellas sobre las que  $\omega$  es positivo. Ahora probaremos que orientar una variedad diferencial es determinar una orientación de cada espacio tangente de forma coherente, es decir, a través de una forma diferenciable.

**Teorema 12.3** Una variedad diferencial  $V$  es orientable si y sólo si existe una forma  $\omega \in \Lambda^n(V)$  que no se anula en ningún punto.

DEMOSTRACIÓN: Si  $V$  es orientable, consideremos un atlas en  $V$  según el teorema 12.1 y sea  $\{\phi_x\}$  una partición de la unidad en  $V$  subordinada al cubrimiento formado los dominios de sus cartas. Si  $(U, x)$  es una de estas cartas, la forma

$$\omega_x = \phi_x dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

está definida y es diferenciable en toda  $V$ , entendiéndose que es nula fuera de  $U$ . La forma

$$\omega = \sum_x \omega_x$$

no se anula en ningún punto. En efecto, fijado  $p$  y una de las cartas orientadas  $x$  alrededor de  $p$ , cada una de las formas  $\omega_y$  que no se anulan en  $p$  es de la forma

$$\alpha \phi_y dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

con  $\alpha > 0$ , pues  $\alpha$  es el determinante jacobiano del cambio de base correspondiente a las cartas  $x$  e  $y$ . Por consiguiente,  $\omega_p$  es un múltiplo positivo de  $dx_1|_p \wedge \cdots \wedge dx_n|_p$ .

Recíprocamente, si  $\omega$  es una forma que no se anula en ningún punto, podemos definir como cartas positivas de  $V$  las cartas  $x$  que cumplen

$$\omega_p(\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p) > 0.$$

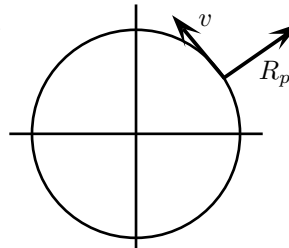
Todo punto tiene a su alrededor una carta en estas condiciones pues, si una carta no sirve, permutando dos coordenadas tenemos una que sirve. Si dos cartas cumplen esto, el determinante jacobiano del cambio de coordenadas en un punto es el de la matriz de cambio de base entre las bases correspondientes del espacio tangente y, como  $\omega$  toma el mismo signo en ambas, es positivo. ■

**Ejemplos** Ahora podemos definir la *orientación canónica* de un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  como la determinada por la forma  $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ , donde  $x_i$  son las coordenadas de la identidad. Es claro que, a través de la identificación natural entre  $T_pU$  y  $\mathbb{R}^n$ , esta orientación es la que hace que la base canónica sea positiva en todo punto.

Vamos a definir ahora una orientación canónica en  $S^n$ . Definimos el *campo radial* de  $\mathbb{R}^n$  como el campo  $R \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  dado por  $R = x_1\partial_{x_1} + \cdots + x_n\partial_{x_n}$ . Observemos que a través de la identificación canónica  $\theta : T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  el campo  $R$  se corresponde con la identidad en  $\mathbb{R}^n$ .

En lo que sigue  $R$  será el campo radial en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Si  $p \in S^n$ , la diferencial de la inclusión  $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  nos permite considerar que  $T_pS^n \subset T_p\mathbb{R}^{n+1}$ . Consideremos la función  $\rho = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2$ . Como  $i \circ \rho$  es constante, tenemos que  $di|_p \circ d\rho|_p = 0$ , es decir, que  $d\rho|_p$  se anula sobre  $T_pS^n$ . Por el contrario,  $d\rho|_p(R_p) = 2$ , lo que prueba que  $R_p \notin T_p(S^n)$ . Así pues, una base de  $T_pS^n$  se completa a una base de  $T_p\mathbb{R}^{n+1}$  si se le añade  $R_p$  como primer vector. Esto implica que si  $\omega$  es una  $n+1$ -forma en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que no se anula en ningún punto, entonces  $i_{\#}(i_R(\omega))$  (def. 11.9) es una  $n$ -forma en  $S^n$  que no se anula en ningún punto. Puesto que  $i_R(f\omega) = fi_R(\omega)$ , tenemos que si dos formas determinan la misma orientación en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , las formas correspondientes en  $S^n$  determinan la misma orientación. En otras palabras, cada orientación en  $\mathbb{R}^{n+1}$  determina así una orientación en  $S^n$ . La *orientación canónica* de  $S^n$  es la inducida por la orientación canónica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Observemos que, a través de la identificación canónica entre cada  $T_p\mathbb{R}^{n+1}$  y  $\mathbb{R}^{n+1}$ , el vector  $R_p$  se corresponde con el vector normal a  $S^n$  que apunta “hacia afuera”. En el caso de  $S^1$ , las bases orientadas de cada  $T_pS^1$  son las formadas por vectores  $v$  que apuntan en sentido antihorario, pues así la base  $(R_p, v)$  tiene la orientación de la base canónica.



La *orientación producto* en un producto  $V_1 \times V_2$  de variedades orientables es la determinada por la forma  $\omega = \omega_1 \times \omega_2 = \pi_{1\#}(\omega_1) \wedge \pi_{2\#}(\omega_2)$ , donde  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son

formas que inducen las orientaciones de los factores. Si  $(p, q) \in V_1 \times V_2$  y  $x, y$  son sistemas de coordenadas orientados alrededor de  $x$  e  $y$ , entonces, alrededor de estos puntos

$$\omega_1 = f_1 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m, \quad \omega_2 = f_2 dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n,$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son estrictamente positivas. Por consiguiente, alrededor de  $(p, q)$ ,

$$\omega_1 \times \omega_2 = f_1 f_2 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n.$$

Vemos así que  $\omega_1 \times \omega_2$  no se anula en ningún punto, luego determina una orientación en el producto. Así mismo es claro que si cambiamos  $\omega_1$  y  $\omega_2$  por formas que inducen la misma orientación, entonces la nueva forma producto induce la misma orientación. ■

**Teorema 12.4** *Si  $V$  es una variedad diferencial, el fibrado de tangentes  $TV$  es siempre una variedad orientable.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que las cartas con que hemos definido la estructura diferencial de  $TV$  forman un atlas orientado, es decir, que satisface el teorema 12.1. En efecto, hablamos de las cartas de la forma

$$\bar{x}(p, v) = (x_1(p), \dots, x_n(p), dx_1|_p(v), \dots, dx_n|_p(v)),$$

donde  $x$  es una carta de  $V$ . Si  $y$  es otra carta, entonces la matriz jacobiana de  $\bar{x}^{-1} \circ \bar{y}$  es de la forma

$$\left( \begin{array}{c|c} J & * \\ \hline 0 & J \end{array} \right),$$

donde  $J$  es la matriz jacobiana de  $x^{-1} \circ y$ . Por consiguiente el determinante es  $|J|^2 > 0$ . ■

Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $\omega \in A^n(V)$  es un tensor no nulo, entonces  $\omega$  contiene más información que una orientación de  $V$ . En efecto, la orientación que  $\omega$  determina en  $V$  depende únicamente del signo del valor que toma  $\omega$  sobre las bases de  $V$ , pero con esto no tenemos en cuenta el valor en sí.

Supongamos que  $V$  tiene una estructura de espacio vectorial euclídeo, es decir, que en  $V$  tenemos definido un producto escalar, y consideremos una orientación en  $V$  determinada por un tensor no nulo  $\omega \in A^n(V)$ . Puesto que la matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales de  $V$  tiene determinante  $\pm 1$ , el teorema 12.2 implica que  $\omega$  toma un mismo valor  $\alpha > 0$  sobre todas las bases ortonormales positivas y el valor  $-\alpha$  sobre todas las bases ortonormales negativas. Si llamamos  $dm = \alpha^{-1}\omega$ , tenemos un tensor que determina la misma orientación que  $\omega$  y caracterizado por la propiedad de que toma los valores  $\pm 1$  sobre las bases ortonormales de  $V$ .

Equivalentemente, en un espacio vectorial euclídeo  $n$ -dimensional  $V$ , las dos orientaciones posibles se corresponden con los dos únicos tensores antisimétricos de dimensión  $n$  que asignan el valor  $\pm 1$  a las bases ortonormales.



Esta forma de asociar un tensor antisimétrico canónico a cada orientación no es meramente formal, sino que tiene una interpretación natural. Podemos transportar a  $V$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$  a través de una isometría arbitraria  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es decir, definimos los conjuntos medibles  $A \subset V$  como aquellos para los que  $f[V]$  es medible Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$  y en tal caso la medida de  $A$  es  $m(A) = \mu(f[A])$ , donde  $\mu$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ . Teniendo en cuenta que las isometrías de  $\mathbb{R}^n$  en sí mismo conservan los conjuntos medibles y la medida de los mismos, es claro que  $m$  no depende de la elección de  $f$ .

Usando el teorema 12.2 y el teorema de cambio de variable (que obviamente es válido en  $V$ ) se prueba fácilmente que  $dm(v_1, \dots, v_n)$  es —salvo el signo, que indica la orientación— la medida del paralelepípedo determinado por los vectores  $v_1, \dots, v_n$  (el conjunto formado por los puntos  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ , con  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ ).

Teniendo esto en cuenta, al tensor  $dm$  lo llamaremos *elemento de medida* o *elemento de volumen* (orientado) de  $V$ .

Las propiedades de regularidad de la medida de Lebesgue permiten probar que dos estructuras euclídeas en un espacio  $V$  determinan (para una misma orientación) el mismo elemento de medida  $dm$  si y sólo si determinan la misma medida  $m$ .

Consideremos ahora una variedad de Riemann orientable  $V$  de dimensión  $n$ . Si  $\omega \in \Lambda^n(V)$  es una  $n$ -forma que no se anula en ningún punto (según el teorema 12.3), para cada  $p \in V$  tenemos que  $\omega_p$  determina una orientación de  $T_p(V)$ , mientras que la métrica  $g_p$  determina una estructura euclídea. Por consiguiente podemos considerar el elemento de volumen  $dm_p$  determinado por ambas. Vamos a probar que  $dm \in \Lambda^n(V)$ , es decir, que la forma  $dm$  así definida es diferenciable. La llamaremos *elemento de medida* o *elemento de volumen* (orientado) de  $V$ .

En efecto, si  $p \in V$  y  $e_1, \dots, e_n$  es una base ortonormal positiva de  $T_p V$ , tenemos por definición que  $dm_p(e_1, \dots, e_n) = 1$ . Consideremos ahora una carta orientada  $x$  alrededor de  $p$ . Sea  $\partial x_i|_p = \sum_k \alpha_{ik} e_k$ . Entonces

$$dm_p(\partial x_1|_p, \dots, \partial x_n|_p) = \det(\alpha_{ij}) dm_p(e_1, \dots, e_n) = \det(\alpha_{ij}).$$

Por otra parte,

$$g_{ij}(p) = g_p(\partial x_i|_p, \partial x_j|_p) = \sum_{kl} \alpha_{ik} \alpha_{jl} g_p(e_k, e_l) = \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk}$$

y al tomar determinantes queda

$$\det(g_{ij}(p)) = \det(\alpha_{ij})^2.$$

Así pues,  $dm_p(\partial x_1|_p, \dots, \partial x_n|_p) = \sqrt{\det g_{ij}(p)}$ , con lo que, si  $U$  es el dominio de la carta  $x$ , tenemos

$$dm|_U = \sqrt{\det g_{ij}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Ahora es obvio que  $dm$  es diferenciable. Esto nos lleva a la definición siguiente:

**Definición 12.5** Si  $V$  es una variedad de Riemann orientable de dimensión  $n$ , llamaremos *elemento de medida* o *elemento de volumen* de  $V$  a la única forma diferencial  $dm \in \Lambda^n(V)$  cuya expresión en un sistema de coordenadas orientado arbitrario es

$$dm = \sqrt{\det g_{ij}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Observemos que el elemento de volumen depende de una orientación pre-fijada en  $V$ . Si cambiamos de orientación el elemento de volumen cambia de signo.

No hay que ver en la notación  $dm$  ninguna relación con la diferencial exterior. De hecho en la sección siguiente probaremos que en una variedad compacta  $dm$  no puede ser la diferencial de ninguna forma de dimensión  $n - 1$ . La notación que empleamos se debe a que, como veremos también en la sección siguiente, el elemento de volumen determina mediante el cálculo integral el volumen de una variedad. De momento lo que podemos constatar es que  $dm_p$  determina la medida de  $T_p V$  asociada al producto euclídeo.

**Ejemplo** Vamos a calcular el elemento de volumen (de longitud, en este caso) de la circunferencia  $S^1$ . Para ello observamos que la aplicación  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$  es un difeomorfismo local, luego en un entorno de cada punto  $p \in S^1$  tiene una inversa  $t$  que sirve como sistema de coordenadas. Si llamamos  $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a la inclusión, tenemos que

$$di|_p(\partial_t|_p) = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p = -\sin t(p) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \cos t(p) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p,$$

luego el único coeficiente de la métrica de  $S^1$  respecto a la coordenada  $t$  es

$$g_{11}(p) = g_p(\partial_t|_p, \partial_t|_p) = g_p(di|_p(\partial_t|_p), di|_p(\partial_t|_p)) = \sin^2 t(p) + \cos^2 t(p) = 1.$$

Por consiguiente  $dm = dt$ . Hemos de tener presente que la función  $t(p)$  sólo está definida en un entorno de cada punto  $p$ , pero no sobre toda  $S^1$ . No obstante podemos encontrar una expresión global para el elemento de volumen. En efecto, basta observar que, en un entorno de cada punto  $p$ ,

$$x dy - y dx = \cos t \cos t dt - \sin t(-\cos t) dt = dt.$$

Así pues,  $dm = x dy - y dx$ , donde esta última forma sí está definida sobre toda  $S^1$ . ■

Observemos que  $dm_p$  es una forma que no se anula en ningún punto. Si  $\omega$  es cualquier forma con esta propiedad en una variedad diferencial  $V$ , entonces existe una métrica en  $V$  (no necesariamente única) respecto a la cual  $\omega$  es el elemento de volumen. En efecto, si  $g$  es una métrica arbitraria en  $V$ , se cumplirá que  $\omega = f dm$ , para una cierta función diferenciable  $f > 0$  (considerando en  $V$  la orientación determinada por  $\omega$ ). Basta considerar la métrica  $\tilde{g} = \sqrt[n]{f} g$ .

Para terminar recordemos la variedad de orientaciones de una variedad topológica  $V$ , definida en 7.13 (para  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ ). Se trata de un cubrimiento de  $V$

de orden 2, es decir, existe una proyección  $\pi : \tilde{V}_1 \rightarrow V$  tal que cada punto  $p \in V$  tiene un entorno fundamental  $U$  de modo que  $\pi^{-1}[U]$  tiene exactamente dos componentes conexas  $U_1$  y  $U_2$  y  $\pi$  se restringe a un homeomorfismo sobre ambas.

Si  $V$  es una variedad diferencial y  $p \in \tilde{V}_1$ , podemos tomar un entorno fundamental  $U$  de  $\pi(p)$  que sea además sea el dominio de una carta  $x$ . Si  $U_1$  es la componente conexa de  $\pi^{-1}[U]$  que contiene a  $p$ , entonces  $\pi|_{U_1} \circ x$  es una carta alrededor de  $p$ , y es fácil ver que las cartas construidas de este modo determinan una estructura diferencial en  $\tilde{V}_1$ . De hecho se tiene el teorema siguiente:

**Teorema 12.6** *Si  $V$  es una variedad diferencial y  $W$  es su variedad de orientaciones, entonces existe una única estructura diferencial en  $W$  respecto a la cual la proyección canónica  $\pi : W \rightarrow V$  es un difeomorfismo local.*

**Ejercicio:** Construir directamente la variedad de orientaciones de una variedad diferencial  $V$  (tomando como puntos las clases de equivalencia de cartas igualmente orientadas alrededor de cada punto de  $V$ ). Demostrar directamente que la variedad de orientaciones es orientable, así como que es conexa si y sólo si  $V$  no es orientable y tiene dos componentes conexas en caso contrario.

Si  $J : W \rightarrow W$  es la aplicación que a cada  $x \in W$  le asigna la otra antiimagen de  $\pi(x)$ , es claro que  $J$  es un difeomorfismo que invierte la orientación. Tenemos que  $J$  es una *involución* de  $W$ , es decir, es un difeomorfismo tal que  $J \circ J = I$  (donde  $I$  es la identidad en  $W$ ). Consecuentemente  $J_{\#} : \Lambda(W) \rightarrow \Lambda(W)$  es un automorfismo con la misma propiedad:  $J_{\#} \circ J_{\#} = I$ . Podemos descomponer  $\Lambda(W) = \Lambda_+(W) \oplus \Lambda_-(W)$ , donde

$$\Lambda_+(W) = \{\omega \in \Lambda(W) \mid J_{\#}(\omega) = \omega\}, \quad \Lambda_-(W) = \{\omega \in \Lambda(W) \mid J_{\#}(\omega) = -\omega\}.$$

En efecto, basta tener en cuenta que

$$\omega = \frac{\omega + J_{\#}(\omega)}{2} + \frac{\omega - J_{\#}(\omega)}{2}.$$

Es claro que  $\Lambda_+(W)$  y  $\Lambda_-(W)$  son subcomplejos de  $\Lambda(W)$ , y es fácil ver que  $H(W) = H_+(W) \oplus H_-(W)$ , donde

$$H_+(W) = \{\alpha \in H(W) \mid J^*(\alpha) = \alpha\}, \quad H_-(W) = \{\alpha \in H(W) \mid J^*(\alpha) = -\alpha\}.$$

El interés de estos grupos de cohomología se debe a lo siguiente:

**Teorema 12.7** *Sea  $\pi : W \rightarrow V$  un difeomorfismo local entre variedades, es decir,  $\pi$  es diferenciable y suprayectiva y todo punto de  $W$  tiene un entorno abierto  $U$  tal que  $\pi[U]$  es abierto en  $V$  y  $\pi|_U$  es un difeomorfismo en su imagen. Sea  $J$  una involución en  $W$  y supongamos que para todo  $p \in V$  se cumple  $\pi^{-1}(p) = \{q, J(q)\}$ , para cierto  $q \in W$ . Entonces  $H^k(V) \cong H_+^k(W)$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Basta probar que  $\pi_{\#} : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda_+(W)$  es un isomorfismo. Puesto que  $J \circ \pi = \pi$ , tenemos que  $\pi_{\#} \circ J_{\#} = \pi_{\#}$ , luego la imagen de  $\pi_{\#}$  (que en principio estaría en  $\Lambda(W)$ ) está en  $\Lambda_+(W)$ .

Para probar que es inyectiva tomemos  $\omega \in \Lambda^k(V)$  no nula y veamos que su imagen es no nula. Tenemos que existe  $p \in V$  y  $v_1, \dots, v_k \in T_p(V)$  de modo que  $\omega_p(v_1, \dots, v_k) \neq 0$ . Sea  $p = \pi(q)$ , con  $q \in W$ . El hecho de que  $\pi$  sea un difeomorfismo local se traduce en que  $d\pi|_q$  es un isomorfismo, con lo que existen vectores  $w_1, \dots, w_k$  tales que  $d\pi|_q(w_i) = v_i$ . Es claro entonces que

$$\pi_{\#}(\omega)_q(w_1, \dots, w_k) = \omega_p(v_1, \dots, v_k) \neq 0,$$

luego  $\pi_{\#}(\omega) \neq 0$ .

Tomemos ahora  $\omega \in \Lambda_+^k(W)$  y veamos que tiene una antiimagen. Fijemos un punto  $p \in V$ . Sea  $q \in W$  tal que  $\pi(q) = p$ . Sea  $U$  un entorno de  $q$  en el cual  $\pi$  sea un difeomorfismo. Sea  $\omega^p = (\pi|_U^{-1})_{\#}(\omega|_{\pi[U]})$ , que es una  $k$ -forma en  $\pi[U]$ .

Veamos que  $\omega^p$  no depende de ninguna de las elecciones que hemos hecho para construirla. Si  $p'$  es cualquier punto en  $\pi[U]$  y  $q'$  es su antiimagen en  $U$ , entonces

$$\omega_{p'}^p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{q'}(d\pi_{q'}^{-1}(v_1), \dots, d\pi_{q'}^{-1}(v_k)). \quad (12.1)$$

Esta expresión no depende más que de  $\omega$  salvo por el hecho de que hemos escogido la antiimagen  $q'$  de  $p'$ . Sólo hay otra alternativa, pues  $p'$  no tiene más antiimágenes que  $q'$  y  $J(q')$ . Ahora bien, si en (12.1) sustituimos  $q'$  por  $J(q')$  el miembro derecho se convierte en  $\omega_{J(q')}$  actuando sobre los vectores  $d\pi_{J(q')}^{-1}(v_i)$ , pero se cumple que  $J \circ \pi = \pi$ , y por consiguiente  $d\pi|_{q'} = dJ|_{q'} \circ d\pi|_{J(q')}$ , luego  $d\pi_{J(q')}^{-1}(v_i) = dJ|_{q'}(d\pi_{q'}^{-1}(v_i))$  y, en definitiva, el miembro derecho de (12.1) se transforma en  $\omega_{J(q')}$  actuando sobre los vectores  $dJ|_{q'}(d\pi_{q'}^{-1}(v_i))$ , pero esto es lo mismo que

$$J_{\#}(\omega)_{q'}(d\pi_{q'}^{-1}(v_1), \dots, d\pi_{q'}^{-1}(v_k)),$$

que da el mismo resultado, porque  $\omega \in \Lambda_+(W)$ .

De este modo, para cada punto  $p \in V$  hemos construido una forma  $\omega^p$  en un entorno que al actuar sobre un punto  $q'$  cualquiera da un resultado que sólo depende de  $\omega$ . Por lo tanto, dos formas  $\omega^p$  y  $\omega^{p'}$  coincidirán en su dominio común, luego la familia de formas que hemos definido determina una única forma  $\omega^* \in \Lambda^k(V)$ , que en un entorno de cada punto viene dada por (12.1). Es inmediato que  $\pi_{\#}(\omega^*) = \omega$ . ■

En particular tenemos una representación de la cohomología de una variedad diferencial  $V$  en términos de la cohomología de su variedad de orientaciones  $W$ , lo cual interesa esencialmente porque la variedad de orientaciones siempre es orientable.

## 12.2 Integración de formas diferenciales

El concepto de integral de una función real, tal y como se entiende en análisis, carece de sentido si no hay definida una medida en el dominio de la función (aunque sea implícitamente, como en el caso de la integral de Riemann, que no es sino un caso particular de la integral respecto de la medida de Lebesgue). En cambio, si  $V$  es una variedad diferencial de dimensión  $n$  y  $\omega \in \Lambda_c^n(V)$ ,

podemos definir la integral de  $\omega$  sin necesidad de apoyarnos en ninguna medida en  $V$ . La razón es que  $\omega$  determina —según hemos explicado en el capítulo anterior— una única medida en cada espacio  $T_p V$ , de modo que la integral de  $\omega$  es el límite de la “operación” siguiente: dividimos  $V$  en regiones muy pequeñas, identificamos cada una de estas regiones con una región del espacio tangente a uno de sus puntos, medimos dicha región con la medida que la propia  $\omega$  determina y sumamos las cantidades obtenidas. Por conveniencia definiremos la integral algebraicamente, sin tratar de relacionarla con el proceso geométrico que acabamos de esbozar.

Consideramos primero el caso de formas definidas en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Observemos que toda forma  $\omega \in \Lambda_c^n(U)$  se puede expresar de forma única como  $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ , donde  $f \in \Lambda_c^0(U)$ . En particular  $f$  es integrable Lebesgue en  $U$ . Esto justifica la definición siguiente:

**Definición 12.8** Si  $U$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $G$  es un abierto en  $U$ , definimos  $\int_G : \Lambda_c^n(U) \rightarrow \mathbb{R}$  como la aplicación lineal dada por

$$\int_G f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_G f d\mu,$$

donde  $\mu$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ .

El teorema de cambio de variable encuentra su formulación natural en términos de formas diferenciales. A continuación probamos el caso particular para abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , que pronto generalizaremos a variedades arbitrarias.

**Teorema 12.9** Sea  $h : U \rightarrow h[U]$  un difeomorfismo entre abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , sea  $G$  un abierto en  $U$  y  $\omega \in \Lambda_c^n(h[U])$ . Entonces

$$\int_G h_\#(\omega) = \pm \int_{h[G]} \omega,$$

donde el signo es positivo si  $h$  conserva la orientación y negativo en caso contrario.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\omega = f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ . Entonces

$$\begin{aligned} h_\#(\omega) &= (h \circ f) dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_n = (h \circ f) \det J_h dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \pm (h \circ f) |\det J_h| dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \end{aligned}$$

donde  $J_h$  es la matriz jacobiana de  $h$ , cuyo determinante es positivo si y sólo si  $h$  conserva la orientación. Ahora basta aplicar el teorema de cambio de variable:

$$\begin{aligned} \int_G h_\#(\omega) &= \pm \int_G (h \circ f) |\det J_h| dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \pm \int_{h[G]} f d\mu = \pm \int_{h[G]} \omega. \end{aligned}$$

■

Para justificar la consistencia de la definición general de integral que vamos a adoptar necesitamos un último resultado técnico, cuya prueba es inmediata:

**Teorema 12.10** Sean  $U$  y  $G$  y  $\tilde{U}$  abiertos en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $U \cup G \subset \tilde{U}$  y sea  $\omega \in \Lambda_c^n(\tilde{U})$  una forma diferencial tal que  $\text{supp } \omega \subset G$ . Entonces

$$\int_U \omega = \int_{U \cap G} \omega.$$

Consideremos ahora una variedad diferencial orientable  $V$  de dimensión  $n$  y  $\omega \in \Lambda_c^n(V)$ . Cubramos  $V$  por un atlas orientado localmente finito  $\{(U_i, x_i)\}_i$  y sea  $\{f_i\}_i$  una partición de la unidad subordinada. Entonces  $\omega = \sum_i f_i \omega$ , donde cada forma  $\omega_i = f_i \omega$  tiene soporte compacto contenido en el abierto coordenado  $U_i$ . Si  $G$  es un abierto en  $V$ , definimos

$$\int_G \omega = \sum_i \int_{x_i[G \cap U_i]} (x_i^{-1})_{\#}(\omega_i).$$

Hemos de comprobar que esta definición no depende de la elección del atlas ni de la partición de la unidad. Para ello observamos en primer lugar que la integral, así definida es lineal.

En segundo lugar, si  $\omega$  es una forma cuyo soporte está contenido en el dominio de una carta orientada  $x : U \rightarrow \tilde{U}$ , entonces

$$\int_G \omega = \int_{x[G \cap U]} x_{\#}^{-1}(\omega). \quad (12.2)$$

En efecto, para cada índice  $i$ , la forma  $(x_i^{-1})_{\#}(\omega_i)$  está definida en el rango  $\tilde{U}_i$  de la carta  $x_i$  y tiene su soporte contenido en  $x_i[U \cap U_i]$ , luego por el teorema 12.10 se cumple que

$$\int_{x_i[G \cap U_i]} (x_i^{-1})_{\#}(\omega_i) = \int_{x_i[G \cap U \cap U_i]} (x_i^{-1})_{\#}(\omega_i)$$

Ahora aplicamos 12.9 al difeomorfismo  $x_i^{-1} \circ x$  y de nuevo 12.10:

$$\int_{x_i[G \cap U_i]} (x_i^{-1})_{\#}(\omega_i) = \int_{x[G \cap U \cap U_i]} x_{\#}^{-1}(\omega_i) = \int_{x[G \cap U]} x_{\#}^{-1}(\omega_i).$$

Así pues, la integral de  $\omega$  es

$$\int_G \omega = \sum_i \int_{x[G \cap U]} x_{\#}^{-1}(\omega_i) = \int_{G \cap U} x_{\#}^{-1}(\omega).$$

Con esto es inmediato que la definición siguiente es consistente:

**Definición 12.11** Si  $G$  es un abierto en una variedad diferencial orientable  $V$  de dimensión  $n$ , definimos

$$\int_G : \Lambda_c^n(V) \rightarrow \mathbb{R}$$

como la única aplicación lineal que cumple

$$\int_G \omega = \sum_{i=1}^r \int_{x_i[U_i \cap G]} (x_i^{-1})_{\#}(\omega_i),$$

para cualquier descomposición  $\omega = \omega_1 + \dots + \omega_r$  de  $\omega$  en formas  $\omega_i$  con soporte compacto contenido en el dominio de una carta positiva  $(U_i, x_i)$  de  $V$  (donde las integrales del segundo miembro son las definidas en 12.8).

Observemos que siempre existe tal descomposición: tomamos una partición de la unidad subordinada a un atlas orientado localmente finito y extraemos un subcubrimiento finito del soporte de  $\omega$ . La definición previa que hemos dado de integral justifica la existencia, mientras que la unicidad es evidente.

También es claro que la definición de integral que acabamos de dar coincide con 12.8 en el caso de formas definidas en un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . En la práctica podemos olvidar la definición de integral en una variedad, pues está contenida en el teorema siguiente, la forma general del teorema de cambio de variable:

**Teorema 12.12** *Sea  $f : V \rightarrow W$  un difeomorfismo entre variedades diferenciales orientables de dimensión  $n$ , sea  $\omega \in \Lambda_c^n(W)$  y  $G$  abierto en  $V$ . Entonces*

$$\int_G f_{\#}(\omega) = \pm \int_{f[G]} \omega,$$

donde el signo es positivo o negativo según si  $f$  conserva o invierte la orientación.

DEMOSTRACIÓN: Descomponiendo  $\omega$  en sumandos podemos suponer que  $\text{sop } \omega$  está contenido en un abierto coordinado  $U_2$  de  $W$  tal que  $U_1 = f^{-1}[U_2]$  es un abierto coordinado de  $V$  (y entonces  $\text{sop } f_{\#}(\omega) \subset U_1$ ). Cambiando  $G$  por  $G \cap U_1$  podemos suponer que  $G \subset U_1$ . Si  $(U_1, x_1)$  y  $(U_2, x_2)$  son cartas orientadas y  $\tilde{f} = x_1^{-1} \circ f \circ x_2$ , aplicando (12.10) y 12.9 tenemos que

$$\int_G f_{\#}(\omega) = \int_{x_1[G]} (x_1^{-1})_{\#}(f_{\#}(\omega)) = \pm \int_{x_2[f[G]]} (x_2^{-1})_{\#}(\omega) = \int_{f[G]} \omega,$$

donde el signo es positivo o negativo según si  $\tilde{f}$  conserva o invierte la orientación, lo cual equivale a que  $f$  conserve o invierta la orientación, respectivamente. ■

El teorema siguiente recoge algunos hechos básicos sobre integrales. Todos ellos se demuestran sin dificultad reduciéndolos a integrales sobre abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , en cuyo caso resultan ser propiedades conocidas de la integral de Lebesgue.

**Teorema 12.13** *Sea  $V$  una variedad diferencial orientable de dimensión  $n$  y  $\omega \in \Lambda_c^n(V)$ . Entonces*

a) *Si  $G_1$  y  $G_2$  son abiertos de  $V$  tales que*

$$\{x \in G_1 \mid \omega_x \neq 0\} = \{x \in G_2 \mid \omega_x \neq 0\},$$

*entonces  $\int_{G_1} \omega = \int_{G_2} \omega$ .*

b) Si  $G$  es abierto en  $V$  y  $\omega|_G = 0$ , entonces  $\int_G \omega = 0$ .

c) Si  $G_1$  y  $G_2$  son abiertos disjuntos en  $V$ , entonces

$$\int_{G_1 \cup G_2} \omega = \int_{G_1} \omega + \int_{G_2} \omega.$$

d) Si  $\omega \in \Lambda^n(V)$  determina la orientación de  $V$  y  $f \in \Lambda_c^0(V)$  es no nula y  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in V$ , entonces  $\int_V f\omega > 0$ .

**Nota** Si  $V$  es una variedad de Riemann compacta y orientable, podemos definir su *volumen* como la integral (en  $V$ ) de su elemento de volumen  $dm$ . Puede probarse que ésta es la definición adecuada desde el punto de vista geométrico. Puesto que no vamos a necesitar este hecho, nos limitaremos a esbozar las ideas subyacentes: Consideremos en principio una variedad de Riemann orientable  $V$  no necesariamente compacta. La definición de integral que hemos dado es válida en realidad para  $n$ -formas diferenciales continuas, no necesariamente diferenciables. Si la extendemos así, podemos definir la integral de una función continua  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  de soporte compacto como la integral de la  $n$ -forma  $f dm$ . Así tenemos un operador lineal positivo y, por el teorema de representación de Riesz, existe una única medida regular  $m$  en  $V$  tal que la integral de  $f dm$  es la integral de  $f$  respecto a la medida  $m$  en el sentido de la teoría de la medida. Si  $V$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^k$ , puede probarse que la medida  $m$  en  $V$  “se confunde” con la medida  $dm_p$  de  $T_p V$  alrededor de cada punto  $p$ , en el sentido de que —por ejemplo— si  $U_p$  es un entorno de  $0$  en  $T_p V$  y  $U = \exp_p[U_p]$ , entonces el error relativo

$$\frac{|m(U) - dm_p(U_p)|}{m(U)}$$

puede hacerse arbitrariamente pequeño si tomamos  $U$  suficientemente pequeño (es decir,  $U$  contenido en un entorno adecuado de  $p$  o  $U_p$  en un entorno adecuado de  $0$ ).

Por otra parte, la medida  $m$  puede definirse aunque  $V$  no sea orientable. Para ello basta observar que el signo de la integral de una función con soporte compacto contenido en un abierto coordinado no depende de la orientación que se escoja en dicho abierto (una función positiva tendrá siempre integral positiva) y mediante particiones de la unidad podemos definir la integral de una función (no de una  $n$ -forma) con soporte compacto, sin hacer referencia a una orientación en  $V$ , lo que nos permite construir  $m$  como hemos indicado. ■

Ahora probamos que la integral de una forma diferencial sobre una variedad  $V$  depende únicamente de su clase de cohomología, de modo que la integral induce una aplicación lineal sobre  $H_c^n(V)$ . En efecto:

**Teorema 12.14** Sea  $V$  una variedad orientable  $n$ -dimensional y  $\omega \in \Lambda_c^{n-1}(V)$ . Entonces

$$\int_V d\omega = 0.$$



DEMOSTRACIÓN: Para cada punto  $p \in V$  podemos considerar una carta orientada  $(U_p, x)$  tal que  $x[U_p]$  contenga al símplice canónico  $\Delta_n$  y de modo que  $x(p)$  esté en su interior. De este modo, la restricción de  $x_p^{-1}$  a  $\Delta_n$  es un  $n$ -símplice diferenciable  $\sigma_p$  que tiene a  $p$  en su imagen.

Tomamos un entorno abierto  $U'_p$  de  $p$  contenido en  $|\sigma_p|$ . Los abiertos  $U'_p$  forman un cubrimiento de  $V$ , del que podemos extraer un subcubrimiento localmente finito. Tomamos una partición de la unidad subordinada y descomponemos  $\omega$  en suma de un número finito de formas, cada una de las cuales tiene su soporte en un abierto  $U'_p$ . Así pues, podemos suponer que  $\text{sop } \omega \subset U'_p$ , y entonces el teorema de Stokes nos da que

$$\int_V d\omega = \int_{V'_p} d\omega = \int_{\sigma_p} d\omega = \int_{\partial\sigma_p} \omega = 0,$$

pues  $\omega$  es nula sobre  $|\partial\sigma_p|$ . ■

**Definición 12.15** Sea  $V$  una variedad orientable de dimensión  $n$ . Representaremos por

$$\int_V^* : H_c^n(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

al epimorfismo inducido por la integración sobre  $V$ .

Observemos que el apartado d) del teorema 12.13 muestra que la integración sobre  $V$  no es la aplicación nula, luego es un epimorfismo de espacios vectoriales, luego la aplicación lineal que induce en  $H_c^n(V)$  también lo es.

En el caso de una variedad compacta conexa y orientable  $V$  hay una relación muy estrecha entre la integración sobre  $V$  y la integración sobre símplices. Puede probarse que un representante de la clase fundamental es el ciclo formado por una triangulación de  $V$ , es decir, un ciclo diferenciable, con coeficientes iguales a 1, cuyo soporte sea toda la variedad  $V$  y de modo que la intersección de los soportes de dos cualesquiera de sus símplices sea vacía o un  $n-1$ -símplice común a sus fronteras. Entonces es claro que integrar sobre  $V$  equivale a integrar sobre este ciclo. No obstante, demostrar que toda variedad compacta diferencial es triangulable es muy complicado. Sin embargo podemos probar la equivalencia de las integrales mediante un argumento local:

**Teorema 12.16** Sea  $V$  una variedad diferencial compacta, conexa y orientable de dimensión  $n$  y sea  $\zeta$  su clase fundamental. Entonces, para toda  $\omega \in H_c^n(V)$  se cumple que

$$\int_\zeta^* \omega = \int_V^* \omega.$$

DEMOSTRACIÓN: Si  $p \in V$ , por definición de clase fundamental (ver el teorema 7.22 y el párrafo siguiente) tenemos que la identidad induce un isomorfismo  $j_p : H_n(V) \longrightarrow H_n(V, V \setminus \{p\})$  (consideramos la homología con coeficientes enteros). Según la observación tras el teorema 7.1, un generador del grupo

$H_n(V, V \setminus \{p\})$  es la clase de cualquier  $n$ -símplice inyectivo  $\sigma$  que tenga a  $p$  en el interior de su soporte. Podemos tomarlo diferenciable. Más aún, cambiando su orientación si es preciso podemos suponer que  $j_p(\zeta) = [\sigma]$ . Sea  $\zeta = [c]$ . Entonces  $c = \sigma + c' + \partial b$ , donde  $|c'| \subset V \setminus \{p\}$ .

Sea  $U_p$  un entorno de  $p$  contenido en el interior del soporte de  $\sigma$  y disjunto del soporte de  $c'$ . De este modo, si  $\omega \in \Lambda^n(V)$  cumple  $\text{sop } \omega \subset U_p$ , entonces

$$\int_c \omega = \int_\sigma \omega + \int_{c'} \omega + \int_{\partial b} \omega = \int_\sigma \omega + \int_b d\omega = \int_\sigma \omega = \int_V \omega.$$

La última igualdad se sigue inmediatamente de las definiciones de integral de una forma sobre un símplice y sobre un abierto.

De este modo, para cada punto  $p$  hemos encontrado un entorno abierto  $U_p$  de modo que si una  $n$ -forma tiene su soporte en  $U_p$  entonces su integral sobre  $\zeta$  coincide con su integral sobre  $V$ . Mediante una partición de la unidad, toda  $n$ -forma  $\omega$  se descompone como  $\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_r$ , de modo que cada  $\omega_i$  tiene su soporte en un abierto  $U_i$  en las condiciones anteriores. Entonces

$$\int_\zeta \omega = \sum_i \int_{\zeta} \omega_i = \sum_i \int_V \omega_i = \int_V \omega.$$

■

Para terminar con los resultados básicos sobre integración de formas diferenciales demostraremos dos casos particulares del teorema de Stokes para variedades (su formulación general requeriría introducir las variedades con frontera).

**Teorema 12.17 (Teorema de Stokes para anillos)** *Sea  $V$  una variedad diferencial orientable y  $\omega \in \Lambda_c^n(\mathbb{R} \times V)$ , sea  $J = ]a, b[$  y  $j_a, j_b : V \rightarrow \mathbb{R} \times V$  las inclusiones en  $\{a\} \times V$  y  $\{b\} \times V$  respectivamente. Entonces*

$$\int_{J \times V} d\omega = \int_V j_{b\#}(\omega) - \int_V j_{a\#}(\omega).$$

DEMOSTRACIÓN: La situación es la misma que la que teníamos en la prueba del teorema de homotopía para la cohomología de De Rham. Si llamamos  $t$  a la proyección en la primera coordenada en  $\mathbb{R} \times V$ , tenemos definido el campo  $\partial_t$  sobre todo el producto. Así mismo tenemos definido el operador integral  $I_a^b$ , que combinado con la evaluación en  $\partial_t$  nos da una aplicación

$$i_{\partial_t} \circ I_a^b : \Lambda^p(\mathbb{R} \times V) \rightarrow \Lambda^{p-1}(V).$$

Es fácil ver que se restringe a  $i_{\partial_t} \circ I_a^b : \Lambda_c^p(\mathbb{R} \times V) \rightarrow \Lambda_c^{p-1}(V)$ .

Veamos que, para toda forma  $\eta \in \Lambda_c^{n+1}(\mathbb{R} \times V)$ , se cumple

$$\int_{J \times V} \eta = \int_V I_a^b(i_{\partial_t}(\eta)).$$

En efecto, tomamos una partición de la unidad en  $V$  subordinada a un cubrimiento de abiertos coordenados. Si  $f$  es una función de la partición, la función  $\tilde{f}(t, x) = f(x)$  está definida en  $\mathbb{R} \times V$  y estas funciones forman una partición de la unidad de  $\mathbb{R} \times V$ . Con estas funciones descomponemos  $\eta$  en una suma localmente finita de formas con soporte compacto contenido en  $\mathbb{R} \times U$ , donde  $U$  es un abierto coordenado de  $V$ . Como los dos miembros de la igualdad que queremos probar son lineales en  $\eta$ , podemos suponer que  $\eta$  cumple esta propiedad, es decir, que  $V$  es un abierto coordenado. Más aún, aplicando una carta (orientada) podemos suponer que  $V = \mathbb{R}^n$ .

De este modo  $\eta$  será de la forma

$$\eta = f dt \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

con lo que  $i_{\partial_t}(\eta) = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ ,

$$I_a^b(i_{\partial_t}(\eta)) = \left( \int_a^b f(t, x) dt \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

y por consiguiente

$$\int_V I_a^b(i_{\partial_t}(\eta)) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_a^b f(t, x) dt \right) dx_1 \cdots dx_n = \int_{J \times \mathbb{R}^n} \eta.$$

Aplicando esto a  $\eta = d\omega$  junto a la relación (11.7) tenemos que

$$\int_{J \times \mathbb{R}} d\omega = \int_V I_a^b(i_{\partial_t}(d\omega)) = \int_V j_{b\sharp}(\omega) - \int_V j_{a\sharp}(\omega) - \int_V dI_a^b(i_{\partial_t}(\omega)),$$

y la última integral es nula por el teorema 12.14. ■

De aquí deducimos la forma del teorema de Stokes que realmente nos interesa:

**Teorema 12.18 (Teorema de Stokes para bolas)** *Sea  $U$  la bola unidad de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y sea  $\omega$  una  $n$ -forma definida en un entorno  $G$  de  $\overline{U}$ . Sea  $i : S^n \rightarrow G$  la inclusión. Entonces*

$$\int_U d\omega = \int_{S^n} i_{\sharp}(\omega).$$

DEMOSTRACIÓN: Multiplicando  $\omega$  por una función que valga 1 en  $\overline{U}$  y se anule fuera de un entorno mayor, podemos suponer que  $\omega \in \Lambda_c^n(\mathbb{R}^{n+1})$ . Sea ahora  $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable que se anule para  $\|x\| \leq 1/4$  y valga 1 para  $\|x\| \geq 1/2$ . Así  $i_{\sharp}(p\omega) = i_{\sharp}(\omega)$  y

$$\int_U d\omega = \int_U d(p\omega) + \int_U d((1-p)\omega) = \int_U d(p\omega)$$

por el teorema 12.14, ya que  $(1-p)\omega \in \Lambda_c^n(U)$ .

Así pues, los dos miembros de la igualdad del enunciado no se alteran si cambiamos  $\omega$  por  $p\omega$ , por lo que podemos suponer que  $\omega$  se anula en la bola de radio  $1/4$ . Si llamamos  $A = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 1/4 < \|x\| < 1\}$ , tenemos que

$$\int_U d\omega = \int_A d\omega.$$

Sea  $\alpha : \mathbb{R}^+ \times S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  la aplicación dada por  $\alpha(t, x) = tx$ . Es fácil ver que se trata de un difeomorfismo que conserva la orientación. Así, llamando  $J = ]1/4, 1[$  y aplicando el teorema anterior, tenemos que

$$\int_U d\omega = \int_A d\omega = \int_{J \times S^n} d\alpha_{\#}(\omega) = \int_S j_{1\#}(\alpha_{\#}(\omega)) - \int_S j_{1/4\#}(\alpha_{\#}(\omega)) = \int_{S^n} i_{\#}(\omega),$$

pues  $j_i \circ \alpha = i$ ,  $j_{1/4\#}(\alpha_{\#}(\omega)) = 0$ . ■

### 12.3 La dualidad de Poincaré

Recordemos que el teorema de Poincaré nos proporciona un isomorfismo natural  $D : H_c^k(V) \rightarrow H_{n-k}(V)$  entre la cohomología singular con soportes compactos y la homología singular de una variedad topológica orientable  $n$ -dimensional  $V$ . Si  $V$  es compacta  $D$  viene dado por  $\omega \mapsto \zeta \cap \omega$ , donde  $\zeta$  es la clase fundamental. En el caso compacto tenemos además que  $H_{n-k}(V)$  es un espacio vectorial de dimensión finita, luego es naturalmente isomorfo a su bidual, es decir, al dual del grupo de cohomología  $H^{n-k}(V)$ , lo que nos da un isomorfismo  $D^* : H^k(V) \rightarrow H^{n-k}(V)^*$ . Explícitamente,

$$D^*(\omega)(\eta) = \langle D(\omega), \eta \rangle = \langle \zeta \cap \omega, \eta \rangle = \langle \zeta, \omega \cup \eta \rangle.$$

Si además  $V$  es una variedad diferencial, el isomorfismo de De Rham nos permite transportar  $D^*$  a un isomorfismo entre los grupos correspondientes de la cohomología de De Rham, y según el teorema 12.16 su expresión se reduce a

$$D^*(\omega)(\eta) = \int_V^* \omega \wedge \eta.$$

Aquí hemos usado que el isomorfismo de De Rham es un isomorfismo de álgebras, cosa que no hemos probado. En esta sección demostraremos directamente que la aplicación  $D^*$  definida de este modo es un isomorfismo.

En general, si  $V$  es una variedad diferencial orientable de dimensión  $n$ , conviene definir el *producto de Poincaré* en  $V$  (respecto a una orientación prefijada) como la aplicación bilineal  $H^k(V) \times H_c^{n-k}(V) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\langle \omega, \eta \rangle = \int_V^* \omega \wedge \eta$$

Observemos que  $\omega \wedge \eta \in H_c^n(V)$ , por lo que la integral está definida. Si convenimos que  $\langle \omega, \eta \rangle = 0$  cuando las dimensiones de  $\omega$  y  $\eta$  no suman  $n$ , podemos

considerar el producto definido en  $H(V) \times H_c(V)$ . Obviamente se cumple que  $\langle \omega \wedge \eta, \rho \rangle = \langle \omega, \eta \wedge \rho \rangle$ .

El producto de Poincaré define homomorfismos  $D_V^k : H^k(V) \longrightarrow H_c^{n-k}(V)^*$  mediante  $D_V^k(\omega)(\eta) = \langle \omega, \eta \rangle$ , los cuales determinan a su vez un homomorfismo  $D_V : H(V) \longrightarrow H_c(V)^*$ . Hemos de probar que son isomorfismos. En primer lugar observamos que

A) Si  $V = \mathbb{R}^n$  entonces  $D_V$  es un isomorfismo.

En efecto, si  $k \neq 0$  tenemos que  $H^k(\mathbb{R}^n) \cong H_c^{n-k}(\mathbb{R}^n) = 0$ , luego basta probar que  $D_V^0 : H_0(V) \longrightarrow H_c^n(V)^*$  es un isomorfismo. Sabemos que ambos espacios son isomorfos a  $\mathbb{R}$ , luego basta ver que  $D_V^0(1) \neq 0$ , pero  $D_V^0(1)$  es simplemente la integral sobre  $V$ , que claramente es una aplicación lineal no nula. ■

Observemos ahora que si  $U$  es abierto en  $V$ , entonces el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H(V) & \xrightarrow{i} & H(U) \\ D_V \downarrow & & \downarrow D_U \\ H_c(V)^* & \xrightarrow{i^*} & H_c(U)^* \end{array} \quad (12.3)$$

Recordemos que  $i : H_c(U) \longrightarrow H_c(V)$  es la inclusión que extiende a  $V$  cada  $k$ -forma de  $U$  con el valor 0 fuera de  $U$ .

En efecto, si  $\omega \in H^k(V)$ ,  $\eta \in H_c(U)$ , tenemos que

$$i^*(D_V(\omega))(\eta) = D_V(\omega)(i(\eta)) = \int_V \omega \wedge i(\eta) = \int_U i(\omega) \wedge \eta = D_U(i(\omega))(\eta).$$

Supongamos ahora que  $V = U_1 \cup U_2$  y consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} H^k(V) & \longrightarrow & H^k(U_1) \oplus H^k(U_2) & \longrightarrow & H^k(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & H^{k+1}(V) \\ \downarrow D_V & & \downarrow D_{U_1} \oplus D_{U_2} & & \downarrow D_{U_1 \cap U_2} & & \downarrow D_V \\ H_c^{n-k}(V)^* & \longrightarrow & H_c^{n-k}(U_1)^* \oplus H_c^{n-p}(U_2)^* & \longrightarrow & H_c^{n-k}(U_1 \cap U_2)^* & \longrightarrow & H_c^{n-k-1}(V)^* \end{array}$$

La fila superior es la sucesión de Mayer-Vietoris, mientras que la inferior es la dualización de la sucesión de Mayer-Vietoris para la cohomología con soportes compactos.

Los dos primeros cuadrados conmutan por la conmutatividad de (12.3). Vamos a probar que el tercero conmuta salvo signo.

Tomamos clases  $[\omega] \in H^k(U_1 \cap U_2)$  y  $[\eta] \in H_c^{n-k-1}(V)$ . Hemos de probar que  $\langle \Delta([\omega]), [\eta] \rangle = \pm \langle [\omega], \Delta([\eta]) \rangle$ .

Para calcular  $\Delta([\omega])$  tomamos  $\omega_i \in \Lambda^k(U_i)$  tales que  $\omega = \omega_1|_{U_1 \cap U_2} - \omega_2|_{U_1 \cap U_2}$  y  $\tilde{\omega} \in \Lambda^{k+1}(V)$  tal que  $\tilde{\omega}|_{U_i} = d\omega_i$ . Entonces  $\Delta([\omega]) = [\tilde{\omega}]$ .

Similarmente, tomamos  $\eta_i \in \Lambda_c^{n-k}(U_i)$  tales que  $\eta = \eta_1 + \eta_2$ , de modo que  $\Delta([\eta]) = [d\eta_1] = [-d\eta_2]$ . Calculamos:

$$\langle \Delta([\omega]), [\eta] \rangle = \int_V \tilde{\omega} \wedge \eta = \int_V \tilde{\omega} \wedge \eta_1 + \int_V \tilde{\omega} \wedge \eta_2 = \int_{U_1} d\omega_1 \wedge \eta_1 + \int_{U_2} d\omega_2 \wedge \eta_2.$$

Como  $d(\omega_i \wedge \eta_i) = d\omega_i \wedge \eta_i + (-1)^k \omega_i \wedge d\eta_i$  y la integral de las formas exactas es nula, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \Delta([\omega]), [\eta] \rangle &= (-1)^{k+1} \int_{U_1} \omega_1 \wedge d\eta_1 + (-1)^{k+1} \int_{U_2} \omega_2 \wedge d\eta_2 \\ &= (-1)^{k+1} \int_{U_1 \cap U_2} (\omega_1 - \omega_2) \wedge d\eta_1 = (-1)^{k+1} \int_{U_1 \cap U_2} \omega \wedge d\eta_1 \\ &= \langle [\omega], \Delta([\eta]) \rangle. \end{aligned}$$

El teorema 3.1 implica ahora lo siguiente:

B) Si  $U_1$  y  $U_2$  son abiertos en  $V$  tales que  $D_{U_1}$  y  $D_{U_2}$  son isomorfismos, entonces  $D_{U_1 \cap U_2}$  es un isomorfismo si y sólo si lo es  $D_{U_1 \cup U_2}$ .

Por último probamos que

C) Si  $V = \bigcup_i U_i$  es una unión numerable de abiertos disjuntos y cada  $D_{U_i}$  es un isomorfismo, también lo es  $D_V$ .

En efecto, sabemos que las inclusiones inducen isomorfismos

$$H(V) \cong \prod_i H(U_i), \quad H_c(V) \cong \bigoplus_i H_c(U_i),$$

el segundo de los cuales induce a su vez un isomorfismo

$$H_c(V)^* \cong \prod_i H_c(U_i)^*.$$

Una comprobación rutinaria muestra que, a través de estos isomorfismos,  $D_V$  se corresponde con el producto de los isomorfismos  $D_{U_i}$ , luego también es un isomorfismo. ■

Con estos ingredientes, la prueba del teorema de Poincaré es similar a la prueba del teorema de De Rham. La única diferencia es que allí teníamos el hecho A) para abiertos contractibles mientras que ahora lo tenemos para abiertos homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$ . Conviene aislar un resultado general:

**Teorema 12.19** Si  $\mathcal{B}$  es una base de una variedad diferencial  $V$ , entonces todo abierto  $U$  de  $V$  se expresa como  $U = U_1 \cup U_2$ , donde  $U_1$ ,  $U_2$  y  $U_1 \cap U_2$  son uniones disjuntas de uniones finitas de abiertos de  $\mathcal{B}$ .

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que  $U = V$ . Sea  $\{G_n\}_n$  una familia de abiertos según el teorema 1.16. Cubrimos  $\overline{G}_0$  por una unión finita  $H_0$  de abiertos de  $\mathcal{B}$  con clausura contenida en  $G_1$ ; cubrimos  $\overline{G}_1 \setminus G_0$  por una unión finita  $H_1$  de abiertos de  $\mathcal{B}$  con clausura contenida en  $G_2$ ; cubrimos  $\overline{G}_2 \setminus G_1$  con una unión finita  $H_2$  de abiertos de  $\mathcal{B}$  con clausura contenida en  $G_3 \setminus \overline{H}_0$  y, en general, cubrimos  $\overline{G}_n \setminus G_{n-1}$  por una unión finita  $H_n$  de abiertos de  $\mathcal{B}$  con  $\overline{H}_n \subset G_{n+1} \setminus \overline{H}_{n-2}$ . Basta tomar

$$U_1 = \bigcup_n H_{2n}, \quad U_2 = \bigcup_n H_{2n+1}.$$

■

Veamos finalmente la prueba del teorema de dualidad: La propiedad B) implica que si  $D_U$  es un isomorfismo para los abiertos de una base  $\mathcal{B}$  de  $V$  cerrada para intersecciones finitas entonces lo es para las uniones finitas de abiertos de  $\mathcal{B}$  (se prueba por inducción sobre el número de abiertos de la unión igual que en la prueba del teorema de De Rham). Por el teorema anterior y la propiedad C) concluimos que  $D_U$  es un isomorfismo para todo abierto de  $V$ .

En particular, por A) tenemos que  $D_U$  es un isomorfismo cuando  $U$  es un cubo abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Puesto que los cubos son una base de  $\mathbb{R}^n$  cerrada para intersecciones finitas, según lo que acabamos de indicar  $D_U$  es un isomorfismo para todo abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

Ahora, si  $V$  es una variedad diferencial arbitraria (orientable), los abiertos de  $U$  difeomorfos a abiertos de  $\mathbb{R}^n$  son una base de  $V$  cerrada para intersecciones finitas, y  $D_U$  es un isomorfismo para cada uno de estos abiertos, luego  $D_U$  es un isomorfismo para todo abierto de  $V$ , en particular para  $V$ . En definitiva tenemos:

**Teorema 12.20 (Teorema de dualidad de Poincaré)** *Si  $V$  es una variedad diferencial orientable, entonces  $D_V : H(V) \longrightarrow H_c(V)^*$  es un isomorfismo.*

A partir de aquí podemos obtener demostraciones directas para variedades diferenciales de las consecuencias de 7.34. Otra aplicación interesante es una demostración de que si  $V$  es una variedad compacta entonces  $H(V)$  tiene dimensión finita. En efecto, si  $V$  es orientable el teorema de dualidad se reduce a que  $H(V) \cong H(V)^*$ , lo cual implica que  $H(V)$  tiene dimensión finita. Si  $V$  no es orientable, su variedad de orientaciones  $W$  sí lo es, y es fácil ver que es compacta, luego  $H(W)$  tiene dimensión finita. Según los resultados vistos al final de capítulo anterior,  $H(V)$  es isomorfo al subespacio  $H(W)_+$  de  $H(V)$ , luego también tiene dimensión finita. ■

Así mismo, ahora tenemos una prueba directa de que si  $V$  es una variedad diferencial  $n$ -dimensional conexa y orientable, entonces  $H_c^n(V) \cong \mathbb{R}$ . De hecho, la integración sobre  $V$  nos proporciona un isomorfismo canónico

$$\int_V^* : H_c^n(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

(es un isomorfismo porque obviamente no es la aplicación nula). La clase  $O_V$  constituida por las  $n$ -formas de integral 1 se llama *clase de la orientación* de

$V$ , y depende únicamente de la orientación, en el sentido de que la clase correspondiente a la orientación opuesta de  $V$  es  $-O_V$ . De este modo, tenemos la representación  $H_c^n(V) = \{\lambda O_V \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Por ejemplo, es claro que, en un producto de variedades, la orientación producto viene dada por  $O_{V_1 \times V_2} = O_{V_1} \times O_{V_2} = \pi_1^*(O_{V_1}) \wedge \pi_2^*(O_{V_2})$ .

Si  $V$  es una variedad de Riemann compacta orientable, otra clase destacada de  $H^n(V)$  es la *clase del volumen* de  $V$ , es decir, la clase del elemento de volumen, a la que representaremos por  $dm_V$ , donde —recordemos de nuevo— la  $d$  en esta notación no guarda relación alguna con la diferencial exterior.

## 12.4 Los teoremas de Künneth

En general se conoce como teoremas de Künneth a los teoremas que determinan la cohomología de un producto de variedades. Al estudiar este problema para la homología singular de espacios topológicos arbitrarios distinguimos entre el teorema de Künneth propiamente dicho, que —para el caso de coeficientes en  $\mathbb{R}$ , que es el que ahora nos interesa— nos permite identificar la homología de un producto tensorial de complejos con el producto de sus homologías, y el teorema de Eilenberg-Zilber, según el cual la homología singular de un producto de espacios topológicos es la homología del producto tensorial de sus complejos de cadenas singulares.

Ante todo, puesto que ahora hemos de tratar con cohomología y, por lo tanto, con complejos inversos, hemos de dualizar los resultados algebraicos sobre productos tensoriales de complejos. En general, si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  son complejos inversos, el espacio graduado  $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'$  dado por<sup>1</sup>

$$(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')^k = \bigoplus_{i+j=k} C^i \otimes C'^j$$

tiene estructura de complejo inverso con el operador

$$d(f \otimes g) = df \otimes f + (-1)^i f \otimes dg, \quad f \in C^i, \quad g \in C'^j.$$

La prueba es exactamente la misma que la del teorema 6.3. Ahora, la versión para complejos inversos del teorema de Künneth 6.4 (y para el caso de coeficientes en  $\mathbb{R}$ ) afirma simplemente que el homomorfismo

$$\mu : H(\mathcal{C}) \otimes H(\mathcal{C}') \longrightarrow H(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}')$$

dado por  $\mu([f] \otimes [g]) = [f \otimes g]$  es un isomorfismo.

En particular, si  $V_1$  y  $V_2$  son dos variedades diferenciales, tenemos un isomorfismo natural

$$H(V_1) \otimes H(V_2) \cong H(\Lambda(V_1) \otimes \Lambda(V_2)). \quad (12.4)$$

La cuestión ahora es obtener un análogo al teorema de Eilenberg-Zilber, es decir, demostrar que el segundo miembro es isomorfo a  $H(V_1 \times V_2)$ . Hay que

<sup>1</sup>En toda esta sección  $\otimes$  significa  $\otimes_{\mathbb{R}}$ .



advertir que esto no es cierto en general, sino que hemos de exigir que  $H(V_1)$  o  $H(V_2)$  tenga dimensión finita.

Ciertamente, podemos llegar a esta conclusión a partir del teorema de De Rham y del resultado correspondiente para la homología singular. En efecto, tenemos el isomorfismo

$$H^\infty(V_1) \otimes H^\infty(V_2) \longrightarrow H^\infty(V_1 \times V_2),$$

que induce a su vez un isomorfismo entre los espacios duales

$$H_\infty^*(V_1 \times V_2) \longrightarrow (H^\infty(V_1) \otimes H^\infty(V_2))^*.$$

Por otra parte tenemos el siguiente resultado general:

**Teorema 12.21** *Sean  $V_1$  y  $V_2$  espacios vectoriales reales. Entonces la aplicación lineal  $i : V_1^* \otimes V_2^* \longrightarrow (V_1 \otimes V_2)^*$  dada por  $f \otimes g \mapsto (f \otimes g) \circ \mu$ , donde  $\mu : \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  es el isomorfismo canónico, es un monomorfismo y si uno de los factores tiene dimensión finita entonces es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $A$  y  $B$  son bases de  $V_1$  y  $V_2$  respectivamente, entonces una base de  $V_1^* \otimes V_2^*$  está formada por los elementos  $a^* \otimes b^*$ , con  $a \in A$ ,  $b \in B$  (donde  $a^*$  y  $b^*$  representan a los vectores correspondientes de las bases duales). Si tenemos una combinación lineal finita nula

$$\sum_{rs} \alpha_{rs} i(a_r^* \otimes b_s^*) = 0,$$

al hacerla actuar sobre cada  $a_i \otimes b_j$  concluimos que  $\alpha_{rs} = 0$ , luego  $i$  es un monomorfismo.

Si  $V_1$  tiene dimensión finita, sea  $v_1, \dots, v_r$  una base de  $V_1$ . Para cada función  $f \in (V_1 \otimes V_2)^*$  consideramos  $f_i \in V_2^*$  dado por  $f_i(w) = f(v_i \otimes w)$ . Es fácil ver entonces que  $f = \sum_r i(v_r^* \otimes f_r)$ , luego  $i$  es suprayectiva. ■

En lo sucesivo identificaremos a un producto  $f \otimes g$  en las condiciones del teorema anterior por su imagen por  $i$ , es decir, con la aplicación lineal dada por  $(f \otimes g)(v_1 \otimes v_2) = f(v_1)g(v_2)$ .

Volviendo a las consideraciones previas a este teorema, si  $V_1$  y  $V_2$  son variedades diferenciales tales que uno de los espacios  $H^\infty(V_1)$  o  $H^\infty(V_2)$  tiene dimensión finita, tenemos los isomorfismos

$$H_\infty^*(V_1 \times V_2) \cong (H^\infty(V_1) \otimes H^\infty(V_2))^* \cong H_\infty^*(V_1) \otimes H_\infty^*(V_2),$$

y a través del teorema de De Rham obtenemos un isomorfismo

$$H(V_1 \times V_2) \cong H(V_1) \otimes H(V_2)$$

entre los grupos de cohomología de De Rham. En esta sección obtendremos directamente una expresión explícita para este isomorfismo.

Consideramos las proyecciones  $\pi_i : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_i$ , que inducen aplicaciones lineales  $\pi_{i\#} : \Lambda(V_i) \longrightarrow \Lambda(V_1 \times V_2)$ , que a su vez inducen una aplicación lineal

$$\kappa : \Lambda(V_1) \otimes \Lambda(V_2) \longrightarrow \Lambda(V_1 \times V_2) \quad (12.5)$$

dada por

$$\kappa(\omega \otimes \eta) = \omega \times \eta = \pi_{1\#}(\omega) \wedge \pi_{2\#}(\eta).$$

Esta aplicación es un homomorfismo de complejos, pues

$$\begin{aligned} d(\omega \times \eta) &= d\pi_{1\#}(\omega) \wedge \pi_{2\#}(\eta) + (-1)^k \pi_{1\#}(\omega) \wedge d\pi_{2\#}(\eta) \\ &= \pi_{1\#}(d\omega) \wedge \pi_{2\#}(\eta) + (-1)^k \pi_{1\#}(\omega) \wedge \pi_{2\#}(d\eta) \\ &= d\omega \times \eta + (-1)^k \omega \times d\eta = \kappa(d(\omega \otimes \eta)). \end{aligned}$$

Por consiguiente tenemos una aplicación lineal

$$H(\Lambda(V_1) \otimes \Lambda(V_2)) \longrightarrow H(\Lambda(V_1 \times V_2)),$$

que compuesta con el isomorfismo de Künneth (12.4) nos da la aplicación lineal

$$\kappa : H(V_1) \otimes H(V_2) \longrightarrow H(V_1 \times V_2)$$

dada por  $[\omega] \otimes [\eta] \mapsto [\omega \times \eta]$ . Hemos de probar que —con la restricción de finitud indicada— esta aplicación es un isomorfismo.

En realidad lo demostraremos primero para la cohomología con soportes compactos. Para ello observamos que la aplicación (12.5) se restringe a una aplicación lineal

$$\kappa_c : \Lambda_c(V_1) \otimes \Lambda_c(V_2) \longrightarrow \Lambda_c(V_1 \times V_2),$$

que a su vez (compuesta con el isomorfismo de Künneth correspondiente) induce una aplicación lineal

$$\kappa_c : H_c(V_1) \otimes H_c(V_2) \longrightarrow H_c(V_1 \times V_2).$$

Veamos que esta aplicación es un isomorfismo (para variedades arbitrarias  $V_1$  y  $V_2$ , sin exigir dimensión finita en sus grupos de cohomología). Seguimos la misma técnica que en la prueba del teorema de De Rham o en la del teorema de dualidad.

A) Si  $V_1 = \mathbb{R}^m$  y  $V_2 = \mathbb{R}^n$  entonces  $\kappa_c$  es un isomorfismo.

En efecto, tenemos que

$$\kappa_c^r : (H_c(V_1) \otimes H_c(V_2))^r \longrightarrow H_c^r(V_1 \times V_2)$$

es un isomorfismo salvo quizá para  $r = m + n$ , pues los espacios restantes son nulos. Para  $r = m + n$  ambos espacios son isomorfos a  $\mathbb{R}$ , luego basta probar que  $\kappa_c$  es no nula, lo cual no ofrece ninguna dificultad.

B) Si  $\kappa_c$  es un isomorfismo para los pares de variedades  $(U_1, V_2)$ ,  $(U_2, V_2)$  y  $(U_1 \cap U_2, V_2)$ , donde  $U_1$  y  $U_2$  son abiertos en una variedad  $V_1$ , entonces también es un isomorfismo para el par  $(U_1 \cup U_2, V_2)$ .

En efecto, llamemos  $U = U_1 \cap U_2$  y  $W = U_1 \cup U_2$ . Consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Lambda_c(U) \longrightarrow \Lambda_c(U_1) \oplus \Lambda_c(U_2) \longrightarrow \Lambda_c(W) \longrightarrow 0$$

que induce la sucesión de Mayer-Vietoris para la cohomología con soportes compactos. Al multiplicarla por  $\Lambda_c(V_2)$  continua siendo una sucesión exacta (porque con coeficientes en un cuerpo no hay torsión). Así tenemos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_c(U) \otimes \Lambda_c(V_2) & \longrightarrow & (\Lambda_c(U_1) \otimes \Lambda_c(V_2)) \oplus (\Lambda_c(U_2) \otimes \Lambda_c(V_2)) & \longrightarrow & \Lambda_c(W) \otimes \Lambda_c(V_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda_c(U \times V_2) & \longrightarrow & \Lambda_c(U_1 \times V_2) \oplus \Lambda_c(U_2 \times V_2) & \longrightarrow & \Lambda_c(W \times V_2) \end{array}$$

De aquí obtenemos un diagrama conmutativo entre las sucesiones exactas de homología de las filas y, aplicando el teorema 3.1, tenemos la conclusión.

C) Si  $U = \bigcup_n U_n$  es una unión disjunta de abiertos de  $V_1$  y  $\kappa_c$  es un isomorfismo para los pares  $(U_n, V_2)$ , entonces también es un isomorfismo para  $(U, V_2)$ .

En efecto, tenemos que las inclusiones inducen un isomorfismo

$$H_c(U) \cong \bigoplus_n H_c(U_n),$$

de donde obtenemos un isomorfismo

$$H_c(U) \otimes H_c(V_2) \cong \bigoplus_n H_c(U_n) \otimes H_c(V_2).$$

Por otra parte, las inclusiones inducen también un isomorfismo

$$H_c(U \times V_2) \cong \bigoplus_n H_c(U_n \times V_2).$$

Es inmediato comprobar que  $k_c$  (para el par  $(U, V_2)$ ) se corresponde a través de estos isomorfismos con la suma directa de los isomorfismos  $k_c$  correspondientes a los pares  $(U_n, V_2)$ , luego es un isomorfismo.

Ahora basta aplicar el mismo argumento que en la prueba del teorema de dualidad: las propiedades B) y C) junto con el teorema 12.19 implican que si  $\kappa_c$  es un isomorfismo para los pares  $(U, V_2)$ , donde  $V_2$  es una variedad diferencial arbitraria y  $U$  recorre los elementos de una base de una variedad  $V_1$  cerrada para intersecciones finitas, entonces  $\kappa_c$  es un isomorfismo para los pares  $(U, V_2)$ , donde  $U$  es cualquier abierto de  $V_1$ .

Por la propiedad A) tenemos que  $\kappa_c$  es un isomorfismo para los pares  $(U, \mathbb{R}^n)$ , donde  $U$  es un cubo abierto en  $\mathbb{R}^m$ , luego también lo es cuando  $U$  es cualquier abierto en  $\mathbb{R}^m$ . Por consiguiente,  $\kappa_c$  es un isomorfismo para los pares  $(U, \mathbb{R}^n)$ , donde  $U$  es un abierto difeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^m$  en una variedad arbitraria  $V_1$ . Como estos abiertos forman una base cerrada para intersecciones finitas, concluimos que  $\kappa_c$  es un isomorfismo para los pares  $(V_1, \mathbb{R}^n)$ , donde  $V_1$  es una variedad arbitraria.

Ahora aplicamos B) y C) cambiando el factor izquierdo por el derecho: tenemos que  $\kappa_c$  es un isomorfismo para los pares  $(V_1, U)$ , donde  $U$  es un cubo abierto en  $\mathbb{R}^n$ , de donde pasamos al caso en que  $U$  es un abierto arbitrario en  $\mathbb{R}^n$ , de aquí al caso en que  $U$  es un abierto de una variedad  $V_2$  difeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y de aquí al caso en que  $U$  es un abierto arbitrario en  $V_2$ . En definitiva tenemos:

**Teorema 12.22** Sean  $V_1$  y  $V_2$  variedades diferenciales. Entonces la aplicación

$$\kappa_c : H_c(V_1) \otimes H_c(V_2) \longrightarrow H_c(V_1 \times V_2)$$

inducida por  $\omega \otimes \eta \mapsto \omega \times \eta$  es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Para probar el teorema análogo para la cohomología de De Rham (sin soportes compactos) necesitamos un caso particular del teorema de Fubini generalizado a variedades. Ante todo, si  $V_1$  y  $V_2$  son variedades orientables, definimos la *orientación producto* en  $V_1 \times V_2$  como la orientación respecto a la cual los productos de cartas orientadas son cartas orientadas.

**Teorema 12.23** Sean  $V_1$  y  $V_2$  variedades diferenciales orientables de dimensiones  $n_1$  y  $n_2$  respectivamente y sean  $\omega_i \in \Lambda_c^{n_i}(V_i)$ . Entonces

$$\int_{V_1 \times V_2} \omega_1 \times \omega_2 = \left( \int_{V_1} \omega_1 \right) \left( \int_{V_2} \omega_2 \right),$$

donde en  $V_1 \times V_2$  consideramos la orientación producto.

DEMOSTRACIÓN: Mediante particiones de la unidad el teorema se reduce al caso en que  $V_1$  y  $V_2$  son abiertos en  $\mathbb{R}^{n_i}$ , y entonces se trata simplemente de (un caso particular de) el teorema de Fubini. ■

Si  $V_1$  y  $V_2$  son variedades orientables, tenemos que el diagrama siguiente conmuta salvo signo:

$$\begin{array}{ccc} H(V_1) \otimes H(V_2) & \xrightarrow{\kappa} & H(V_1 \times V_2) \\ \downarrow D_{V_1} \otimes D_{V_2} & & \downarrow D_{V_1 \times V_2} \\ H_c(V_1)^* \otimes H_c(V_2)^* & & H_c(V_1 \times V_2)^* \\ & \searrow i & \swarrow \kappa_c^* \\ & (H_c(V_1) \otimes H_c(V_2))^* & \end{array}$$

La aplicación  $i$  es la inclusión del teorema 12.21.

En efecto, tomemos clases  $[\omega] \in H^p(V_1)$ ,  $[\eta] \in H^q(V_2)$  y  $[\alpha] \in H_c^p(V_1)$ ,  $[\beta] \in H_c^q(V_2)$ . Hemos de comprobar que

$$\langle D_{V_1}([\omega]) \otimes D_{V_2}([\eta]), [\alpha] \otimes [\eta] \rangle = \pm \langle D_{V_1 \times V_2}(\kappa([\omega] \otimes [\eta])), \kappa_c([\alpha] \otimes [\eta]) \rangle,$$

es decir,

$$\langle D_{V_1}([\omega]), [\alpha] \rangle \langle D_{V_2}([\eta]), [\eta] \rangle = \pm \langle D_{V_1 \times V_2}([\omega \times \eta]), [\alpha \times \beta] \rangle,$$

lo que a su vez equivale a

$$\left( \int_{V_1} \omega \wedge \alpha \right) \left( \int_{V_2} \eta \wedge \beta \right) = \pm \int_{V_1 \times V_2} (\omega \times \eta) \wedge (\alpha \times \beta).$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} (\omega \times \eta) \wedge (\alpha \times \beta) &= \pi_{1\#}(\omega) \wedge \pi_{2\#}(\eta) \wedge \pi_{1\#}(\alpha) \wedge \pi_{2\#}(\beta) \\ &= \pm \pi_{1\#}(\omega) \wedge \pi_{1\#}(\alpha) \wedge \pi_{2\#}(\eta) \wedge \pi_{2\#}(\beta) = \pm (\omega \wedge \alpha) \times (\eta \wedge \beta), \end{aligned}$$

basta aplicar el teorema anterior.

Si suponemos que  $H(V_1)$  o  $H(V_2)$  tiene dimensión finita, entonces la inclusión  $i$  es un isomorfismo (por 12.21), y el diagrama muestra que  $\kappa$  también lo es. Nos falta eliminar la hipótesis de que  $V_1$  y  $V_2$  sean orientables.

Supongamos, por ejemplo, que  $V_1$  es orientable pero  $V_2$  no lo es. Entonces consideramos su variedad de orientaciones  $\tilde{V}_2$ , el cubrimiento  $\pi : \tilde{V}_2 \rightarrow V_2$  y la involución  $J : \tilde{V}_2 \rightarrow \tilde{V}_2$  que intercambia las orientaciones. Como  $\tilde{V}_2$  es orientable, tenemos el isomorfismo

$$\kappa : H(V_1) \otimes H(\tilde{V}_2) \rightarrow H(V_1 \times \tilde{V}_2).$$

Si llamamos  $I$  a la identidad en  $V_1$ , tenemos que  $I \times J$  es una involución en  $V_1 \times \tilde{V}_2$ , luego podemos descomponer

$$H(V_1 \times \tilde{V}_2) = H_+(V_1 \times \tilde{V}_2) \oplus H_-(V_1 \times \tilde{V}_2).$$

Una simple comprobación nos da que  $(I \otimes J^*) \circ \kappa = \kappa \circ (I \times J)^*$ , de donde se sigue que  $\kappa$  se restringe a un isomorfismo

$$\kappa : H(V_1) \otimes H_+(\tilde{V}_2) \rightarrow H_+(V_1 \times \tilde{V}_2).$$

Esto nos lleva al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H(V_1) \otimes H(V_2) & \xrightarrow{\kappa} & H(V_1 \times V_2) \\ I \otimes \pi^* \downarrow & & \downarrow (I \times \pi)^* \\ H(V_1) \otimes H_+(V_2) & \xrightarrow{\kappa} & H_+(V_1 \times \tilde{V}_2) \end{array}$$

donde las dos flechas verticales son isomorfismos por 12.7, y la flecha horizontal inferior también lo es, luego  $\kappa$  es un isomorfismo, como queríamos probar.

Si  $V_1$  y  $V_2$  son ambas no orientables, el mismo razonamiento reduce el problema al caso de  $V_1$  y  $\tilde{V}_2$ , para el cual ya hemos probado que  $\kappa$  es un isomorfismo. En definitiva tenemos:

**Teorema 12.24** Sean  $V_1$  y  $V_2$  variedades diferenciales tales que uno de los espacios  $H(V_i)$  tiene dimensión finita. Entonces la aplicación

$$\kappa : H(V_1) \otimes H(V_2) \longrightarrow H(V_1 \times V_2)$$

inducida por  $\omega \otimes \eta \mapsto \omega \times \eta$  es un isomorfismo de espacios vectoriales.

## 12.5 El grado de una aplicación

Introducimos ahora un concepto muy útil para estudiar las aplicaciones diferenciables  $f : V \longrightarrow W$  entre variedades compactas, conexas y orientables de la misma dimensión  $n$ . Según veremos, el grado de una aplicación indica el número de veces que  $f(p)$  recorre  $W$  cuando  $p$  recorre  $V$ . Aunque trabajaremos únicamente en el caso diferenciable, conviene saber que el grado puede definirse para aplicaciones continuas entre variedades topológicas (siempre compactas, conexas y orientables de la misma dimensión). En efecto, sabemos que  $H_n(V) \cong H_n(W) \cong \mathbb{Z}$  (para la homología singular con coeficientes enteros). Más concretamente, fijadas orientaciones en  $V$  y  $W$ , los grupos de homología  $n$ -dimensionales están generados por las correspondientes clases fundamentales  $\zeta_V$  y  $\zeta_W$ .

Por consiguiente, la aplicación  $f_* : H_n(V) \longrightarrow H_n(W)$  está determinada por la relación  $f_*(\zeta_V) = \text{grad } f \zeta_W$ , donde  $\text{grad } f$  es un número entero al que llamaremos *grado* de  $f$ .

Por los teoremas 5.37 y 7.23, el grado de  $f$  puede calcularse también respecto a la homología con coeficientes reales. En efecto, tenemos el isomorfismo natural  $H_n^{\mathbb{R}}(V) \cong H_n(V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , e igualmente con  $W$ , de modo que  $f_*^{\mathbb{R}}$  se corresponde con  $f_* \otimes 1$ , luego sigue cumpliéndose la relación  $f_*^{\mathbb{R}}(\zeta_V^{\mathbb{R}}) = \text{grad } f \zeta_W^{\mathbb{R}}$  (donde  $\zeta_V^{\mathbb{R}}$  es la imagen de  $\zeta_V$  por la inclusión  $C(V) \longrightarrow C^{\mathbb{R}}(V)$ , e igualmente con  $W$ ).

A partir de aquí  $H_n(V)$  y  $H_n(W)$  representarán los grupos de homología con coeficientes reales. El teorema 5.51 nos permite expresar el grado de  $f$  en términos de la cohomología singular, pues  $H^n(V)$  es canónicamente isomorfo a  $H_n(V)^*$ , e igualmente para  $W$ , y  $f^* : H^n(W) \longrightarrow H^n(V)$  se corresponde con la aplicación dual de  $f_*$ . Por consiguiente, si llamamos  $\omega_V$  y  $\omega_W$  a las clases duales de  $\zeta_V$  y  $\zeta_W$ , tenemos que  $f^*(\omega_W) = \text{grad } f \omega_V$ .

Supongamos ahora que  $V$  y  $W$  son variedades diferenciales y que  $f$  es diferenciable. Entonces podemos sustituir  $H^n(V)$  y  $H^n(W)$  por  $H_{\infty}^n(V)$  y  $H_{\infty}^n(W)$ . Según el teorema 12.16, el isomorfismo de De Rham hace corresponder  $\omega_W$  con la clase  $O_W$  determinada por

$$\int_M O_W = \int_{\zeta_W} O_W = \omega_W(\zeta_W) = 1,$$

es decir, con la que hemos denominado clase de la orientación de  $W$ . Lo mismo sucede con  $\omega_V$  y  $O_V$ . Puesto que los homomorfismos  $f^*$  (para la cohomología singular y la cohomología de De Rham) se corresponden a través de los isomorfismos de De Rham, tenemos que  $f^*(O_W) = \text{grad } f O_V$  o, equivalentemente, para toda clase  $\omega = rO_W \in H^n(W)$ , tenemos que

$$\int_V f^*(\omega) = r \text{grad } f \int_V O_V = r \text{grad } f = r \text{grad } f \int_W O_W = \text{grad } f \int_W \omega.$$

Recapitulando, si queremos definir directamente el grado de una aplicación diferenciable  $f : V \rightarrow W$  entre dos variedades compactas, conexas y orientables de la misma dimensión  $n$ , basta observar que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^n(W) & \xrightarrow{f^*} & H^n(V) \\ f_w^* \downarrow & & \downarrow f_v^* \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R} \end{array}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos, y definir el *grado* de  $f$  como el único número real tal que  $\bar{f}(x) = \text{grad } f x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Esto equivale a la relación

$$\int_V f^*(\omega) = \text{grad } f \int_W \omega, \quad (12.6)$$

que generaliza al teorema de cambio de variable para aplicaciones diferenciables entre variedades compactas que no sean necesariamente difeomorfismos. Sin embargo, con esta definición no es evidente en absoluto que el grado de una aplicación diferenciable sea un número entero. Pronto daremos una prueba directa de este hecho.

Notemos que el grado depende de la orientación de  $V$  y  $W$ : si cambiamos la orientación en una de ellas, el grado cambia de signo. Por esto mismo, el grado de una aplicación  $f : V \rightarrow V$  no depende de la orientación de  $V$ . Además se caracteriza por que  $f^* : H^n(V) \rightarrow H^n(V)$  es la multiplicación por  $\text{grad } f$ . Así, el teorema 3.14 nos da que el grado de una aplicación de  $S^n$  en sí misma inducida por una aplicación ortogonal de  $\mathbb{R}^{n+1}$  es el determinante de ésta.

Veamos algunas propiedades elementales:

**Teorema 12.25** *Se cumplen las propiedades siguientes (donde se sobrentiende que todas las aplicaciones son aplicaciones diferenciables entre variedades compactas, conexas orientables y de la misma dimensión):*

- a) Si  $f : V \rightarrow W$  y  $g : W \rightarrow X$  entonces  $\text{grad}(f \circ g) = (\text{grad } f)(\text{grad } g)$ .
- b) La identidad  $I : V \rightarrow V$  cumple  $\text{grad } I = 1$ .
- c) Si  $f, g : V \rightarrow W$  son homotópicas entonces  $\text{grad } f = \text{grad } g$ .
- d) Si  $f : V \rightarrow W$  no es suprayectiva entonces  $\text{grad } f = 0$ .

- e) Si  $f : V_1 \rightarrow W_1$  y  $g : V_2 \rightarrow W_2$ , entonces el grado de la aplicación  $f \times g : V_1 \times V_2 \rightarrow W_1 \times W_2$  viene dado por  $\text{grad}(f \times g) = (\text{grad } f)(\text{grad } g)$ .
- f) Si  $f : V \rightarrow W$  es un difeomorfismo, entonces  $\text{grad } f = \pm 1$ , donde el signo es positivo o negativo según si  $f$  conserva o invierte la orientación.

DEMOSTRACIÓN: a), b) y c) son inmediatas a partir de la definición.

d) Si  $f$  no es suprayectiva entonces  $W \setminus f[V]$  es un abierto no vacío, luego podemos tomar una función diferenciable  $g : W \rightarrow [0, 1]$  cuyo soporte esté contenido en  $W \setminus f[V]$  y que no sea nula, es decir, de modo que

$$\int_W^* g O_W > 0.$$

Entonces  $f_{\#}(gO_W) = 0$ , por lo que tenemos que

$$0 = \int_V^* f^*(gO_W) = \text{grad } f \int_W^* gO_W.$$

Necesariamente, entonces,  $\text{grad } f = 0$ .

Las propiedades e) y f) se siguen de los teoremas 12.23 y 12.12. ■

Veamos ahora una prueba directa de que el grado de una aplicación diferenciable  $f : V \rightarrow W$  es un entero. Podemos suponer que  $f$  es suprayectiva. Sea  $y \in W$  un valor regular de  $f$ . Para cada  $x \in f^{-1}[y]$ , tenemos que  $df_x$  es un isomorfismo, luego por el teorema de la función inversa existe un entorno  $U$  de  $x$  donde  $f$  es un difeomorfismo. En particular  $U \cap f^{-1}[y] = \{x\}$ . Esto implica que  $f^{-1}[y]$  es discreto y como  $V$  es compacta ha de ser finito. Digamos que  $f^{-1}[y] = \{x_1, \dots, x_r\}$ .

En general, cada punto regular  $x \in V$  tiene un entorno donde  $f$  es un difeomorfismo. Definimos  $\epsilon(x) = \pm 1$  según si  $f|_U$  conserva o invierte la orientación. Vamos a probar que

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^r \epsilon(x_i) \in \mathbb{Z}. \quad (12.7)$$

Tomamos entornos disjuntos  $U_i$  de cada  $x_i$  donde  $f$  sea un difeomorfismo. El conjunto  $K = f[X \setminus \bigcup_{i=1}^r U_i]$  es compacto y no contiene a  $y$ , luego podemos tomar un entorno  $W_0$  de  $y$  disjunto de  $K$  y contenido en la imagen de todos los  $U_i$ . Si llamamos  $V_i = f^{-1}[W_0] \cap U_i$ , tenemos que los  $V_i$  son entornos disjuntos de los puntos  $x_i$ , la función  $f$  se restringe a un difeomorfismo de  $V_i$  en  $W_0$  y  $f^{-1}[W_0] = V_1 \cup \dots \cup V_r$ .

Podemos tomar  $\omega \in \Lambda^n(W)$  con soporte contenido en  $W_0$  y tal que  $\int_{W_0} \omega = 1$ . Entonces

$$\text{grad } f = \int_V f_{\#}(\omega) = \sum_{i=1}^r \int_{V_i} f_{\#}(\omega) = \sum_{i=1}^r \epsilon(x_i) \int_{W_0} \omega = \sum_{i=1}^r \epsilon(x_i),$$

donde hemos usado el teorema 12.12. Esta fórmula prueba que el grado de cualquier aplicación es un entero supuesto que tenga valores regulares, pero el teorema de Sard asegura su existencia.



**Aplicaciones en la circunferencia** La fórmula (12.7) expresa la idea que comentábamos al principio de la sección: el grado es el número de veces que  $f(p)$  recorre  $W$  cuando  $p$  recorre  $V$ , teniendo en cuenta que si “pasamos” por el mismo punto con sentidos opuestos, un “pase” cancela al otro. Esto resulta mucho más claro en el caso de una aplicación  $f : S^1 \rightarrow S^1$ . En este caso podemos decir simplemente que el grado es el número de vueltas que  $f(p)$  da a la circunferencia cuando  $p$  da una vuelta, entendiendo que las vueltas se consideran positivas si se dan en sentido positivo y negativas en caso contrario.

Para probarlo tomemos  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ . Claramente se trata de un cubrimiento de  $S^1$  y, como  $\mathbb{R}$  es simplemente conexo, el criterio de elevación 8.15 nos da que  $\alpha \circ f$  tiene una elevación  $\tilde{f}$ , es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \alpha \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \end{array}$$

Teniendo en cuenta que  $\alpha$  es un difeomorfismo local, es fácil ver que  $\tilde{f}$  es diferenciable. El ejemplo tras la definición 12.5 muestra que si  $dm$  es el elemento de longitud de  $S^1$ , entonces  $\alpha_{\#}(dm) = dt$ , donde  $t$  es la identidad en  $\mathbb{R}$ . Teniendo en cuenta que  $\alpha|_{]0,2\pi[}$  es un difeomorfismo sobre  $S^1$  menos un punto, es claro que

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f_{\#}(dm) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_{\#}(f_{\#}(dm)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}_{\#}(dt) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tilde{f} = \frac{\tilde{f}(2\pi) - \tilde{f}(0)}{2\pi}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

La interpretación de esta fórmula es la que anunciábamos: si  $t$  recorre el intervalo  $[0, 2\pi]$ , entonces  $\alpha(p)$  recorre  $S^1$  en sentido antihorario y  $\tilde{f}(t)$  nos da el argumento de  $f(\alpha(t))$ . Puesto que  $f(\alpha(0)) = f(\alpha(2\pi))$ , necesariamente  $\tilde{f}(2\pi) - \tilde{f}(0)$  ha de ser un múltiplo entero de  $2\pi$  y el factor de multiplicidad —que, según acabamos de ver, es el grado de  $f$ — indica el número de vueltas que da  $f(p)$  a  $S^1$  cuando  $p$  da una vuelta a  $S^1$ .

Ahora es inmediato que existen aplicaciones de  $S^1$  en  $S^1$  de cualquier grado entero. Más aún, tenemos lo siguiente:

**Teorema 12.26** *Dos aplicaciones diferenciables  $f, g : S^1 \rightarrow S^1$  son homotópicas si y sólo si tienen el mismo grado.*

**DEMOSTRACIÓN:** Una implicación la tenemos ya probada. Supongamos que  $\text{grad } f = \text{grad } g = m$ . Teniendo en cuenta que los giros son homotópicos a la identidad, podemos suponer que  $f(1,0) = g(1,0) = (1,0)$ . Sean  $\tilde{f}, \tilde{g}$  las elevaciones correspondientes según la discusión anterior. Podemos suponer que

$\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = 0$ , y entonces se ha de cumplir que  $\tilde{f}(2\pi) = \tilde{g}(2\pi) = 2m\pi$ . Observemos que la aplicación  $\tilde{f}(t + 2\pi) - 2m\pi$  es también una elevación de  $\alpha \circ f$  que transforma 0 en 0, luego por la unicidad de las elevaciones ha de ser  $\tilde{f}(t + 2\pi) = \tilde{f}(t) + 2m\pi$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Lo mismo sucede con  $\tilde{g}$ . Una homotopía entre ambas es  $\tilde{H}_r(t) = r\tilde{f}(t) + (1-r)\tilde{g}(t)$ , luego  $\tilde{H} \circ \alpha$  es una homotopía entre  $\alpha \circ f$  y  $\alpha \circ g$ . Claramente  $\alpha(\tilde{H}_r(t)) = \alpha(\tilde{H}_r(t + 2\pi))$ , luego existe una única aplicación  $H : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow S^1$  tal que  $H_r(\alpha(t)) = \alpha(\tilde{H}_r(t))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Teniendo en cuenta que  $\alpha$  es un difeomorfismo local, es claro que  $H$  es diferenciable, así como que  $H$  es una homotopía entre  $f$  y  $g$ . ■

Después generalizaremos este teorema para aplicaciones de  $S^n$  en  $S^n$ .

**Aplicaciones en la esfera** Ahora vamos a demostrar que existen aplicaciones de  $S^2$  en  $S^2$  de cualquier grado. La forma natural de encontrarlas es identificar a  $S^2$  con la esfera de Riemann, es decir, con el espacio proyectivo  $P^1(\mathbb{C})$  (ver el apéndice B). Identificamos cada número complejo  $z$  con la clase  $[z, 1]$  en  $P^1(\mathbb{C})$ , de modo que  $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , donde  $\infty = [1, 0]$ . Dado un polinomio

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_r \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0,$$

consideramos el polinomio homogéneo

$$P(z, w) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} w + \cdots + a_1 z w^{n-1} + a_0 w^n.$$

Éste induce una aplicación  $\tilde{P} : P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^1(\mathbb{C})$  dada por

$$\tilde{P}([z, w]) = [P(z, w), w^n].$$

Claramente  $\tilde{P}$  es holomorfa y es, de hecho, una extensión de  $P$ , concretamente la determinada por  $\tilde{P}(\infty) = \infty$  (salvo si  $n = 0$ , en cuyo caso  $\tilde{P}$  es constante).

En lo sucesivo entenderemos que todo polinomio  $P \in \mathbb{C}[z]$  está definido en  $P^1(\mathbb{C})$ . En particular 1 es un valor regular del polinomio  $z^n$ , que tiene  $n$  antiimágenes distintas (las  $n$  raíces de la unidad). Además las aplicaciones holomorfas conservan la orientación, luego la fórmula (12.7) nos da que  $\text{grad } z^n = n$ . Esto prueba que existen funciones de cualquier grado positivo. Por el teorema 3.14 sabemos que la aplicación antipodal tiene grado  $-1$ , y al componerla con una aplicación de grado  $n$  obtenemos una de grado  $-n$ . Así pues, existen aplicaciones de todos los grados posibles. ■

**Ejercicio:** Demostrar que todo polinomio de grado  $n$  (visto como aplicación de  $P^1(\mathbb{C})$  en sí mismo) es homotópico a  $z^n$ . Deducir el teorema fundamental del álgebra.

**Aplicaciones de grado 1** Dada una variedad compacta orientable  $n$ -dimensional arbitraria  $V$ , vamos a esbozar la construcción de una aplicación diferenciable  $f : V \rightarrow S^n$  de grado 1.

A partir de una aplicación diferenciable  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que valga 0 para  $|x| \leq 1/4$  y valga 1 para  $|x| \geq 1/2$  construimos otra  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que valga 0 para  $\|x\| \leq 1/4$

y sea la identidad para  $\|x\| \geq 1/2$ . Usando la proyección sobre las  $n$  primeras componentes como carta del “hemisferio norte” de  $S^n$  definimos  $S^n \rightarrow S^n$  que es constante igual al “polo norte”  $N$  en un entorno de  $N$  y es la identidad fuera de un entorno mayor. Componiendo un difeomorfismo entre la bola abierta  $B_1(0)$  en  $\mathbb{R}^n$  con la proyección estereográfica y con la aplicación anterior obtenemos una aplicación diferenciable  $h : B_1(0) \rightarrow S^n$  que es un difeomorfismo en un entorno de  $0$  y toma constantemente el valor  $N$  fuera de un entorno mayor. Podemos suponer que  $h(0) = S$  (el “polo sur”) y que  $h^{-1}[S] = \{0\}$ .

Sea  $(U, x)$  una carta en  $V$  cuya imagen sea  $B_1(0)$ . Digamos que  $x(p) = 0$ . La aplicación  $x \circ h$  es constante igual a  $N$  fuera de un entorno de  $p$ , luego se extiende a una función diferenciable  $f : V \rightarrow S^n$  que toma el valor  $N$  fuera de un entorno de  $p$ . Además es un difeomorfismo en un entorno de  $p$  y  $p$  es la única antiimagen de  $0$ . Por consiguiente  $0$  es un valor regular y  $\text{grad } f = \epsilon(p) = \pm 1$ . Afinando la construcción podríamos asegurar que el grado es  $1$  pero, más fácilmente, si resulta ser  $-1$  componemos  $f$  con una aplicación de grado  $-1$ , lo cual es posible por el teorema 3.14. ■

Por el contrario, en general no existen aplicaciones  $f : S^n \rightarrow V$ , para una variedad dada  $V$ . Esto se deduce del teorema siguiente:

**Teorema 12.27** *Sea  $f : V \rightarrow W$  una aplicación diferenciable entre variedades compactas orientables  $n$ -dimensionales, entonces el diagrama siguiente es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} H(V) & \xleftarrow{f^*} & H(W) \\ D_V \downarrow & & \downarrow \text{grad } f D_W \\ H(V)^* & \xrightarrow{f^{**}} & H(W)^* \end{array}$$

donde  $f^{**}$  es la aplicación dual de  $f^*$  y  $D_V, D_W$  son los isomorfismos de dualidad de Poincaré.

DEMOSTRACIÓN: Tomemos  $\omega, \eta \in H(W)$ . Entonces

$$\begin{aligned} f^{**}(D_V(f^*(\omega)))(\eta) &= D_V(f^*(\omega))(f^*(\eta)) = \int_V^* f^*(\omega) \wedge f^*(\eta) = \int_V^* f^*(\omega \wedge \eta) \\ &= \text{grad } f \int_W^* \omega \wedge \eta = \text{grad } f D_W(\omega)(\eta). \end{aligned}$$

■

Como consecuencia:

**Teorema 12.28** *Si  $f : V \rightarrow W$  es una aplicación diferenciable entre variedades compactas conexas orientables  $n$ -dimensionales y  $\text{grad } f \neq 0$  entonces  $f^* : H(W) \rightarrow H(V)$  es inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior sabemos que  $f^* \circ D_V \circ f^{**}$  es un isomorfismo, luego  $f^*$  es inyectiva. ■

Como caso particular tenemos que si  $f : V \rightarrow S^n$  tiene grado no nulo, entonces  $H(V) \cong H(S^n)$ , luego en general no existen aplicaciones en estas condiciones, tal y como anunciábamos.

**La aplicación canónica** Para continuar el estudio de las propiedades del grado necesitamos definir una aplicación auxiliar. Si  $V$  es una variedad  $n$ -dimensional orientable (no necesariamente compacta) y  $p \in V$ , representaremos  $V_p = V \setminus \{p\}$ . Vamos a construir una aplicación lineal  $\alpha_p : H^{n-1}(V_p) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Tomemos una aplicación  $f \in C^\infty(V)$  que se anule en un entorno de  $p$  y valga 1 fuera de un entorno compacto mayor. Entonces  $df \in \Lambda_c^1(V_p)$  es cerrada, luego determina una clase  $\lambda_p \in H_c^1(V_p)$ . Se cumple que  $\lambda_p$  no depende de la elección de  $f$  pues, si  $g$  es otra elección, tenemos que  $f - g \in \Lambda_c^0(V_p)$ , luego  $df - dg = d(f - g)$  es exacta. Se dice que  $\lambda_p$  es la *clase localizadora* en  $p$ . Ahora ya podemos definir

$$\alpha_p(\omega) = \int_{V_p}^* \alpha_p \wedge \omega, \quad \omega \in H^{n-1}(V_p). \quad (12.9)$$

Para interpretar esta aplicación demostramos primero lo siguiente:

**Teorema 12.29** *Sea  $\phi : V \rightarrow W$  una aplicación diferenciable entre variedades orientables  $n$ -dimensionales y  $p \in V$  tal que  $\phi$  se restrinja a  $\phi_p : V_p \rightarrow W_{\phi(p)}$  y  $d\phi_p$  sea un isomorfismo. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(W_{\phi(p)}) & \xrightarrow{\phi_p^*} & H^{n-1}(V_p) \\ \alpha_{\phi(p)} \downarrow & & \downarrow \alpha_p \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{R} \end{array}$$

donde  $\epsilon(t) = \pm t$  con signo positivo si  $d\phi_p$  conserva la orientación y negativo en caso contrario.

**DEMOSTRACIÓN:** Por el teorema de la función inversa existen entornos  $U$  de  $p$  y  $U'$  de  $\phi(p)$  tales que  $\phi$  se restringe a un difeomorfismo de  $U$  en  $U'$ . Tomemos  $g \in C^\infty(W)$  que se anule en un entorno de  $\phi(p)$  y que valga 1 fuera de un entorno compacto de  $\phi(p)$  contenido en  $U'$ . Definimos  $f \in C^\infty(V)$  mediante

$$f(q) = \begin{cases} g(\phi(q)) & \text{si } q \in U, \\ 1 & \text{si } q \in V \setminus U. \end{cases}$$

Es claro que  $f$  es diferenciable y  $\lambda_p = [df]$ ,  $\lambda_{\phi(p)} = [dg]$ .

Sea  $\omega \in \Lambda^{n-1}(V_{\phi(p)})$  una forma cerrada. Teniendo en cuenta que  $dg$  se anula en un entorno de  $\phi(p)$  podemos considerar  $dg \wedge \omega \in \Lambda_c^n(U')$  (sin quitar a  $\phi(p)$ ) de modo que

$$\epsilon(\alpha_{\phi(p)}([\omega])) = \epsilon \int_{W_{\phi(p)}} dg \wedge \omega = \epsilon \int_{U'} dg \wedge \omega = \int_U \phi_p^*(dg \wedge \omega).$$

Ahora bien,  $\phi_{\sharp}(dg) = d(\phi \circ g) = df$ , luego

$$\epsilon(\alpha_{\phi(p)}([\omega])) = \int_U df \wedge \phi_{p\sharp}(\omega) = \int_{V_p} df \wedge \phi_{p\sharp}(\omega) = \alpha_p(\phi_p^*([\omega])).$$

■

En particular este teorema se aplica a la inclusión  $i : U \rightarrow V$ , donde  $U$  es un abierto en  $V$ , y lo que nos dice es que  $\alpha_p$  (en  $V$ ) está completamente determinada por  $\alpha_p$  en  $U$ . Concretamente,  $\alpha_p([\omega])$  puede calcularse restringiendo primero  $\omega$  a un entorno  $U$  de  $p$  arbitrario. Por ello, sólo hemos de interpretar adecuadamente las aplicaciones canónicas sobre abiertos coordenados o, más aún, basta estudiar la aplicación  $\alpha_0$  en  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 12.30** Sea  $i : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_0^n$  la inclusión ( $n \geq 2$ ). Entonces

$$\alpha_0 = i^* \circ \int_{S^{n-1}}^* .$$

En particular  $\alpha_0$  es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\omega \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}_0^n)$  una forma cerrada y sea  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  una función que valga 0 para  $\|x\| < 1/4$  y valga 1 para  $\|x\| > 1/2$ . Hemos de probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} df \wedge \omega = \int_{S^{n-1}} i_{\sharp}(\omega).$$

Ahora bien, como  $d\omega = 0$  tenemos que  $df \wedge \omega = d(f\omega)$  y la integral de la izquierda puede restringirse a la bola unidad abierta de  $\mathbb{R}^n$ . Luego basta aplicar el teorema de Stokes.

Respecto a la última afirmación, notemos que la inclusión  $i$  tiene como inversa homotópica a la retracción  $r : \mathbb{R}_0^n \rightarrow S^{n-1}$  dada por  $r(x) = x/\|x\|$ , luego  $i^* : H^{n-1}(\mathbb{R}_0^n) \rightarrow H^{n-1}(S^{n-1})$  es un isomorfismo, y el operador integral también lo es. ■

Combinando este teorema con el anterior concluimos que, en una variedad arbitraria  $V$ , se cumple que  $\alpha_p([\omega])$  se obtiene restringiendo  $\omega$  a una esfera alrededor de  $p$  y luego integrando. En particular tenemos:

**Teorema 12.31** Sea  $V$  una variedad orientable de dimensión  $n \geq 2$  difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, para cada  $p \in V$ , la aplicación  $\alpha_p : H^{n-1}(V_p) \rightarrow \mathbb{R}$  es un isomorfismo.

Terminamos el estudio de las aplicaciones canónicas con algunas propiedades técnicas que vamos a necesitar después.

Sea  $V$  una variedad compacta orientable de dimensión  $n$ , sean  $U_1, \dots, U_r$  abiertos disjuntos y sea  $p_i \in U_i$ . Definimos

$$A = \bigcup_{i=1}^r U_i, \quad B = V \setminus \{p_1, \dots, p_r\}, \quad U_{p_i} = U_i \setminus \{p_i\}.$$

Entonces  $V = A \cup B$ ,  $A \cap B = \bigcup_{i=1}^r U_{p_i}$ . La sucesión de Mayer-Vietoris nos da un homomorfismo de conexión

$$\Delta^* : \bigoplus_{i=1}^r H^{n-1}(U_{p_i}) \longrightarrow H^n(V).$$

Por otra parte podemos definir  $\alpha : \bigoplus_{i=1}^r H^{n-1}(U_{p_i}) \longrightarrow \mathbb{R}$  como la suma de las aplicaciones canónicas  $\alpha_{p_i}$ . Vamos a probar que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^r H^{n-1}(U_{p_i}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R} \\ \Delta^* \downarrow & \nearrow \int_V^* & \\ H^n(V) & & \end{array} \tag{12.10}$$

En efecto, basta probar que el triángulo conmuta sobre un elemento de uno de los sumandos directos, por ejemplo  $\beta \in H^{n-1}(U_{p_1})$ , es decir, que

$$\alpha_{p_1}(\beta) = \int_V^* \Delta^*(\beta).$$

Sea  $\omega \in \Lambda^{n-1}(U_{p_1})$  tal que  $\beta = [\omega]$ . Para considerar a  $\beta$  como elemento de  $H^{n-1}(A \cap B)$  extendemos  $\omega$  a  $A \cap B$  como la forma nula sobre los demás  $U_{p_i}$ . Sea  $\{f, g\}$  una partición de la unidad subordinada al cubrimiento  $A, B$ . Así  $\omega = f\omega + g\omega$ , con  $g\omega \in \Lambda^{n-1}(A)$ ,  $f\omega \in \Lambda^{n-1}(B)$ . Para calcular  $\Delta^*(\beta)$  consideramos el par  $(g\omega, -f\omega)$ , pasamos a  $(d(g\omega), d(f\omega))$  y de aquí a la forma  $\eta \in \Lambda^n(V)$  dada por

$$\eta_q = \begin{cases} d(g\omega)_q & \text{si } q \in A, \\ -d(f\omega)_q & \text{si } q \in B. \end{cases}$$

Entonces  $\Delta^*(\beta) = [\eta]$  y por consiguiente

$$\int_V^* \Delta^*(\beta) = \int_V \eta = \int_{U_1} \eta = \int_{U_1} dg \wedge \omega.$$

Es claro que  $g$  puede tomarse de modo que sea nula en un entorno de  $p_1$  y valga 1 en  $U_1$  menos un entorno compacto de  $p_1$ , de modo que la última integral es precisamente  $\alpha_{p_1}(\beta)$ . ■

Estudiemos ahora las aplicaciones canónicas en variedades producto. Sean  $V$  y  $W$  dos variedades orientables de dimensiones  $m$  y  $n$  respectivamente y sean  $p \in V, q \in W$ .

Consideramos el cubrimiento de  $(V \times W)_{(p,q)}$  formado por  $A = V \times W_q$  y  $B = V_p \times W$ , de modo que  $A \cap B = V_p \times W_q$ . Tenemos así una tríada exacta que determina una sucesión de Mayer-Vietoris para la cohomología de De Rham usual y otra para la cohomología con soportes compactos. Llamemos

$$\Delta : H(V_p \times W_q) \longrightarrow H((V \times W)_{(p,q)}) \quad \text{y} \quad \Delta_c : H_c(V_p \times W_q) \longrightarrow H_c((V \times W)_{(p,q)})$$

a los correspondientes homomorfismos de conexión. Por otra parte tenemos definidos los isomorfismos de Künneth

$$\kappa : H(V_p) \otimes H(W_q) \longrightarrow H(V_p \times W_q) \quad \text{y} \quad \kappa_c : H_c(V_p) \otimes H_c(W_q) \longrightarrow H_c(V_p \times W_q).$$

En primer lugar demostramos que las clases localizadoras satisfacen la relación siguiente:

$$\Delta_c(\lambda_{(p,q)}) = -\kappa_c(\lambda_p \otimes \lambda_q).$$

En efecto, tomemos funciones  $f \in C^\infty(V)$ ,  $g \in C^\infty(W)$  según la definición de las clases localizadoras, de modo que  $\lambda_p = [df]$ ,  $\lambda_q = [dg]$ . Por definición del isomorfismo de Künneth tenemos que  $\kappa_c(\lambda_p \otimes \lambda_q) = [df \times dg]$ .

Ahora definimos  $h \in C^\infty(V \times W)$  mediante  $h = f \times 1 + 1 \times g - f \times g$ . Claramente  $h$  se anula en un entorno de  $(p, q)$  y  $1 - h = (1 - f) \times (1 - g)$ , luego  $h$  toma el valor 1 fuera de un entorno compacto de  $(p, q)$ . Así pues,  $\lambda_{(p,q)} = [dh]$ .

Sólo queda probar que  $\Delta_c([-dh]) = [df \times dg]$ . Para ello observamos que

$$-dh = -df \times 1 - 1 \times dg + df \times g + f \times dg = df \times (g - 1) + (f - 1) \times dg.$$

Se cumple que  $(f - 1) \times dg \in \Lambda_c^1(V \times W_q)$  y  $df \times (1 - g) \in \Lambda_c^1(V_p \times W)$ . Puesto que sus diferenciales son  $df \times dg$  y  $-df \times dg$  respectivamente, concluimos que, en efecto,  $\Delta_c([-dh]) = [df \times dg]$ . ■

Con esto obtenemos el siguiente diagrama conmutativo entre las aplicaciones canónicas:

$$\begin{array}{ccc} H^{m+n-1}((V \times W)_{(p,q)}) & \xrightarrow{\alpha_{(p,q)}} & \mathbb{R} \\ \uparrow \Delta & & \uparrow (-1)^m \alpha_p \otimes \alpha_q \\ H^{m+n-2}(V_p \times W_q) & \xleftarrow{\kappa} & H^{m-1}(V_p) \otimes H^{n-1}(W_q) \end{array} \quad (12.11)$$

En efecto, si tomamos  $\sigma \in H^{m-1}(V_p)$  y  $\tau \in H^{n-1}(W_q)$ , tenemos que

$$\alpha_{(p,q)}(\Delta(\kappa(\sigma \otimes \tau))) = \int_{(V \times W)_{(p,q)}}^* \lambda_{(p,q)} \wedge \Delta(\kappa(\sigma \otimes \tau)).$$

Esto puede verse como el isomorfismo de Poincaré de  $(V \times W)_{(p,q)}$  actuando sobre  $\Delta(\kappa(\sigma \otimes \tau))$  y actuando a su vez sobre  $\lambda_{(p,q)}$ . En la página 351 demostramos que  $\Delta \circ D_{(V \times W)_{(p,q)}} = D_{V_p \times W_q} \circ \Delta_c^*$  (en principio la conmutatividad es salvo signo, pero el factor es  $(-1)^{k+1}$ , donde  $k = \dim \lambda_{(p,q)} = 1$ ). Por consiguiente tenemos que

$$\alpha_{(p,q)}(\Delta(\kappa(\sigma \otimes \tau))) = \int_{V_p \times W_q}^* \Delta_c(\lambda_{(p,q)}) \wedge \kappa(\sigma \otimes \tau).$$

Usando la relación entre las clases localizadoras que hemos demostrado y el teorema 12.23 resulta que

$$\alpha_{(p,q)}(\Delta(\kappa(\sigma \otimes \tau))) = - \int_{V_p \times W_q}^* \kappa_c(\lambda_p \otimes \lambda_q) \wedge \kappa(\sigma \otimes \tau)$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^m \int_{V_p \times W_q}^* (\lambda_p \wedge \sigma) \times (\lambda_q \wedge \tau) = (-1)^m \int_{V_p}^* \lambda_p \wedge \sigma \int_{W_q}^* \lambda_q \wedge \tau \\
 &= (-1)^m \alpha_p(\sigma) \alpha_q(\tau) = (-1)^m (\alpha_p \otimes \alpha_q)(\sigma \otimes \tau).
 \end{aligned}$$

■

**El grado local** Ahora estamos en condiciones de definir el grado local de una aplicación diferenciable entre variedades orientables de la misma dimensión.

**Definición 12.32** Sea  $f : V \rightarrow W$  una aplicación diferenciable entre variedades orientables de dimensión  $n \geq 2$ . Un punto  $p \in V$  es *aislado* para  $f$  si tiene un entorno  $U_0$  tal que  $f(x) \neq f(p)$  para todo  $x \in U_0 \setminus \{p\}$ . En tal caso podemos tomar cartas  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $y : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  alrededor de  $p$  y  $f(p)$  de modo que  $f$  se restrinja a una aplicación  $f_p : U_p \rightarrow U'_{f(p)}$ . Definimos  $\phi_p^f$  como la aplicación que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 H^{n-1}(U'_{f(p)}) & \xrightarrow{f_p^*} & H^{n-1}(U_p) \\
 \alpha_p \downarrow & & \downarrow \alpha_{f(p)} \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\phi_p^f} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

(Observemos que el teorema 12.30 implica que las aplicaciones  $\alpha_p$  y  $\alpha_{f(p)}$  son isomorfismos.) El *grado* de  $f$  en  $p$  se define como el número real

$$\text{grad}_p f = \phi_p^f(1).$$

Pronto veremos que el grado es de hecho un número entero, pero antes hemos de comprobar que la definición no depende de la elección de los abiertos coordenados  $U$  y  $U'$ . Para ello suponemos que definimos el grado local con otros entornos  $U_0$  y  $U'_0$ . Es fácil ver que podemos suponer  $U_0 \subset U$  y  $U'_0 \subset U'$ . Basta observar que el teorema 12.29 implica que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{n-1}(U'_{f(p)}) & & \xrightarrow{f_p^*} & & H^{n-1}(U_p) \\
 \downarrow \alpha_{f(p)} & \searrow & & \swarrow & \downarrow \alpha_p \\
 & & \mathbb{R} & \xrightarrow{\phi_p^f} & \mathbb{R} \\
 \downarrow \alpha_{f(p)} & \swarrow & & \searrow & \downarrow \alpha_p \\
 H^{n-1}(U'_{0f(p)}) & & \xrightarrow{f_p^*} & & H^{n-1}(U_{0p}) \\
 \downarrow i^* & & & & \downarrow i^*
 \end{array}$$

Es claro que el grado local de una aplicación  $f$  en un punto  $p$  depende únicamente de la restricción de  $f$  a un entorno de  $p$  arbitrariamente pequeño. Para interpretar el grado local basta considerar el caso del teorema siguiente:



**Teorema 12.33** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación diferenciable que verifique  $f^{-1}[0] = \{0\}$ . Sea  $i : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  la inclusión y  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$  la retracción dada por  $r(x) = x/\|x\|$ . Sea  $g = i \circ f \circ r : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ . Entonces se cumple que  $\text{grad}_0 f = \text{grad } g$ .

DEMOSTRACIÓN: Por la definición de grado local y el teorema 12.30 tenemos que

$$\text{grad}_0 f = \alpha_0(f_0^*(\alpha_0^{-1}(1))) = \int_{S^{n-1}}^* i^*(f_0^*(\alpha_0^{-1}(1))).$$

Ahora usamos que  $i$  y  $r$  son inversas homotópicas, de modo que  $i^* \circ r^* = 1$ , y así

$$\begin{aligned} \text{grad}_0 f &= \int_{S^{n-1}}^* i^*(f_0^*(r^*(i^*(\alpha_0^{-1}(1))))) = \int_{S^{n-1}}^* g^*(i^*(\alpha_0^{-1}(1))) \\ &= \text{grad } g \int_{S^{n-1}}^* i^*(\alpha_0^{-1}(1)) = \text{grad } g \alpha_0(\alpha_0^{-1}(1)) = \text{grad } g. \end{aligned}$$

■

Así, el grado de una aplicación  $f$  entre superficies orientables en un punto aislado  $p$  es el número de vueltas que  $f(q)$  da alrededor de  $f(p)$  cuando  $q$  da una vuelta alrededor de  $p$ . En dimensiones superiores hemos de reemplazar la noción de “número de vueltas” por el concepto más abstracto de “grado”.

Ahora podemos demostrar las propiedades básicas del grado local:

**Teorema 12.34** Se cumplen las propiedades siguientes (donde se sobrentiende que todas las aplicaciones son aplicaciones diferenciables entre variedades orientables de la misma dimensión  $n \geq 2$  y que los puntos donde consideramos grados locales son aislados):

- Si  $f : V \rightarrow W$  cumple que  $df_p$  es un isomorfismo entonces  $\text{grad}_p f = \pm 1$ , donde el signo es positivo si  $df_p$  conserva la orientación y negativo en caso contrario.
- Si  $f : V \rightarrow W$ ,  $g : W \rightarrow X$ ,  $p$  es un punto aislado de  $f$  y  $f(p)$  es un punto aislado de  $g$ , entonces  $p$  es un punto aislado de  $f \circ g$  y

$$\text{grad}_p(f \circ g) = \text{grad}_p f \cdot \text{grad}_{f(p)} g.$$

- Los grados locales son enteros.

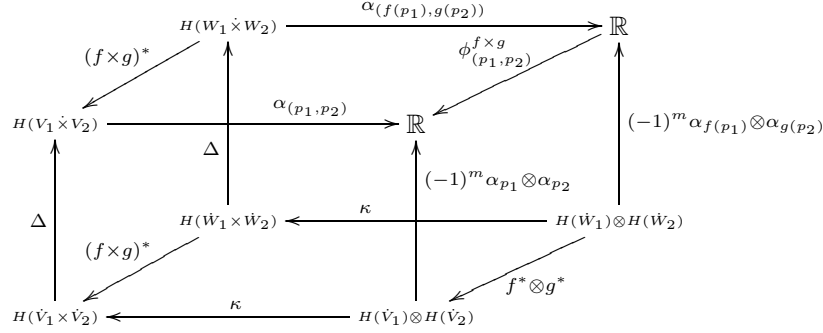
- Si  $f : V_1 \rightarrow W_1$  y  $g : V_2 \rightarrow W_2$ ,  $p_1 \in V_1$ ,  $p_2 \in V_2$ , entonces

$$\text{grad}_{(p_1, p_2)}(f \times g) = \text{grad}_{p_1} f \cdot \text{grad}_{p_2} g.$$

DEMOSTRACIÓN: a) se sigue inmediatamente del teorema 12.29. b) es inmediato a partir de la definición de grado local. De a) y b) se sigue que el grado se conserva al componer con cartas orientadas, luego basta probar que el grado

en 0 de una aplicación de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  es un entero, pero esto se sigue del teorema anterior.

Para probar d) consideramos el diagrama siguiente:



Por conveniencia hemos usado las abreviaturas siguientes:

$$\dot{V}_1 = V_1|_{p_1}, \quad \dot{V}_2 = V_2|_{p_2}, \quad V_1 \dot{\times} V_2 = (V_1 \times V_2)|_{(p_1, p_2)},$$

$$\dot{W}_1 = W_1|_{f(p_1)}, \quad \dot{W}_2 = W_2|_{g(p_2)}, \quad W_1 \dot{\times} W_2 = (W_1 \times W_2)|_{(f(p_1), g(p_2))}$$

y no hemos indicado las dimensiones de los grupos de cohomología, que se deducen del contexto. Por ejemplo, el vértice posterior izquierdo es

$$H^{m+n-1}((W_1 \times W_2)|_{(f(p_1), g(p_2))}),$$

donde  $m$  y  $n$  son las dimensiones de  $W_1$  y  $W_2$  respectivamente.

Las caras anterior y posterior del cubo conmutan porque son casos de (12.11). La cara izquierda conmuta por el teorema 11.15, la cara superior conmuta por definición de  $\phi^{f \times g}_{(p_1, p_2)}$  y la conmutatividad de la cara inferior es inmediata. Teniendo en cuenta que las flechas horizontales son isomorfismos, podemos concluir que la cara derecha conmuta. Esta conmutatividad no se pierde si eliminamos los signos  $(-1)^m$  en las dos flechas verticales, ni tampoco si sustituimos  $\phi^{f \times g}_{(p_1, p_2)}$  por  $\phi^f_{p_1} \otimes \phi^g_{p_2}$ . Como las flechas verticales son isomorfismos, esto nos da la igualdad  $\phi^{f \times g}_{(p_1, p_2)} = \phi^f_{p_1} \otimes \phi^g_{p_2}$ , lo que implica d). ■

**Aplicaciones entre esferas** Ahora podemos probar fácilmente que existen aplicaciones  $f : S^n \rightarrow S^n$  de grado arbitrario. En efecto, dado un natural  $p \geq 1$ , consideremos la aplicación  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $g(z) = z^p$ . Su restricción a  $S^1$  es  $g(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos p\theta, \sin p\theta)$ , y la fórmula (12.8) nos da fácilmente que  $\text{grad} g|_{S^1} = p$ . Del teorema 12.33 se sigue entonces que  $\text{grad}_0 g = p$ .

Prescindiendo de la notación compleja, tenemos una aplicación  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de grado  $p$  en 0. Por el teorema anterior, el producto de  $g$  por la identidad en  $\mathbb{R}^{n-1}$  es una aplicación  $h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  cuyo grado en 0 sigue siendo  $p$ . Aplicando de nuevo el teorema 12.33 obtenemos una aplicación  $f : S^n \rightarrow S^n$  de grado  $p$ . Componiéndola con una reflexión obtenemos una aplicación de grado  $-p$ .

Recordemos que hemos demostrado que si  $V$  es una variedad compacta, conexa y orientable de dimensión  $n$ , existe una aplicación  $f : V \rightarrow S^n$  de grado 1. Componiéndola con una aplicación de grado  $p \in \mathbb{Z}$  obtenemos una aplicación  $g : V \rightarrow S^n$  de grado  $p$ , es decir, existen aplicaciones de  $V$  en  $S^n$  de cualquier grado entero. ■

Ahora demostramos el resultado fundamental que relaciona el grado global con los grados locales de una aplicación. Se trata de una generalización de la fórmula (12.7):

**Teorema 12.35** *Sea  $f : V \rightarrow W$  una aplicación diferenciable entre variedades compactas, conexas y orientables de la misma dimensión  $n \geq 2$ . Sea  $y \in W$  un punto tal que  $f^{-1}[y]$  sea finito, digamos  $f^{-1}[y] = \{x_1, \dots, x_r\}$ . Entonces*

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^r \text{grad}_{x_i} f.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que  $r > 0$ , pues el teorema es trivial en caso contrario. Tomemos entornos coordenados  $U_i$  de cada  $x_i$  disjuntos dos a dos y un entorno coordenado  $G$  de  $y$  de modo que  $f$  se restrinja a aplicaciones  $f_i : U_i \rightarrow G$ . Por definición

$$\text{grad}_{x_i} f = \alpha_{x_i}(f_{i x_i}(\alpha_y^{-1}(1))).$$

Llamemos  $A = \bigcup_{i=1}^r U_i$ ,  $B = V \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$ , de modo que  $A \cap B = \bigcup_{i=1}^r U_{i x_i}$ .

Sea  $\alpha = \bigoplus_{i=1}^r \alpha_{x_i} : H^{n-1}(A \cap B) \rightarrow \mathbb{R}$ . Por otra parte, la suma directa de las aplicaciones  $f_{i p_i}^* : H^{n-1}(A \cap B) \rightarrow H^{n-1}(W)$  es simplemente  $f|_{A \cap B}^*$ , luego

$$\sum_{i=1}^r \text{grad}_{x_i} f = \alpha(f|_{A \cap B}^*(\alpha_y^{-1}(1))).$$

La aplicación  $f$  es un morfismo entre las tríadas de abiertos  $(V, A, B)$  y  $(W, G, W \setminus \{y\})$ , luego los homomorfismos inducidos por  $f$  conmutan con los homomorfismos de conexión de las respectivas sucesiones de Mayer-Vietoris (teorema 11.15). Si llamamos  $\Delta_V$  y  $\Delta_W$  a estos homomorfismos, tenemos concretamente que  $f_{A \cap B}^* \circ \Delta_V = \Delta_W \circ f^*$ . Ahora basta aplicar dos veces la conmutatividad del diagrama (12.10), con lo que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \text{grad}_{x_i} f &= \int_V^* \Delta_V(f|_{A \cap B}^*(\alpha_y^{-1}(1))) = \int_V^* f^*(\Delta_W(\alpha_y^{-1}(1))) \\ &= \text{grad } f \int_W^* \Delta_W(\alpha_y^{-1}(1)) = \text{grad } f \alpha_y(\alpha_y^{-1}(1)) = \text{grad } f. \end{aligned}$$

■

**El teorema de Hopf** Terminamos el capítulo demostrando que el grado de una aplicación de  $S^n$  en sí misma determina su clase de homotopía. Para  $n = 1$  es el teorema 12.26. El caso general se conoce como teorema de Hopf, quien lo probó de hecho para aplicaciones de una variedad compacta conexa arbitraria de dimensión  $n$  en  $S^n$ . Lo probaremos por inducción sobre  $n$ , para lo cual necesitamos conectar adecuadamente  $S^{n-1}$  con  $S^n$ . Esto lo conseguiremos a través del concepto de “suspensión” de una aplicación.

Llamaremos  $N = (0, \dots, 0, 1)$  y  $S = (0, \dots, 0, -1)$  a los “polos” norte y sur, respectivamente, de  $S^n$ . Los “hemisferios” norte y sur serán

$$H_N = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}, \quad H_S = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0\}.$$

Identificamos  $S^{n-1}$  con el “ecuador”  $S^{n-1} = \{x \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$ . La proyección  $p : S^n \setminus \{N, S\} \rightarrow S^{n-1}$  dada por

$$p(x) = \frac{x - x_{n+1}N}{\|x - x_{n+1}N\|}$$

es claramente diferenciable.

Fijemos una función diferenciable  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\omega^{-1}[0] = \{0\}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  se cumpla  $\omega(-t) = -\omega(t)$  y  $|\omega(t)| \leq \pi/2$  y, si  $t > 1 - \epsilon$  (para un cierto  $\epsilon > 0$ ) entonces  $\omega(t) = \pi/2$ .

Para cada función diferenciable  $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  definimos la *suspensión* de  $f$  como la aplicación  $\sigma_f : S^n \rightarrow S^n$  dada por

$$\sigma_f(x) = \begin{cases} N & \text{si } x = N, \\ N \operatorname{sen} \omega(x_{n+1}) + f(p(x)) \cos \omega(x_{n+1}) & \text{si } x \neq N, S, \\ S & \text{si } x = S. \end{cases}$$

Es claro que  $\sigma_f$  es diferenciable (notemos que es constante en un entorno de  $N$  y de  $S$ ), así como que extiende a  $f$ . Más aún, cumple que  $\sigma_f[H_N] \subset H_N$ ,  $\sigma_f[H_S] \subset H_S$  y  $\sigma_f^{-1}[S^{n-1}] = S^{n-1}$ .

**Teorema 12.36** Si  $f, g : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  son aplicaciones homotópicas, entonces las suspensiones  $\sigma_f$  y  $\sigma_g$  también lo son.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $h : \mathbb{R} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ . Entonces, para cada  $t \in \mathbb{R}$  tenemos que  $h_t : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ , luego podemos considerar su suspensión  $\sigma_{h_t}$ . Ahora definimos  $H : \mathbb{R} \times S^n \rightarrow S^n$  mediante  $H_t(x) = \sigma_{h_t}(x)$ . Es fácil ver que  $H$  es diferenciable, así como que es una homotopía entre  $\sigma_f$  y  $\sigma_g$ . ■

**Teorema 12.37** Sea  $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  (con  $n \geq 2$ ) una aplicación diferenciable y sea  $\sigma_f$  su suspensión. Entonces  $\operatorname{grad} \sigma_f = \operatorname{grad} f$ .

DEMOSTRACIÓN: Consideremos los abiertos  $U = S^n \setminus \{S\}$ ,  $V = S^n \setminus \{N\}$ . Así mismo, si  $0 < a < 1$  definimos

$$U_a = \{x \in S^n \mid x_{n+1} > -a\}, \quad V_a = \{x \in S^n \mid x_{n+1} < a\}.$$

El conjunto  $\sigma_f^{-1}[S]$  es un compacto en el hemisferio sur (abierto) y  $\sigma_f^{-1}[N]$  es un compacto en el hemisferio norte (abierto). Por consiguiente existe un  $a \in ]0, 1[$  tal que

$$\sigma_f[U_a] \subset U \quad \text{y} \quad \sigma_f[V_a] \subset V.$$

Así la aplicación  $\sigma_f$  conserva las tríadas  $(S^n, U, V)$  y  $(S^n, U_a, V_a)$ , luego da lugar al siguiente diagrama conmutativo con los homomorfismos de conexión de las sucesiones de Mayer-Vietoris asociadas:

$$\begin{array}{ccc} H^{n+1}(U_a \cap V_a) & \xrightarrow{\Delta_a} & H^n(S^n) \\ \sigma_f^* \uparrow & & \uparrow \sigma_f^* \\ H^{n-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\Delta} & H^n(S^n) \end{array}$$

Teniendo en cuenta que  $U, V, U_a$  y  $V_a$  son todos contractibles, la exactitud de la sucesión de Mayer-Vietoris nos da que los homomorfismos de conexión  $\Delta$  y  $\Delta_a$  son isomorfismos. Como  $\sigma_f$  extiende a  $f$ , las inclusiones

$$i : S^{n-1} \longrightarrow U \cap V, \quad i_a : S^{n-1} \longrightarrow U_a \cap V_a$$

inducen un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow{i_a^*} & H^{n-1}(U_a \cap V_a) \\ f^* \uparrow & & \uparrow \sigma_f^* \\ H^{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow{i^*} & H^{n-1}(U \cap V) \end{array}$$

Además  $S^{n-1}$  es un retracto por deformación de  $U \cap V$  y de  $U_a \cap V_a$ , luego las flechas horizontales son isomorfismos. Combinando los dos diagramas obtenemos

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow{(i_a^*)^{-1} \circ \Delta_a} & H^n(S^n) \\ f^* \uparrow & & \uparrow \sigma_f^* \\ H^{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow{(i^*)^{-1} \circ \Delta} & H^n(S^n) \end{array}$$

Ahora basta demostrar que los isomorfismos horizontales son la misma aplicación, pues entonces  $f^*$  y  $\sigma_f^*$  serán la multiplicación por el mismo entero. Ahora bien, la inclusión  $j : (S^n, U_a, V_a) \longrightarrow (S^n, U, V)$  determina el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow{i_a^*} & H^{n-1}(U_a \cap V_a) \\ i^* \uparrow & \nearrow j^* & \downarrow \Delta_a \\ H^{n-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\Delta} & H^n(S^n) \end{array}$$

de donde se sigue la igualdad buscada. ■

En la demostración del teorema siguiente usamos que el teorema 1.25 da lugar a homotopías diferenciables si las aplicaciones consideradas son diferenciables, lo cual se comprueba inmediatamente.

**Teorema 12.38** *Si  $g : S^n \rightarrow S^n$  es una aplicación diferenciable tal que  $g[H_N] \subset H_n$  y  $g[H_S] \subset H_S$ , entonces  $g$  es homotópica a  $\sigma_f$ , donde  $f = g|_{S^{n-1}}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que para todo  $x \in S^n$  se cumple  $g(x) \neq -\sigma_f(x)$ , pues ambos miembros están en hemisferios distintos, luego la igualdad sólo podría darse si  $x \in S^{n-1}$ , pero en tal caso  $\sigma_f(x) = g(x)$ . Basta aplicar el teorema 1.25. ■

Ahora usaremos que el homeomorfismo construido en el teorema 1.7 es claramente homotópico a la identidad (y podemos exigir que su restricción a la bola abierta sea un difeomorfismo). Consecuentemente, en el teorema 1.8 podemos conseguir un homeomorfismo que sea homotópico a la identidad y que sea un difeomorfismo si consideramos una variedad diferencial. Más aún, teniendo en cuenta que si a una variedad conexa de dimensión  $\geq 2$  le quitamos un número finito de puntos obtenemos un abierto conexo, es claro que en particular tenemos:

*Si  $V$  es una variedad conexa de dimensión  $\geq 2$  y  $x, y \in V$ , existe un difeomorfismo  $f : V \rightarrow V$  homotópico a la identidad tal que  $f(x) = y$  y además  $f$  deja invariante a cualquier conjunto finito prefijado de puntos de  $V$  distintos de  $x$  e  $y$ .*

De aquí se sigue claramente el siguiente refinamiento:

**Teorema 12.39** *Si  $V$  es una variedad diferencial conexa de dimensión  $\geq 2$  y  $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r$  son dos grupos de puntos de  $V$  distintos dos a dos (aunque los de un grupo no tienen por qué ser distintos de los del otro) existe un difeomorfismo  $f : V \rightarrow V$  homotópico a la identidad tal que  $f(x_i) = y_i$  para  $i = 1, \dots, r$ .*

En el teorema siguiente nos apoyamos fuertemente en la diferenciabilidad de la aplicación considerada:

**Teorema 12.40** *Toda aplicación diferenciable  $f : S^n \rightarrow S^n$  (con  $n \geq 2$ ) es homotópica a otra  $g : S^n \rightarrow S^n$  tal que  $g[H_N] \subset S^n \setminus \{S\}$  y  $g[H_S] \subset S^n \setminus \{N\}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos dos valores regulares  $a$  y  $b$  para  $f$  (cuya existencia se sigue del teorema de Sard). Entonces los conjuntos  $f^{-1}[a]$  y  $f^{-1}[b]$  son finitos (tal vez vacíos), digamos  $f^{-1}[a] = \{x_1, \dots, x_p\}$ ,  $f^{-1}[b] = \{y_1, \dots, y_q\}$ . Por el teorema anterior existe un difeomorfismo  $u : S^n \rightarrow S^n$  homotópico a la identidad tal que  $u(x_i) \in S^n \setminus H_S$ ,  $u(y_i) \in S^n \setminus H_N$ , para todo  $i$ . Por otra parte existe un difeomorfismo  $v : S^n \rightarrow S^n$  también homotópico a la identidad tal que  $v(a) = N$ ,  $v(b) = S$ . De este modo,  $g = u^{-1} \circ f \circ v$  es homotópica a  $f$  y cumple lo pedido. ■

**Teorema 12.41** *Toda aplicación diferenciable  $f : S^n \rightarrow S^n$  (con  $n \geq 2$ ) es homotópica a una aplicación diferenciable  $g : S^n \rightarrow S^n$  tal que  $g[H_N] \subset H_N$  y  $g[H_S] \subset H_S$ .*

DEMOSTRACIÓN: En virtud del teorema anterior podemos suponer que  $f[H_N] \subset S^n \setminus \{S\}$  y  $f[H_S] \subset S^n \setminus \{N\}$ . Puesto que  $f[H_N]$  y  $f[H_S]$  son compactos, con la notación de la prueba del teorema 12.37, existe un  $a \in ]0, 1[$  tal que  $f[H_N] \subset U_a$  y  $f[H_S] \subset V_a$ .

Tomemos  $0 < \epsilon < 1 - a$  y sea  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  una aplicación diferenciable que valga 0 para  $|t| > 1 - \epsilon$  y que valga 1 para  $|t| \leq a$ . Definimos  $h : S^n \rightarrow S^n$  mediante

$$h(x) = \frac{x - \lambda(x_{n+1})x_{n+1}N}{\|x - \lambda(x_{n+1})x_{n+1}N\|}.$$

Así  $h$  es homotópica a la identidad y cumple  $h[U_a] \subset H_N$ ,  $h[V_a] \subset H_S$ . Por consiguiente,  $g = f \circ h$  es homotópica a  $f$  y cumple lo pedido. ■

Como consecuencia inmediata de este teorema y de 12.38 concluimos:

**Teorema 12.42** *Si  $f : S^n \rightarrow S^n$  es una aplicación diferenciable (con  $n \geq 2$ ) existe una aplicación diferenciable  $g : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  tal que  $f$  es homotópica a  $\sigma_g$ .*

Ahora ya es inmediato el teorema de Hopf:

**Teorema 12.43 (Hopf)** *Dos aplicaciones diferenciables  $f, g : S^n \rightarrow S^n$  son homotópicas si y sólo si tienen el mismo grado.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación ya está demostrada. Probamos la otra por inducción sobre  $n$ . El caso  $n = 1$  es el teorema 12.26. Supuesto cierto para  $n - 1 \geq 1$ , supongamos que  $f$  y  $g$  tienen el mismo grado. Por el teorema anterior existen aplicaciones diferenciables  $\tilde{f}, \tilde{g} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  tales que  $f$  y  $g$  son homotópicas a sus respectivas suspensiones. Por el teorema 12.37 tenemos que  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  tienen el mismo grado, luego por hipótesis de inducción son homotópicas. Por el teorema 12.36 también son homotópicas las suspensiones y, por consiguiente, también lo son  $f$  y  $g$ . ■

Teniendo en cuenta que el grado de una aplicación  $f : S^n \rightarrow S^n$  está definido aunque  $f$  no sea diferenciable (basta con que sea continua) resulta natural conjeturar que el teorema anterior es válido aun sin la hipótesis de diferenciability. Así es, ciertamente, como se deduce del teorema siguiente:

**Teorema 12.44** *Toda aplicación continua  $f : S^n \rightarrow S^n$  es homotópica a una aplicación diferenciable.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada  $x \in S^n$  tomemos un entorno  $U_x$  tal que si  $y \in U_x$  entonces  $\|f(y) - f(x)\| < 1/2$  (la norma es la de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Cubrimos  $S^n$  por un número finito de estos abiertos  $U_{x_1}, \dots, U_{x_r}$  y tomemos una partición de la unidad subordinada  $h_1, \dots, h_r$ . Sea  $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  la función dada por

$$g(x) = \sum_{i=1}^r f(x_i)h_i(x).$$

Obviamente  $g$  es diferenciable y para cada  $x \in S^n$  se cumple

$$\begin{aligned} \|g(x) - f(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^r f(x_i)h_i(x) - f(x) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^r (f(x_i) - f(x))h_i(x) \right\| \leq \sum_{i=1}^r \|f(x_i) - f(x)\| \|h_i(x)\| \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

En particular  $0$  no está en el segmento que une  $f(x)$  con  $g(x)$ , luego  $f$  y  $g$  son homotópicas como aplicaciones  $S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Componiendo  $g$  con la retracción natural  $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$  obtenemos una aplicación diferenciable  $h : S^n \rightarrow S^n$  homotópica a  $f \circ r = f$ . ■

Así, si dos aplicaciones continuas en  $S^n$  tienen el mismo grado, existen aplicaciones diferenciables homotópicas a cada una de ellas que también tendrán el mismo grado, luego serán homotópicas entre sí, al igual que las aplicaciones de partida. Esto es la versión topológica del teorema de Hopf.

Más adelante necesitaremos la siguiente consecuencia:

**Teorema 12.45** *Sea  $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$  una aplicación diferenciable cuya restricción a  $S^n$  tenga grado 0. Entonces existe una aplicación diferenciable  $\bar{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S^n$  tal que para todo  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  con  $\|x\| \geq 1$  se cumple  $\bar{f}(x) = f(x)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de Hopf tenemos que  $f|_{S^n}$  es homotópica a una constante, es decir, existe  $h : \mathbb{R} \times S^n \rightarrow S^n$  y  $p \in S^n$  de modo que  $h_0 = p$  y  $h_1 = f|_{S^n}$ . Definimos  $g : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$  mediante  $g(x) = f(x/\|x\|)$ . Es claro que  $g$  también es homotópica a una constante, la homotopía es la aplicación  $h'_t(x) = h_t(x/\|x\|)$ . Por otra parte,  $g$  es homotópica a  $f$ . Basta considerar la homotopía dada por

$$h''_t(x) = f\left(\left(1 - t + \frac{t}{\|x\|}\right)x\right).$$

Por consiguiente,  $f$  es homotópica a una constante, luego existe una aplicación diferenciable  $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$  tal que  $H_0 = p$  y  $H_1 = f$ . Tomemos  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable tal que  $\lambda(t) = 1$  si  $|t| \geq 1$  y  $\lambda(t) = 0$  si  $|t| \leq \epsilon$ , para cierto  $\epsilon > 0$ . Basta tomar

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} H(\lambda(\|x\|), x) & \text{si } x \neq 0, \\ p & \text{si } \|x\| < \epsilon. \end{cases}$$

■



# Capítulo XIII

## Fibrados

En este punto conviene introducir una estructura de gran utilidad a la hora de trabajar con variedades diferenciales. El ejemplo típico de fibrado es el fibrado de tangentes de una variedad  $V$ : una variedad formada por todos los espacios tangentes  $T_p V$  con  $p \in V$ . En general, un fibrado puede pensarse como una parametrización de una familia de variedades donde el parámetro recorre a su vez una variedad.

### 13.1 Definición y propiedades básicas

**Definición 13.1** Una aplicación diferenciable  $\pi : E \rightarrow B$  entre variedades tiene la *propiedad local del producto* respecto a una variedad  $F$  si cada punto  $p \in B$  tiene un entorno abierto  $U$  para el que existe un difeomorfismo

$$f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$$

tales que  $\pi(f(p, v)) = p$  para todo  $p \in U$  y todo  $v \in F$ . Se dice que  $f$  es una *factorización local* de  $E$ .

Un *fibrado (diferencial)* es una cuádruple  $(E, \pi, B, F)$ , donde  $\pi : E \rightarrow B$  es una aplicación con la propiedad local del producto respecto de  $F$ . Se dice que  $B$  es el *espacio base* del fibrado,  $\pi$  es la *proyección* y  $F$  es la *fibra típica*. Para cada  $p \in B$ , el conjunto  $F_p = \pi^{-1}[p]$  es la *fibra* sobre  $p$ .

Veamos que cada fibra  $F_p$  tiene una estructura natural de subvariedad de  $E$  difeomorfa a  $F$ . Concretamente, si  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$  es una factorización local de  $E$  en un entorno de  $p \in B$ , llamamos  $f_p : F \rightarrow F_p$  a la aplicación dada por  $f_p(v) = f(p, v)$ . Obviamente  $f_p$  es un homeomorfismo, luego existe una única estructura de variedad diferencial en  $F_p$  (con la topología inducida por  $E$ ) para la cual  $f_p$  es un difeomorfismo. Del hecho de que  $\{p\} \times F$  sea una subvariedad de  $U \times F$  se sigue que  $F_p$  es una subvariedad de  $E$  (pues la inclusión  $F_p \rightarrow E$  se descompone en la composición de  $f_p^{-1}$  con la inclusión  $\{p\} \times F \rightarrow U \times F$  con  $f$ , luego la diferencial de la inclusión es composición de un monomorfismo con dos isomorfismos).

**Ejemplos** Como ya hemos comentado, el ejemplo típico de fibrado es el fibrado de tangentes de una variedad  $V$ , es decir, el formado por  $E = TV$  con la proyección natural  $\pi : TV \rightarrow V$  y  $F = \mathbb{R}^n$ . Si  $(U, x)$  es una carta de  $V$ , definimos  $f : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}[U]$  mediante

$$f(p, v) = v_1 \partial_{x_1}|_p + \cdots + v_n \partial_{x_n}|_p.$$

Claramente  $f$  es un difeomorfismo, pues su lectura en las cartas  $x \times I$  y  $\tilde{x}$  es la identidad. Por consiguiente  $\pi$  tiene la propiedad local del producto.

En otro sentido, el ejemplo típico de fibrado es el *fibrado trivial*  $E = B \times F$ , con  $\pi : E \rightarrow B$  la proyección en la primera componente. En este caso decimos que es “típico” porque la definición de fibrado afirma precisamente que todo fibrado es “localmente trivial”. Para precisar esto debemos introducir algunas nociones adicionales. ■

**Definición 13.2** Un *homomorfismo de fibrados* es una aplicación  $\phi : E \rightarrow E'$  diferenciable tal que si  $x, y \in E$  cumplen  $\pi(x) = \pi(y)$ , entonces se cumple también  $\pi'(\phi(x)) = \pi'(\phi(y))$ .

Claramente  $\phi$  induce una aplicación  $\phi_B : B \rightarrow B'$  unívocamente determinada por la conmutatividad del diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{\phi_B} & B' \end{array}$$

La aplicación  $\phi_B$  es diferenciable, pues si  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$  es una factorización local alrededor de un punto  $p \in B$  y fijamos  $v \in F$ , tenemos que  $\phi_B(p) = \pi'(\phi(f(p, v)))$ .

Así mismo,  $\phi$  se restringe a aplicaciones diferenciables  $\phi_p : F_p \rightarrow F'_{\phi_B(p)}$ .

Diremos que  $\phi$  es un *isomorfismo de fibrados* si es un homomorfismo de fibrados y un difeomorfismo. En tal caso es claro que  $\phi_B$  y las aplicaciones  $\phi_p$  son difeomorfismos.

Generalizando la definición previa, diremos que un fibrado  $E$  es *trivial* si es isomorfo al fibrado trivial  $B \times F$ .

**Ejemplo** Es inmediato comprobar que  $E = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  tiene estructura de fibrado trivial sobre  $\mathbb{R}$  con fibra  $S^n$  a través de la aplicación  $\pi : E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\pi(x) = \|x\|$ . ■

Diremos que un fibrado  $E$  es un *subfibrado* de otro fibrado  $E'$  si  $E$  es una subvariedad de  $E'$ , el espacio base  $B$  es una subvariedad de  $B'$ , la proyección  $\pi$  es  $\pi'|_E$  y cada fibra  $F_p$  es una subvariedad de  $F'_p$ .

**Ejemplo** Si  $E$  es un fibrado, cada abierto  $\pi^{-1}[U_i]$  es un subfibrado de base  $U_i$  y con la misma fibra  $F$ . De la propia definición de fibrado se desprende que es trivial, luego tenemos que todo punto de un fibrado está contenido en un subfibrado abierto trivial, y éste es el contenido esencial de la definición de fibrado. ■

El fibrado de tangentes de una variedad tiene en realidad una estructura más rica que la mera estructura de fibrado. La definición siguiente recoge este hecho:

**Definición 13.3** Un *fibrado vectorial* es un fibrado  $E$  tal que su fibra típica  $F$  y cada una de las fibras  $F_p$  tienen definidas estructuras de espacio vectorial de dimensión finita  $r$ , de modo que en un entorno de cada punto de  $B$  existe una factorización local  $f$  respecto a la cual las aplicaciones  $f_p : F \rightarrow F_p$  son isomorfismos.

Por ejemplo, es claro que el fibrado de tangentes de toda variedad diferencial es un fibrado vectorial.

Un *homomorfismo* entre fibrados vectoriales es un homomorfismo de fibrados  $\phi : E \rightarrow E'$  tal que las aplicaciones  $\phi_p : F_p \rightarrow F'_{\phi(p)}$  son lineales.

Por ejemplo, si  $f : V \rightarrow W$  es una aplicación diferenciable entre variedades, es claro que  $df : TV \rightarrow TW$  es un homomorfismo de fibrados vectoriales.

Un *subfibrado vectorial*  $E$  de un fibrado vectorial  $E'$  es un subfibrado que tiene estructura de fibrado vectorial y de modo que cada fibra  $F_p$  es un subespacio vectorial de  $F'_p$ .

Si  $E$  es un fibrado vectorial, podemos definir la aplicación  $\iota : B \rightarrow E$  que a cada  $p \in B$  le asigna el vector nulo de  $F_p$ . Se trata de una aplicación diferenciable, pues si  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$  es una factorización local de  $E$ , entonces  $\iota|_U(p) = f(p, 0)$ . Más aún, es un difeomorfismo en la imagen, pues su inversa es la restricción de  $\pi$  y, precisamente porque  $\iota \circ \pi$  es la identidad, tenemos que cada  $d\iota|_p$  es inyectiva. De aquí se sigue que  $\iota[B]$  es una subvariedad de  $E$  difeomorfa a  $B$  o, equivalentemente, que podemos considerar a  $B$  como subvariedad de  $E$ . A través de esta identificación, si  $\phi : E \rightarrow E'$  es un homomorfismo de fibrados vectoriales, la aplicación  $\phi_B : B \rightarrow B'$  es simplemente la restricción a  $B$ .

**Definición 13.4** Sea  $E$  un fibrado vectorial. Definimos el *fibrado tensorial* de tipo  $(r, s)$  de  $E$  como el conjunto

$$T_s^r(E) = \bigcup_{p \in B} \mathcal{T}_s^r(F_p)$$

y consideramos en él la proyección  $\pi : T_s^r(E) \rightarrow B$  que a cada tensor  $t$  le hace corresponder el punto  $p$  tal que  $t \in \mathcal{T}_s^r(F_p)$ .

Vamos a probar que  $T_s^r(E)$  admite una estructura de variedad diferencial con la cual resulta ser un fibrado vectorial con la misma base  $B$  que  $E$  y con

fibra típica  $\mathcal{T}_s^r(F)$ . Observemos que  $\mathcal{T}_s^r(F)$  es un espacio vectorial, digamos de dimensión  $N$ , de modo que tiene una única estructura diferencial caracterizada por que los isomorfismos  $h : \mathcal{T}_s^r(F) \rightarrow \mathbb{R}^N$  son difeomorfismos. Fijemos un isomorfismo  $h$  cualquiera.

Es claro que para cada punto  $q \in B$  podemos tomar una factorización local  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$  tal que  $U$  sea además un entorno coordinado de  $q$ , digamos que con coordenadas  $x$ . Para cada  $p \in U$ , el isomorfismo  $f_p : F \rightarrow F_p$  induce un isomorfismo  $\tilde{f}_p : \mathcal{T}_s^r(F) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(F_p)$ . Definimos  $\tilde{f} : U \times \mathcal{T}_s^r(F) \rightarrow \pi^{-1}[U]$  mediante  $\tilde{f}(p, t) = \tilde{f}_p(t)$ . Claramente  $\tilde{f}$  es biyectiva.

Definimos  $X : \pi^{-1}[U] \rightarrow \mathbb{R}^{n+N}$  la aplicación  $X = \tilde{f}^{-1} \circ (x \times h)$ . Vamos a probar que los pares  $(\pi^{-1}[U], X)$  forman un atlas de  $T_s^r(E)$ . Entonces la aplicación  $X$  será un difeomorfismo, al igual que  $\tilde{f}^{-1}$  y que  $f$ , lo que probará a su vez que  $T_s^r(E)$  es un fibrado.

Usamos el teorema 9.28. Supongamos que  $f' : U' \times F \rightarrow \pi^{-1}[U']$  es otra factorización de  $E$  de modo que  $(U', x')$  es una carta de  $B$ . Hemos de probar que  $X[\pi^{-1}[U] \cap \pi^{-1}[U']]$  es abierto en  $\mathbb{R}^{n+N}$  y que  $X^{-1} \circ X'$  es diferenciable.

Ahora bien, teniendo en cuenta que  $x \times h$  y  $x' \times h$  son difeomorfismos, basta probar que  $\tilde{f}^{-1}[\pi^{-1}[U] \cap \pi^{-1}[U']]$  es abierto en  $U \times \mathcal{T}_s^r(F)$  y que  $\tilde{f} \circ \tilde{f}'^{-1}$  es diferenciable.

Ciertamente,  $\tilde{f}^{-1}[\pi^{-1}[U] \cap \pi^{-1}[U']] = (U \cap U') \times \mathcal{T}_s^r(F)$  es abierto. Para demostrar que

$$\tilde{g} = \tilde{f} \circ \tilde{f}'^{-1} : (U \cap U') \times \mathcal{T}_s^r(F) \rightarrow (U \cap U') \times \mathcal{T}_s^r(F)$$

es diferenciable basta ver que lo son las composiciones con las proyecciones en los dos factores. La composición con la proyección en  $U \cap U'$  es la propia proyección en  $U \cap U'$ , luego es diferenciable.

Observemos ahora que las aplicaciones  $\tilde{g}_p : \mathcal{T}_s^r(F) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(F)$  determinadas mediante  $\tilde{g}(p, t) = (p, \tilde{g}_p(t))$  son los isomorfismos inducidos por los isomorfismos  $g_p = f_p \circ f_p'^{-1} : F \rightarrow F$ .

Si  $e_1, \dots, e_n$  es una base de  $F$ , entonces  $g_p(e_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(p)e_j$ , para ciertas funciones  $\alpha_{ij} : B \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables (pues  $\alpha_{ij}(p)$  es la composición de la función  $p \mapsto g(p, e_i)$  con la  $j$ -ésima función coordinada en  $F$ ). Similarmente,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_p(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_s}^*) &= g_p(e_{i_1}) \otimes \dots \otimes g_p(e_{i_r}) \otimes g_p(e_{j_1})^* \otimes \dots \otimes g_p(e_{j_s})^* \\ &= \sum_{\substack{u_1, \dots, u_r \\ v_1, \dots, v_s}} \alpha_{v_1, \dots, v_s, j_1, \dots, j_s}^{u_1, \dots, u_r, i_1, \dots, i_r}(p) e_{u_1} \otimes \dots \otimes e_{u_r} \otimes e_{v_1}^* \otimes \dots \otimes e_{v_s}^*, \end{aligned}$$

donde las funciones  $\alpha_{v_1, \dots, v_s, j_1, \dots, j_s}^{u_1, \dots, u_r, i_1, \dots, i_r}$  dependen polinómicamente de las funciones  $\alpha_{ij}$  y de  $(\det \alpha_{ij})^{-1}$ , de donde se sigue su diferenciableidad. A su vez ésta implica la diferenciableidad de  $\tilde{g}$ .

Es fácil probar que  $T_s^r(E)$  es, con esta estructura de variedad, un espacio de Hausdorff con una base numerable. En definitiva tenemos el teorema siguiente:

**Teorema 13.5** Si  $E$  es un fibrado vectorial, entonces  $T_s^r(E)$  admite una estructura de fibrado con la misma base  $B$  y con fibra  $\mathcal{T}_s^r(F)$  caracterizada por que si  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$  es una factorización local de  $E$ , entonces la aplicación inducida  $\tilde{f} : U \times \mathcal{T}_s^r(F) \rightarrow \pi^{-1}[U]$  es una factorización local de  $T_s^r(E)$ .

(Antes hemos supuesto que  $U$  era un abierto coordenado de  $B$ , pero es fácil ver que esta restricción puede eliminarse.)

Similarmente se definen los fibrados  $S^r(E)$  y  $A^r(E)$  formados por los tensores simétricos y antisimétricos de tipo  $(0, r)$ . Concretamente,

$$A^r(E) = \bigcup_{p \in B} A^r(F_p) \subset T_r^0(E),$$

y como proyección  $\pi : A^r(E) \rightarrow B$  tomamos la restricción de la proyección en  $T_r^0(E)$ . La estructura de fibrado se define de forma análoga a la de los fibrados tensoriales, si bien las comprobaciones se simplifican al observar que cada factorización  $\tilde{f} : U \times A^r(F) \rightarrow \pi^{-1}[U]$  es la restricción de la factorización correspondiente de  $T_r^0(E)$ , por lo que la diferenciabilidad de las aplicaciones  $\tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1}$  es consecuencia inmediata de que  $U \times A^r(F)$  es una subvariedad de  $U \times T_r^0(F)$ . De aquí se sigue también que  $A^r(E)$  es un subfibrado vectorial de  $T_r^0(E)$ . Similarmente se razona con  $S^r(E)$ .

La relación de estos fibrados con los tensores en una variedad se obtiene a través del concepto de sección:

**Definición 13.6** Una *sección* de un fibrado  $E$  es una aplicación diferenciable  $\sigma : B \rightarrow E$  tal que  $\sigma \circ \pi$  es la identidad en  $B$ . Llamaremos  $\text{Sec } E$  al conjunto de todas las secciones de  $E$ .

Observemos que si  $\sigma : B \rightarrow E$  cumple la definición de sección salvo a lo sumo la diferenciabilidad, entonces  $\sigma$  es diferenciable si y sólo si, para cada factorización local  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$ , la restricción  $\sigma|_U : U \rightarrow \pi^{-1}[U]$  es diferenciable, lo cual equivale a que lo sea la composición  $\sigma|_U \circ f^{-1}$ , que es una aplicación de la forma  $p \mapsto (p, \tilde{\sigma}(p))$ , con  $\tilde{\sigma} : U \rightarrow F$ . En definitiva,  $\sigma$  es diferenciable si y sólo si lo es cada aplicación  $\tilde{\sigma}$ .

Si  $E$  es un fibrado vectorial todavía podemos ir más lejos. Es claro que el conjunto de las secciones en  $E$  no necesariamente diferenciables es un espacio vectorial y un módulo sobre el anillo de todas las aplicaciones de  $B$  en  $\mathbb{R}$ . Si  $e_1, \dots, e_r$  es una base de  $F$ , entonces

$$\tilde{\sigma}(p) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(p) e_i,$$

para ciertas aplicaciones  $\alpha_i : B \rightarrow \mathbb{R}$ . Las aplicaciones  $e_i(p) = f(p, e_i)$  son secciones (diferenciables) en  $U$  de modo que

$$\sigma(p) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(p) e_i(p). \quad (13.1)$$

Es claro que  $\sigma$  es diferenciable si y sólo si lo son sus coordenadas  $\alpha_i$  respecto a todas las factorizaciones locales de  $E$  (o, al menos, respecto a una familia de factorizaciones correspondientes a un cubrimiento de  $B$ ).

En particular vemos que el conjunto  $\text{Sec } E$  tiene estructura de espacio vectorial y  $C^\infty(B)$ -módulo con las operaciones definidas puntualmente. Definimos

$$\mathcal{T}_r^s(E)_F = \text{Sec } T_r^s(E), \quad \Lambda^r(E)_F = \text{Sec } A^r(E).$$

La “F” indica que estamos considerando a  $E$  como fibrado y no como mera variedad diferencial, pues, como veremos enseguida,  $\mathcal{T}_s^r(E) = \mathcal{T}_s^r(TE)_F$ , que no ha de ser confundido con  $\mathcal{T}_r^s(E)_F$ . Es inmediato comprobar que los espacios

$$\mathcal{T}_F(E) = \bigoplus_{r,s} \mathcal{T}_s^r(E)_F \quad \text{y} \quad \Lambda_F(E) = \bigoplus_r \Lambda^r(E)_F$$

tienen estructura de álgebra con el producto tensorial y el producto exterior respectivamente definidos puntualmente.

**Ejemplo** Vamos a comprobar que si  $V$  es una variedad diferencial entonces  $\mathcal{T}_s^r(V) = \mathcal{T}_s^r(TV)_F$  y  $\Lambda^r(V) = \Lambda^r(TV)_F$ .

Si  $(U, x)$  es una carta de  $V$ , entonces una factorización local de  $TV$  es la aplicación  $f : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow TV$  dada por  $f(p, v) = v_1 \partial_{x_1}|_p + \cdots + v_n \partial_{x_n}|_p$ , que a su vez induce la factorización  $\tilde{f} : U \times \mathcal{T}_s^r(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_s^r(TU)$  determinada por que

$$\tilde{f}(p, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}) = \partial_{x_{i_1}}|_p \otimes \cdots \otimes \partial_{x_{i_r}}|_p \otimes dx_{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes dx_{j_s}|_p,$$

donde  $e_1, \dots, e_n$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Es claro que una sección no necesariamente diferenciable de  $T_s^r(TV)_F$  es un tensor no necesariamente diferenciable de tipo  $(r, s)$ , y ahora es claro también que las coordenadas del tensor en el sentido de (13.1) son sus coordenadas en el sentido usual, luego las secciones diferenciables coinciden con los tensores diferenciables. Similarmente sucede con las formas diferenciables. ■

## 13.2 El fibrado de tangentes de un fibrado

Si estamos en un punto de un fibrado  $E$ , podemos movernos siguiendo su fibra o bien pasando de una fibra a otra. Esto nos lleva a distinguir dos tipos de direcciones en  $TE$ , las direcciones “verticales” (a lo largo de la fibra) y las “horizontales” (transversales a las fibras). Vamos a formalizar estas ideas.

**El fibrado vertical** De la propia definición de fibrado se sigue que la proyección  $\pi : E \rightarrow B$  es suprayectiva. Veamos ahora que  $d\pi : TE \rightarrow TB$  también es suprayectiva.

Para ello tomamos una factorización local  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$  y llamamos  $\pi_1 : U \times F \rightarrow U$  a la proyección en la primera componente. Entonces tenemos

que  $f \circ \pi|_{\pi^{-1}[U]} = \pi_1$ , luego  $df \circ d\pi|_{T\pi^{-1}[U]} = d\pi_1$ , pero  $d\pi_1$  es suprayectiva, pues, fijado  $v \in F$ , la aplicación  $j_v : U \rightarrow U \times F$  dada por  $j_v(p) = (p, v)$  cumple  $j_v \circ \pi_1 = I$ , luego  $dj_v \circ d\pi_1 = I$ .

Por consiguiente  $TU$  está en la imagen de  $d\pi$  y, como los abiertos  $U$  cubren a  $B$ , los abiertos  $TU$  cubren a  $TB$ , es decir,  $d\pi$  es suprayectiva.

**Definición 13.7** Si  $E$  es un fibrado y  $w \in E$ , definimos el *subespacio vertical* de  $T_w E$  como el núcleo de  $d\pi|_w$ . Lo representaremos por  $V_w E \leq T_w E$ .

Si llamamos  $n = \dim B$  y  $r = \dim F$ , teniendo en cuenta que  $d\pi|_w$  es suprayectiva concluimos que

$$\dim V_w E = \dim T_w E - \dim T_{\pi(w)} B = n + r - n = r = \dim F.$$

Para cada  $p \in B$ , consideramos la inclusión  $j_p : F_p \rightarrow E$ , de modo que para cada  $w \in F_p$  tenemos  $dj_p|_w : T_w F_p \rightarrow T_w E$  inyectiva (porque  $F_p$  es una subvariedad de  $E$ ). Como  $j_p \circ \pi$  es la función constante  $p$ , se cumple que  $dj_p|_w \circ d\pi|_w = 0$ , luego la imagen de  $dj_p|_w$  está contenida en  $V_w E$ . Como ambos espacios tienen dimensión  $r$ , de hecho se da la igualdad, es decir

$$dj_p|_w : T_w F_p \rightarrow V_w E \text{ isomorfismo.}$$

Definimos el *fibrado vertical* de  $E$  como

$$VE = \bigcup_{w \in E} V_w E \subset TE,$$

con la proyección  $\pi : VE \rightarrow E$  restricción de la proyección  $\pi : TE \rightarrow E$ . Vamos a probar que  $VE$  es un subfibrado vectorial de  $TE$ .

Sea  $w_0 \in E$ , sea  $p_0 = \pi(w_0)$ , sea  $(U, x)$  una carta en  $B$  alrededor de  $p_0$  tal que exista una factorización local  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$ , sea  $v_0 \in F$  tal que  $w_0 = f(p_0, v_0)$ , sea  $(G, y)$  una carta en  $F$  alrededor de  $v_0$  y sea  $\tilde{U} = f[U \times G]$ , entorno abierto de  $w_0$  en  $E$ . Los abiertos  $\tilde{U}$  construidos de esta forma cubren  $E$ , por lo que los abiertos  $V\tilde{U} = \pi^{-1}[\tilde{U}] = T\tilde{U} \cap VE$  cubren  $VE$ .

Componiendo  $f^{-1}$  con la carta  $x \times y$  obtenemos una carta de dominio  $\tilde{U}$  a cuyas funciones coordenadas seguiremos llamando  $x_i, y_j$ . El hecho de que  $f$  sea una factorización local se traduce en que  $x_i(\pi(w)) = x_i(w)$ , para todo  $w \in \tilde{U}$ .

Esta carta determina a su vez una carta de  $TE$  de dominio  $T\tilde{U}$ , a saber, la que tiene por coordenadas a las aplicaciones  $\pi \circ x_i, \pi \circ y_j, dx_i, dy_j$ .

Su inversa es la aplicación  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow T\tilde{U}$  dada por

$$(a, b, c, d) \mapsto \sum_{i=1}^n c_i \partial_{x_i}|_{w(a,b)} + \sum_{j=1}^r d_j \partial_{y_j}|_{w(a,b)},$$

donde  $w$  es aquí la inversa de la carta de coordenadas  $x_i, y_i$ .

Ahora observemos que si  $w \in \tilde{U}$ , entonces  $V_w E = \langle \partial_{y_j}|_w \rangle$ . En efecto,

$$d\pi|_w(\partial_{y_j}|_w)(x_i) = \left. \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right|_w = 0,$$

luego cada  $\partial_{y_j}|_w$  está en  $V_w E$ , lo que nos da una inclusión y, teniendo en cuenta las dimensiones, concluimos la igualdad.

Por consiguiente  $\phi$  se restringe al homeomorfismo

$$\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \longrightarrow V\tilde{U}$$

dado por

$$\psi(a, b, d) = \sum_{j=1}^r d_j \partial_{y_j}|_{w(a,b)},$$

cuya inversa es una carta  $X : \pi^{-1}[\tilde{U}] \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r$ , cuyas funciones coordenadas son  $\pi \circ x_i$ ,  $\pi \circ y_j$ ,  $dy_j$ .

Hemos de probar que estas cartas constituyen un atlas para una estructura diferencial en  $VE$ , es decir, hemos de ver que si construimos otra carta  $X'$  a partir de  $U'$ ,  $f'$ , etc. entonces  $X^{-1} \circ X'$  es diferenciable en su dominio. Ahora bien, esta composición es la restricción del difeomorfismo  $\phi \circ \phi'^{-1}$  a un abierto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \{0\} \times \mathbb{R}^r$  (una subvariedad) compuesta con los difeomorfismos que eliminan el 0, luego es un difeomorfismo.

Así pues,  $VE$  es una subvariedad de  $TE$  y la aplicación  $\psi$  es un difeomorfismo. Componiéndola con la carta sobre  $\tilde{U}$  obtenemos un difeomorfismo

$$\tilde{f} : \tilde{U} \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \pi^{-1}[\tilde{U}],$$

concretamente

$$\tilde{f}(w, d) = \sum_{j=1}^r d_j \partial_{y_j}|_w. \quad (13.2)$$

Esto prueba que  $VE$  es un fibrado vectorial. Para asegurar que es un subfibrado de  $TE$  hemos de comprobar que es una subvariedad. Esto es consecuencia inmediata de la observación siguiente: la aplicación  $\hat{f} : \tilde{U} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow T\tilde{U}$  dada por

$$\hat{f}(w, c, d) = \sum_{i=1}^n c_i \partial_{x_i}|_w + \sum_{j=1}^r d_j \partial_{y_j}|_w \quad (13.3)$$

es una factorización local de  $TE$ , de modo que  $\tilde{f}(w, d) = \hat{f}(w, 0, d)$ .

El hecho de que  $\tilde{U} \times \{0\} \times \mathbb{R}^r$  sea una subvariedad de  $\tilde{U} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$  implica inmediatamente que  $VE$  es una subvariedad de  $TE$ . ■

Otra observación inmediata es que si  $\phi : E \longrightarrow E'$  es un homomorfismo de fibrados, entonces  $d\phi : TE \longrightarrow TE'$  se restringe a un homomorfismo de fibrados vectoriales  $d\phi_V : VE \longrightarrow VE'$ .

**Fibrados horizontales** Si  $v : I \longrightarrow TB$  es un arco diferenciable en el fibrado de tangentes de una variedad  $B$ , entonces  $\gamma = v \circ \pi$  es un arco en  $B$ , de modo que  $v(t) \in T_{\gamma(t)}B$ , es decir,  $v$  puede verse como un campo de vectores sobre un arco  $\gamma$  en  $B$ . Si  $v$  es vertical, en el sentido de que  $v'(t) \in V_{v(t)}TB$  para todo  $t$ , entonces  $\gamma$  tiene derivada nula, por lo que es constante, es decir,  $v$  varía en



una única fibra de  $TB$ . Esto tiene sentido para fibrados arbitrarios, y expresa el contenido fundamental de la noción de fibrado vertical.

Similarmente nos gustaría definir un fibrado horizontal de modo que si  $v$  es un arco horizontal en  $TB$  entonces  $v(t)$  sea “el mismo vector” transportado de fibra en fibra. Ahora bien, ésta es la noción de transporte paralelo, que no puede definirse en una variedad  $B$  si no añadimos una estructura adicional (una conexión afín). La noción de conexión afín puede generalizarse a fibrados vectoriales arbitrarios, y con ella la de transporte paralelo, y puede probarse que cada conexión afín en un fibrado  $E$  determina un subfibrado horizontal de  $TE$  de modo que los arcos horizontales en  $E$  son los campos paralelos en la base  $B$ , pero no vamos a necesitar estos hechos, así que nos limitaremos a introducir un concepto más general de fibrado horizontal puramente algebraico.

**Definición 13.8** Un *fibrado horizontal* en un fibrado  $E$  es un subfibrado vectorial  $HE$  de  $TE$  tal que para todo  $w \in E$  se cumple que  $T_w E = H_w E \oplus V_w E$ . Esta relación se expresa más brevemente en la forma  $TE = HE \oplus VE$ .

Es importante recalcar que, a diferencial de lo que sucede con el fibrado vertical, no existe un “fibrado horizontal canónico”, sino que tomar un fibrado horizontal supone una elección arbitraria.

**Teorema 13.9** *Todo fibrado  $E$  admite un fibrado horizontal.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos una métrica de Riemann  $g$  en  $E$ , de modo que si  $w \in E$  entonces  $g_w$  es un producto escalar en  $T_w E$ . Definimos el subespacio horizontal de  $T_w E$  como  $H_w E = V_w E^\perp$ , es decir, el complemento ortogonal del subespacio vertical. Es claro que  $T_w E = H_w E \oplus V_w E$ . Hemos de comprobar que el espacio  $HE$  así definido es un subfibrado de  $TE$ .

Tomemos factorizaciones locales

$$\hat{f}: \tilde{U} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow T\tilde{U} \quad \text{y} \quad \tilde{f}: \tilde{U} \times \mathbb{R}^r \longrightarrow V\tilde{U}$$

en las condiciones que hemos obtenido al estudiar el fibrado vertical, es decir,  $\tilde{U}$  es un abierto coordinado de  $E$  determinado por una factorización local, de modo que sus coordenadas son  $x_i, y_j$  y se cumplen las ecuaciones (13.2) y (13.3). Además  $V_w E = \langle \partial_{y_j} |_w \rangle$ , para todo  $w \in \tilde{U}$ .

Entonces, un vector  $z = \hat{f}(w, c, d) \in T_w E$  está en  $H_w E$  si y sólo si

$$\sum_{i=1}^n c_i g_w(\partial_{x_i} |_w, \partial_{y_k} |_w) + \sum_{j=1}^r d_j g_w(\partial_{y_j} |_w, \partial_{y_k} |_w) = 0, \quad k = 1, \dots, r.$$

Llamemos  $A(w)$  a la matriz de coeficientes  $g_w(\partial_{x_i} |_w, \partial_{y_k} |_w)$  y  $B(w)$  a la matriz de coeficientes  $g_w(\partial_{y_j} |_w, \partial_{y_k} |_w)$ . Es claro que estos coeficientes son funciones diferenciables de  $w$  (compuestos con la carta sobre  $\tilde{U}$  son las coordenadas del tensor métrico en la carta sobre  $\pi^{-1}[\tilde{U}] \subset TE$ ). Más aún,  $B(w)$  es la matriz de la restricción del  $g_w$  a  $V_w E$ , luego es una matriz regular. En términos de  $A$  y  $B$ , el vector  $z = \hat{f}(w, c, d)$  está en  $H_w E$  si y sólo si  $cA(w) + dB(w) = 0$ , lo que

equivale a que  $d = -cA(w)B(w)^{-1}$ . Si llamamos  $C(w) = A(w)B(w)^{-1}$ , es claro que los coeficientes de  $C$  son funciones diferenciables de  $w$ .

Definimos  $f^* : \tilde{U} \times \mathbb{R}^n \rightarrow H\tilde{U}$  mediante

$$f^*(w, c) = \hat{f}(w, c, -cC(w)).$$

Es claro que  $f^*$  es un homeomorfismo en la imagen. Componiendo su inversa con la carta de  $\tilde{U}$  obtenemos una carta  $X : H\tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$  y es fácil ver que estas cartas determinan una estructura diferencial en  $HV$  para la cual  $f^*$  es un difeomorfismo. Esto nos da que  $HV$  es un fibrado vectorial y es claro que de hecho es una subvariedad de  $TE$ , por lo que es un subfibrado. ■

Observemos que podemos definir  $\bar{f} : \tilde{U} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow T\tilde{U}$  mediante

$$\bar{f}(w, c, d) = f^*(w, c) + \tilde{f}(w, d) = \hat{f}(w, c, d - cC(w)), \quad (13.4)$$

y claramente es una factorización local de  $TE$  con la propiedad de que  $H\tilde{U}$  se corresponde con  $\tilde{U} \times \mathbb{R}^n \times \{0\}$  y  $V\tilde{U}$  con  $\tilde{U} \times \{0\} \times \mathbb{R}^r$ .

Usando estas factorizaciones es fácil probar la diferenciabilidad de las proyecciones

$$p_H : TE \rightarrow HE, \quad p_V : TE \rightarrow VE,$$

que son, por tanto, epimorfismos de fibrados.

**Formas diferenciales** Vamos a descomponer las formas diferenciales de un fibrado en suma de formas horizontales y verticales. Para ello hemos de considerar primero campos vectoriales.

**Definición 13.10** Sea  $E$  un fibrado. Un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(E)$  es *vertical* si para todo  $w \in E$  se cumple que  $X_w \in V_w E$ .

Llamaremos  $\mathfrak{X}_V(E)$  al conjunto de todos los campos vectoriales verticales de  $E$ . Claramente se trata de un subespacio vectorial de  $\mathfrak{X}(E)$ .

Fijado un fibrado horizontal, se definen análogamente los *campos horizontales*. Representaremos por  $\mathfrak{X}_H(E)$  al espacio de todos los campos horizontales en  $E$ .

Componiéndolo con las proyecciones  $p_H$  y  $p_V$ , cada campo vectorial en  $E$  se descompone (claramente de forma única) como suma de un campo horizontal y otro vertical, es decir,  $\mathfrak{X}(E) = \mathfrak{X}_H(E) \oplus \mathfrak{X}_V(E)$ .

Una forma diferencial  $\omega \in \Lambda(E)$  es *horizontal* si  $i_X(\omega) = 0$  para todo campo  $X \in \mathfrak{X}_V(E)$ . Teniendo en cuenta que la evaluación  $i_X$  es una antiderivación de  $\Lambda E$ , es claro que el conjunto  $\Lambda_H(E)$  formado por todas las formas horizontales es una subálgebra de  $\Lambda(E)$ .

Fijado un fibrado horizontal, definimos análogamente las *formas verticales* de  $E$ , y llamamos  $\Lambda_V(E)$  al álgebra formada por todas ellas.

Definimos ahora dos homomorfismos de álgebras

$$\iota_V : \Lambda_F(V E) \longrightarrow \Lambda(E), \quad \rho_V : \Lambda(E) \longrightarrow \Lambda_F(V E). \quad (13.5)$$

Si  $\omega \in \Lambda^p(V E)_F$ , entonces para cada  $w \in E$  tenemos que

$$\omega_w : V_w E \times \cdots \times V_w E \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una forma multilineal antisimétrica. Definimos

$$\iota_V(\omega)_w : T_w E \times \cdots \times T_w E \longrightarrow \mathbb{R}$$

mediante  $\iota_V(\omega)_w(z_1, \dots, z_p) = \omega_w(p_V(z_1), \dots, p_V(z_p))$ .

Por otra parte, si  $\omega \in \Lambda^p(E)$ , definimos

$$\rho_V(\omega)_w(z_1, \dots, z_p) = \omega_w(z_1, \dots, z_p).$$

Ciertamente  $\iota_V(\omega)_w$  y  $\rho_V(\omega)_w$  son formas multilineales antisimétricas, pero hemos de justificar que  $\iota_V(\omega)$  y  $\rho_V(\omega)$  son diferenciables. Para ello consideramos la factorización local de  $TE$

$$\bar{f} : \tilde{U} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow T\tilde{U}$$

dada por (13.4) y definimos  $u_i(w) = \bar{f}(w, e_i, 0)$ ,  $v_j(w) = \bar{f}(w, e_j, 0)$ , donde  $e_i$  y  $e_j$  recorren las bases canónicas de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^r$  respectivamente. De este modo tenemos que  $H_w E = \langle u_i(w) \rangle$ ,  $V_w E = \langle v_i(w) \rangle$ .

Si  $\omega \in \Lambda^p(V E)_F$ , entonces

$$\omega|_{\tilde{U}} = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_p}^*,$$

donde los coeficientes  $\omega_{i_1, \dots, i_p}$  son funciones diferenciables en  $\tilde{U}$ .

Es fácil comprobar que  $\iota_V(\omega)|_{\tilde{U}}$  tiene esta misma expresión, pero entendiendo ahora que  $v_i^*(w)$  es la forma dual de  $v_i(w)$  en  $T_w E^*$  en vez de en  $V_w E^*$ . Por lo tanto es diferenciable.

Similarmente, la expresión en coordenadas de  $\rho_V$  consiste en eliminar todos los términos que contengan formas  $u_i^*$  y dejar invariantes los otros, de donde se sigue la diferenciable de  $\rho_V(\omega)$ .

Así mismo, estas expresiones en coordenadas muestran que  $\iota_V$  y  $\rho_V$  (extendidas linealmente a formas no homogéneas) son isomorfismos de álgebras. Más aún, ahora es fácil comprobar cuanto afirma el teorema siguiente:

**Teorema 13.11** *Si  $E$  es un fibrado en el que hemos determinado un fibrado horizontal, entonces los homomorfismos*

$$\iota_V : \Lambda_F(V E) \longrightarrow \Lambda(E), \quad \rho_V : \Lambda(E) \longrightarrow \Lambda_F(V E).$$

*cumplen la relación  $\iota_V \circ \rho_V = 1$ , que a su vez implica que  $\iota_V$  es inyectiva y  $\rho_V$  suprayectiva. De hecho*

$$\iota_V : \Lambda_F(V E) \longrightarrow \Lambda_V(E)$$

*es un isomorfismo de álgebras, y su inverso es la restricción de  $\rho_V$ .*

Conviene observar también que la definición de  $\rho_V$  no depende de la elección del fibrado horizontal.

**Identificaciones en fibrados vectoriales** Para terminar generalizamos a fibrados vectoriales arbitrarios el hecho de que los espacios tangentes a los puntos de  $\mathbb{R}^n$  son canónicamente isomorfos a  $\mathbb{R}^n$ .

Recordemos que si  $F$  es cualquier espacio vectorial real de dimensión finita y  $p \in F$  la expresión (9.4) define un isomorfismo  $\theta_p : T_p F \rightarrow F$ . Consideremos ahora un fibrado vectorial  $E$ . Para cada  $w \in F_p$ , la inclusión  $j_p : F_p \rightarrow E$  induce, según sabemos, un isomorfismo  $dj_p|_w : T_w F_p \rightarrow V_w E$ . Componiéndolo con  $\theta_w^{-1} : F_p \rightarrow T_w F_p$  obtenemos un isomorfismo

$$\omega_w : F_{\pi(w)} \rightarrow V_w E.$$

Llamaremos

$$\alpha_w : V_w E \rightarrow F_{\pi(w)}$$

al isomorfismo inverso. Estos isomorfismos determinan un homomorfismo  $\alpha$  de fibrados vectoriales que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} VE & \xrightarrow{\alpha} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

Veamos que  $\alpha$  es diferenciable. Para ello fijamos una base  $e_j$  en  $F$ , lo que nos da un sistema de coordenadas  $y_j$ . Tomamos una carta  $(U, x)$  en  $B$  para la que exista una factorización  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$  y, tomando  $\tilde{U} = \pi^{-1}[U]$ , construimos la factorización  $\tilde{f} : \tilde{U} \times \mathbb{R}^r \rightarrow V\tilde{U}$ . Es fácil ver que la composición  $\tilde{f} \circ \alpha \circ f^{-1} : \tilde{U} \times \mathbb{R}^r \rightarrow U \times F$  es la aplicación

$$(w, c) \mapsto (\pi(w), \sum_{i=1}^r c_i e_i),$$

claramente diferenciable.

Por otra parte, dada una sección  $\sigma : B \rightarrow E$ , definimos  $\beta_\sigma : E \rightarrow VE$  mediante  $\beta_\sigma(w) = \omega_{\sigma(\pi(w))}(w)$ . Se comprueba sin dificultad que  $\beta_\sigma$  es diferenciable, con lo que de hecho es un homomorfismo de fibrados vectoriales que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\beta_\sigma} & VE \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{\sigma} & E \end{array}$$

Así  $\beta_\sigma$ , al igual que  $\alpha$  induce isomorfismos entre las fibras, y se cumple la relación  $\beta_\sigma \circ \alpha = 1$ . Cuando  $\sigma$  es la sección nula, es decir, la inmersión canónica de  $B$  en  $E$ , escribiremos simplemente  $\beta$ .

### 13.3 Orientación de fibrados

La noción de orientación de una variedad se generaliza de forma obvia a fibrados vectoriales:

**Definición 13.12** Un fibrado vectorial  $E$  es *orientable* si, para  $r = \dim F$ , existe una forma  $\omega \in \Lambda^r(E)_F$  que no se anula en ningún punto.

Así, si  $\omega$  cumple esta definición, para cada  $p \in B$  tenemos que  $\omega_p \in \Lambda^r(F_p)$  determina una orientación del espacio vectorial  $F_p$ . En estos términos, una variedad  $V$  es orientable si y sólo si su fibrado de tangentes  $TV$  es orientable.

Si  $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^r(E)_F$  no se anulan en ningún punto entonces existe  $f \in C^\infty(B)$  tal que  $\omega_1 = f\omega_2$ . Diremos que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  determinan *la misma orientación* de  $E$  si  $f$  es estrictamente positiva en cada punto. Llamaremos *orientaciones* de  $E$  a las clases de equivalencia respecto de esta relación. Es claro que si la base  $B$  es conexa entonces  $E$  tiene dos orientaciones o no tiene ninguna.

Como hemos dicho, ésta es la generalización natural del concepto de orientación de variedades, pero a continuación vamos a introducir una noción de orientación más general, válida para fibrados arbitrarios, no necesariamente vectoriales y que, en el caso de fibrados vectoriales, será equivalente a la que acabamos de dar.

**Definición 13.13** Un fibrado  $E$  es *orientable* si, para  $r = \dim F$ , existe una forma  $\omega \in \Lambda^r(E)$  tal que para cada  $p \in B$ , si  $j_p : F_p \rightarrow E$  es la inclusión, se cumple que  $j_{p\#}(\omega) \in \Lambda^r(F_p)$  no se anula en ningún punto.

En otras palabras, una forma  $\omega$  orienta  $E$  si su restricción a cada fibra  $F_p$  es una orientación de  $F_p$  como variedad. Diremos que dos formas determinan *la misma orientación* de  $E$  si sus restricciones determinan la misma orientación en cada fibra. Llamaremos *orientaciones* de  $E$  a las clases de equivalencia respecto de esta relación.

Como primera conexión entre los dos conceptos de orientación que hemos introducido probamos el teorema siguiente, donde intervienen los homomorfismos definidos en (13.5):

**Teorema 13.14** Sea  $E$  un fibrado y sea  $r = \dim F$ . Se cumple

- a) Si  $\omega \in \Lambda^r(E)$  orienta  $E$ , entonces  $\rho_V(\omega) \in \Lambda^r(VE)_F$  orienta el fibrado vectorial  $VE$  en el sentido de la definición 13.12.
- b) Si  $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^r(E)$  representan la misma orientación de  $E$ , entonces  $\rho_V(\omega_1)$  y  $\rho_V(\omega_2)$  representan la misma orientación de  $VE$ .
- c) Esta correspondencia entre orientaciones de  $E$  y orientaciones de  $VE$  es biyectiva.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar observemos lo siguiente: si  $\omega \in \Lambda^r(E)$ ,  $w \in E$  y  $p = \pi(w)$ , entonces  $dj_p|_w : T_w F_p \rightarrow V_w E$  es un isomorfismo, que induce a su vez un isomorfismo  $\sigma_w : A^r(V_w E) \rightarrow A^r(T_w F_p)$ . Sin más que aplicar las definiciones se comprueba la relación

$$\sigma_w(\rho_V(\omega)_w) = j_{p\sharp}(\omega)_w. \quad (13.6)$$

a) Como  $\omega$  orienta a  $E$  tenemos que  $j_{p\sharp}(\omega)_w \neq 0$  para todo  $p \in B$  y todo  $w \in F_p$ , y como  $\sigma_w$  es un isomorfismo también  $\rho_V(\omega)_w \neq 0$ , luego  $\rho_V(\omega)$  orienta  $VE$ .

b) Como  $\omega_1$  y  $\omega_2$  orientan  $E$ , para cada  $p \in B$  y cada  $w \in F_p$  existe  $\lambda_w \in \mathbb{R}$  tal que  $j_{p\sharp}(\omega_1)_w = \lambda_w j_{p\sharp}(\omega_2)_w$ . De (13.6) se sigue que  $\rho_V(\omega_1)_w = \lambda_w \rho_V(\omega_2)_w$ . Por consiguiente, los dos términos de b) equivalen a que  $\lambda_w > 0$  para todo  $w \in E$ .

c) Sólo queda probar que toda orientación de  $VE$  está inducida por una orientación de  $E$ , pero esto se sigue inmediatamente de la suprayectividad del homomorfismo  $\rho_V$ . ■

Ahora falta probar que en un fibrado vectorial  $E$  las orientaciones de  $E$  en el sentido de (13.12) se corresponden con las de  $VE$ . Para ello basta considerar los homomorfismos  $\alpha : VE \rightarrow E$  y  $\beta : E \rightarrow VE$  definidos al final de la sección anterior. Puesto que ambos inducen isomorfismos entre las fibras, es fácil ver que toda orientación en  $E$  induce una en  $VE$  a través de  $\alpha$  y que toda orientación en  $VE$  induce una en  $E$  a través de  $\beta$ .

**Nota** Es importante distinguir el hecho de que un fibrado  $E$  sea orientable como fibrado de que lo sea como variedad. Según hemos visto, la orientabilidad de  $E$  como fibrado equivale a la orientabilidad (vectorial) de  $VE$ , mientras que su orientabilidad como variedad equivale a la de  $TE$ . Concretamente, el teorema 12.4 prueba que el fibrado de tangentes de una variedad siempre es orientable como variedad, mientras que su orientabilidad como fibrado equivale a la orientabilidad de la base.

**Ejercicio:** Demostrar que un fibrado trivial  $B \times F$  es orientable si y sólo si lo es la fibra  $F$ . En particular  $P^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  es orientable como fibrado, pero no como variedad.

Si la base  $B$  es orientable, entonces la orientabilidad de  $E$  como fibrado equivale a su orientabilidad como variedad. En efecto, observemos que, fijado un fibrado horizontal, la restricción de  $d\pi$  es un homomorfismo  $d\pi : HE \rightarrow TB$  que induce isomorfismos en las fibras, por lo que una orientación de  $B$  induce a través de  $d\pi$  una orientación en  $HE$ .

En general, si  $V = W \oplus X$  es una descomposición de un espacio vectorial  $V$  como suma de otros dos, es fácil ver que sendas orientaciones en dos de ellos inducen una orientación en el tercero. Este hecho elemental se generaliza a fibrados, de modo que si  $HE$  es orientable, la orientabilidad de  $VE$  equivale a la de  $TE$ . El teorema 13.16 detalla el único caso que nos va a interesar de esta discusión. ■

El teorema siguiente generaliza un hecho conocido sobre orientaciones en variedades:

**Teorema 13.15** *Sea  $E$  un fibrado y sean  $\omega, \eta \in \Lambda^r(E)$  dos formas que orienten  $E$ . Supongamos que la base  $B$  es conexa y que para cierto  $p \in B$ , las formas  $j_{p\sharp}(\omega)$  y  $j_{p\sharp}(\eta)$  determinan la misma orientación en  $F_p$ . Entonces  $\omega$  y  $\eta$  representan la misma orientación de  $E$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $C$  una componente conexa de  $E$ , sea  $q \in B$  arbitrario y consideremos una factorización local  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$  en un entorno conexo  $U$  de  $q$ . Las componentes conexas de  $U \times F$  son los productos de  $U$  por cada una de las componentes conexas de  $F$  y la imagen por  $f$  de cada una de ellas está contenida en una componente conexa de  $E$ . De aquí se sigue fácilmente que si  $q$  tiene una antiimagen por  $\pi$  en  $C$  entonces todos los puntos de  $U$  la tienen, mientras que si  $q$  no la tiene, ningún punto de  $U$  la tiene. Esto equivale a decir que  $\pi[C]$  es abierto y cerrado en  $B$ , luego  $\pi[C] = B$ .

De aquí se deduce a su vez que, para el punto  $p \in B$  del enunciado, la fibra  $F_p$  corta a todas las componentes conexas de  $E$ . Según el teorema 13.14, las formas  $\rho_V(\omega)$  y  $\rho_V(\eta)$  orientan el fibrado vectorial  $VE$  (en el sentido de 13.12), y basta probar que ambas inducen la misma orientación. En principio podemos afirmar que existe una función  $f \in C^\infty(E)$  que no se anula en ningún punto y  $\rho_V(\omega) = f\rho_V(\eta)$ . Hemos de probar que  $f$  es estrictamente positiva en todo punto.

Para cada  $w \in E$ , sea  $\sigma_w$  el isomorfismo definido en la prueba de 13.14. Se cumple que

$$\sigma_w(\rho_V(\omega)_w) = f(w)\sigma_w(\rho_V(\eta)_w).$$

De la hipótesis del teorema y de la fórmula (13.6) se sigue que, para todo  $w \in F_p$  ha de ser  $f(w) > 0$ , es decir,  $f$  es estrictamente positiva al menos en un punto de cada componente conexa de  $E$ , luego  $f$  es estrictamente positiva en todo  $E$ . ■

Como primera aplicación de este teorema probamos lo siguiente:

**Teorema 13.16** *Sea  $E$  un fibrado orientado por  $\omega \in \Lambda^r(E)$  y sea  $\eta \in \Lambda^n(B)$  una forma que oriente a la base  $B$ . Entonces  $\pi_\sharp(\eta) \wedge \omega$  orienta a  $E$  como variedad. Si sustituimos  $\omega$  y  $\eta$  por formas que determinen las mismas orientaciones obtenemos una forma que determina la misma orientación.*

DEMOSTRACIÓN: Hemos de probar que  $\pi_\sharp(\eta) \wedge \omega$  no se anula en ningún punto de  $E$ . Puesto que se trata de un problema local, tomando una factorización local y restringiendo todas las formas involucradas, no perdemos generalidad si suponemos que  $E = B \times F$  es trivial y que la base  $B$  es conexa.

Fijado  $p \in B$ , sea  $i_p : F \rightarrow E$  dada por  $i_p(v) = (p, v)$ . Del hecho de que  $\omega$  orienta el fibrado  $E$  se sigue inmediatamente que  $i_{p\sharp}(\omega)$  es una orientación de  $F$ . Si  $\pi' : E \rightarrow F$  es la proyección natural, entonces  $\tilde{\omega} = \pi'_\sharp(i_{p\sharp}(\omega))$  es otra orientación de  $E$  como fibrado. Más aún, se comprueba inmediatamente que  $j_{p\sharp}(\omega) = j_{p\sharp}(\tilde{\omega})$ , luego el teorema anterior nos da que  $\omega$  y  $\tilde{\omega}$  determinan la

misma orientación de  $E$  como fibrado. Según 13.14 esto implica que  $\rho_V(\omega)$  y  $\rho_V(\tilde{\omega})$  representan la misma orientación de  $VE$ , por lo que existe  $f \in C^\infty(E)$  estrictamente positiva tal que  $\rho_V(\omega) = f \rho_V(\tilde{\omega})$ . Esto equivale a que la forma  $\omega - f\tilde{\omega}$  se anula sobre  $VE$ , y lo mismo le sucede obviamente a  $\pi_\#(\eta)$ . Por consiguiente, fijado un fibrado horizontal, el valor de  $(\pi_\#(\eta) \wedge (\omega - f\tilde{\omega}))_w$  sobre  $n+r$  vectores de  $T_wE$  es el mismo que su valor sobre las proyecciones de éstos en  $H_wE$ , pero dichas proyecciones serán necesariamente linealmente dependientes, por lo que concluimos que  $\pi_\#(\eta) \wedge (\omega - f\tilde{\omega}) = 0$  o, equivalentemente, que

$$\pi_\#(\eta) \wedge \omega = f \pi_\#(\eta) \wedge \tilde{\omega} = f \eta \times i_{p\#}(\omega), \quad (13.7)$$

y el miembro derecho (sin la  $f$ ) representa la orientación producto en  $B \times F$  de las orientaciones determinadas por  $\eta$  e  $i_{p\#}(\omega)$ , luego no se anula en ningún punto, como había que probar.

Si sustituimos  $\omega$  y  $\eta$  por formas que representen la misma orientación, entonces  $\eta$  e  $i_{p\#}(\omega)$  se sustituyen por múltiplos por respectivas funciones positivas y (13.7) muestra que  $\pi_\#(\eta) \wedge \omega$  queda multiplicada por el producto de dichas funciones, luego determina la misma orientación. ■

**Definición 13.17** Si  $E$  es un fibrado orientable sobre una base orientable  $B$ , llamaremos *orientación producto* de una orientación dada en  $E$  y una orientación dada en  $B$  a la orientación de  $E$  (como variedad) determinada según el teorema anterior.

Finalmente estudiamos la conservación o inversión de la orientación por una aplicación. En general, observemos que si una aplicación  $f : V \rightarrow W$  es un difeomorfismo local entre variedades orientables, tiene sentido decir que  $f$  conserva o invierte la orientación en un punto  $p \in V$ , es decir, que la restricción de  $f$  a un entorno de  $p$  donde sea un difeomorfismo conserva o invierte la orientación. De hecho se cumple que  $df_p : T_pV \rightarrow T_pW$  es un isomorfismo, y  $f$  conserva la orientación en  $p$  si y sólo si  $df_p$  conserva las orientaciones correspondientes de los espacios tangentes.

Si  $\omega \in \Lambda^n(W)$  determina la orientación de  $W$ , es fácil ver entonces que  $f_\#(\omega)$  orienta  $V$  y, respecto a esta orientación en  $V$ ,  $f$  conserva la orientación en todo punto. Así pues,  $f$  conserva (o invierte) la orientación si y sólo si  $f_\#(\omega)$  (respectivamente  $-f_\#(\omega)$ ) representa la orientación de  $V$ . Notemos que si  $V$  es conexa entonces  $f$  conserva o invierte la orientación en todos los puntos por igual, aunque si  $V$  no es conexa esto ya no es necesariamente cierto. Ahora vamos a generalizar estos hechos a fibrados.

**Definición 13.18** Consideremos un homomorfismo de fibrados  $\phi : E \rightarrow E'$ . Sea  $\phi_B : B \rightarrow B'$  la aplicación inducida entre las bases y, para cada  $p \in B$ , sea  $\phi_p : F_p \rightarrow F'_{\phi_B(p)}$  la restricción a la fibra. Supongamos además que cada  $\phi_p$  es un difeomorfismo local. Fijadas orientaciones en  $E$  y  $E'$ , diremos que  $\phi$  conserva o invierte la orientación si cada  $\phi_p$  conserva o invierte, respectivamente, la orientación (en todos los puntos de  $F_p$ ).



Según las observaciones precedentes, si la fibra  $F$  es conexa entonces cada  $\phi_p$  ha de conservar la orientación en todos los puntos o invertirla en todos los puntos. Más aún:

**Teorema 13.19** *Sea  $\phi : E \longrightarrow E'$  un homomorfismo entre fibrados orientables tal que las restricciones  $\phi_p$  son difeomorfismos locales. Si la base  $B$  de  $E$  es conexa y  $\phi_p$  conserva (o invierte) la orientación para un cierto  $p \in B$ , entonces lo mismo sucede para todo  $p \in B$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\omega' \in \Lambda^r(E')$  una forma que represente la orientación de  $E'$ . Para cada  $p \in B$  se cumple

$$j_{p\#}(\phi_{\#}(\omega')) = \phi_{p\#}(j_{\phi_B(p)\#}(\omega')),$$

de donde concluimos que  $\phi_{\#}(\omega')$  determina una orientación en  $E$  y que  $\phi$  conserva (o invierte) la orientación si y sólo si  $\phi_{\#}(\omega')$  (respectivamente,  $-\phi_{\#}(\omega')$ ) representa la orientación de  $E$ . La hipótesis del teorema es que  $\pm j_{p\#}(\phi_{\#}(\omega'))$  determina en  $F_p$  la orientación determinada por la orientación de  $E$  (para un cierto  $p$ ), y entonces basta aplicar el teorema 13.15 para concluir que esto sucede en todos los puntos con el mismo signo  $\pm$ . ■

**Teorema 13.20** *Sea  $\phi : E \longrightarrow E'$  un homomorfismo entre fibrados orientables con bases orientables tal que  $\phi_B : B \longrightarrow B'$  y cada una de las restricciones  $\phi_p : F_p \longrightarrow F'_{\phi_B(p)}$  sean difeomorfismos locales. Entonces  $\phi$  es un difeomorfismo local y, si  $\phi$  conserva las orientaciones de los fibrados, entonces conserva (resp. invierte) las orientaciones producto de  $E$  y  $E'$  si y sólo si  $\phi_B$  conserva (resp. invierte) las orientaciones de las bases.*

DEMOSTRACIÓN: El hecho de que  $\phi$  es un difeomorfismo local se comprueba sin dificultad: el problema es local, luego se reduce al caso en que los fibrados  $E = B \times F$  y  $E' = B' \oplus F'$  son triviales. Entonces, a través de la identificación  $T_{(p,v)}E = T_p B \oplus T_v F$  y la correspondiente para  $E'$  en  $\phi(p,v)$  tenemos que  $d\phi_{(p,v)} = d\phi_B|_p \oplus d\phi_p|_v$  es suma directa de isomorfismos y, por consiguiente, un isomorfismo.

Sea  $\omega' \in \Lambda^r(E')$  una forma que represente la orientación del fibrado  $E'$ . Según hemos visto en la prueba de 13.19, la orientación de  $E$  está representada por  $\phi_{\#}(\omega')$ . Sea  $\eta' \in \Lambda^n(B')$  una forma que represente la orientación de  $B'$ , de modo que la orientación de  $B$  está representada por  $\pm\phi_{B\#}(\eta')$ , donde el signo depende de que  $\phi_B$  conserve o invierta la orientación.

Así, la orientación producto de  $E'$  está representada por  $\Omega' = \pi'_{\#}(\eta') \wedge \omega'$ , mientras que la de  $E$  está representada por

$$\Omega = \pm\pi_{\#}(\phi_{B\#}(\eta')) \wedge \phi_{\#}(\omega') = \pm\phi_{\#}(\pi'_{\#}(\eta')) \wedge \phi_{\#}(\omega') = \pm\phi_{\#}(\Omega'),$$

de modo que  $\phi$  conserva o invierte las orientaciones producto según lo que haga  $\phi_B$  con las orientaciones de las bases. ■

### 13.4 Integración sobre fibras

El teorema de Fubini, en su enunciado usual en análisis, afirma que para integrar una función  $f(x, y)$  en un producto  $B \times F$  podemos integrar en  $B$  la función

$$\tilde{f}(x) = \int_F f(x, y) dy.$$

Si pensamos en  $B \times F$  como un fibrado, lo que hacemos es integrar  $f$  “sobre cada fibra”, con lo que tenemos una función sobre la base  $B$ , y después integrar esta “integral sobre las fibras” sobre la base. En esta sección generalizaremos este resultado a fibrados arbitrarios (sustituyendo, naturalmente, las funciones por formas diferenciales). Primero definiremos la operación de “integrar sobre las fibras” una forma diferencial en un fibrado  $E$ , cuyo resultado ha de ser una forma diferencial sobre la base  $B$ . Probaremos que la integral de esta forma en  $B$  coincidirá con la integral de la forma original en  $E$ . La integración sobre fibras será crucial en el estudio de la cohomología de los fibrados.

Para empezar definimos las formas sobre las que podemos definir la integración sobre fibras. No necesitamos exigir que tengan soporte compacto, sino únicamente que tengan “soporte compacto en fibras”, según la definición siguiente:

**Definición 13.21** Sea  $E$  un fibrado. Una forma diferencial  $\omega \in \Lambda(E)$  tiene *soporte compacto en fibras* si para cada compacto  $K \subset B$  se cumple que la intersección  $\pi^{-1}[K] \cap \text{sop } \omega$  es compacta. Representaremos por  $\Lambda_{cf}(E)$  al conjunto de todas las formas diferenciales en  $E$  con soporte compacto en fibras.

Es evidente que  $\Lambda_{cf}(E)$  es un ideal graduado del álgebra  $\Lambda(E)$ , estable para las evaluaciones  $i_X$ , para las derivadas de Lie  $\mathcal{L}_X$  y para la diferencial exterior  $d$ . Representaremos por  $H_{cf}(E)$  a la cohomología de  $\Lambda_{cf}(E)$ .

Obviamente,  $\Lambda_c(E) \subset \Lambda_{cf}(E) \subset \Lambda(E)$ . Si  $B$  es compacto es claro que  $\Lambda_{cf}(E) = \Lambda_c(E)$  y si  $F$  es compacto entonces  $\Lambda_{cf}(E) = \Lambda(E)$ . En efecto, dado  $K \subset E$  compacto, para cada  $p \in K$  tomamos un abierto  $U$  sobre el que exista una factorización local de  $E$  y tomamos  $p \in V_p \subset \bar{V}_p \subset U$ , de modo que la clausura  $\bar{V}_p$  sea compacta. Cubrimos  $K$  por un número finito de abiertos  $V_p$ , y entonces basta probar que cada  $\pi^{-1}[\bar{V}_p] \cap \text{sop } \omega$  es compacto, pero a través de una factorización local  $\pi^{-1}[\bar{V}_p]$  se corresponde con  $\bar{V}_p \times F$ , luego es compacto.

Observemos que hemos encontrado una prueba indirecta de que si la base y la fibra de un fibrado  $E$  son compactos, entonces  $E$  es compacto, pues cumple  $\Lambda_c(E) = \Lambda_{cf}(E) = \Lambda(E)$ . Por supuesto, también es fácil probarlo directamente.

La caracterización siguiente se demuestra sin dificultad por un argumento similar al que acabamos de emplear:

**Teorema 13.22** Si  $E$  es un fibrado, una forma  $\omega \in \Lambda(E)$  tiene soporte compacto en fibras si y sólo si para toda factorización local  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$  se cumple que  $f_{\#}(\omega) \in \Lambda_{cf}(U \times F)$ . De hecho basta con que esto se cumpla para una familia de factorizaciones cuyos abiertos  $U$  cubran la base  $B$ .

Necesitamos determinar condiciones bajo las cuales los homomorfismos sobre formas inducidos por homomorfismos de fibrados conservan la propiedad de tener soporte compacto en fibras. El resultado principal es el siguiente:

**Teorema 13.23** *Sea  $\phi : E \rightarrow E'$  un homomorfismo de fibrados tal que cada restricción  $\phi_p : F_p \rightarrow F'_p$  es un difeomorfismo de  $F_p$  en un abierto de  $F'_p$ . Sea  $\omega \in \Lambda_{cf}(E')$  tal que para todo  $p \in B$  se cumpla  $F'_{\phi_B(p)} \cap \text{sop } \omega \subset \text{Im } \phi_p$ . Entonces  $\phi_{\#}(\omega) \in \Lambda_{cf}(E)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Para cada punto  $p \in B$  tomamos una factorización local  $f' : U' \times F' \rightarrow \pi'^{-1}[U']$  de  $E'$  con  $\phi_B(p) \in U'$  y una factorización local  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$  de  $E$  tal que  $p \in U \subset \phi_B^{-1}[U']$ . Por el teorema anterior basta probar que  $f_{\#}(\phi_{\#}(\omega)) \in \Lambda_{cf}(U \times F)$ . Dicho teorema nos da también que  $\tilde{\omega}' = f'_{\#}(\omega) \in \Lambda_{cf}(U' \times F')$ .

Sea  $\tilde{\phi} : U \times F \rightarrow U' \times F'$  la composición  $\tilde{\phi} = f' \circ \phi \circ f^{-1}$ . De este modo  $f_{\#}(\phi_{\#}(\omega)) = \tilde{\phi}_{\#}(\tilde{\omega}')$ . En otras palabras, tenemos una forma  $\tilde{\omega}' \in \Lambda_{cf}(U' \times F')$  y hemos de probar que  $\tilde{\phi}(\omega') \in \Lambda_{cf}(U \times F)$ . Veamos que  $\tilde{\phi}$  cumple las mismas hipótesis que  $\phi$ , con lo que concluiremos que basta demostrar el teorema en el caso  $E = B \times F$ ,  $E' = B' \times F'$ . En efecto, si  $p \in U$ , entonces

$$f' [F'_{\phi_U(p)} \cap \text{sop } \tilde{\omega}'] = F'_{\phi_B(p)} \cap \text{sop } \omega' \subset \text{Im } \phi_p = f' [\text{Im } \tilde{\phi}_p],$$

luego ciertamente  $F'_{\phi_U(p)} \cap \text{sop } \tilde{\omega}' \subset \text{Im } \tilde{\phi}_p$ .

Así pues, podemos suponer que los fibrados  $E$  y  $E'$  son triviales. Definimos  $\psi : B \times F \rightarrow B \times F'$  mediante  $\psi(p, v) = (p, \phi_p(v))$ .

Si  $\pi_2 : B \times F' \rightarrow F'$  es la proyección, tenemos que  $\psi(p, v) = (p, \pi_2(\phi(p, v)))$ , lo que prueba que  $\psi$  es diferenciable. De hecho es un homomorfismo de fibrados y, como cada  $\phi_p$  es inyectiva,  $\psi$  también lo es. Vamos a probar que  $\psi$  es un difeomorfismo en su imagen, para lo cual basta ver que su diferencial es un isomorfismo en cada punto  $(p, v) \in B \times F$ . Ahora bien, la matriz de  $d\psi_{(p,v)}$  respecto a cartas producto es de la forma

$$A = \left( \begin{array}{c|c} I & * \\ \hline 0 & J \end{array} \right),$$

donde  $I$  es la identidad y  $J$  es la matriz de  $d\phi_p|_v$  en las cartas correspondientes de  $F$  y  $F'$ . Como  $\phi_p$  es un difeomorfismo, tenemos que  $J$  es regular y por lo tanto  $A$  también. Finalmente observemos que  $\phi$  queda factorizada en la forma

$$B \times F \xrightarrow{\psi} B \times F' \xrightarrow{\phi_B \times 1} B' \times F'.$$

Tomemos un compacto  $K \subset B$ . Entonces  $\phi_B[K]$  es compacto en  $B'$ , luego  $(\phi_B[K] \times F') \cap \text{sop } \omega'$  es un subconjunto compacto de  $B' \times F'$ . Podemos tomar un compacto  $L \subset F'$  tal que  $(\phi_B[K] \times F') \cap \text{sop } \omega' \subset \phi_B[K] \times L$ . Una comprobación directa muestra entonces que

$$(K \times F') \cap \text{sop } (\phi_B \times 1)_{\#}(\omega') \subset K \times L,$$

luego  $\tilde{\omega} = (\phi_B \times 1)_\#(\omega') \in \Lambda_{cf}(B \times F')$ .

Ahora observamos que para todo  $p \in B$  se cumple que  $F'_p \cap \text{sop } \tilde{\omega} \subset \text{Im } \psi_p$ , es decir, que  $\psi$  y  $\tilde{\omega}$  cumplen la hipótesis del teorema. En efecto,

$$F'_p \cap \text{sop } \tilde{\omega} \subset F'_p \cap (\phi_B \times 1)^{-1}[F'_{\phi_B(p)} \cap \text{sop } \omega'] \subset F'_p \cap (\phi_B \times 1)^{-1}[\text{Im } \phi_p] \subset \text{Im } \psi_p.$$

Pero ahora, la forma de  $\psi$  nos permite concluir que  $\text{sop } \tilde{\omega} \subset \text{Im } \psi$ . Si  $K$  es compacto en  $B$ , entonces  $C = (K \times F') \cap \text{sop } \tilde{\omega} \subset \text{Im } \psi$  es compacto y, como  $\psi$  es un difeomorfismo en su imagen,  $\psi^{-1}[C]$  es compacto en  $B \times F$ , y se cumple que  $(K \times F) \cap \text{sop } \psi_\#(\tilde{\omega}) \subset \psi^{-1}[C]$ . Así pues,  $\phi_\#(\omega') = \psi_\#(\tilde{\omega}) \in \Lambda_{cf}(B \times F)$ . ■

Si, en particular, exigimos que cada  $\phi_p$  sea un difeomorfismo, entonces el teorema anterior se aplica simultáneamente a todas las formas de  $\Lambda_{cf}(E')$ :

**Teorema 13.24** *Sea  $\phi : E \rightarrow E'$  un homomorfismo entre fibrados con la misma fibra típica  $F$  tal que para cada  $p \in B$  la restricción  $\phi_p : F_p \rightarrow F_{\phi_B(p)}$  sea un difeomorfismo. Entonces el homomorfismo  $\phi_\#$  se restringe a un homomorfismo de álgebras  $\phi_\#^{cf} : \Lambda_{cf}(E') \rightarrow \Lambda_{cf}(E)$ , el cual induce a su vez un homomorfismo  $\phi_{cf}^* : H_{cf}(E') \rightarrow H_{cf}(E)$ .*

Una buena parte del argumento de la prueba del teorema 13.23 ha consistido en reducir el problema al caso de un fibrado trivial. El teorema siguiente justifica que este tipo de reducción es posible en muchos más casos:

**Teorema 13.25** *Sea  $E$  un fibrado y  $\omega \in \Lambda(E)$  una forma con soporte compacto en fibras (resp. con soporte compacto). Entonces existe una familia numerable (resp. finita)  $\{\omega_i\}$  de formas en  $E$  cuyos soportes son compactos y forman una familia localmente finita en  $E$ , de tal modo que  $\omega = \sum \omega_i$ . Además, para cada índice  $i$  existe una carta  $x : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $B$ , una carta  $y : V_i \rightarrow \mathbb{R}^r$  de  $F$  y una factorización local  $f_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}[U_i]$  de  $E$  de modo que  $\text{sop } \omega_i \subset f_i[U_i \times V_i]$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\{U_i\}$  un cubrimiento localmente finito de  $B$  formado por abiertos coordenados de clausura compacta difeomorfos a  $\mathbb{R}^m$  sobre los que exista una factorización local  $f_i$  de  $E$ . Si el soporte de  $\omega$  es compacto podemos exigir que sólo un número finito de ellos corten a su proyección en  $B$ . Sea  $\{h_i\}$  una partición de la unidad en  $B$  subordinada a dicho cubrimiento. Llamemos  $\omega_i = \pi_\#(h_i)\omega$ . Claramente los soportes de las formas  $\omega_i$  forman una familia localmente finita, por lo que tiene sentido la suma de todas ellas y  $\omega = \sum \omega_i$ . El soporte de  $\omega_i$  está contenido en  $\pi^{-1}[U_i]$ , en particular en  $\pi^{-1}[\bar{U}_i]$ , luego por la compacidad en fibras es compacto. Si  $\omega$  tiene soporte compacto entonces sólo una cantidad finita de formas  $\omega_i$  es no nula, luego podemos reducir la familia a una cantidad finita.

Las formas  $\omega_i$  no cumplen necesariamente la última condición del enunciado, pero el teorema quedará probado si descomponemos cada una de ellas en un número finito de sumandos que sí cumplan esta condición.

Sea  $\pi'_i : U_i \times F \rightarrow F$  la proyección en  $F$ . Tomamos el soporte de  $\omega_i$ ; calculamos su antiimagen por la factorización  $f_i$  y proyectamos ésta sobre  $F$ ,

con lo que tenemos un compacto; tomamos un cubrimiento de  $F$  por abiertos coordenados  $\{V_j\}$  difeomorfos a  $\mathbb{R}^r$  de los cuales sólo un número finito corten a dicho compacto; tomamos una partición de la unidad subordinada  $\{g_j\}$  y consideramos las formas  $\omega'_{ij} = \pi'_{i\sharp}(g_j)f_{\sharp}(\omega_i)$ , de las cuales sólo un número finito son no nulas y  $f_{\sharp}(\omega_i) = \sum \omega'_{ij}$ . Además  $\omega'_{ij}$  tiene su soporte contenido en  $U_i \times V_j$ . Claramente  $\omega_i$  es la suma de las formas  $f_{i\sharp}^{-1}(\omega'_{ij})$  (que se pueden extender a  $E$  considerándolas nulas fuera de  $\pi^{-1}[U_i]$ ) y éstas cumplen lo pedido. ■

Así, en muchos casos podremos reducir una cuestión sobre formas con soporte compacto en fibras en un fibrado  $E$  al caso de una forma  $\omega$  para la cual exista una factorización local  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$  y unas cartas  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^r$  de modo que  $\text{sop } \omega \subset f[U \times V]$ . El abierto  $E' = f[U \times V]$  es un subfibrado trivial de  $E$  con  $f$  como única factorización local. La composición  $f^{-1} \circ (x \times y)$  es una carta de  $E'$ , a cuyas funciones coordenadas llamaremos  $x_i$ ,  $y_j$ , como a las de  $U$  y  $V$ , de modo que la restricción a cada fibra  $F'_p$  de las funciones  $y_j$  constituyen una carta de  $F'_p$ , concretamente la composición  $f_p^{-1} \circ y$ . Si en el fibrado  $E$  está dada una orientación, ésta se restringe a una orientación en  $E'$ , que induce a su vez una orientación en  $U \times V$ . Eligiendo la carta de  $V$  podemos exigir que esta orientación coincida con la determinada por  $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_r$  (en principio sobre una fibra y, por conexión, en todas ellas). Esto es tanto como afirmar que las coordenadas  $y_j$  restringidas a cada fibra constituyen una carta orientada. Si la base  $B$  tiene dada una orientación, ésta induce una orientación en  $U$  y podemos exigir que la carta  $x$  esté orientada, es decir, de modo que la orientación de  $U$  sea la dada por  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . La orientación producto de  $E$  se restringe a la orientación producto de  $E'$  y según 13.20 la aplicación  $f$  la transforma en la orientación producto de  $U \times V$ , representada por la forma  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_r$ . Por consiguiente la carta  $x \times y$  es una carta orientada de  $E'$  para la orientación producto.

Pasamos ahora a definir la integral en fibras. Partimos de un fibrado orientable  $E$  con  $\dim B = n$ ,  $\dim F = r$  y de una forma  $\omega \in \Lambda_{cf}^{k+r}(E)$ , con  $k \geq 0$ . Para cada  $p \in B$ , vamos a definir una aplicación

$$\tilde{\omega}_p : T_p B \times \dots \times T_p B \rightarrow \Lambda_c^r(F_p).$$

Dados  $v_1, \dots, v_k \in T_p B$  y  $q \in F_p$ , tomamos  $w_1, \dots, w_k \in T_q E$  tales que  $d\pi|_q(w_i) = v_i$ . Definimos

$$\tilde{\omega}_p(v_1, \dots, v_k)_q(z_1, \dots, z_r) = \omega_q(w_1, \dots, w_k, dj_p|_q(z_1), \dots, dj_p|_q(z_r)),$$

donde, como es habitual,  $j_p : F_p \rightarrow E$  es la inclusión.

Observemos que  $\tilde{\omega}_p(v_1, \dots, v_k)$  no depende de la elección de los vectores  $w_i$ , pues con otra elección  $w'_i$  tendríamos que  $w_i - w'_i \in V_q E = \text{Im } dj_p|_q$ , luego la diferencia entre las dos definiciones sería  $\omega_q$  actuando sobre  $k + r$  vectores de  $V_q E$ , que serán linealmente dependientes, luego dicha diferencia será nula (salvo si  $k = 0$ , pero entonces no hacemos elección alguna).

Es claro que  $\tilde{\omega}_p(v_1, \dots, v_k)_q$  así definido es una forma multilineal antisimétrica en  $T_p B$ , pero falta probar que  $\tilde{\omega}_p(v_1, \dots, v_k)$  es diferenciable. Para ello

tomamos una factorización local  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$ , donde  $U$  es un entorno de  $p$ , que determina un isomorfismo  $f_{p\sharp} : \Lambda_c^r(F_p) \rightarrow \Lambda_c^r(F)$  y vamos a encontrar una forma en  $\Lambda_c^r(F)$  cuya antiimagen sea precisamente la que nos ocupa.

Sea  $V^i \in \mathfrak{X}(U)$  tal que  $V_p^i = v_i$ . A través de la identificación natural  $T_{(u,v)}(U \times F) = T_u U \oplus T_v F$  podemos considerar que  $V^i \in \mathfrak{X}(U \times F)$ . Si aplicamos a  $f_{\sharp}(\omega) \in \Lambda_{cf}^{k+r}(U \times F)$  las evaluaciones en los campos  $V^i$  obtenemos una forma en  $\Lambda_{cf}^r(U \times F)$ , y si luego le aplicamos  $i_{p\sharp}$ , donde  $i_p : F \rightarrow U \times F$  es la aplicación  $i_p(v) = (p, v)$ , obtenemos una forma  $\omega^* \in \Lambda_c^r(F)$ . Veamos cómo actúa sobre  $r$  vectores  $z_j \in T_v F$ :

$$\begin{aligned} \omega_v^*(z_1, \dots, z_r) &= f_{\sharp}(\omega)_{(p,v)}(V_{(u,v)}^1, \dots, V_{(p,v)}^k, di_p|_v(z_1), \dots, di_p|_v(z_r)) \\ &= \omega_q(df|_{(p,v)}(v_1), \dots, df|_{(p,v)}(v_k), df_p|_v(z_1), \dots, df_p|_v(z_r)) \\ &= \omega_q(w_1, \dots, w_k, df_p|_v(z_1), \dots, df_p|_v(z_r)), \end{aligned}$$

donde  $q = f(p, v) \in F_p$  y los vectores  $w_i = df|_{(p,v)}(v_i)$  cumplen  $d\pi|_q(w_i) = v_i$ , luego sirven para calcular  $\tilde{\omega}_p(v_1, \dots, v_k)_q$ . Por consiguiente

$$\omega_v^*(z_1, \dots, z_r) = \tilde{\omega}_p(v_1, \dots, v_k)_{f_p(v)}(df|_{(p,v)}(v_k), df_p|_v(z_1), \dots, df_p|_v(z_r)).$$

Ahora es claro que la antiimagen de  $\omega^*$  por  $f_{p\sharp}$  es precisamente  $\tilde{\omega}_p(v_1, \dots, v_k)$ .

Con esto ya tenemos definida la aplicación  $\tilde{\omega}_p$ , que claramente es multilineal alternada. Definimos ahora

$$\int_{F_p} \omega_p : T_p B \times \dots \times T_p B \rightarrow \mathbb{R}$$

mediante

$$\left( \int_{F_p} \omega_p \right) (v_1, \dots, v_k) = \int_{F_p} \tilde{\omega}_p(v_1, \dots, v_k),$$

donde la integral se calcula respecto a la orientación de  $F_p$  inducida por la orientación prefijada en  $E$ . Obviamente esta aplicación es una forma multilineal alternada en  $T_p B$ . Ahora probaremos que es diferenciable respecto de  $p$ , es decir, que tenemos una aplicación

$$\int_F : \Lambda_{cf}^{k+r}(E) \rightarrow \Lambda^k(B).$$

Notemos que esta aplicación, definida en principio con imagen en el espacio de todas las formas diferenciales en  $B$  —no necesariamente diferenciables— es claramente lineal.

Veamos que  $\int_F \omega$  es diferenciable en un punto  $p \in B$ . Tomemos una función  $t \in C^\infty(B)$  que valga 1 en un entorno  $V$  de  $p$  y se anule fuera de un entorno compacto  $K$ . La forma  $\omega^* = \pi_{\sharp}(t)\omega$  coincide con  $\omega$  en  $\pi^{-1}[V]$ , de donde se sigue inmediatamente que su integral en fibras coincide con la de  $\omega$  en  $V$ . Por otra parte, el soporte de  $\omega^*$  está contenido en  $\pi^{-1}[K]$ , luego es compacto. En definitiva, podemos suponer que  $\omega$  tiene soporte compacto.

Ahora podemos usar el teorema 13.25 para descomponer  $\omega$  en un número finito de formas. Puesto que la integral en fibras es lineal, basta probar la diferenciabilidad de la integral de cada sumando. Así pues, podemos suponer que  $\omega$  tiene su soporte en el fibrado  $E' = f[U \times V]$ , en las condiciones de 13.25 (y las observaciones posteriores). Es claro que la integral en fibras de  $\omega$  coincide con la de su restricción a  $E'$ , luego podemos suponer que  $E = E'$ ,  $B = U$  y  $F = V$ .

Así mismo, ahora podemos suponer que

$$\omega = g dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s} \wedge dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_t},$$

donde  $s + t = k + r$ ,  $i_1 < \cdots < i_s$ ,  $j_1 < \cdots < j_t$  y  $g$  es una función diferenciable en  $B$  de soporte compacto, pues cualquier forma  $\omega$  de soporte compacto se descompone en suma de formas de este tipo.

Hemos de comprobar que  $\int_F \omega$  es diferenciable, para lo cual basta comprobar que lo son sus funciones coordenadas, que son de la forma

$$\left( \int_F \omega \right) (\partial_{x_{i'_1}}, \dots, \partial_{x_{i'_k}}), \quad i'_1 < \cdots < i'_k.$$

En cada punto  $p \in B$  el valor de esta función es

$$\left( \int_{F_p} \omega_p \right) (\partial_{x_{i'_1}}|_p, \dots, \partial_{x_{i'_k}}|_p) = \int_{F_p} \tilde{\omega}_p(\partial_{x_{i'_1}}|_p, \dots, \partial_{x_{i'_k}}|_p).$$

El integrando, a su vez, es una  $r$ -forma en  $F_p$  cuya única función coordenada es

$$\tilde{\omega}_p(\partial_{x_{i'_1}}|_p, \dots, \partial_{x_{i'_k}}|_p)(\partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_r}).$$

En un punto  $q \in F_p$ , esta función toma el valor

$$\tilde{\omega}_p(\partial_{x_{i'_1}}|_p, \dots, \partial_{x_{i'_k}}|_p)_q(\partial_{y_1}|_q, \dots, \partial_{y_r}|_q) = \omega(\partial_{x_{i'_1}}|_q, \dots, \partial_{x_{i'_k}}|_q, \partial_{y_1}|_q, \dots, \partial_{y_r}|_q),$$

donde en el último término  $\partial_{x_{i'_l}}$  representa al vector tangente en  $T_q E$  asociado a la carta de  $E$  y no al vector tangente en  $T_p B$  como en los términos anteriores. Efectivamente, se cumple que  $d\pi|_q(\partial_{x_{i'_l}}|_q) = \partial_{x_{i'_l}}|_p$ , luego estos vectores pueden usarse para calcular  $\tilde{\omega}$ .

La expresión que hemos obtenido es nula salvo que  $s = k$ ,  $t = r$ ,  $i'_l = i_l$ ,  $j'_l = l$ , y en este caso vale  $g(q)$ . En definitiva,  $\int_F \omega$  es nula salvo si

$$\omega = g dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_r, \quad (13.8)$$

en cuyo caso las funciones coordenadas de  $\int_F \omega$  son todas nulas salvo a lo sumo la correspondiente a  $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ , que es la función

$$\int_{F_p} g|_{F_p} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_r.$$

Si llamamos  $g_p(q)$  a la función  $g|_{F_p}$  y llamamos  $g_p(y)$  a la composición de  $g_p(q)$  con  $y^{-1}$  entonces el teorema de cambio de variable nos da que la integral es

$$\int_{\mathbb{R}^r} g_p(y) dy.$$

En definitiva,

$$\int_F \omega = \left( \int_{\mathbb{R}^r} g_p(y) dy \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \quad (13.9)$$

Ahora es claro que se trata de una forma diferenciable, pues la función coordenada que aparece en el segundo miembro, compuesta con la carta  $x^{-1}$ , es la función

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^r} g(x, y) dy,$$

donde  $g(x, y)$  es  $(x \times y)^{-1} \circ g$ , que es diferenciable en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$  con soporte compacto, y los teoremas de derivación de integrales paramétricas garantizan que  $h(x)$  también es diferenciable.

**Definición 13.26** Llamaremos *integral en fibras* en un fibrado orientable  $E$  cuya fibra tiene dimensión  $r$  al homomorfismo graduado

$$\int_F : \Lambda_{cf}(E) \longrightarrow \Lambda(B)$$

de grado  $-r$  definido según la discusión precedente para formas de dimensión  $\geq r$  y como el homomorfismo nulo para formas de dimensión  $< r$ .

Del razonamiento precedente hemos de destacar que, si tenemos definido un sistema de coordenadas globales  $x_i, y_j$  en el fibrado, la integral en fibras está completamente determinada por que la integral de una forma (13.8) viene dada por (13.9), mientras que la integral de una forma similar a (13.8) pero en la que no aparezcan todas las formas  $dy_j$  es nula. Por ejemplo, teniendo esto en cuenta, el teorema de Fubini es inmediato:

**Teorema 13.27 (Fubini)** *Sea  $E$  un fibrado orientable sobre una base orientable  $B$ . Consideremos en  $E$  como variedad la orientación producto. Sea  $n = \dim B$  y  $r = \dim F$ . Entonces*

$$\int_E = \int_F \circ \int_B : \Lambda_c^{n+r}(E) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

**DEMOSTRACIÓN:** Por el teorema 13.25, toda forma en  $E$  con soporte compacto se descompone en un número finito de formas con soportes en subfibrados triviales. Puesto que las integrales son lineales, basta probar el teorema para cada una de estas formas, es decir, podemos suponer que  $\omega$  se encuentra en las condiciones de 13.25 y las observaciones posteriores, en cuyo caso será de la forma

$$\omega = g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_r.$$



Si llamamos  $g(x, y)$  a la composición de  $g$  con  $(x \times y)^{-1}$ , teniendo en cuenta que todas las cartas están orientadas, el teorema de cambio de variable nos da, por un lado, que

$$\int_E \omega = \int_{\mathbb{R}^{n+r}} g(x, y) dx dy,$$

mientras que

$$\int_B \int_F \omega = \int_B \left( \int_{\mathbb{R}^r} g_p(y) dy \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

y, de nuevo por el teorema de cambio de variable,

$$\int_B \int_F \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^r} g(x, y) dy \right) dx.$$

Ahora basta tener en cuenta el teorema de Fubini usual en análisis. ■

Otro resultado básico para trabajar con la integral en fibras es la versión siguiente del teorema de cambio de variable:

**Teorema 13.28** *Sea  $\phi : E \rightarrow E'$  un homomorfismo entre fibrados orientables tal que para cada  $p \in B$  la restricción  $\phi_p : F_p \rightarrow F'_{\phi_B(p)}$  es un difeomorfismo en la imagen que conserva la orientación. Sea  $\omega \in \Lambda_{cf}(E')$  tal que para cada  $p \in B$  se cumple  $\text{sop } \omega \cap F'_{\phi_B(p)} \subset \text{Im } \phi_p$ . Entonces  $\phi_{\#}(\omega) \in \Lambda_{cf}(E)$  y*

$$\int_F \phi_{\#}(\omega) = \phi_{B\#} \left( \int_{F'} \omega \right).$$

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que  $\phi_{\#}(\omega) \in \Lambda_{cf}(E)$  por el teorema 13.23. Supongamos que  $\omega \in \Lambda_{cf}^{k+r}(E')$  y tomemos un punto  $p \in B$  y unos vectores  $v_1, \dots, v_k \in T_p B$ . Entonces

$$\begin{aligned} \phi_{B\#} \left( \int_{F'} \omega \right)_p (v_1, \dots, v_k) &= \int_{F'_{\phi_B(p)}} \omega_{\phi_B(p)}(d\phi_B|_p(v_1), \dots, d\phi_B|_p(v_k)) \\ &= \int_{F'_{\phi_B(p)}} \tilde{\omega}_{\phi_B(p)}(d\phi_B|_p(v_1), \dots, d\phi_B|_p(v_k)). \end{aligned}$$

De la hipótesis del teorema se sigue inmediatamente que el integrando tiene su soporte contenido en la imagen de  $\phi_p$ . Por consiguiente podemos aplicar el teorema de cambio de variable, según el cual,

$$\phi_{B\#} \left( \int_{F'} \omega \right)_p (v_1, \dots, v_k) = \int_{F_p} \phi_{p\#}(\tilde{\omega}_{\phi_B(p)}(d\phi_B|_p(v_1), \dots, d\phi_B|_p(v_k))).$$

Tomemos  $q \in F_p$  y  $z_1, \dots, z_r \in T_q F_p$ . Entonces,

$$\phi_{p\#}(\tilde{\omega}_{\phi_B(p)}(d\phi_B|_p(v_1), \dots, d\phi_B|_p(v_k)))_q(z_1, \dots, z_r)$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{\omega}_{\phi_B(p)}(d\phi_B|_p(v_1), \dots, d\phi_B|_p(v_k))_{\phi(q)}(d\phi_p|_q(z_1), \dots, d\phi_p|_q(z_r)) \\
&= \omega_{\phi(q)}(d\phi|_q(w_1), \dots, d\phi|_q(w_k), d\phi|_q(dj_p|_q(z_1)), \dots, d\phi|_q(dj_p|_q(z_r))),
\end{aligned}$$

donde hemos introducido vectores  $w_i \in T_q E$  tales que  $d\pi|_q(w_i) = v_i$  y, por consiguiente,  $d\pi'|_{\phi(q)}(d\phi|_q(w_i)) = d\phi_B|_p(v_i)$ . Concluimos que

$$\begin{aligned}
&\phi_{p\sharp}(\tilde{\omega}_{\phi_B(p)}(d\phi_B|_p(v_1), \dots, d\phi_B|_p(v_k)))_q(z_1, \dots, z_r) \\
&= \phi_{\sharp}(\omega)_q(w_1, \dots, w_k, dj_p|_q(z_1), \dots, dj_p|_q(z_r)) = \widetilde{\phi_{\sharp}(\omega)}_p(v_1, \dots, v_k)_q(z_1, \dots, z_r).
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\phi_{B\sharp} \left( \int_{F'} \omega \right)_p(v_1, \dots, v_k) = \int_{F_p} \widetilde{\phi_{\sharp}(\omega)}_p(v_1, \dots, v_k) = \int_{F_p} \phi_{\sharp}(\omega)_p(v_1, \dots, v_k).$$

■

Como caso particular tenemos:

**Teorema 13.29** *Sea  $\phi : E \rightarrow E'$  un homomorfismo entre fibrados orientables que se restrinja a difeomorfismos entre las fibras y que conserve la orientación. Entonces  $\phi_{\sharp}$  se restringe a un homomorfismo  $\phi_{\sharp}^{cf} : \Lambda_{cf}(E') \rightarrow \Lambda_{cf}(E)$  tal que  $\phi_{\sharp}^{cf} \circ \int_{F'} = \int_F \circ \phi_{B\sharp}$ .*

Probamos ahora que la integral en fibras es suprayectiva, para lo cual necesitamos un resultado técnico que tiene interés por sí mismo, así que lo incluimos en el enunciado del teorema siguiente:

**Teorema 13.30** *Si  $E$  es un fibrado orientable, entonces  $\int_F : \Lambda_{cf}(E) \rightarrow \Lambda(B)$  es suprayectiva y además, si  $\omega \in \Lambda(B)$ ,  $\eta \in \Lambda_{cf}(E)$ , se cumple*

$$\int_F \pi_{\sharp}(\omega) \wedge \eta = \omega \wedge \int_F \eta.$$

DEMOSTRACIÓN: Para probar la igualdad empezamos reduciéndola a un fibrado local. No podemos aplicar directamente el teorema 13.25 porque hemos de tratar con dos formas simultáneamente, pero el argumento es esencialmente el mismo. Para probar que la igualdad se cumple en un punto  $p \in B$ , tomamos un entorno coordenado  $U$  de  $p$  con clausura compacta en el que exista una factorización local  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$ , tomamos una función  $t \in C^\infty(B)$  que valga 1 en un entorno  $V$  de  $p$  y se anule fuera de  $U$ . Las formas  $\pi_{\sharp}(t\omega)$  y  $(\pi \circ t)\eta$  coinciden con las dadas en  $\pi^{-1}[V]$ , por lo que podemos suponer que  $\omega$  tiene soporte compacto contenido en  $U$  y  $\eta$  tiene soporte contenido en  $\pi^{-1}[U]$ . El hecho de que  $\eta$  tenga soporte compacto en fibras implica entonces que tiene soporte compacto.

A partir de aquí ya podemos descomponer  $\eta$  en un número finito de formas exactamente como en 13.25 y restringirnos al caso en que el soporte de  $\eta$  está contenido en  $E' = f[U \times V]$ , donde  $V$  es un abierto coordenado en  $F$ . Puesto que las expresiones de la igualdad que queremos probar no se alteran si restringimos

todo a  $E'$ , podemos suponer que el fibrado  $E$  está en las condiciones descritas tras 13.25. A su vez esto nos permite suponer que

$$\omega = g dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \quad \eta = h dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{k'}} \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_r.$$

(Si en  $\eta$  no aparecieran todas las diferenciales  $dy_l$  los dos miembros de la igualdad serían nulos.)

Ahora es claro que los dos miembros se reducen a

$$g \left( \int_{\mathbb{R}^r} h_p(y) dy \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{k'}}.$$

Ahora estamos en condiciones de probar la suprayectividad de la integral en fibras. Fijamos  $\eta \in \Lambda^k(B)$  y tomamos un cubrimiento localmente finito  $\{U_i\}$  de  $B$  formado por abiertos sobre los que  $E$  tiene una factorización local  $f_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}[U_i]$ . Llamamos  $\eta_i$  a la restricción de  $\eta$  a  $U_i$  y fijamos una forma  $\omega' \in \Lambda_c^r(F)$  con integral 1. Si  $\pi'_i : U_i \times F \rightarrow F$  es la proyección en la fibra, es fácil ver que la forma  $\pi'_{i\#}(\omega') \in \Lambda_{cf}^r(U_i \times F)$  tiene como integral en fibras a la función constante igual a 1. Por la parte ya probada,

$$\int_F (\pi_{i\#}(\eta_i) \wedge \pi'_{i\#}(\omega')) = \eta_i.$$

Aplicando  $f_{i\#}^{-1}$  al integrando obtenemos una forma  $\omega_i \in \Lambda_{cf}^{k+r}(\pi^{-1}[U_i])$  tal que

$$\int_F \omega_i = \eta_i.$$

(Aquí hemos usado el teorema 13.28, teniendo en cuenta que  $f_{iB}$  es la identidad.)

Sea  $\{h_i\}$  una partición de la unidad en  $B$  subordinada al cubrimiento  $\{U_i\}$ . Las formas  $\pi_{i\#}(h_i)\omega_i$  pueden extenderse a  $E$  con el valor 0 fuera de  $\pi^{-1}[U_i]$  y sus soportes forman una familia localmente finita, por lo que está bien definida la suma  $\omega = \sum_i \pi_{i\#}(h_i)\omega_i \in \Lambda_{cf}(E)$ . Además, de nuevo por la parte ya probada,

$$\int_F \omega = \sum_i \int_F \pi_{i\#}(h_i)\omega_i = \sum_i h_i \eta_i = \sum_i h_i \eta = \eta.$$

■

Como consecuencia obtenemos:

**Teorema 13.31** *Si  $E$  es un fibrado orientable, entonces la integral en fibras se restringe a un epimorfismo*

$$\int_F : \Lambda_c(E) \rightarrow \Lambda_c(B).$$

DEMOSTRACIÓN: De la definición de integral en fibras se sigue inmediatamente que, para toda forma  $\omega \in \Lambda_{cf}(E)$ , se cumple que  $\text{sop } \int_F \omega \subset \pi[\text{sop } \omega]$ , luego en particular la integral de una forma de soporte compacto tiene soporte compacto. Falta probar que la restricción sigue siendo suprayectiva.

Dada  $\eta \in \Lambda_c(B)$ , el teorema anterior nos da una forma  $\omega \in \Lambda_{cf}(E)$  tal que  $\int_F \omega = \eta$ . Ahora bien, existe una función  $f \in \Lambda_c^0(B)$  tal que  $f\eta = \eta$ , y la forma  $\pi_{\sharp}(f)\omega$  tiene soporte compacto y cumple

$$\int_F \pi_{\sharp}(f)\omega = f \int_F \omega = f\eta = \eta.$$

■

La relación de la integral en fibras con la cohomología de los fibrados parte del siguiente resultado fundamental:

**Teorema 13.32** *Si  $E$  es un fibrado orientable, entonces la integral en fibras es un homomorfismo de complejos  $\int_F : \Lambda_{cf}(E) \rightarrow \Lambda(B)$ , es decir, conmuta con la diferencial exterior.*

DEMOSTRACIÓN: Hemos de probar que si  $\omega \in \Lambda_{cf}^{k+r}(E)$ , entonces

$$d \int_F \omega = \int_F d\omega.$$

Como es habitual, no perdemos generalidad si suponemos que  $E$  está en las condiciones indicadas en el teorema 13.25 y las observaciones posteriores, lo que a su vez nos permite suponer que  $\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_u} \wedge dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_v}$ , con  $u + v = k + r$ ,  $i_1 < \cdots < i_u$ ,  $j_1 < \cdots < j_v$ . Entonces

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{t=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_t} dx_t \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_u} \wedge dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_v} \\ &+ (-1)^u \sum_{t=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_t} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_u} \wedge dy_t \wedge dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_v}. \end{aligned}$$

Llamaremos  $d_B\omega$  y  $d_F\omega$  a estos dos términos. En primer lugar observamos que  $\int_F d_F\omega = 0$  salvo a lo sumo si  $v = r - 1$ , en cuyo caso —si falta  $dy_t$ — vale

$$\begin{aligned} \int_F d_F\omega &= (-1)^{u+t-1} \int_F \frac{\partial f}{\partial y_t} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+1}} \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_r \\ &= (-1)^{u+t-1} \left( \int_{\mathbb{R}^r} \frac{\partial f_p}{\partial y_t} dy \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+1}} = 0, \end{aligned}$$

pues  $f_p$  tiene soporte compacto.

Así pues,  $\int_F d_F\omega = 0$  en cualquier caso, y la igualdad que hemos de probar se reduce a

$$d \int_F \omega = \int_F d_B\omega.$$

Seguidamente observamos que ambos miembros son nulos salvo a lo sumo si

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_r.$$

En este caso,

$$d \int_F \omega = \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial x_t} \left( \int_{\mathbb{R}^r} f_p(y) dy \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

$$\int_F d_B \omega = \left( \int_{\mathbb{R}^r} \sum_{t=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_t} dy \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Los teoremas de derivación de integrales nos dan la igualdad.  $\blacksquare$

Por consiguiente, la integral sobre fibras en un fibrado  $E$  induce homomorfismos de grado  $-r$

$$\int_F^* : H_{cf}(E) \longrightarrow H(B) \quad \text{y} \quad \int_F^* : H_c(E) \longrightarrow H_c(B).$$

El teorema de Fubini nos da algunas consecuencias sobre estos homomorfismos:

**Teorema 13.33** *Sea  $E$  un fibrado orientable sobre una base orientable. Entonces las aplicaciones*

$$\int_F^* : H_c(E) \longrightarrow H_c(B) \quad \text{y} \quad \pi^* : H(B) \longrightarrow H(E)$$

son duales respecto a los productos escalares de Poincaré, es decir,

$$\left\langle \omega, \int_F^* \eta \right\rangle_B = \langle \pi^*(\omega), \eta \rangle_E, \quad \omega \in H(B), \quad \eta \in H_c(E).$$

DEMOSTRACIÓN: La comprobación es trivial:

$$\langle \pi^*(\omega), \eta \rangle_E = \int_E \pi^*(\omega) \wedge \eta = \int_B \int_F^* \pi^*(\omega) \wedge \eta = \int_B \omega \wedge \int_F^* \eta = \left\langle \omega, \int_F^* \eta \right\rangle_B.$$

En particular  $\int_F^*$  es inyectiva, suprayectiva o biyectiva si y sólo si  $\pi^*$  es, respectivamente, suprayectiva, inyectiva o biyectiva.

En el caso en que la fibra  $F$  es compacta, es fácil ver que la proyección  $\pi$  es propia, por lo que induce un homomorfismo  $\pi_c^* : H_c(B) \longrightarrow H_c(E)$ . En este caso  $\int_F^* : H(E) \longrightarrow H(B)$ . El mismo razonamiento de la prueba anterior nos da esta variante:

**Teorema 13.34** Si  $E$  es un fibrado orientable con base orientable y fibra compacta, entonces las aplicaciones

$$\int_F^* : H(E) \longrightarrow H(B) \quad y \quad \pi_c^* : H_c(B) \longrightarrow H_c(E)$$

son duales respecto a los productos escalares de Poincaré.

Una última consecuencia inmediata del teorema de Fubini es la siguiente:

**Teorema 13.35** Sea  $E$  un fibrado compacto orientable con base orientable  $B$ . Sean  $O_E$  y  $O_B$  las clases de las orientaciones de  $E$  y  $B$ . Entonces

$$\int_F^* O_E = O_B.$$

DEMOSTRACIÓN: La integral en  $B$  del primer miembro es igual a 1, y esto caracteriza a  $O_B$ . ■

## 13.5 Fibrados de esferas

Un *fibrado de esferas* es un fibrado cuya fibra típica es la esfera  $S^r$ . En el capítulo siguiente estudiaremos con detalle la cohomología de estos fibrados. Aquí demostraremos un resultado que vamos a necesitar y que no requiere cohomología. No obstante, antes de entrar en ello veremos algunos resultados que indiquen el interés de los fibrados de esferas y del resultado que vamos a probar.

**Definición 13.36** Una *métrica de Riemann* en un fibrado vectorial  $E$  es un tensor simétrico  $g \in \mathcal{T}_2^0(E)_F$  tal que para cada  $p \in B$  se cumple que  $g_p$  es un producto escalar en el espacio vectorial  $F_p$ .

Es fácil ver que una métrica de Riemann en  $E$  como variedad se restringe a una métrica de Riemann en el fibrado vertical  $VE$ , la cual induce a su vez una métrica de Riemann en  $E$ , por lo que todo fibrado vectorial admite una métrica de Riemann. Si  $V$  es una variedad diferencial, una métrica de Riemann en  $V$  es lo mismo que una métrica en el fibrado de tangentes  $TV$ .

Si  $E$  es un fibrado vectorial con fibra  $\mathbb{R}^r$  en el que hay definida una métrica de Riemann  $g$ , para cada  $p \in B$  definimos  $S_p = \{v \in E_p \mid g_p(v, v) = 1\}$ . Llamamos

$$SE = \bigcup_{p \in B} S_p.$$

Vamos a comprobar que  $SE$  con la proyección  $\pi : SE \longrightarrow B$  restricción de la proyección de  $E$  es un fibrado de esferas con fibra  $S^{r-1}$ . Lo llamaremos *fibrado de esferas* de  $E$ . Para ello conviene demostrar antes un resultado general:

**Teorema 13.37** Si  $E$  es un fibrado vectorial sobre  $\mathbb{R}^r$  en el que hay definida una métrica de Riemann, entonces todo punto de  $B$  tiene un entorno  $U$  donde existe una factorización local  $f : U \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \pi^{-1}[U]$  tal que los isomorfismos  $f_p : \mathbb{R}^r \longrightarrow F_p$  son isometrías (considerando en  $\mathbb{R}^r$  la métrica usual).

DEMOSTRACIÓN: Tomemos una factorización local  $\tilde{f} : U \times \mathbb{R}^r \rightarrow \pi^{-1}[U]$ , donde  $U$  es un entorno de un punto prefijado. Sea  $e_1, \dots, e_r$  la base canónica de  $\mathbb{R}^r$ . Entonces los vectores  $e_i(p) = \tilde{f}(p, e_i)$  son una base de  $F_p$ . Le aplicamos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, es decir, definimos

$$v_i(p) = g_p(w_i(p), w_i(p))^{-1/2} w_i(p),$$

donde

$$w_i(p) = e_i(p) - \sum_{j < i} g_p(e_i(p), v_j(p)) v_j(p).$$

De estas fórmulas se sigue que las funciones  $v_i : B \rightarrow E$  son diferenciables. Definimos  $f : U \times \mathbb{R}^r \rightarrow \pi^{-1}[U]$  mediante  $f(p, x) = \sum_i x_i v_i(p)$ . Es claro que  $f$  es biyectiva y diferenciable, y estudiando su diferencial en cada punto se comprueba sin dificultad que es un difeomorfismo, es decir, es una factorización local de  $E$ , y claramente  $f_p$  transforma la base canónica de  $\mathbb{R}^r$  en una base ortonormal de  $F_p$ , luego  $f_p$  es una isometría. ■

Volviendo al fibrado de esferas  $SE$ , si  $f : U \times \mathbb{R}^r \rightarrow \pi^{-1}[U]$  es una factorización local de  $E$  en las condiciones del teorema anterior, entonces  $f$  se restringe a un homeomorfismo  $\tilde{f} : U \times S^{r-1} \rightarrow \pi^{-1}[U]_{SE}$ .

Las cartas de  $U \times S^{r-1}$  se corresponden a través de  $\tilde{f}$  con cartas en  $SE$  con dominios contenidos en  $\pi^{-1}[U]$ . Como al variar  $U$  los abiertos  $\pi^{-1}[U]$  cubren  $SE$ , tenemos cartas que cubren a todo  $SE$ . Si dos de ellas se obtienen de  $\tilde{f}$  y  $\tilde{f}'$  respectivamente, entonces la composición de la inversa de una con la otra es la composición de la inversa de una carta de  $U \times S^{r-1}$  con la restricción a un abierto de  $U \times S^{r-1}$  del difeomorfismo  $f \circ f'^{-1}$  (restricción a una subvariedad de  $U \times \mathbb{R}^r$ ) con una carta de  $U' \times S^{r-1}$ . Por consiguiente es un difeomorfismo y  $SE$  tiene estructura de subvariedad. Obviamente las aplicaciones  $\tilde{f}$  son factorizaciones locales, luego  $SE$  es un fibrado de esferas. Del hecho de que  $U \times S^{r-1}$  es una subvariedad de  $U \times \mathbb{R}^r$  se sigue inmediatamente que  $SE$  es un subfibrado de  $E$ . ■

Ahora generalizaremos a este contexto el hecho de que las orientaciones de  $\mathbb{R}^{n+1}$  inducen orientaciones en  $S^n$  (pág. 12.1). Para ello generalizamos la noción del campo radial de  $\mathbb{R}^n$ , primero a espacios vectoriales arbitrarios y luego a fibrados vectoriales. En un espacio vectorial  $F$  fijamos una base  $e_1, \dots, e_r$  y el sistema de coordenadas asociado  $y_1, \dots, y_r$ . Definimos

$$R_w = \sum_{j=1}^r y_j(w) \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_w \in T_w F. \quad (13.10)$$

El campo  $R$  está completamente determinado por el hecho de que  $R \circ \theta_w$  es la identidad en  $F$ , por lo que no depende de la elección de la base.

Sea ahora  $E$  un fibrado vectorial. Para cada punto  $w \in F_p$  podemos considerar el vector  $R_w \in T_w(F_p)$ . Componiendo con  $di_p|_w : T_w(F_p) \rightarrow V_w E$  obtenemos un vector al que seguiremos llamando  $R_w$ . De este modo  $R : E \rightarrow V_w E$ .

Para demostrar que el campo  $R$  es diferenciable tomamos una factorización local  $f : U \times \mathbb{R}^r \rightarrow \pi^{-1}[U]$ , donde  $U$  es un abierto coordinado de  $B$ , con coordenadas  $x_1, \dots, x_n$ . Sean  $y_1, \dots, y_r$  las coordenadas de  $\mathbb{R}^r$ . Las composiciones de  $f^{-1}$  con las funciones  $x_i$  e  $y_j$  constituyen un sistema de coordenadas en  $\pi^{-1}[U]$  y las restricciones a cada fibra  $F_p$  de las coordenadas  $y_j$  son las coordenadas asociadas a la base  $e_j(p) = f(p, e_j)$ , donde  $e_j$  son los vectores de la base canónica en  $\mathbb{R}^r$ . Así pues, si calculamos  $R_w$  respecto de esta base obtenemos el vector dado por (13.10) en  $T_p F_p$  (entendiendo que las coordenadas  $y_j$  están restringidas a  $F_p$ ) y su imagen en  $V_w E$  tiene esta misma expresión (entendiendo ahora que las coordenadas  $y_j$  están definidas en todo  $E$ ). Esto prueba la diferenciabilidad.

El campo  $R \in \mathfrak{X}(E)$  se llama *campo vertical radial* de  $E$ . Supongamos ahora una métrica de Riemann  $g$  en el fibrado  $E$  y consideremos la función  $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\rho(w) = g(w, w)$ , claramente diferenciable. El fibrado de esferas  $SE$  está formado por los puntos  $w \in E$  tales que  $\rho(w) = 1$ . Por consiguiente, si  $i : SE \rightarrow E$  es la inclusión tenemos que  $i \circ \rho$  es constante, luego si  $w \in SE$  entonces  $d\rho|_w$  se anula sobre  $T_w SE$  (identificado con un subespacio de  $T_w E$  a través de  $di|_w$ ). Por el contrario,  $d\rho|_w(R_w) = 2$ . Para comprobar esto tomamos una factorización local  $f$  de  $E$  en las condiciones del teorema 13.37, con lo que  $\rho = y_1^2 + \dots + y_r^2$  y  $d\rho = 2y_1 dy_1 + \dots + 2y_r dy_r$ . Esto prueba que  $R_w \notin T_w(SE)$ , luego  $T_w E = \langle R_w \rangle \oplus T_w(SE)$  y en particular  $V_w E = \langle R_w \rangle \oplus T_w S_p$ .

**Definición 13.38** Sea  $E$  un fibrado vectorial con base de dimensión  $n$  y fibra de dimensión  $r$ , sea  $SE$  el fibrado de esferas asociada a una cierta métrica de Riemann en  $E$  y sea  $i : SE \rightarrow E$  la inclusión. Para cada forma  $\omega \in \Lambda^r(E)$  definimos

$$\omega_S = i_{\#}(i_R(\omega)) \in \Lambda^{r-1}(SE),$$

y para cada forma  $\tilde{\omega} \in \Lambda^{n+r}(E)$  definimos

$$\tilde{\omega}_S = (-1)^n i_{\#}(i_R(\tilde{\omega})) \in \Lambda^{n+r-1}(SE).$$

De los razonamientos precedentes se sigue inmediatamente que si  $\omega$  (resp.  $\tilde{\omega}$ ) representa una orientación de  $E$  como fibrado (resp. como variedad), entonces  $\omega_S$  (resp.  $\tilde{\omega}_S$ ) representa una orientación de  $SE$  como fibrado (resp. como variedad). Así mismo es claro que la orientación obtenida en  $SE$  depende únicamente de la orientación en  $E$  y no de la forma que la representa, por lo que podemos hablar de la *orientación inducida* en  $SE$  por una orientación dada en  $E$  (como fibrado o como variedad). En la definición de  $\tilde{\omega}_S$  incluimos el signo  $(-1)^n$  para que se cumpla el teorema siguiente:

**Teorema 13.39** Si la forma  $\eta \in \Lambda^n(B)$  orienta  $B$ ,  $\omega \in \Lambda^r(E)$  orienta el fibrado  $E$  y  $\tilde{\omega} = \pi_{\#}(\eta) \wedge \omega$  es la orientación producto de la variedad  $E$ , entonces

$$\tilde{\omega}_S = \pi_{\#}(\eta) \wedge \omega_S,$$

es decir,  $\tilde{\omega}_S$  es la orientación producto en  $SE$ .



DEMOSTRACIÓN: Observemos que  $i_R(\pi_{\sharp}(\eta)) = 0$ , pues se calcula evaluando  $\eta$  en  $d\pi|_w(R_w) = 0$ . Así,

$$\tilde{\omega}_S = (-1)^n i_{\sharp}(i_R(\pi_{\sharp}(\eta) \wedge \omega)) = \pi_{\sharp}(\eta) \wedge i_{\sharp}(i_R(\omega)) = \pi_{\sharp}(\eta) \wedge \omega_S,$$

donde a partir del tercer término  $\pi$  es la proyección de  $SE$ . ■

En particular, toda variedad de Riemann  $V$  tiene asociado un fibrado de esferas  $SV = STV$ . Además el teorema 12.4 afirma que la variedad  $TV$  siempre es orientable, luego la variedad  $SV$  también lo es.

Como ejemplo del interés de este fibrado consideremos lo siguiente: si la variedad  $V$  admite un campo de vectores tangentes  $X \in \mathfrak{X}(V)$  que no se anula en ningún punto, a partir de  $X$  podemos formar el campo

$$Y = g(X, X)^{-1}X \in \mathfrak{X}(V),$$

que tiene la propiedad adicional de que  $g(Y, Y) = 1$ , es decir, que  $Y : V \rightarrow SV$ , es decir, podemos considerar a  $Y$  como una sección del fibrado de esferas de  $V$ . Vemos, pues, que una variedad  $V$  admite un campo de vectores tangentes que no se anula en ningún punto si y sólo si  $SV$  tiene una sección.

Así pues, que el problema de si un fibrado tiene o no secciones no es trivial. Por ejemplo, sabemos que las esferas  $S^{2n}$  no admiten campos de vectores tangentes no nulos (teorema 3.13), luego sus fibrados de esferas no tienen secciones. El resto de la sección está dedicada a demostrar un resultado sobre existencia de secciones en fibrados de esferas:

**Teorema 13.40** *Sea  $E$  un fibrado de esferas cuya base tenga dimensión  $n \geq 2$  y cuya fibra tenga dimensión  $n - 1$ . Si la base no es compacta entonces  $E$  tiene una sección.*

La prueba de este teorema es laboriosa, y necesitamos algunos resultados previos. Ante todo hemos de introducir la noción de sección con singularidades.

**Definición 13.41** Si  $E$  es un fibrado, una *sección con singularidades* de  $E$  es una aplicación diferenciable  $\sigma : B \setminus A \rightarrow E$  tal que para todo  $p \in B$  se cumpla  $\sigma(p) \in F_p$ , donde  $A$  es un subconjunto cerrado y discreto de  $B$ . Los puntos de  $A$  se llaman *singularidades* de la sección  $\sigma$ .

Cuando no queramos especificar el conjunto de singularidades escribiremos  $\sigma : B \rightarrow E$ , pero debemos recordar que hay un conjunto  $A$  donde  $\sigma$  no está definida. El teorema siguiente prueba que todo fibrado en las condiciones del teorema 13.40 (sin exigir la no compacidad de la base) admite una sección con singularidades. El propio proceso de construcción requiere un enunciado más delicado:

**Teorema 13.42** *Sea  $E$  un fibrado de esferas con base  $B$  de dimensión  $n \geq 2$  y fibra de dimensión  $n - 1$ . Sea  $K \subset A \subset G \subset B$  de modo que  $K$  es cerrado y discreto,  $A$  es cerrado y  $G$  es abierto. Sea  $\sigma : G \setminus A \rightarrow E$  una sección con singularidades. Entonces existe un conjunto cerrado y discreto  $L \subset B$  y una sección con singularidades  $\tau : B \setminus L \rightarrow E$  tal que  $L \cap A = K$  y  $\tau$  coincide con  $\sigma$  en un entorno de  $A$ .*

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos primero en el caso  $E = B \times S^{n-1}$ . Sea  $\sigma(p) = (p, \sigma_1(p))$ , para cada  $p \in G \setminus K$ . Así  $\sigma_1 : G \setminus K \rightarrow S^{n-1}$  es diferenciable.

Tomemos una función  $f \in C^\infty(B)$  que valga 1 en un entorno  $W$  de  $A$  y se anule fuera de  $G$  (se obtiene de una partición de la unidad subordinada al cubrimiento formado por  $G$  y  $B \setminus A$ ). Entonces  $\phi = f\sigma_1 : B \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable, entendiéndose que vale 0 donde  $\sigma_1$  no está definida. Por el teorema de Sard existe un valor regular  $b \in \mathbb{R}^n$  para  $\phi$  con  $\|b\| < 1$ . Sea  $C = \phi^{-1}[b]$ . El conjunto  $C$  puede ser vacío. En caso contrario es un subconjunto cerrado y discreto de  $B \setminus W$ , pues si  $p \in C$  entonces  $d\phi|_p$  tiene rango  $n$ , con lo que  $\phi$  es un difeomorfismo en un entorno de  $p$ , por lo que ningún otro punto de dicho entorno puede estar en  $C$ .

Por la versión diferenciable del teorema 1.7 podemos tomar un difeomorfismo  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\psi(b) = 0$  y  $\psi(x) = x$  siempre que  $\|x\| \geq 1$ . Sea  $\tau_1 = \phi \circ \psi$ . Así  $\tau_1 : B \setminus L \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , donde  $L = K \cup C$  es cerrado y discreto en  $B$  y  $\tau_1$  coincide con  $\sigma_1$  en  $W$ . Ahora basta definir

$$\tau(p) = \left( p, \frac{\tau_1(p)}{\|\tau_1(p)\|} \right), \quad p \in B \setminus L.$$

Pasamos ahora al caso general. Tomamos dos cubrimientos abiertos  $\{V_i\}_{i=0}^\infty$  y  $\{U_i\}_{i=0}^\infty$  de  $B$  localmente finitos tales que  $\overline{V}_i \subset U_i$ , cada  $U_i$  tiene clausura compacta y existen factorizaciones locales  $f_i : U_i \times S^{n-1} \rightarrow \pi^{-1}[U_i]$ .

Sea  $V$  un abierto en  $B$  tal que  $A \subset V \subset \overline{V} \subset G$ . Definimos

$$A_i = \bigcup_{j < i} \overline{V}_j \cup \overline{V}.$$

Vamos a construir conjuntos finitos  $K_i \subset A_i$  y abiertos  $G_i \supset A_i$  junto con secciones  $\sigma_i : G_i \setminus (K \cup K_i) \rightarrow E$  tales que

- $K_i \cap A_{i-1} = K_{i-1}$ ,
- $\sigma_i(p) = \sigma_{i-1}(p)$  para todo  $p \in A_{i-1} \setminus (K \cup K_{i-1})$ ,
- $\sigma_i(p) = \sigma(p)$  para todo  $p \in \overline{V} \setminus K$ .

Partimos de  $K_0 = \emptyset$ ,  $G_0 = G$  y  $\sigma_0 = \sigma$ . Supongamos construida  $\sigma_i$ . La restricción  $\tilde{\sigma}_i : (G_i \setminus (K \cup K_i)) \cap U_{i+1} \rightarrow E$  puede verse como una sección con singularidades definida en el abierto  $G_i \cap U_{i+1}$  del fibrado trivial  $\pi^{-1}[U_{i+1}]$  de base  $U_{i+1}$ . Podemos aplicarle la parte ya probada con el cerrado  $A_i \cap U_{i+1}$ . Observemos que el conjunto de singularidades es

$$(K \cup K_i) \cap U_{i+1} \subset A_i \cap U_{i+1} \subset G_i \cap U_{i+1},$$

luego se cumplen todas las hipótesis.

Así obtenemos un cerrado discreto  $C \subset U_{i+1} \setminus A_i$  y una sección

$$\tau_{i+1} : U_{i+1} \setminus (C \cup K \cup K_i) \rightarrow E$$

que coincide con  $\tilde{\sigma}_i$  en un entorno de  $A_i \cap U_{i+1}$ . Podemos tomar un entorno  $W$  de  $A_i$  en  $B$  tal que  $W \cap C = \emptyset$  y  $\tau_{i+1}(p) = \sigma_i(p)$  para todo  $p \in U_{i+1} \cap (W \setminus (K \cup K_i))$ .

Ahora observemos que  $X = C \cap \overline{V}_{i+1}$  es finito, pues  $\overline{V}_{i+1}$  es compacto. Sea  $\tilde{W}$  un entorno de  $\overline{V}_{i+1}$  en  $U_{i+1}$  tal que  $\tilde{W} \cap C = X$ . Sea  $K_{i+1} = K_i \cup X$ ,  $G_{i+1} = W \cup \tilde{W}$ . Como  $\sigma_i$  y  $\tau_{i+1}$  coinciden en  $W \cap \tilde{W}$ , definen una sección  $\sigma_{i+1} : G_{i+1} \setminus (K \cup K_{i+1}) \rightarrow E$  que cumple lo pedido.

Por último, observamos que la unión de las  $K_i$  tiene intersección finita con cada  $\overline{V}_i$ , luego es un conjunto cerrado y discreto, al igual que

$$L = K \cup \bigcup_i K_i.$$

Las secciones  $\sigma_i$  determinan una única extensión común  $\tau : B \setminus L \rightarrow E$  que cumple el teorema. ■

El teorema es válido si partimos de  $G = \emptyset$ , y entonces nos da simplemente la existencia de secciones con singularidades. Para eliminarlas necesitamos algunos resultados esencialmente topológicos.

**Teorema 13.43** *Sea  $K$  un subconjunto compacto de una variedad conexa  $B$ . Entonces existe un compacto  $L$  tal que  $K \subset L \subset B$  y ninguna componente conexa de  $B \setminus L$  tiene clausura compacta en  $B$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$B \setminus K = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i$$

la descomposición de  $B \setminus K$  en componentes conexas. Sea  $U$  un entorno abierto de  $K$  de clausura compacta. Para cada índice  $i$ , los abiertos

$$G_i \quad \text{y} \quad U \cup \bigcup_{j \neq i} G_j$$

cubren  $B$ , luego por conexión no pueden ser disjuntos. Ahora bien,  $G_i$  sí es disjunto de cada  $G_j$ , luego ha de ser  $G_i \cap U \neq \emptyset$ . Como  $\overline{U}$  es compacto, existe un natural  $m$  tal que

$$\overline{U} \subset U \cup \bigcup_{i=0}^m G_i.$$

Veamos que el miembro derecho es en realidad igual a  $B$ . Si  $j > m$ , tenemos que

$$G_j = (G_j \cap \overline{U}) \cup (G_j \cap (B \setminus \overline{U})) = (G_j \cap U) \cup (G_j \cap (B \setminus \overline{U})).$$

Como  $G_j$  es conexo y hemos visto que  $G_j \cap U \neq \emptyset$ , ha de ser  $G_j \subset U$ , para todo  $j > m$ , luego en efecto

$$B = U \cup \bigcup_{i=0}^m G_i$$

Renumeremos las componentes conexas de modo que  $\overline{G}_i$  sea compacto para  $i = 1, \dots, p$  y sea no compacto para  $i = p+1, \dots, m$ . Sea

$$L = B \setminus \bigcup_{i=p+1}^m G_i.$$

Entonces  $L$  es cerrado y como

$$L \subset U \cup \bigcup_{i=1}^p G_i \subset \bar{U} \cup \bigcup_{i=1}^p \bar{G}_i,$$

de hecho  $L$  es compacto y contiene a  $K$ . Además

$$B \setminus L = \bigcup_{i=p+1}^m G_i,$$

luego las componentes conexas de  $B \setminus L$  son los abiertos  $G_i$  para  $i = p+1, \dots, m$ , y ninguno de ellos tiene clausura compacta. ■

Teniendo en cuenta que toda variedad se descompone en unión numerable de abiertos de clausura compacta, del teorema anterior se deduce inmediatamente el siguiente:

**Teorema 13.44** *Sea  $B$  una variedad conexa no compacta. Entonces existe una sucesión de compactos  $A_i$  y una sucesión de abiertos  $G_i$  tales que*

- a)  $G_i \subset A_i \subset G_{i+1}$ ,
- b)  $B = \bigcup_i G_i$ ,
- c) *Ninguna de las componentes conexas de  $B \setminus A_i$  tiene clausura compacta.*

Ahora necesitamos unos resultados sobre homogeneidad de los fibrados.

**Teorema 13.45** *Sea  $E$  un fibrado, sea  $G$  un abierto conexo en la base  $B$  y sean  $a, b \in G$ . Entonces existe un isomorfismo de fibrados  $\phi : E \rightarrow E$  tal que  $\phi_B(a) = b$  y  $\phi(w) = w$  para todo  $w \in E \setminus \pi^{-1}[G]$ .*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos un arco  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$  que una a  $a$  y  $b$ , cubrimos su imagen por un número finito de abiertos  $U_i \subset G$  donde  $E$  tenga una factorización local. Ordenándolos adecuadamente y descartando los que sobren podemos exigir que  $a$  esté en el primero,  $b$  esté en el último y cada cual corte al siguiente. Basta construir difeomorfismos que transporten un punto de un  $U_i$  a otro (y dejen fijo a  $E \setminus \pi^{-1}[G]$ ). Esto nos reduce el problema al caso en que existe una factorización local  $f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}[U]$  tal que  $a, b \in U \subset G$ .

Podemos suponer que  $U$  es difeomorfo a una bola abierta. Sea  $G$  la imagen en  $U$  de una bola abierta de radio menor que contenga a los puntos  $a$  y  $b$ . Si encontramos un isomorfismo  $\phi : \pi^{-1}[U] \rightarrow \pi^{-1}[U]$  tal que  $\phi_B(a) = b$  y deje invariantes a los puntos de  $\phi^{-1}[G_0]$ , es claro que  $\phi$  se extiende a  $E$  como la identidad fuera de  $\pi^{-1}[U]$  y cumple el teorema. Con esto hemos reducido el problema al caso en que existe una factorización local  $f : B \times F \rightarrow E$  o, mejor aún, al caso en que  $E = B \times F$ , donde  $B$  es la bola unidad en  $\mathbb{R}^n$  y  $G$  es una bola de radio menor.

La versión diferenciable del teorema 1.8 nos proporciona un difeomorfismo  $\psi : B \rightarrow B$  tal que  $\psi(a) = b$  y  $\psi$  es la identidad fuera de  $G$ . De aquí obtenemos

el isomorfismo  $\phi : B \times F \longrightarrow B \times F$  mediante  $\phi(p, v) = (\psi(p), v)$ , que claramente cumple lo pedido. ■

De aquí se sigue fácilmente:

**Teorema 13.46** *Sea  $E$  un fibrado y sean  $U_1, \dots, U_m$  abiertos conexos de la base  $B$  tales que dos cualesquiera de ellos sean iguales o disjuntos. Consideremos dos conjuntos de  $m$  puntos  $x_i, y_i \in U_i$  todos distintos entre sí. Entonces existe un isomorfismo  $\phi : E \longrightarrow E$  tal que  $\phi_B(x_i) = y_i$  para  $i = 1, \dots, m$  y  $\phi$  es la identidad fuera de cada  $\pi^{-1}[U_i]$ .*

DEMOSTRACIÓN DE 13.40: Según el teorema 13.42, podemos partir de una sección  $\tau : B \setminus K \longrightarrow E$ , donde  $K$  es un subconjunto cerrado y discreto de  $B$ . Consideremos, por otra parte, unas sucesiones de compactos  $A_i$  y de abiertos  $G_i$  según el teorema 13.44. Vamos a construir una familia de conjuntos cerrados discretos  $K_i \subset B$  y de secciones  $\sigma_i : B \setminus K_i \longrightarrow E$  tales que  $K_i \cap A_i = \emptyset$  y  $\sigma_i(p) = \sigma_{i-1}(p)$  para todo  $p \in G_{i-1}$ .

Podemos suponer que  $G_0 = A_0 = \emptyset$ , y entonces basta tomar  $\sigma_0 = \tau$ ,  $K_0 = K$ . Supongamos construidos  $\sigma_i$  y  $K_i$ . Como  $A_{i+1}$  es compacto, el conjunto  $K_i \cap A_{i+1}$  es finito. Digamos  $K_i \cap A_{i+1} = \{x_1, \dots, x_m\}$ . Sea  $U_j$  la componente conexa de  $B \setminus A_i$  que contiene a  $x_j$ . Como  $U_j$  no tiene clausura compacta, ha de ser  $U_j \cap (B \setminus A_{i+1}) \neq \emptyset$ .

Sea  $C_i = K_i \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ . Así  $C_i$  es cerrado y discreto y  $C_i \subset B \setminus A_{i+1}$ . Sea  $V_j = U_j \setminus C_i$ . Entonces  $V_j$  es conexo porque la dimensión de  $V_j$  es mayor o igual que 2. Además  $V_j \cap (B \setminus A_{i+1}) \neq \emptyset$  (y como es un abierto, de hecho es infinito). Podemos tomar, pues,  $m$  puntos distintos  $y_j \in V_j \setminus A_{i+1}$ .

El teorema anterior nos da un difeomorfismo  $\phi : E \longrightarrow E$  tal que  $\phi_B(x_j) = y_j$  y que deja fijos a los puntos que no están en ningún abierto  $\pi^{-1}[V_j]$ . Sea  $K_{i+1} = \phi_B[K_i] = \{y_1, \dots, y_m\} \cup C_i$ , de modo que  $K_{i+1} \cap A_{i+1} = \emptyset$ . Definimos  $\sigma_{i+1} : B \setminus K_{i+1} \longrightarrow E$  mediante  $\sigma_{i+1} = \phi_B^{-1} \circ \sigma_i \circ \phi$ .

Esta sección cumple lo pedido, pues si  $p \in G_i$ , entonces  $p \in A_i$ , luego  $p \notin V_j$  para ningún  $j$ , luego  $\phi_B(p) = p$  y  $\phi(\sigma(p)) = \sigma(p)$ , con lo que  $\sigma_{i+1}(p) = \sigma_i(p)$ .

Con esto tenemos una sucesión de secciones  $\sigma_i$  cuyas singularidades “tienden a infinito” en el sentido de que a partir del índice  $i$  todas ellas están definidas y coinciden en el abierto  $G_{i-1}$ . Por consiguiente podemos definir  $\sigma : B \longrightarrow E$  mediante  $\sigma(p) = \lim_i \sigma_i(p)$ , y claramente es una sección en  $E$  sin singularidades. ■

Respecto a variedades compactas podemos decir lo siguiente:

**Teorema 13.47** *Si  $E$  es un fibrado de esferas con base compacta de dimensión  $n \geq 2$  y fibra de dimensión  $n - 1$ , entonces  $E$  tiene una sección con a lo sumo una singularidad.*

DEMOSTRACIÓN: Basta tomar un punto  $p \in B$  y considerar el fibrado  $\pi^{-1}[B \setminus \{p\}]$ . Por el teorema anterior tiene una sección sin singularidades, que es una sección de  $E$  con una singularidad en  $p$ . ■



## Capítulo XIV

# La cohomología de los fibrados

Nos ocupamos ahora la cohomología de los fibrados. Concretamente estudiaremos los fibrados de esferas y fibrados vectoriales. Además de llegar a consecuencias muy interesantes sobre la cohomología en sí, obtendremos también resultados clásicos de Poincaré sobre campos vectoriales en variedades diferenciales.

### 14.1 La clase de Euler

En esta sección estudiaremos los fibrados de esferas. Probaremos que la cohomología de un fibrado está determinada por la cohomología de la base y por una forma diferencial que generaliza a la característica de Euler de una variedad diferencial compacta. Empezamos demostrando un resultado general del álgebra homológica.

**Teorema 14.1 (Lema de los nueve)** *Consideremos el diagrama siguiente de módulos y homomorfismos de módulos:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M_{11} & \xrightarrow{\phi_{11}} & M_{12} & \xrightarrow{\phi_{12}} & M_{13} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi_{11} & & \downarrow \psi_{12} & & \downarrow \psi_{13} \\ 0 & \longrightarrow & M_{21} & \xrightarrow{\phi_{21}} & M_{22} & \xrightarrow{\phi_{22}} & M_{23} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi_{21} & & \downarrow \psi_{22} & & \downarrow \psi_{23} \\ 0 & \longrightarrow & M_{31} & \xrightarrow{\phi_{31}} & M_{32} & \xrightarrow{\phi_{32}} & M_{33} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Si todas las filas y columnas son exactas salvo a lo sumo la primera fila, entonces ésta también es exacta.

DEMOSTRACIÓN: Si  $\phi_{11}(m_{11}) = 0$  entonces  $\phi_{21}(\psi_{11}(m_{11})) = 0$ , luego se cumple  $m_{11} = 0$ .

$$\phi_{11} \circ \phi_{12} \circ \psi_{13} = \psi_{11} \circ \phi_{21} \circ \phi_{22} = 0, \text{ luego } \phi_{11} \circ \phi_{12} = 0.$$

Si  $\phi_{12}(m_{12}) = 0$  entonces  $\phi_{22}(\psi_{12}(m_{12})) = 0$ , luego  $\psi_{12}(m_{12}) = \phi_{21}(m_{21})$ ,  $\phi_{31}(\psi_{21}(m_{21})) = \psi_{22}(\phi_{21}(m_{21})) = \psi_{22}(\psi_{12}(m_{12})) = 0$ , luego  $\psi_{21}(m_{21}) = 0$  y por lo tanto  $m_{21} = \psi_{11}(m_{11})$ ,  $\psi_{12}(\phi_{11}(m_{11})) = \phi_{21}(\psi_{11}(m_{11})) = \phi_{21}(m_{21}) = \psi_{12}(m_{12})$ , luego  $\phi_{11}(m_{11}) = m_{12}$ .

Dado  $m_{13} \in M_{13}$ , se cumple que  $\psi_{13}(m_{13}) = \phi_{22}(m_{22})$  y  $\phi_{32}(\psi_{22}(m_{22})) = \psi_{23}(\psi_{13}(m_{13})) = 0$ ,  $\psi_{22}(m_{22}) = \phi_{31}(m_{31}) = \phi_{31}(\psi_{21}(m_{21})) = \psi_{22}(\phi_{21}(m_{21}))$ . Si llamamos  $m'_{22} = m_{22} - \phi_{21}(m_{21})$ , tenemos que  $\psi_{22}(m'_{22}) = 0$  y  $\phi_{22}(m'_{22}) = \phi_{22}(m_{22}) = \psi_{13}(m_{13})$ . Por consiguiente,  $m'_{22} = \psi_{12}(m_{12})$ ,  $\psi_{13}(\phi_{12}(m_{12})) = \phi_{22}(\psi_{12}(m_{12})) = \phi_{22}(m'_{22}) = \psi_{13}(m_{13})$ , luego  $\phi_{12}(m_{12}) = m_{13}$ . ■

Consideremos ahora un fibrado de esferas orientable  $E$  con fibra típica  $S = S^r$ . Como la fibra es compacta, la integral en fibras es un epimorfismo

$$\int_S : \Lambda(E) \longrightarrow \Lambda(B).$$

Por el teorema 13.30, si  $\omega \in \Lambda(B)$  se cumple que

$$\int_S \pi_{\sharp}(\omega) = \int_S \pi_{\sharp}(\omega) \wedge 1 = \pi_{\sharp}(\omega) \wedge \int_S 1 = 0.$$

Si llamamos  $N_F \leq \Lambda(E)$  al núcleo de la integral en fibras (que es un sub-complejo), podemos considerar que  $\pi_{\sharp} : \Lambda(B) \longrightarrow N_F$ , y a su vez esta aplicación induce un homomorfismo  $\pi^* : H(B) \longrightarrow H(N_F)$ .

El primer paso para relacionar la cohomología de  $E$  con la de  $B$  es el teorema siguiente:

**Teorema 14.2** Si  $E$  es un fibrado de esferas y  $N_F$  es el núcleo de la integral en fibras, se cumple que  $\pi^* : H(B) \longrightarrow H(N_F)$  es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: Consideramos primero el caso en que  $E = B \times S$  es el fibrado trivial. Extendemos el operador  $\int_S$  a todo  $\Lambda(S)$  con el convenio de que es nulo sobre las formas de dimensión distinta de  $r$ . Por el teorema 13.30 tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(B) \otimes \Lambda(S) & \xrightarrow{\phi} & \Lambda(B \times S) \\ & \searrow 1 \otimes \int_S & \downarrow \int_S \\ & & \Lambda(B) \end{array}$$

donde  $\phi$  es la aplicación  $\phi(\omega, \eta) = \omega \times \eta = \pi_{\sharp}(\omega) \wedge \pi'_{\sharp}(\eta)$ .



Si llamamos  $N_S$  al núcleo de  $f_S$ , también es conmutativo el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Lambda(B) \otimes N_S & \longrightarrow & \Lambda(B) \otimes \Lambda(S) & \xrightarrow{1 \otimes f_S} & \Lambda(B) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi & & \downarrow 1 \\
 0 & \longrightarrow & N_F & \longrightarrow & \Lambda(B \times S) & \xrightarrow{f_S} & \Lambda(B) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde  $\phi_0$  es la restricción de  $\phi$  y las filas son exactas. (La exactitud de la primera se sigue de que al aplicar  $\Lambda(B) \otimes$  a una sucesión exacta obtenemos una sucesión exacta, dado que los espacios vectoriales no tienen torsión.)

Sabemos que  $\phi$  induce un isomorfismo entre los grupos de cohomología, por lo que podemos aplicar el teorema 3.1 y concluir que lo mismo le sucede a  $\phi_0$ , es decir, tenemos un isomorfismo

$$\bar{\phi}_0 : H(B) \otimes H(N_S) \longrightarrow H(N_F).$$

Consideremos por otra parte la aplicación  $\gamma : \Lambda(B) \longrightarrow \Lambda(B) \otimes N_S$  dada por  $\gamma(\omega) = \omega \otimes 1$ . Se cumple que  $\pi_{\sharp} = \gamma \circ \phi_0$ , luego basta probar que

$$\bar{\gamma} : H(B) \longrightarrow H(B) \otimes H(N_S)$$

es un isomorfismo. Ahora bien,  $N_S = \bigoplus_{p=0}^{r-1} \Lambda^p(S) \oplus F^r(S)$ , luego

$$H(N_S) = \bigoplus_{p=0}^{r-1} H^p(S) = H^0(S) \cong \mathbb{R},$$

y es claro que  $\bar{\gamma}$  es la identidad.

Para probar el teorema en el caso general aplicamos la misma técnica que hemos usado, entre otras ocasiones, para demostrar el teorema de De Rham. Para cada abierto  $U$  en  $B$  consideramos el fibrado de esferas  $E_U = \pi^{-1}[U]$  de base  $U$  y con la proyección  $\pi_U : E_U \longrightarrow U$  restricción de  $\pi$ . Llamemos  $N_U$  al núcleo de la integral en fibras sobre  $E_U$ . Por la parte ya probada podemos concluir:

A) Si  $U$  es un abierto de  $B$  sobre el que existe una factorización local, entonces la aplicación  $\pi_U^* : H(U) \longrightarrow H(N_U)$  es un isomorfismo.

A continuación demostramos:

B) Si  $U$  y  $V$  son abiertos de  $B$  tales que  $\pi_U^*$ ,  $\pi_V^*$  y  $\pi_{U \cap V}^*$  son isomorfismos, entonces  $\pi_{U \cup V}^*$  también es un isomorfismo.

En efecto, observemos que  $E_{U \cap V} = E_U \cap E_V$  y  $E_{U \cup V} = E_U \cup E_V$ , por lo que las tríadas  $(U \cup V, U, V)$  y  $(E_{U \cup V}, E_U, E_V)$  determinan el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda(E_{U \cup V}) & \longrightarrow & \Lambda(E_U) \otimes \Lambda(E_V) & \longrightarrow & \Lambda(E_{U \cap V}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_s & & \downarrow f_s \otimes f_s & & \downarrow f_s \\ 0 & \longrightarrow & \Lambda(U \cup V) & \longrightarrow & \Lambda(U) \oplus \Lambda(V) & \longrightarrow & \Lambda(U \cap V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Todas las flechas verticales son epimorfismos, luego podemos aplicar el teorema anterior para concluir la exactitud de la sucesión

$$0 \longrightarrow N_{U \cup V} \longrightarrow N_U \oplus N_V \longrightarrow N_{U \cap V} \longrightarrow 0.$$

Con ella formamos a su vez el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda(U \cup V) & \longrightarrow & \Lambda(U) \oplus \Lambda(V) & \longrightarrow & \Lambda(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \pi_{U \cup V \#} & & \downarrow \pi_U \# \oplus \pi_V \# & & \downarrow \pi_{U \cap V \#} \\ 0 & \longrightarrow & N_{U \cup V} & \longrightarrow & N_U \oplus N_V & \longrightarrow & N_{U \cap V} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Por hipótesis los homomorfismos  $\pi_U \# \oplus \pi_V \#$  y  $\pi_{U \cap V \#}$  inducen isomorfismos en el correspondiente diagrama para las sucesiones de cohomología, luego el teorema 3.1 implica que  $\pi_{U \cup V}^*$  también es un isomorfismo.

Por último, la propiedad C) se sigue de una comprobación rutinaria:

C) Si  $\{U_i\}_{i \in I}$  es una familia de abiertos de  $B$  disjuntos dos a dos para los que las aplicaciones  $\pi_{U_i}^*$  son isomorfismos, lo mismo vale para  $U = \bigcup_i U_i$ .

Ahora es fácil concluir la demostración: Los abiertos que cumplen A) forman una base  $\mathcal{B}$  de  $B$  cerrada para intersecciones finitas. Si  $\mathcal{B}'$  es el conjunto de las uniones finitas de abiertos de  $\mathcal{B}$ , la propiedad B) nos da que el teorema es cierto para los abiertos de  $\mathcal{B}'$ . Además  $\mathcal{B}'$  es una base cerrada para uniones finitas. Si llamamos  $\mathcal{U}$  al conjunto de uniones disjuntas de abiertos de  $\mathcal{B}'$ , la propiedad C) implica que el teorema es cierto para los abiertos de  $\mathcal{U}$  y el teorema 12.19 nos da que  $B = U \cup V$  con  $U, V, U \cap V \in \mathcal{U}$ . Aplicando B) una vez más concluimos que el teorema es cierto para  $B$ . ■

Así pues, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & H(B) & \\ & \uparrow & \searrow \pi^* \\ (\pi^*)^{-1} & & \\ & H(N_F) & \xrightarrow{\bar{i}} H(E) \end{array}$$

donde  $i : N_F \rightarrow \Lambda(E)$  es la inclusión. Por otra parte, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N_F \xrightarrow{i} \Lambda(E) \xrightarrow{f_S} \Lambda(B) \longrightarrow 0 \quad (14.1)$$

determina una sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow H^p(N_F) \xrightarrow{i^*} H^p(E) \xrightarrow{f_S^*} H^{p-r}(B) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(N_F) \longrightarrow \dots$$

Observemos que el homomorfismo de conexión  $\delta^*$  tiene grado  $r + 1$  porque para construir la sucesión de cohomología de (14.1) hemos de considerar a la integral en fibras como un homomorfismo de complejos (de grado 0), lo cual equivale a considerar que el módulo de dimensión  $p$  en  $\Lambda(B)$  es  $\Lambda^{p+r}(B)$ . El homomorfismo  $\delta^*$  tiene grado 1 respecto a estos índices, luego tiene grado  $r + 1$  respecto a los índices usuales.

El teorema anterior nos permite sustituir a  $N_F$  por  $B$  en la sucesión, con lo que obtenemos otra sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow H^p(B) \xrightarrow{\pi^*} H^p(E) \xrightarrow{f_S^*} H^{p-r}(B) \xrightarrow{\delta^* \circ (\pi^*)^{-1}} H^{p+1}(B) \longrightarrow \dots$$

**Definición 14.3** Sea  $E$  un fibrado de esferas orientable. Se llama *aplicación de Gysin* de  $E$  a la aplicación  $D : H(B) \rightarrow H(B)$  de grado  $r + 1$  dada por  $D = \epsilon \circ \delta^* \circ (\pi^*)^{-1}$ , donde, para cada  $\omega \in H^p(B)$ , definimos  $\epsilon(\omega) = (-1)^{p+1}\omega$ . La sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow H^p(B) \xrightarrow{\pi^*} H^p(E) \xrightarrow{f_S^*} H^{p-r}(B) \xrightarrow{D} H^{p+1}(B) \longrightarrow \dots$$

se llama *sucesión de Gysin* de  $E$ .

Hemos añadido el signo  $\epsilon$  para que se cumpla el teorema siguiente:

**Teorema 14.4** Si  $E$  es un fibrado de esferas orientable, la aplicación de Gysin satisface la relación

$$D(\omega \wedge \eta) = \omega \wedge D(\eta), \quad \omega \in H^p(B), \quad \eta \in H^q(B).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\omega = [\tilde{\omega}]$ ,  $\eta = [\tilde{\eta}]$  y sea  $\zeta \in \Lambda^r(E)$  tal que  $f_S \zeta = 1$  (existe porque la integral en fibras es suprayectiva).

Para calcular  $\delta^*(\omega \wedge \eta)$  necesitamos una  $p + q + r$ -forma en  $E$  cuya integral en fibras sea  $\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta}$ . Por el teorema 13.30 sirve  $\pi_{\#}(\tilde{\omega}) \wedge \pi_{\#}(\tilde{\eta}) \wedge \zeta$ . Ahora calculamos su diferencial. Como  $\tilde{\omega}$  es un cociclo tenemos que

$$d(\pi_{\#}(\tilde{\omega}) \wedge \pi_{\#}(\tilde{\eta}) \wedge \zeta) = (-1)^p \pi_{\#}(\tilde{\omega}) \wedge d(\pi_{\#}(\tilde{\eta}) \wedge \zeta).$$

Vemos, pues, que  $\delta^*(\omega \wedge \eta) = (-1)^p \pi^*(\omega) \wedge \delta^*(\eta)$ , luego

$$D(\omega \wedge \eta) = (-1)^{2p+q} \omega \wedge (\pi^*)^{-1}(\delta^*(\eta)) = (-1)^{2p+2q} \omega \wedge D(\eta) = \omega \wedge D(\eta).$$

■

Como consecuencia tenemos que  $D(\omega) = \omega \wedge D(1)$ , de modo que la aplicación de Gysin está completamente determinada por la clase  $D(1)$ .

**Definición 14.5** Consideremos un complejo de esferas orientable  $E$  y su aplicación de Gysin  $D : H(B) \rightarrow H(B)$ . Se define la *clase de Euler* de  $E$  como la clase  $\chi_E = D(1) \in H^{r+1}(B)$ . Según el teorema anterior, la aplicación de Gysin viene dada por  $D(\omega) = \omega \wedge \chi_E$ .

El nombre de “clase de Euler” se debe a que si  $E$  es el fibrado de esferas asociado al fibrado de tangentes de una variedad de Riemann  $V$ , entonces la clase de Euler está determinada por que su integral sobre  $V$  es la característica de Euler de  $V$ . Esto lo demostraremos más adelante.

**Teorema 14.6** Si un fibrado de esferas orientable  $E$  admite una sección, entonces  $\chi_E = 0$ . En particular, la clase de Euler de un fibrado de esferas trivial  $B \times S$  es nula.

DEMOSTRACIÓN: Si  $\sigma : B \rightarrow E$  es una sección de  $E$ , entonces  $\sigma \circ \pi = 1$ , luego  $\pi^* \circ \sigma^* = 1$ , lo que prueba que  $\pi^*$  es inyectiva. Consecuentemente, la imagen de  $D$ , que es el núcleo de  $\pi^*$  es nula y por lo tanto  $\chi_E = 0$ . ■

Hay otro caso mucho más importante en el que podemos garantizar que la clase de Euler es nula:

**Teorema 14.7** Sea  $E$  un fibrado de esferas orientable cuya fibra tenga dimensión par. Entonces  $\chi_E = 0$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\chi_E = [\omega]$ , donde  $\omega$  se calcula como sigue: partimos de la forma  $1 \in \Lambda^0(B)$ , calculamos  $\epsilon(1) = -1$ , buscamos una forma  $\eta \in \Lambda^r(E)$  tal que  $\int_S \eta = -1$ , calculamos  $d\eta$  y tomamos  $\omega$  tal que  $\pi_{\#}(\omega) = d\eta$ .

Como  $r$  es par se cumple que  $\pi_{\#}(\omega) \wedge \eta = \frac{1}{2}d(\eta \wedge \eta)$ . El teorema 13.30 nos da que

$$\omega = -\int_S (\pi_{\#}(\omega) \wedge \eta) = -\frac{1}{2}d\int_S \eta \wedge \eta,$$

luego  $\chi_E = 0$ . ■

Veamos ahora que la sucesión de Gysin es natural. Supongamos que  $E$  y  $E'$  son dos fibrados de esferas orientables sobre la misma fibra  $S = S^r$ . Sea  $\phi : E \rightarrow E'$  un homomorfismo de fibrados tal que las restricciones  $\phi_p : F_p \rightarrow F'_p$  son difeomorfismos que conservan la orientación. El teorema de cambio de variables para la integral en fibras nos da el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N_F & \longrightarrow & \Lambda(E) & \xrightarrow{f_S} & \Lambda(B) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \alpha & & \uparrow \phi_{\#} & & \uparrow \phi_{B\#} \\ 0 & \longrightarrow & N'_S & \longrightarrow & \Lambda(E') & \xrightarrow{f_S} & \Lambda(B') \longrightarrow 0 \end{array} \quad (14.2)$$

donde  $\alpha$  es la restricción de  $\phi_{B\sharp}$ . Por otra parte tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(B) & \xrightarrow{\pi_{\sharp}} & N_S \\ \phi_{B\sharp} \uparrow & & \uparrow \alpha \\ \Lambda(B') & \xrightarrow{\pi'_{\sharp}} & N'_S \end{array}$$

El diagrama (14.2) da lugar a un diagrama conmutativo entre las correspondientes sucesiones exactas de cohomología de las filas. Si en éste sustituimos los grupos  $H(N_S)$  y  $H(N'_S)$  por  $H(B)$  y  $H(B')$  a través de los isomorfismos  $\pi^*$  obtenemos un diagrama similar entre las sucesiones de Gysin. El diagrama anterior muestra que se trata concretamente de

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(B) & \xrightarrow{\pi^*} & H^p(E) & \xrightarrow{f_S^*} & H^{p-r}(B) & \xrightarrow{D} & H^{p+1}(B) \\ \uparrow \phi_B^* & & \uparrow \phi^* & & \uparrow \phi_B^* & & \uparrow \phi_B^* \\ H^p(B') & \xrightarrow{\pi'^*} & H^p(E') & \xrightarrow{f_S^*} & H^{p-r}(B') & \xrightarrow{D} & H^{p+1}(B') \end{array}$$

Para terminar la sección mostraremos que la cohomología de un fibrado de esferas orientable  $E$  está completamente determinada por la cohomología de la base y por la clase de Euler. Al igual que en la prueba de 14.7, podemos tomar formas  $\omega \in \Lambda^{r+1}(B)$ ,  $\eta \in \Lambda^r(E)$  de manera que  $d\eta = \pi_{\sharp}(\omega)$ ,  $\int_S \eta = -1$  y  $\chi_E = [\omega]$ .

Sea  $\alpha$  cualquier generador de  $\alpha \in H^r(S)$ . No importa cuál sea, pero podemos tomar la clase de la orientación, es decir, la que cumple  $\int_S \alpha = 1$ . Así, todo elemento de  $H(S)$  se expresa de forma única como  $a + b\alpha$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Definimos

$$d : \Lambda(B) \otimes H(S) \longrightarrow \Lambda(B) \otimes H(S)$$

mediante

$$\begin{aligned} d(\beta \otimes 1) &= d\beta \otimes 1, \\ d(\beta \otimes \alpha) &= d\beta \otimes \alpha + (-1)^p(\beta \wedge \omega) \otimes 1, \quad \beta \in \Lambda^p(B). \end{aligned}$$

Una simple comprobación muestra que  $d^2 = 0$ , luego  $\Lambda(B) \otimes H(S)$  se convierte así en un complejo inverso. Definimos

$$\mu : \Lambda(B) \otimes H(S) \longrightarrow \Lambda(E)$$

mediante

$$\begin{aligned} \mu(\beta \otimes 1) &= \pi_{\sharp}(\beta), \\ \mu(\beta \otimes \alpha) &= \pi_{\sharp}(\beta) \wedge \eta. \end{aligned}$$

Una comprobación sencilla nos da que  $\mu$  es un homomorfismo de complejos, es decir, cumple  $d \circ \mu = \mu \circ d$ . Por consiguiente induce una aplicación lineal

$$\bar{\mu} : H(\Lambda(B) \otimes H(S)) \longrightarrow H(E).$$

Veamos que es un isomorfismo de complejos. Definimos aplicaciones

$$i : \Lambda(B) \longrightarrow \Lambda(B) \otimes H(S), \quad \rho : \Lambda(B) \otimes H(S) \longrightarrow \Lambda(B)$$

mediante  $i(\beta) = \beta \otimes 1$ ,  $\rho(\beta \otimes \alpha + \gamma \otimes 1) = -\beta$ .

Es claro que son homomorfismos de complejos, así como que la sucesión

$$0 \longrightarrow \Lambda(B) \xrightarrow{i} \Lambda(B) \otimes H(S) \xrightarrow{\rho} \Lambda(B) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Por otra parte, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda(B) & \xrightarrow{i} & \Lambda(B) \otimes H(S) & \xrightarrow{\rho} & \Lambda(B) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow \mu & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & N_S & \longrightarrow & \Lambda(E) & \xrightarrow{f_S} & \Lambda(B) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Aplicando 3.1 al diagrama correspondiente entre las sucesiones de cohomología concluimos que  $\bar{\mu}$  es un isomorfismo.

Podemos dar un paso más que muestre más claramente la forma en que interviene la clase de Euler. Para ello definimos

$$d : H(B) \otimes H(S) \longrightarrow H(B) \otimes H(S)$$

mediante

$$\begin{aligned} d(\beta \otimes 1) &= 0, \\ d(\beta \otimes \alpha) &= (-1)^p(\beta \wedge \chi_E) \otimes \alpha, \quad \beta \in \Lambda^p(B). \end{aligned}$$

Se comprueba inmediatamente que  $d^2 = 0$  y que el homomorfismo natural  $\Lambda(B) \otimes H(S) \longrightarrow H(B) \otimes H(S)$  es un homomorfismo de complejos. Definimos aplicaciones

$$i : H(B) \longrightarrow H(B) \otimes H(S), \quad \rho : H(B) \otimes H(S) \longrightarrow H(B)$$

mediante  $i(\beta) = \beta \otimes 1$ ,  $\rho(\beta \otimes \alpha + \gamma \otimes 1) = -\beta$ .

Son homomorfismos de complejos si consideramos en  $H(B)$  la cofrontera nula. Es claro que el diagrama siguiente es conmutativo y tiene las filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda(B) & \longrightarrow & \Lambda(B) \otimes H(S) & \longrightarrow & \Lambda(B) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H(B) & \longrightarrow & H(B) \otimes H(S) & \longrightarrow & H(B) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Aplicando 3.1 al diagrama correspondiente para las sucesiones de cohomología concluimos que  $H(\Lambda(B) \otimes H(S)) \cong H(H(B) \otimes H(S))$ . En total tenemos

un isomorfismo  $H(H(B) \otimes H(S)) \cong H(E)$ , donde la estructura de complejo de  $H(B) \otimes H(S)$  depende de la clase de Euler de  $E$ .

Si  $\chi_E = 0$ , la cofrontera de  $H(B) \otimes H(S)$  resulta trivial, con lo que tenemos simplemente  $H(E) \cong H(B) \otimes H(S)$ .

Más explícitamente, en este caso tenemos  $\omega = d\omega'$ , con lo que  $d\eta = d\pi_{\sharp}(\omega')$ . Si sustituimos  $\eta$  por  $\eta - \pi_{\sharp}(\omega')$ , se sigue cumpliendo que  $\int_S \eta = -1$  y con esta elección  $d\eta = 0$ , luego podemos tomar  $\omega = 0$ .

Así, los cociclos del complejo  $\Lambda(B) \otimes H(S)$  son simplemente los elementos de  $Z(B) \otimes H(S)$  y el isomorfismo  $\bar{\mu}$  se reduce a

$$\bar{\mu}([\beta \otimes 1 + \gamma \otimes \alpha]) = [\pi_{\sharp}(\beta) + \pi_{\sharp}(\gamma) \wedge \eta] = \pi^*([\beta]) + \pi^*([\gamma]) \wedge [\eta].$$

A su vez, el isomorfismo  $H(B) \otimes H(S) \cong H(E)$  se reduce a

$$\beta \otimes 1 + \gamma \otimes \alpha \mapsto \pi^*(\beta) + \pi^*(\gamma) \wedge [\eta]. \tag{14.3}$$

## 14.2 Índices de secciones

Son muchos los contextos en los que aparecen campos de vectores definidos sobre variedades, principalmente en física. Los puntos donde un campo se anula suelen ser especialmente significativos (pueden representar fuentes o sumideros de carga eléctrica, etc.) Hacia 1880 Poincaré estudió los campos de vectores sobre superficies y asignó un “índice” a sus ceros (supuesto que fueran aislados), de modo que la suma de los índices de un campo era una especie de “cómputo algebraico” de sus ceros, similar al cómputo de las raíces de un polinomio teniendo en consideración sus multiplicidades. Poincaré estudió esta suma y descubrió que en una variedad orientable de género  $g$  (es decir, en una esfera con  $g$  agujeros) la suma era necesariamente igual a  $2 - 2g$  (o sea, a la característica de Euler de la superficie). En esta sección generalizaremos los resultados de Poincaré. Si tenemos un campo de vectores sobre una variedad de Riemann y lo normalizamos, pasamos a tener un campo de vectores sobre su fibrado de esferas en el que los ceros se vuelven singularidades. Éste es el contexto en el que trabajaremos: singularidades en fibrados de esferas. Más adelante traduciremos los resultados que vamos a obtener al contexto de ceros de secciones en fibrados vectoriales.

Primeramente introduciremos una noción técnica algebraica que nos permitirá definir cómodamente el índice de una sección así como relacionarlo con la clase de Euler y después daremos una interpretación geométrica de este índice.

Sea  $E$  un complejo de esferas orientable con fibra  $S = S^r$  que admita una sección  $\tau$ . Entonces  $\tau^*$  escinde la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H(B) \xrightarrow{\pi^*} H(E) \xrightarrow{f_S^*} H(B) \longrightarrow 0,$$

de manera que  $f_S^*$  se restringe a un isomorfismo entre el núcleo de  $\tau^*$  y  $H(B)$ . En particular existe una única clase  $\omega_\tau \in H^r(E)$  tal que

$$\tau^*(\omega_\tau) = 0 \quad \text{y} \quad \int_S \omega_\tau = 1. \tag{14.4}$$

Si  $\sigma$  es otra sección de  $E$ , entonces

$$\int_S^* (\omega_\tau - \omega_\sigma) = 0,$$

luego por la exactitud existe una única clase  $[\tau, \sigma] \in H^r(B)$  tal que

$$\pi^*([\tau, \sigma]) = \omega_\tau - \omega_\sigma.$$

En realidad  $[\tau, \sigma]$  depende únicamente de  $\tau^*$  y  $\sigma^*$ . A dicha clase la llamaremos *diferencia* de  $\sigma$  y  $\tau$ . La propiedad básica de esta clase viene dada por el teorema siguiente:

**Teorema 14.8** Sean  $\sigma$  y  $\tau$  dos secciones en un fibrado de esferas orientable  $E$ . Entonces, para todo  $\gamma \in H(E)$ , se cumple

$$\tau^*(\gamma) - \sigma^*(\gamma) = -\left(\int_S^* \gamma\right) \wedge [\tau, \sigma].$$

DEMOSTRACIÓN: Como estamos suponiendo que  $E$  admite una sección, tenemos que la clase de Euler es nula. El isomorfismo  $H(B) \otimes H(S) \cong H(E)$  definido en la sección anterior depende de una clase  $\eta$  determinada únicamente por la condición  $\int_S \eta = -1$ . Podemos suponer, pues, que  $-\omega_\tau = [\eta]$ . Entonces, según (14.3) todo elemento de  $H(E)$  es de la forma

$$\gamma = \pi^*(\alpha) + \pi^*(\beta) \wedge \omega_\tau = \pi^*(\alpha) + \pi^*(\beta) \wedge (\omega_\sigma + \pi^*[\tau, \sigma]),$$

para ciertos  $\alpha, \beta \in H(B)$ . Entonces

$$\tau^*(\gamma) - \sigma^*(\gamma) = \alpha - \alpha - \beta \wedge [\tau, \sigma] = -\beta \wedge [\tau, \sigma].$$

Por otra parte,

$$\int_S^* \gamma = \beta \wedge \int_S^* \omega_\tau = \beta.$$

■

Como consecuencias inmediatas tenemos que  $\tau^* = \sigma^*$  si y sólo si  $[\tau, \sigma] = 0$ , si y sólo si  $\omega_\tau = \omega_\sigma$ . Más aún, si  $H^r(B) = 0$  entonces  $[\tau, \sigma] = 0$ , luego  $\tau^* = \sigma^*$ , es decir, si  $H^r(B) = 0$  todas las secciones inducen el mismo homomorfismo en cohomología.

Veamos ahora la relación entre la clase de Euler y las diferencias de secciones.

**Teorema 14.9** Sea  $E$  un fibrado de esferas orientable, sean  $U$  y  $V$  abiertos en la base  $B$  tales que  $B = U \cup V$  y de modo que existan secciones  $\tau_U : U \rightarrow E$ ,  $\sigma_V : V \rightarrow E$ . Sean  $\tau$  y  $\sigma$  las restricciones a  $U \cap V$ , que pueden verse como secciones del fibrado  $E_{U \cap V} = \pi^{-1}[U \cap V]$  y por consiguiente podemos formar su diferencia  $[\tau, \sigma] \in H^r(U \cap V)$ . Sea  $\Delta : H(U \cap V) \rightarrow H(B)$  el homomorfismo de conexión de la sucesión de Mayer-Vietoris de la tríada  $(B, U, V)$ . Entonces

$$\chi_E = \Delta([\tau, \sigma]).$$



DEMOSTRACIÓN: Observemos que podemos suponer  $U \cap V = \emptyset$ , ya que en caso contrario el miembro derecho se interpreta trivialmente como la forma nula y  $\chi_E$  también es nula porque  $E$  admite una sección.

Tomemos  $\omega \in \Lambda^{r+1}(B)$  y  $\eta \in \Lambda^r(E)$  tales que

$$\chi_E = [\omega], \quad \pi_{\#}(\omega) = d\eta, \quad \int_S \eta = -1.$$

(Ver la prueba de 14.7.)

Definimos  $\eta_\tau, \eta_\sigma \in \Lambda^r(E_{U \cap V})$  mediante

$$\eta_\tau = i_{\#}(\eta) - \pi_{\#}(\tau_{\#}(\eta)), \quad \eta_\sigma = i_{\#}(\eta) - \pi_{\#}(\sigma_{\#}(\eta)),$$

donde  $\pi$  es la proyección en  $E_{U \cap V}$  e  $i : E_{U \cap V} \rightarrow E$  es la inclusión. Así

$$\int_S \eta_\tau = i_{U \cap V \#}(-1) = -1, \quad \int_S \eta_\sigma = i_{U \cap V \#}(-1) = -1.$$

Además  $d\eta_\tau = i_{\#}(\pi_{\#}(\omega)) - \pi_{\#}(\tau_{\#}(\pi_{\#}(\omega))) = \pi_{\#}(\omega) - \pi_{\#}(\omega) = 0$  e igualmente  $d\eta_\sigma = 0$ . Por otra parte,  $\tau_{\#}(\eta_\tau) = \tau_{\#}(i_{\#}(\eta)) - \tau_{\#}(\eta) = \tau_{\#}(i_{\#}(\eta)) - \tau_{\#}(i_{\#}(\eta)) = 0$ , e igualmente  $\sigma_{\#}(\eta_\sigma) = 0$ . De aquí se sigue que

$$\omega_\tau = [-\eta_\tau], \quad \omega_\sigma = [-\eta_\sigma].$$

Consecuentemente

$$\omega_\tau - \omega_\sigma = [-\eta_\tau + \eta_\sigma] = \pi^*([\tau_{\#}(\eta) - \sigma_{\#}(\eta)]),$$

es decir,

$$[\tau, \sigma] = [\tau_{\#}(\eta) - \sigma_{\#}(\eta)].$$

Para calcular  $\Delta([\tau, \sigma])$  pasamos de  $\tau_{\#}(\eta) - \sigma_{\#}(\eta)$  al par

$$(\tau_{U\#}(\eta), \sigma_{V\#}(\eta)) \in \Lambda(U) \oplus \Lambda(V),$$

de aquí pasamos a

$$(\tau_{U\#}(d\eta), \sigma_{V\#}(d\eta)) = (\tau_{U\#}(\pi_{\#}(\omega)), \sigma_{V\#}(\pi_{\#}(\omega))) = (i_{U\#}(\omega), i_{V\#}(\omega)).$$

Concluimos que, en efecto,  $\Delta([\tau, \sigma]) = [\omega] = \chi_E$ . ■

Antes de definir el índice de una sección en una singularidad aislada necesitamos algunos resultados adicionales que justificarán que la definición no depende de ciertas elecciones. Concretamente hemos de ver cómo se transportan secciones a través de homomorfismos de fibrados.

**Definición 14.10** Sea  $\phi : E \rightarrow E'$  un homomorfismo de fibrados que se restringe a difeomorfismos  $\phi_p : F_p \rightarrow F'_{\phi_B(p)}$ . Para cada  $\sigma \in \text{Sec } E'$ , definimos  $\phi_{\#}(\sigma) : B \rightarrow E$  mediante

$$\phi_{\#}(\sigma)(p) = \phi_p^{-1}(\sigma(\phi_B(p))).$$

Vamos a demostrar que  $\phi_{\#}(\sigma) \in \text{Sec } E$ , de modo que  $\phi_{\#} : \text{Sec } E' \rightarrow \text{Sec } E$ . Evidentemente  $\phi_{\#}(\sigma) \circ \pi = 1$ . Sólo hay que probar que  $\phi_{\#}(\sigma)$  es diferenciable. Puesto que la diferenciable es una propiedad local, podemos restringirnos al caso en que los fibrados  $E = B \times F$  y  $E' = B' \times F$  son triviales. Entonces, al igual que en la prueba de 13.23, podemos descomponer  $\phi$  como

$$B \times F \xrightarrow{\psi} B \times F \xrightarrow{\phi_B \times 1} B' \times F,$$

donde  $\psi$  es un isomorfismo de fibrados. Definimos  $\tau : B' \rightarrow F$  mediante  $\sigma(p) = (p, \tau(p))$ . Obviamente  $\tau$  es diferenciable y  $\phi_{\#}(\sigma)(p) = \psi^{-1}(p, \tau(\phi_B(p)))$ , luego  $\phi_{\#}(\sigma)$  también es diferenciable. ■

Es inmediato comprobar que si  $\phi : E \rightarrow E'$  y  $\phi' : E' \rightarrow E''$  son homomorfismos de fibrados en las condiciones de la definición anterior, entonces  $(\phi \circ \phi')_{\#} = \phi'_{\#} \circ \phi_{\#}$ .

El resultado que necesitamos es el siguiente:

**Teorema 14.11** *Sea  $\phi : E \rightarrow E'$  un homomorfismo entre fibrados de esferas orientables tal que cada  $\phi_p : S_p \rightarrow S_p$  es un difeomorfismo que conserva la orientación. Sean  $\sigma', \tau' \in \text{Sec } E'$  y llamemos  $\sigma = \phi_{\#}(\sigma')$ ,  $\tau = \phi_{\#}(\tau')$ . Entonces*

$$\phi^*(\omega_{\tau'}) = \omega_{\tau}, \quad \phi^*(\omega_{\sigma'}) = \omega_{\sigma}, \quad \phi_B^*([\tau', \sigma']) = [\tau, \sigma].$$

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que las relaciones  $\tau \circ \phi = \phi_B \circ \tau'$  y  $\sigma \circ \phi = \phi_B \circ \sigma'$  implican

$$\phi^* \circ \tau^* = \tau'^* \circ \phi_B^*, \quad \phi^* \circ \sigma^* = \sigma'^* \circ \phi_B^*,$$

así como la relación

$$\phi^* \circ \int_S^* = \int_S^* \circ \phi_B^*.$$

La conclusión es inmediata a partir de las definiciones. ■

Pasamos a definir el índice de una sección en una singularidad aislada. A partir de aquí nos restringimos al caso de un fibrado de esferas  $E$  cuya base tiene dimensión  $n \geq 2$  y su fibra es  $S^{n-1}$ . De este modo,  $\chi_E \in \Lambda^n(B)$ . Éste es el caso del fibrado de esferas asociado al fibrado de tangentes de una variedad de Riemann de dimensión  $n$ . Suponemos una orientación en la variedad  $E$ , si bien no suponemos que  $E$  sea orientable como fibrado.

Consideremos un abierto  $U$  en  $B$ , un punto  $a \in U$  y llamemos  $U_a = U \setminus \{a\}$ . Supongamos que  $\sigma : U_a \rightarrow E$  es una sección local de  $E$ .

Tomemos un entorno  $V$  de  $a$  difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  sobre el que exista una factorización local de  $E$ . Dicha factorización permite construir una sección  $\tau : V \rightarrow E$ . Llamaremos  $\tau_a$  a su restricción a  $V_a = V \setminus \{a\}$ . Sea  $\sigma_V$  la restricción de  $\sigma$  a  $V_a$ . Considerando a  $\tau_a$  y  $\sigma_V$  como secciones del fibrado  $\pi^{-1}[V_a]$ , podemos formar la diferencia  $[\tau_a, \sigma_V] \in H^{n-1}[V_a]$ .

Como  $S$  es orientable y el fibrado trivial  $E_V = \pi^{-1}[V]$  es orientable como variedad, también lo es como fibrado. Fijamos orientaciones en  $E_V$  como fibrado y en  $V$  de modo que la orientación de  $E_V$  como variedad coincida con la orientación producto.

Ahora consideramos la aplicación canónica  $\alpha_a : H^{n-1}(V_a) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por (12.9). Con ella obtenemos un número real  $\alpha_a([\tau_a, \sigma_V])$ . Vamos a probar que depende únicamente de  $\sigma$  y de la orientación de  $E$  como variedad.

En primer lugar, las orientaciones de  $V$  y del fibrado  $E_V$  no influyen, pues si cambiamos una hemos de cambiar la otra para que se conserve la orientación producto. Al cambiar la orientación de  $V$  cambiamos el signo de  $\alpha_a$ , y al cambiar la de  $E_V$  cambiamos el signo a  $[\tau_a, \sigma_V]$ , y los dos cambios de signo se cancelan.

Tampoco importa la elección de la sección  $\tau$ , pues si  $\tau'$  es otra sección en las mismas condiciones, como  $V$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  tenemos que  $H^{n-1}(V) = 0$ , luego según las observaciones tras 14.8 tenemos que  $[\tau, \tau'] = 0$ . Aplicando el teorema 14.11 a la inclusión  $V_a \rightarrow V$  concluimos que  $[\tau_a, \tau'_a] = 0$ , luego  $\tau_a^* = \tau'^a_*$  y  $[\tau_a, \sigma_V]$  sólo depende de  $\tau_a^*$  y  $\sigma_V^*$ .

Por último probamos que no importa la elección del entorno  $V$ . Si tomamos otro entorno  $W$ , es claro que podemos tomar un tercero contenido en la intersección, luego podemos suponer que  $W \subset V$ . Tomamos una sección  $\tau' : W \rightarrow E_W$  y hemos de demostrar que  $\alpha_a^V([\tau_a, \sigma_V]) = \alpha_a^W([\tau'_a, \sigma_W])$ .

Podemos suponer que las inclusiones  $i : E_{W_a} \rightarrow E_{V_a}$  y  $j : W_a \rightarrow V_a$  conservan las orientaciones y elegir como  $\tau'$  la restricción de  $\tau$ , esto es,  $\tau' = i_{\#}(\tau)$ . Además tenemos que  $\sigma_W = i_{\#}(\sigma_V)$ . El teorema 14.11 nos da entonces que  $[\tau'_a, \sigma_W] = j_{\#}([\tau_a, \sigma_V])$ . Finalmente, el teorema 12.29 nos da que

$$\alpha_a^W([\tau', \sigma_W]) = \alpha_a^W(j_{\#}([\tau_a, \sigma_V])) = \alpha_a^V([\tau_a, \sigma_V]).$$

■

**Definición 14.12** En las condiciones anteriores, el número real  $\alpha_a^V([\tau_a, \sigma_V])$  recibe el nombre de *índice* de la sección  $\sigma$  en  $a$ , y lo representaremos por  $j_a(\sigma)$ .

Es claro que si cambiamos la orientación de la variedad  $E$  los índices cambian de signo. El teorema siguiente se comprueba sin dificultad:

**Teorema 14.13** Sea  $\phi : E \rightarrow E'$  un homomorfismo de fibrados de esferas con bases de dimensión  $n$  y fibras de dimensión  $n - 1$ . Supongamos que  $E$  y  $E'$  están orientados como variedades y que  $\phi$  conserva la orientación, supongamos que  $\phi_B$  es un difeomorfismo de  $B$  en un abierto de  $B'$  y que las restricciones  $\phi_p$  son difeomorfismos para todo  $p \in B$ . Sea  $\sigma$  una sección local definida en un entorno reducido  $U_a$  de un punto  $a \in B'$ . Sea  $b \in B$  tal que  $\phi_B(b) = a$ . Entonces  $j_b(\phi_{\#}(\sigma)) = j_a(\sigma)$ .

Ahora demostraremos que la definición de índice que hemos dado es equivalente a la que dio Poincaré para superficies, con lo que demostraremos de paso que el índice de una sección en un punto es siempre un número entero.

Consideremos las condiciones de la definición de índice, es decir, tenemos un fibrado de esferas  $E$ , orientable como variedad, con base de dimensión  $n$  y fibra de dimensión  $n - 1$  y una sección  $\sigma : U_a \rightarrow E$ , donde  $U$  es un abierto en  $B$  y  $a \in U$ . Tomamos un entorno  $V \subset U$  de  $a$  difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  sobre el que  $E$  tenga una factorización local. Componiendo ésta con una carta de  $V$  obtenemos un isomorfismo de fibrados

$$\phi : \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \rightarrow E_V = \pi^{-1}[V].$$

Si tomamos la carta de  $V$  de forma que  $a$  tenga coordenadas nulas se cumplirá que  $\phi_{\mathbb{R}^n}(0) = a$ . Consideramos en  $\mathbb{R}^n$  y en  $S^{n-1}$  las orientaciones canónicas definidas en la página 12.1. En el producto consideramos la orientación producto y tomamos  $\phi$  de modo que conserve las orientaciones.

Consideremos la sección  $\phi_{\#}(\sigma) : \mathbb{R}_0^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ . Ésta determina una aplicación diferenciable  $\sigma' : \mathbb{R}_0^n \rightarrow S^{n-1}$  dada por<sup>1</sup>  $\phi_{\#}(\sigma)(v) = (v, \sigma'(v))$ . Finalmente restringimos  $\sigma'$  a una aplicación  $\sigma'_S : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ .

Vamos a demostrar que  $j_a(\sigma) = \text{grad } \sigma'_S$ . Con ello tendremos la siguiente interpretación geométrica del índice:

*Para calcular el índice de una sección local en una singularidad  $a$  fijamos una orientación en un entorno coordinado de  $a$  en  $B$ , la cual, junto con la orientación de  $E$  como variedad, determina una orientación local de  $E$  como fibrado y a su vez una orientación de la fibra típica de  $E$ ; trazamos una esfera  $S$  en  $B$  alrededor de  $a$ , orientada de forma que una base de vectores tangentes en un punto es positiva si al anteponerle el vector normal que apunta hacia fuera del círculo de centro  $a$  obtenemos una base positiva de  $B$ ; para cada  $p \in S$ , la factorización local de  $E$  nos transforma  $\sigma(p)$  en un punto de la fibra típica de  $E$ , con lo que tenemos una aplicación entre esferas, cuyo grado es el índice de  $\sigma$  en  $a$ .*

Más groseramente, si tenemos un campo de vectores tangentes unitarios en una subvariedad de  $\mathbb{R}^m$ , tomamos un entorno de la singularidad  $a$  lo suficientemente pequeño como para que podamos “aplanar” la variedad, es decir, identificarla con un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , con lo que el campo de vectores pasa a ser una aplicación  $\mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$ . El índice de la sección es el grado de la restricción de esta aplicación a una esfera arbitraria alrededor de  $a$ . En dimensión 2 el índice es el número de vueltas que dan los vectores tangentes cuando damos una vuelta alrededor de  $a$ .

En efecto, el teorema anterior nos da que  $j_a(\sigma) = j_0(\phi_{\#}(\sigma))$ , luego no perdemos generalidad si suponemos que  $E = \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ ,  $a = 0$  y  $\sigma(v) = (v, \sigma'(v))$ . Fijemos un punto  $p \in S^{n-1}$  y tomemos la sección  $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$

<sup>1</sup>En definitiva, estas manipulaciones muestran que una sección de un fibrado de esferas es localmente una sección de un fibrado de esferas trivial, la cual puede verse a su vez como una aplicación diferenciable que a cada punto de  $\mathbb{R}^n$  le asigna un vector unitario, es decir, como un campo de vectores unitarios en  $\mathbb{R}^N$ .

dada por  $\tau(v) = (v, p)$ . Sea  $\omega \in \Lambda^{n-1}(S^{n-1})$  tal que  $\int_{S^{n-1}} \omega = 1$ , con lo que  $1 \times \omega \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}_0^n \times S^{n-1})$  cumple  $\tau_{0\sharp}(1 \times \omega) = 0$  y  $\int_S(1 \times \omega) = 1$ .

De este modo,  $\omega_{\tau_0} = [1 \times \omega] \in H^{n-1}(\mathbb{R}_0^n \times S^{n-1})$ . Por otra parte tenemos que  $O_{S^{n-1}} = [\omega] \in H^{n-1}(S^{n-1})$  es la clase de la orientación de  $S^{n-1}$  y si llamamos  $\pi_S : \mathbb{R}_0^n \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  a la proyección, es claro que  $\omega_{\tau_0} = \pi_S^*(O_{S^{n-1}})$ .

Se comprueba inmediatamente que  $\omega_\sigma = \omega_{\tau_0} - \pi^*(\sigma^*(\omega_{\tau_0}))$ , con lo que  $[\tau_0, \sigma] = \sigma^*(\omega_{\tau_0}) = \sigma^*(\pi_S^*(O_{S^{n-1}})) = \sigma'^*(O_{S^{n-1}}) \in H^{n-1}(\mathbb{R}_0^n)$ . Por consiguiente  $j_0(\sigma) = \alpha_0(\sigma'^*(O_{S^{n-1}}))$ . Ahora aplicamos el teorema 12.30 (y aquí usamos que la orientación de la esfera es la canónica), según el cual

$$j_0(\sigma) = \int_{S^{n-1}}^* \sigma_S'^*(O_{S^{n-1}}) = \text{grad } \sigma'_S \int_{S^{n-1}}^* O_{S^{n-1}} = \text{grad } \sigma'_S.$$

En particular hemos probado que los índices son números enteros. ■

Si  $\sigma : U \rightarrow E$  es una sección de  $E$  (en las condiciones usuales) y  $a \in U$ , entonces podemos considerar la restricción  $\sigma_a : U_a \rightarrow E$ , con lo que tiene sentido calcular el índice  $j_a(\sigma_a)$ , es decir, cualquier punto del dominio de  $\sigma$  puede considerarse una singularidad sin más que restringir  $\sigma$ . Ahora bien, si calculamos  $j_a(\sigma)$  según la definición, podemos tomar  $\tau = \sigma_V$ , con lo que claramente obtenemos que  $j_a(\sigma) = 0$ , es decir, las “falsas” singularidades tienen índice 0. Ahora podemos demostrar un recíproco parcial:

**Teorema 14.14** *Sea  $E$  un fibrado de esferas, orientable como variedad, con base  $B$  de dimensión  $n$  y fibra de dimensión  $n - 1$ , sea  $U$  un abierto en  $B$ ,  $a \in U$  y sea  $\sigma : U_a \rightarrow E$  una sección de índice 0. Entonces existe una sección  $\bar{\sigma} : U \rightarrow E$  que coincide con  $\sigma$  fuera de un entorno de  $a$ .*

DEMOSTRACIÓN: Con la notación que hemos usado en la interpretación geométrica del índice, tenemos que  $j_0(\phi_\sharp(\sigma)) = j_a(\sigma) = 0$ , y es claro que si construimos una sección  $\bar{\sigma} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$  que coincida con  $\phi_\sharp(\sigma)$  fuera de la bola unidad, dicha sección determinará una sección en  $U$  en las condiciones del enunciado. Así pues, podemos suponer que  $E = \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$  y que  $a = 0$ . Entonces  $j_0(\sigma) = \text{grad } \sigma'_S = 0$

El teorema 12.45 nos da una aplicación diferenciable  $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$  tal que si  $\|x\| \geq 1$  entonces  $\tau(x) = \sigma'(x)$ . Basta tomar  $\bar{\sigma}(x) = (x, \tau(x))$ . ■

**Ejercicio:** Probar que la sección  $\sigma : \mathbb{R}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  dada por

$$\sigma(x) = (x, \cos(2\pi/\|x\|), \sin(2\pi/\|x\|))$$

tiene índice 0 pero no puede extenderse a una sección en  $\mathbb{R}^2$ .

Ahora mostramos la relación entre la clase de Euler y los índices de las secciones en un fibrado de esferas:

**Teorema 14.15** *Sea  $E$  un fibrado de esferas orientable cuya base  $B$  es una variedad compacta y orientable de dimensión  $n \geq 2$  y su fibra es  $S^{n-1}$ . Consideramos en  $E$  como variedad la orientación producto. Sea  $\sigma : B \rightarrow E$  una*

sección con un número finito de singularidades  $a_1, \dots, a_k$ . Entonces

$$\sum_{i=1}^k j_{a_i}(\sigma) = \int_B \chi_E.$$

DEMOSTRACIÓN: Tomemos entornos  $U_i$  de cada  $a_i$  disjuntos dos a dos, difeomorfos a  $\mathbb{R}^n$  y sobre los que existan factorizaciones locales de  $E$ . Consideremos los abiertos

$$U = \bigcup_i U_i, \quad V = B \setminus \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Así  $B = U \cup V$ . Tomemos secciones  $\tau_i : U_i \rightarrow E$ , las cuales determinan una sección  $\tau : U \rightarrow E$ . Llamemos  $\bar{\tau} : U \cap V \rightarrow E$  y  $\bar{\sigma} : U \cap V \rightarrow E$  a las restricciones de  $\sigma$  y  $\tau$ . El teorema 14.9 nos da que  $\chi_E = \Delta([\bar{\tau}, \bar{\sigma}])$ , donde  $\Delta$  es el homomorfismo de conexión de la sucesión de Mayer-Vietoris de la tríada  $(B, U, V)$ .

Sea  $U_{a_i} = U_i \setminus \{a_i\}$  y llamemos  $\tau_{a_i}, \sigma_{a_i}$  a las restricciones de  $\tau$  y  $\sigma$  a  $U_{a_i}$ . De las definiciones se sigue inmediatamente que  $[\bar{\tau}, \bar{\sigma}] = \sum_i [\tau_{a_i}, \sigma_{a_i}]$ .

Llamamos  $\alpha_i : H^{n-1}(U_{a_i}) \rightarrow \mathbb{R}$  a las aplicaciones canónicas. Ahora aplicamos la conmutatividad del diagrama (12.10), en virtud de la cual tenemos que

$$\int_B \chi_E = \int_B \Delta([\bar{\tau}, \bar{\sigma}]) = \sum_{i=1}^k \alpha_i([\tau_{a_i}, \sigma_{a_i}]) = \sum_{i=1}^k j_{a_i}(\sigma).$$

■

Con esto tenemos probado que la suma de los índices de una sección sólo depende del fibrado  $E$  (salvo el signo, que depende de las orientaciones). En particular, si la dimensión de la base es impar la suma es nula (teorema 14.7). Todavía nos falta demostrar que si  $E$  es el fibrado de esferas asociado al fibrado de tangentes de una variedad de Riemann compacta y orientable  $V$  entonces la integral de  $\chi_E$  es la característica de Euler de  $V$ , pero esto tendrá que esperar. No obstante, aún podemos extraer otra consecuencia notable del teorema anterior:

**Teorema 14.16** *Sea  $E$  un fibrado de esferas orientable sobre una base conexa y orientable de dimensión  $n \geq 2$  y con fibra  $S^{n-1}$ . Entonces  $E$  tiene una sección (sin singularidades) si y sólo si su clase de Euler es nula.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema 14.6 nos da una implicación. Supongamos ahora que  $\chi_E = 0$ . Si la base  $B$  no es compacta basta considerar el teorema 13.40. Si  $B$  es compacta, el teorema 13.47 nos da la existencia de una sección con a lo sumo una singularidad. Ahora bien, por el teorema anterior, el índice de dicha singularidad ha de ser 0 y entonces 14.14 nos permite modificarla para obtener una sección sin singularidades. ■

En particular, todo fibrado en las condiciones de este teorema con  $n$  impar tiene una sección.

## 14.3 El isomorfismo de Thom

Nos ocupamos ahora de la cohomología de los fibrados vectoriales. Nos interesará especialmente el caso de los fibrados de tangentes de las variedades diferenciales. Recordemos que si  $E$  es un fibrado orientable tenemos el homomorfismo inducido por la integral en fibras

$$\int_F^* : H_{cf}(E) \longrightarrow H(B)$$

Nuestro estudio de la cohomología de los fibrados de esferas se ha basado fuertemente en la compacidad de las fibras, que implica a su vez la igualdad  $H_{cf}(E) = H(E)$ . Esto ya no es cierto para fibrados vectoriales, pero en cambio las fibras tienen ahora otra propiedad de la que podemos sacar partido: son contractibles.

**Teorema 14.17** *Sea  $E$  un fibrado orientable con fibra contractible. Entonces*

$$\int_F^* : H_{cf}(E) \longrightarrow H(B)$$

*es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Usamos la misma técnica que en la prueba del teorema 14.2. En primer lugar demostramos

A) *El teorema se cumple para el fibrado trivial  $E = \mathbb{R}^n \times F$ .*

Sea  $\pi' : \mathbb{R}^n \times F \longrightarrow F$  la proyección e  $i : F \longrightarrow \mathbb{R}^n \times F$  la aplicación dada por  $i(v) = (0, v)$ . Es claro que ambas determinan aplicaciones lineales

$$\pi'_\# : \Lambda_c(F) \longrightarrow \Lambda_{cf}(\mathbb{R}^n \times F) \quad \text{e} \quad i_\# : \Lambda_{cf}(\mathbb{R}^n \times F) \longrightarrow \Lambda_c(F),$$

las cuales inducen a su vez aplicaciones

$$\pi'^* : H_c(F) \longrightarrow H_{cf}(\mathbb{R}^n \times F), \quad i^* : H_{cf}(\mathbb{R}^n \times F) \longrightarrow H_c(F).$$

Vamos a probar que son isomorfismos inversos. Puesto que  $i \circ \pi'$  es la identidad, lo mismo sucede con  $\pi'^* \circ i^*$ . Consideremos ahora  $\pi' \circ i$ , que claramente es homotópica a la identidad. Una homotopía  $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times F \longrightarrow \mathbb{R}^n \times F$  viene dada por  $H(t, x, v) = (tx, v)$ . Según el teorema 11.13, la aplicación  $H$  induce una homotopía de complejos  $h : \Lambda(\mathbb{R}^n \times F) \longrightarrow \Lambda(\mathbb{R}^n \times F)$  dada por  $h = H_\# \circ i_{\partial_t} \circ I_0^1$ .

Ahora bien, es claro que  $H$  es un homomorfismo de complejos, luego  $H_\#$  lleva formas con soporte compacto en fibras a formas con soporte compacto en fibras, lo mismo sucede con la evaluación  $i_{\partial_t}$  y es fácil ver que lo mismo vale para el operador integral  $I_0^1$ . Así pues,  $h$  se restringe a una homotopía  $h : \Lambda_{cf}(\mathbb{R}^n \times F) \longrightarrow \Lambda_{cf}(\mathbb{R}^n \times F)$  entre  $\pi'_\# \circ i_\#$  y la identidad. Por consiguiente  $\pi'^* \circ i^*$  es la identidad.

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_{cf}(\mathbb{R}^n \times F) & \xrightarrow{i^*} & H_c(F) \\ \downarrow f_F^* & & \downarrow \int_F^* \\ H(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{j} & \mathbb{R} \end{array}$$

donde  $j$  es el isomorfismo natural. (Notemos que como  $F$  es contractible  $H_c(F) = H_c^0(F)$ .) Como  $F$  es conexo (por ser contractible) tenemos que  $\int_F^*$  es un isomorfismo, luego  $f_F^*$  también lo es.

El paso siguiente es demostrar:

*B) Si  $E$  es un fibrado arbitrario y  $U, V$  son abiertos en la base  $B$  tales que  $B = U \cup V$  y los fibrados  $E_U = \pi^{-1}[U]$ ,  $E_V = \pi^{-1}[V]$  y  $E_{U \cap V} = \pi^{-1}[U \cap V]$  cumplen el teorema, lo mismo le sucede a  $E$ .*

La sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Lambda(E) \longrightarrow \Lambda(E_U) \oplus \Lambda(E_V) \longrightarrow \Lambda(E_{U \cap V}) \longrightarrow 0$$

que induce la sucesión de Mayer-Vietoris se restringe a una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Lambda_{cf}(E) \longrightarrow \Lambda_{cf}(E_U) \oplus \Lambda_{cf}(E_V) \longrightarrow \Lambda_{cf}(E_{U \cap V}) \longrightarrow 0.$$

El diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda_{cf}(E) & \longrightarrow & \Lambda_{cf}(E_U) \oplus \Lambda_{cf}(E_V) & \longrightarrow & \Lambda(E_{U \cap V}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_F & & \downarrow f_F \oplus f_F & & \downarrow f_F \\ 0 & \longrightarrow & \Lambda(B) & \longrightarrow & \Lambda(U) \oplus \Lambda(V) & \longrightarrow & \Lambda(U \cap V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ahora basta pasar a las sucesiones exactas de cohomología y aplicar 3.1.

Trivialmente se comprueba:

*C) Si  $E$  es un fibrado arbitrario cuya base  $B$  es unión disjunta de abiertos  $\{U_i\}_{i \in I}$  disjuntos dos a dos y el teorema vale para cada fibrado  $E_i = \pi^{-1}[U_i]$  entonces vale también para  $E$ .*

El argumento típico nos permite ahora demostrar:

*A') El teorema se cumple para los fibrados triviales  $E = B \times F$ .*

En efecto, por A) sabemos que se cumple para los fibrados  $\pi^{-1}[U]$ , donde  $U$  es un abierto en  $B$  difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , que forman una base de  $B$ . Aplicando  $B$  lo probamos para uniones finitas de estos abiertos y por C) y el teorema 12.19 (como en la prueba de 14.2) concluimos que vale para  $B \times F$ .

Usando ahora A) en lugar de A') en el argumento anterior obtenemos el caso general. ■



**Definición 14.18** Sea  $E$  un fibrado orientable con fibra contractible. Se llama *isomorfismo de Thom* al isomorfismo

$$\text{Th} : H(B) \longrightarrow H_{cf}(E)$$

inverso de la integral en fibras. La clase  $\theta_E = \text{Th}(1) \in \Lambda_{cf}^r(E)$  se llama *clase de Thom* del fibrado  $E$ . Está determinada por que  $\int_F^* \theta_E = 1$ .

Vamos a comprobar que la clase de Thom determina el isomorfismo de Thom exactamente igual que la clase de Euler determina la aplicación de Gysin. Observemos que  $\Lambda_{cf}(E)$  es un ideal de  $\Lambda(E)$ , es decir, si  $\omega \in \Lambda_{cf}(E)$  y  $\eta \in \Lambda(E)$ , entonces  $\omega \wedge \eta, \eta \wedge \omega \in \Lambda_{cf}(E)$ . Esto hace que el producto exterior induzca de forma natural operaciones

$$H(E) \times H_{cf}(E) \longrightarrow H_{cf}(E) \quad \text{y} \quad H_{cf}(E) \times H(E) \longrightarrow H_{cf}(E)$$

con las que  $H_{cf}(E)$  resulta ser un  $H(E)$ -bimódulo.

**Teorema 14.19** Sea  $E$  un fibrado orientable con fibra contractible. Entonces el isomorfismo de Thom cumple:

$$\text{Th}(\alpha \wedge \beta) = \pi^*(\alpha) \wedge \text{Th}(\beta).$$

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 13.30 tenemos que

$$\int_F^* (\pi^*(\alpha) \wedge \text{Th}(\beta)) = \alpha \wedge \int_F^* \text{Th}(\beta) = \alpha \wedge \beta.$$

Basta aplicar  $\text{Th}$  a los dos miembros. ■

El teorema 13.28 se traduce inmediatamente al teorema siguiente:

**Teorema 14.20** Sea  $\phi : E \longrightarrow E'$  un homomorfismo entre fibrados orientables con fibras contractibles tal que para cada  $p \in B$  la restricción  $\phi_p : F_p \longrightarrow F'_{\phi_B(p)}$  es un difeomorfismo que conserva la orientación. Entonces el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_{cf}(E') & \xrightarrow{\phi_{cf}^*} & H_{cf}(E) \\ \text{Th} \uparrow & & \uparrow \text{Th} \\ H(B') & \xrightarrow{\phi_B^*} & H(B) \end{array}$$

En particular  $\phi_{cf}^*(\theta_{E'}) = \theta_E$ .

A partir de aquí nos restringimos al caso en que  $E$  es un fibrado vectorial orientable (cuya fibra  $\mathbb{R}^r$  es ciertamente contractible). Recordemos que la sección nula  $\sigma_0 : B \longrightarrow E$  nos permite identificar a  $B$  con una subvariedad de  $E$ . Observemos que  $\pi \circ \sigma_0$  es homotópica a la identidad. Una homotopía  $H : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$  viene dada por  $H_t(w) = tw$ . Así pues,

$$\pi^* : H(B) \longrightarrow H(E)$$

es un isomorfismo cuyo inverso es  $\sigma_0^*$ . Por otra parte tenemos el isomorfismo de Thom

$$\text{Th} : H(B) \longrightarrow H_{cf}(E),$$

cuyo inverso es  $f_F^*$ .

Si dotamos a  $E$  de una métrica de Riemann  $g$ , entonces podemos considerar el fibrado de esferas asociado  $E_S$ . Si definimos  $\|w\|^2 = g_{\pi(w)}(w, w)$ , es claro que  $\|\cdot\|^2 : E \longrightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación diferenciable y  $E_S$  está formado por los puntos de  $E$  que cumplen  $\|w\|^2 = 1$ . Llamaremos  $\chi_S$  a la clase de Euler del fibrado de esferas  $E_S$ .

Sea  $E_0 = E \setminus B$ . Es fácil ver que se trata de un subfibrado de  $E$  con base  $B$  y fibra  $\mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ . La aplicación  $\|\cdot\| : E_0 \longrightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable, y por lo tanto también lo es la proyección  $\rho : E_0 \longrightarrow E_S$  dada por  $\rho(w) = w/\|w\|$ .

Vamos a relacionar la cohomología de  $E$  con la de  $E_S$ . Para ello nos basaremos en el siguiente teorema técnico:

**Teorema 14.21** *Sea  $E$  un fibrado vectorial orientable dotado de una métrica de Riemann, sea  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$  una función creciente tal que  $h(t) = 0$  para  $t < 1/4$  y  $h(t) = 1$  para  $t > 1/2$ . Sea  $f \in C^\infty(E)$  dada por  $f(w) = h(\|w\|)$ . Entonces, para cada  $\omega \in \Lambda^m(E_S)$  se cumple*

$$\int_S \omega = (-1)^{m+r-1} \int_F df \wedge \rho_\# \omega.$$

**DEMOSTRACIÓN:** El integrando del segundo miembro requiere algunas consideraciones: En principio  $\rho_\#(\omega) \in \Lambda^m(E_0)$ . Por otra parte,  $df \in \Lambda_{cf}(E)$ . En efecto, para comprobarlo aplicamos el teorema 13.22, es decir, tomamos una factorización local  $g : U \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \pi^{-1}[U]$  de  $g$  y comprobamos que  $g_\#(df)$  tiene soporte compacto en fibras. Ahora bien, si  $K$  es un compacto en  $U$  entonces  $K \cap \text{sop } g_\#(df)$  está contenido en el producto de  $K$  por la corona esférica de radios  $1/4$  y  $1/2$ , luego es compacto.

Por consiguiente  $df \wedge \rho_\# \omega \in \Lambda_{cf}^{m+1}(E_0)$  (donde, en realidad, deberíamos poner  $i_\#(df)$ , siendo  $i : E_0 \longrightarrow E$  la inclusión). Ahora bien, como  $df$  se anula en un entorno de  $B$ , lo mismo le sucede a  $df \wedge \rho_\#(\omega)$ , por lo que si la extendemos a  $\Lambda^{m+1}(E)$  con el valor 0 sobre  $B$  obtenemos ciertamente una forma diferenciable cuya integral en fibras en  $E$  coincide con su integral en  $E_0$ . Dicha forma es la que aparece en la ecuación del enunciado.

Puesto que los dos miembros de la igualdad que queremos probar son lineales en  $\omega$ , mediante una partición de la unidad podemos restringirnos al caso en que el soporte de  $\omega$  está contenido en  $\pi^{-1}[U]$ , donde  $U$  es un abierto en  $B$  sobre el que existe una factorización local  $g : U \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \pi^{-1}[U]$  de  $E$  tal que las aplicaciones  $g_p$  sean isometrías (teorema 13.37). Entonces  $g$  se restringe a una factorización local  $g_S : U \times S^{r-1} \longrightarrow \pi_S^{-1}[U]$ . Podemos suponer que  $g$  hace corresponder la orientación de  $E$  con la orientación de  $U \times \mathbb{R}^r$  (como fibrado) inducida por la orientación canónica de  $\mathbb{R}^r$ . Así,  $g_S$  hace corresponder la orientación de  $U \times S^{r-1}$  inducida por la orientación canónica de la esfera con la orientación de  $E_S$  inducida por la de  $E$ .

De aquí se sigue que podemos suponer que  $E = B \times \mathbb{R}^r$ , de modo que  $E_S = B \times S^{r-1}$ , la orientación en  $E$  es la inducida por la orientación canónica de  $\mathbb{R}^r$  y la orientación de  $E_S$  es la inducida por la orientación canónica de  $S^{r-1}$ .

De nuevo por linealidad y tomando una partición de la unidad podemos suponer que  $\omega$  tiene su soporte contenido en una carta de  $E_S$  producto de una carta de  $B$  por una carta de  $S^{r-1}$ , y de nuevo por linealidad podemos suponer que  $\omega = \eta_1 \times \eta_2$ , donde  $\eta_1 \in \Lambda^{m-r+1}(B)$  y  $\eta_2 \in \Lambda^{r-1}(S^{r-1})$  (si la dimensión de  $\eta_2$  es distinta de  $r-1$  ambos miembros son nulos). El teorema 13.30 nos da que

$$\int_S \omega = \eta_1 \wedge \int_S \pi_{2\#}(\eta_2),$$

$$\begin{aligned} (-1)^{m+r-1} \int_F df \wedge \rho_{\#} \omega &= (-1)^{m+r-1} \int_F df \wedge \pi_{1\#}(\eta_1) \wedge \rho_{\#}(\pi_{2\#}(\eta_2)) \\ &= \int_F \pi_{1\#}(\eta_1) \wedge df \wedge \rho_{\#}(\pi_{2\#}(\eta_2)) \\ &= \eta_1 \wedge \int_F df \wedge \rho_{\#}(\pi_{2\#}(\eta_2)). \end{aligned}$$

Así pues, basta probar el teorema en el caso en que  $\omega = \pi_{2\#}(\eta_2)$ , y así ahora tenemos que demostrar una igualdad de funciones. Concretamente, si  $p \in B$ , tenemos

$$\int_{S_p} \omega_p = \int_{S^{r-1}} \eta_2,$$

y si  $j_p : \mathbb{R}^r \setminus \{0\} \rightarrow E_0$  es la aplicación  $v \mapsto (p, v)$ , entonces

$$\int_{F_p^0} (df \wedge \rho_{\#}(\omega))_p = \int_{\mathbb{R}^r} dj_{p\#}(f) \wedge j_{p\#}(\rho_{\#}(\pi_{2\#}(\eta_2))) = \int_{\mathbb{R}^r} d\bar{f} \wedge \bar{\rho}_{\#}(\eta_2),$$

donde  $\bar{f}(v) = h(\|v\|)$  y  $\bar{\rho} : \mathbb{R}^r \rightarrow S^{r-1}$  es la proyección natural. Como  $d\eta_2 = 0$  (pues  $\Lambda^r(S^{r-1}) = 0$ ), se cumple que

$$d\bar{f} \wedge \bar{\rho}_{\#}(\eta_2) = d(\bar{f}\bar{\rho}_{\#}(\eta_2)).$$

El teorema de Stokes nos da que

$$\int_{F_p^0} (df \wedge \rho_{\#}(\omega))_p = \int_{\mathbb{R}^r} d(\bar{f}\bar{\rho}_{\#}(\eta_2)) = \int_{S^{r-1}} i_{\#}(\rho_{\#}(\eta_2)) = \int_{S^{r-1}} \eta_2 = \int_{S_p} \omega_p. \quad \blacksquare$$

Un poco más en general, dado un fibrado vectorial orientable  $E$  dotado de una métrica de Riemann, sea  $f \in C^\infty(E)$  cualquier función tal que  $\text{sop } f \subset E_0$  y  $1 - f \in C_{cf}^\infty(E)$ . Por ejemplo sirve la función  $f$  construida en el teorema anterior. Entonces podemos definir la aplicación lineal  $\Lambda(E_S) \rightarrow \Lambda_{cf}(E)$  dada por

$$\omega \mapsto (-1)^{m+r-1} df \wedge \rho_{\#}(\omega), \quad \omega \in \Lambda^m(E_S)$$

(notemos que  $df \in \Lambda_{cf}(E)$  y la discusión al principio de la prueba del teorema anterior sigue siendo válida). Además es claro que esta aplicación conmuta con la diferencial exterior, por lo que induce una aplicación lineal

$$\alpha_E : H(E_S) \longrightarrow H_{cf}(E).$$

Esta aplicación es independiente de la elección de  $f$ , pues si  $g$  es otra función en las mismas condiciones y  $d\omega = 0$  entonces

$$df \wedge \rho_{\#}(\omega) - dg \wedge \rho_{\#}(\omega) = d((f - g) \wedge \rho_{\#}(\omega))$$

y  $(f - g) = (1 - g) - (1 - f) \in \Lambda_{cf}(E)$ , por lo que  $(f - g) \wedge \rho_{\#}(\omega) \in \Lambda_{cf}(E)$ .

El teorema anterior nos da entonces que, para toda clase  $\omega \in H(E_S)$ , se cumple

$$\int_F^* \alpha_E(\omega) = \int_S^* \omega.$$

Equivalentemente, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & H_{cf}(E) \\ & \nearrow \alpha_E & \downarrow f_F^* \\ H(E_S) & & H(B) \\ & \searrow f_S^* & \end{array} \quad (14.5)$$

Si  $\phi : E \longrightarrow E'$  es un homomorfismo entre fibrados vectoriales orientables dotados de métricas de Riemann y las restricciones de  $\phi$  a las fibras son isomorfismos que conservan la orientación, entonces  $\phi$  determina un homomorfismo de fibrados  $\phi_S : E_S \longrightarrow E'_S$  dado por

$$\phi_S(w) = \frac{\phi(w)}{\|\phi(w)\|}.$$

Es fácil ver que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H(E'_S) & \xrightarrow{\phi_S^*} & H(E_S) \\ \alpha_{E'} \downarrow & & \downarrow \alpha_E \\ H_{cf}(E') & \xrightarrow{\phi_{cf}^*} & H_{cf}(E) \end{array}$$

En efecto, tomamos  $f' \in C^\infty(E)$  tal que  $\text{sop } f' \subset E'_0$  y  $1 - f' \in C_{cf}^\infty(E')$  y definimos  $f = \phi_{\#}(f')$ , de modo que  $\text{sop } f \subset E_0$  y  $1 - f \in C_{cf}^\infty(E)$ . Tomamos  $\omega \in \Lambda(E'_S)$  tal que  $d\omega = 0$ . Así

$$\phi_{cf\#}(df' \wedge \rho'_{\#}(\omega)) = df \wedge \phi_{\#}(\rho'_{\#}(\omega)) = df \wedge \rho_{\#}(\phi_{S\#}(\omega)).$$

La conclusión es ahora inmediata. ■

Combinando los dos últimos diagramas obtenemos la conmutatividad del siguiente:

$$\begin{array}{ccc} H(E'_S) & \xrightarrow{\phi_S^*} & H(E_S) \\ f_S^* \downarrow & & \downarrow f_S^* \\ H(B') & \xrightarrow{\phi_B^*} & H(B) \end{array}$$

Veamos ahora la relación entre la clase de Thom  $\theta_E$  de  $E$  y la clase de Euler  $\chi_S$  de  $E_S$ . Es la más simple posible:

**Teorema 14.22** *Sea  $E$  un fibrado vectorial orientable dotado de una métrica de Riemann, sea  $i : \Lambda_{cf}(E) \rightarrow \Lambda(E)$  la inclusión, sea  $\theta_E \in \Lambda_{cf}^r(E)$  la clase de Thom de  $E$  y sea  $\chi_S \in \Lambda^r(B)$  la clase de Euler de  $E_S$ . Entonces  $i(\theta_E) = \pi^*(\chi_S)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Según la construcción de la clase de Euler, existen formas  $\omega \in \Lambda^r(B)$  y  $\eta \in \Lambda^{r-1}(E_S)$  tales que

$$\chi_S = [\omega], \quad \pi_{S\#}(\omega) = d\eta, \quad \int_S \eta = -1.$$

Sea  $f \in C^\infty(E)$  según el teorema 14.21 y definamos

$$\psi = \pi_{\#}(\omega) - d(f\rho_{\#}(\eta)) \in \Lambda^r(E).$$

Como  $d\omega = 0$ , también  $d\psi = 0$ . Veamos que  $\psi \in \Lambda_{cf}(E)$ . Para ello observamos que  $\rho_{\#}(d\eta) = \rho_{\#}(\pi_{S\#}(\omega)) = \pi_{\#}(\omega)$ , luego

$$\psi = \pi_{\#}(\omega) - df \wedge \rho_{\#}(\eta) - f\rho_{\#}(d\eta) = (1 - f)\pi_{\#}(\omega) - df \wedge \rho_{\#}(\eta),$$

con lo que  $\psi_w = 0$  siempre que  $\|w\| > 1/2$ .

El teorema quedará probado si demostramos que  $\theta_E = [\psi]$ , pues entonces  $\bar{i}(\theta_E) = [\psi] = \pi^*([\omega]) = \pi^*(\chi_S)$ . A su vez, para ello basta probar que  $\int_F^* [\psi] = 1$ , y esto se cumple por los teoremas 13.30 y 14.21:

$$\int_F \psi = \omega \wedge \int_F (1 - f) - \int_F df \wedge \rho_{\#}(\eta) = -\int_S \eta = 1.$$

■

En particular, si  $\sigma : B \rightarrow E$  es una sección cualquiera (por ejemplo la sección nula), se cumple que  $\chi_S = \sigma^*(\bar{i}(\theta_E))$ . Por consiguiente  $\chi_S$  no depende de la elección de la métrica de Riemann en  $E$ .

El siguiente diagrama conmutativo muestra la relación entre la cohomología de  $E$  y la de  $E_S$  a través de los isomorfismos  $\text{Th}$  y  $\pi^*$  (La aplicación  $D$  es la

aplicación de Gysin de  $E_S$ ):

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_{cf}(E) & \xrightarrow{\bar{i}} & H(E) \\
 & \nearrow \alpha_E & \uparrow \text{Th} & & \uparrow i^* \\
 H(E_S) & & & & H(E_S) \\
 & \searrow j_S^* & & & \nwarrow \pi_S^* \\
 & & H(B) & \xrightarrow{D} & H(B)
 \end{array}$$

El triángulo izquierdo es (14.5), el derecho conmuta porque  $i \circ \pi = \pi_S$ . Para probar la conmutatividad de diagrama central observamos que si  $\alpha \in H(B)$  entonces

$$D(\alpha) = \alpha \wedge \chi_S, \quad \text{Th}(\alpha) = \pi^*(\alpha) \wedge \theta_E.$$

Por consiguiente,  $\bar{i}(\text{Th}(\alpha)) = \pi^*(\alpha) \wedge \pi^*(\chi_S) = \pi^*(D(\alpha))$ .

### 14.4 Secciones en fibrados vectoriales

Ahora podemos trasladar al contexto de fibrados vectoriales el estudio que hemos hecho de las singularidades de las secciones en fibrados de esferas. Consideremos, pues, una sección  $\sigma : B \rightarrow E$  de un fibrado vectorial  $E$ . Diremos que  $a \in B$  es un *cero aislado* de  $\sigma$  si  $\sigma(a) = 0$  y existe un entorno  $U$  de  $a$  donde  $\sigma(p) \neq 0$  si  $p \in U$  es distinto de  $a$ .

Supondremos además que  $\dim B = \dim F = n \geq 2$  y que  $E$  es orientable como variedad. (Éste es siempre el caso del fibrado de tangentes de una variedad diferencial.)

Fijemos una métrica de Riemann  $g$  en el fibrado  $E$  y sea  $E_S$  el fibrado de esferas correspondiente. Si  $a$  es un cero aislado de  $\sigma$ , en un entorno  $U$  de  $a$  podemos definir la sección  $\sigma_S : U \rightarrow E_S$  (con una singularidad aislada en  $a$ ) dada por

$$\sigma_S(p) = \frac{\sigma(p)}{\|\sigma(p)\|}.$$

Definimos el *índice* de  $\sigma$  en  $a$  como  $j_a(\sigma) = j_a(\sigma_S)$ , donde el término de la derecha es el índice definido en 14.12.

Vamos a probar que la definición no depende de la elección de la métrica de Riemann en  $E$ . Sabemos que el índice no se altera si cambiamos  $U$  por un abierto menor, por lo que podemos suponer que  $U$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , que  $a$  es el único cero de  $\sigma$  en  $U$  y que existe una factorización local  $f : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}[U]$ . Sea  $\tilde{\sigma} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  la aplicación dada por  $f(p, \tilde{\sigma}(p)) = \sigma(p)$ . Entonces  $\tilde{\sigma}$  sólo vale 0 en  $a$ , luego está definido el grado local  $\text{grad}_a \tilde{\sigma}$  (definición 12.32). Vamos a probar que  $j_a(\sigma) = \text{grad}_a \tilde{\sigma}$ , lo que justificará su independencia de la métrica.

Podemos suponer que  $E = \pi^{-1}[U]$ , es decir, que  $E$  es trivial y  $B = U$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Más aún, podemos suponer que  $E = U \times \mathbb{R}^n$ , considerando en el

producto la métrica de Riemann que convierte a  $f$  en isometría. Entonces  $f$  pasa a ser la identidad y  $\sigma(p) = (p, \tilde{\sigma}(p))$ . Recordemos que  $\text{grad}_a \tilde{\sigma} = \alpha_a(\tilde{\sigma}_a^*(\alpha_0^{-1}(1)))$ , donde

$$\alpha_p : H^{n-1}(B_a) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \alpha_0 : H^{n-1}(\mathbb{R}_0^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

son las aplicaciones canónicas.

Sea  $\omega \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}_0^n)$  tal que  $\alpha_0^{-1}(1) = [\omega]$ . Según el teorema 12.30 tenemos que

$$\int_{S^{n-1}} i_{\#}(\omega) = 1,$$

donde  $i : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}_0^n$  es la inclusión. Para cada  $p \in B$ , la métrica de  $E$  induce un producto escalar en  $F_p = \{p\} \times \mathbb{R}^n$  y éste a su vez determina trivialmente un producto escalar en  $\mathbb{R}^n$ . Consideramos una isometría  $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  entre este producto escalar y el producto canónico (que conserve la orientación), de modo que el teorema de cambio de variable nos da que

$$\int_{S_p} i_{p\#}(g_{\#}(\omega)) = 1,$$

donde  $\{p\} \times S_p$  es la esfera unidad de  $F_p$  e  $i_p : S_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es la inclusión. Ahora bien, el teorema 12.29 nos da que  $g^* \circ \alpha_0 = \alpha_0$ , luego  $\omega$  y  $g_{\#}(\omega)$  representan la misma clase, al igual que  $i_{p\#}(\omega)$  e  $i_{p\#}(g_{\#}(\omega))$ . En definitiva:

$$\int_{S_p} i_{p\#}(\omega) = 1, \quad \text{para todo } p \in B.$$

Si ahora llamamos  $i : E_S \longrightarrow E$  a la inclusión, podemos concluir que

$$\int_S i_{\#}(1 \times \omega) = 1.$$

Más aún, tomando una factorización de  $E$  cuyas restricciones a las fibras sean isometrías deducimos que  $E_S$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ , luego  $H^{n-1}(E_S) \cong \mathbb{R}$ . Por consiguiente la integral en fibras es un isomorfismo y en particular  $i_{\#}(1 \times \omega)$  representa a la única clase en  $H^{n-1}(E_S)$  cuya integral en fibras vale 1.

De este modo, si  $\tau : B \longrightarrow E_S$  es cualquier sección, la clase  $\omega_{\tau_a}$  dada por (14.4) ha de ser necesariamente  $[i_{\#}(1 \times \omega)]$ . Por otra parte

$$\omega_{\sigma_S} = \omega_{\tau_a} - \pi^*(\sigma_S^*(\omega_{\tau_a})),$$

pues el segundo miembro cumple (14.4). Por consiguiente  $[\tau_a, \sigma_S] = \sigma_S^*(\omega_{\tau_a})$  y  $j_a(\sigma) = \alpha_a(\sigma_S^*(\omega_{\tau_a}))$ . Digamos que  $\sigma_S(p) = (p, \tilde{\sigma}_S(p))$ , para cada  $p \in B$ . Así

$$\sigma_S^*(\omega_{\tau_a}) = [\sigma_{S\#}(i_{\#}(\pi_{2\#}(\omega)))] = [\tilde{\sigma}_{S\#}(\omega)] = \tilde{\sigma}_S^*(\alpha_0^{-1}(1)).$$

Ahora bien, las aplicaciones  $\tilde{\sigma}_S$  y  $\tilde{\sigma}_a : U_a \longrightarrow \mathbb{R}_0^n$  son homotópicas, pues  $\tilde{\sigma}_a(p)$  es un múltiplo positivo de  $\tilde{\sigma}_S(p)$ , y por consiguiente el segmento que los une no pasa por 0. Así pues,

$$\text{grad}_a \tilde{\sigma} = \alpha_a(\tilde{\sigma}_S^*(\alpha_0^{-1}(1))) = j_a(\sigma).$$

■

De esta caracterización que acabamos de obtener se sigue fácilmente el teorema siguiente:

**Teorema 14.23** *Sea  $\phi : E \rightarrow E'$  un homomorfismo de fibrados que induce isomorfismos entre las fibras y tal que  $\phi_B : B \rightarrow B'$  sea un difeomorfismo local. Supongamos que  $E$  y  $E'$  son orientables como variedades y que las bases y las fibras tienen dimensión  $n \geq 2$ . Sea  $\sigma$  una sección de  $E'$  con un cero aislado en  $b = \phi_B(a)$ . Entonces  $\phi_{\sharp}(\sigma)$  tiene un cero aislado en  $a$  y  $j_a(\phi_{\sharp}(\sigma)) = \pm j_b(\sigma)$ , donde el signo depende de si  $\phi$  conserva o invierte las orientaciones.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que, por el teorema 13.20, las hipótesis implican que  $\phi$  es un difeomorfismo local, luego tiene sentido decir que  $\phi$  conserva o invierte las orientaciones (se entiende que alrededor de  $a$ ).

Tomando factorizaciones locales alrededor de  $a$  y  $b$  reducimos el problema al caso en que  $E$  y  $E'$  son triviales y  $\phi$  y  $\phi_B$  son difeomorfismos (aquí usamos la caracterización del índice que hemos obtenido). Tomamos una métrica de Riemann en  $E'$  y definimos en  $E$  la métrica para la cual las aplicaciones  $\phi_p$  son isometrías. Entonces  $\phi$  se restringe a un difeomorfismo  $\phi_S : E_S \rightarrow E'_S$  y el teorema se reduce a 14.13. ■

El teorema siguiente es una consecuencia inmediata de 14.15:

**Teorema 14.24** *Sea  $E$  un fibrado vectorial orientable sobre una base compacta orientable de la misma dimensión  $n \geq 2$  que la fibra, fijemos una métrica de Riemann en  $E$  y sea  $\chi_S$  la característica de Euler del fibrado de esferas asociado  $E_S$ . Sea  $\sigma : B \rightarrow E$  una sección con un número finito de ceros  $a_1, \dots, a_m$ . Entonces*

$$\sum_{i=1}^m j_{a_i}(\sigma) = \int_B^* \chi_S.$$

Todo fibrado en las condiciones de este teorema admite una sección con un número finito de ceros. En efecto:

**Teorema 14.25** *Sea  $E$  un fibrado vectorial tal que su base y su fibra tengan ambas dimensión  $n \geq 2$ . Si la base no es compacta  $E$  admite una sección sin ceros y en caso contrario  $E$  admite una sección con a lo sumo un cero.*

DEMOSTRACIÓN: Fijamos una métrica de Riemann en  $E$ . Si la base no es compacta el teorema 13.40 nos da que el fibrado de esferas  $E_S$  tiene una sección sin singularidades, la cual es también una sección sin ceros de  $E$ . Si la base es compacta el teorema 13.47 nos da que  $E_S$  admite una sección  $\sigma$  con a lo sumo una singularidad en un punto  $a$ . Podemos considerar a  $\sigma$  como una sección sin ceros de  $E$  con una singularidad en  $a$ . A través de una factorización local podemos construir un isomorfismo de fibrados vectoriales  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}[U]$ , donde  $U$  es un entorno de  $a$  y  $f_{\mathbb{R}^n}(0) = a$ . Por el teorema 13.37 podemos exigir además que las restricciones a las fibras sean isometrías. Sea  $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$  la aplicación dada por  $f(p, \tilde{\sigma}(p)) = \sigma(f_{\mathbb{R}^n}(p))$ , para todo  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .



Claramente, si construimos  $\sigma^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable que coincida con  $\tilde{\sigma}$  fuera de un entorno de 0 y que no se anule salvo en 0, con ella podremos modificar  $\sigma$  alrededor de  $a$  para tener una sección de  $E$  con un único cero en  $a$ .

Es fácil construir una función diferenciable  $q : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  que coincida con la identidad cerca de 0 y valga 1 lejos de 0. A partir de ella formamos  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida como  $h(x) = f(\|x\|^2)$  (y  $h(0) = 0$ ) que coincide con  $\|x\|^2$  en un entorno de 0 y vale 1 fuera de un entorno de 0 (y no se anula salvo en 0). Ahora basta definir  $\sigma^*(x) = h(x)\tilde{\sigma}(x)$ . Teniendo en cuenta que  $\|\tilde{\sigma}(x)\| = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  se comprueba trivialmente que  $\sigma^*$  es diferenciable en 0. ■

Combinando los últimos teoremas concluimos que si  $E$  es un fibrado vectorial orientable con base compacta orientable y fijamos una métrica de Riemann, la clase de Euler  $\chi_S$  del fibrado de esferas asociado es independiente de la métrica. Esto sigue siendo cierto si la base no es compacta, pues entonces  $\chi_S = 0$ .

**Definición 14.26** Sea  $E$  un fibrado vectorial orientable con base orientable de la misma dimensión  $n \geq 2$  que la fibra. Llamaremos *clase de Euler* de  $E$  a la clase de Euler  $\chi_S$  del fibrado de esferas asociado a cualquier métrica de Riemann sobre  $E$ .

## 14.5 La clase y la característica de Euler

En esta sección nos restringimos al caso del fibrado de tangentes  $TV$  de una variedad diferencial  $V$  compacta y orientable de dimensión  $n$ . Tenemos definidas la clase de Thom  $\theta_V \in \Lambda_{cf}^n(TV)$  y la clase de Euler  $\chi_S \in \Lambda^n(V)$  asociada a cualquier métrica de Riemann en  $V$ . En esta sección probaremos que  $\chi_S$  está determinada por la relación

$$\int_V \chi_S = \chi_V,$$

donde  $\chi_V$  es la característica de Euler de  $V$ .

Definimos  $L_V^p$  como el espacio vectorial de todos los endomorfismos de  $H^p(V)$  y

$$L_V = \bigoplus_p L_V^p.$$

Como  $H^p(V)$  tiene dimensión finita (ver la observación tras 12.20) el teorema 9.31 nos da un isomorfismo natural

$$r_p : H^p(V) \otimes H^p(V)^* \rightarrow L_V^p.$$

Definimos el isomorfismo

$$r : \bigoplus_{p=0}^n H^p(V) \otimes H^p(V)^* \rightarrow L_V$$

dado por

$$r = \bigoplus_{p=0}^n (-1)^{np} r_p.$$

Ahora consideramos los isomorfismos del teorema de dualidad de Poincaré:

$$D_V^p : H^p(V) \longrightarrow H^{n-p}(V)^*,$$

que determinan un isomorfismo

$$1 \otimes D_V^{-1} : \bigoplus_{p=0}^n H^p(V) \otimes H^p(V)^* \longrightarrow \bigoplus_{p=0}^n H^p(V) \otimes H^{n-p}(V).$$

Por último consideramos el isomorfismo de Künneth

$$\kappa : \bigoplus_{p=0}^n H^p(V) \otimes H^{n-p}(V) \longrightarrow H^n(V \times V).$$

**Definición 14.27** El *isomorfismo de Lefchetz* de una variedad diferencial  $n$ -dimensional compacta y orientable  $V$  es el isomorfismo

$$\lambda_V : L_V \longrightarrow H^n(V \times V)$$

dado por  $\lambda_V = r^{-1} \circ (1 \otimes D_V^{-1}) \circ \kappa$ . La *clase de Lefchetz* de  $V$  es la imagen  $\Lambda_V \in H^n(V \times V)$  de la identidad en  $H(V)$ .

La clase de Lefchetz será la relación entre la característica de Euler y la clase de Euler, pasando a su vez por la clase de Thom. Primeramente hemos de demostrar algunos resultados sobre el isomorfismo de Lefchetz. Sean

$$\pi_1 : V \times V \longrightarrow V \quad \text{y} \quad \pi_2 : V \times V \longrightarrow V$$

las proyecciones en la primera y segunda componente respectivamente. Consideraremos a  $V \times V$  como fibrado con base y fibra  $V$  y con la proyección  $\pi_1$ . El teorema siguiente nos da una expresión explícita para  $\lambda_V^{-1}$ .

**Teorema 14.28** Sea  $V$  una variedad diferencial compacta y orientable de dimensión  $n$ . Para cada  $\sigma \in L_V$  y cada  $\alpha \in H(V)$  se cumple la relación

$$\sigma(\alpha) = \int_V^* \pi_2^*(\alpha) \wedge \lambda_V(\sigma).$$

**DEMOSTRACIÓN:** Como ambos miembros son lineales en  $\alpha$  y en  $\sigma$ , podemos suponer que

$$\sigma = r(\beta \otimes D_V \gamma), \quad \beta \in H^p(V), \quad \gamma \in H^{n-p}(V),$$

así como que  $\alpha \in H^q(V)$ . Entonces  $\lambda_V(\sigma) = \beta \times \gamma$  y así

$$\begin{aligned} \int_V^* \pi_2^*(\alpha) \wedge \lambda_V(\sigma) &= (-1)^{pq} \int_V^* \pi_1^*(\beta) \wedge \pi_2^*(\alpha) \wedge \pi_2^*(\gamma) \\ &= (-1)^{qn} \beta \wedge \int_V^* \pi_2^*(\gamma \wedge \alpha). \end{aligned}$$

La última integral es nula salvo si  $p = q$  y lo mismo sucede con  $\sigma(\alpha)$ , luego podemos suponer que así ocurre. En tal caso el signo se reduce a  $(-1)^{pn}$  y usando la observación tras 9.31 vemos que

$$\sigma(\alpha) = (-1)^{pn} r_p(\beta \otimes D_V \gamma)(\alpha) = (-1)^{pn} D_V \gamma(\alpha) \beta = (-1)^{pn} \beta \int_V \gamma \wedge \alpha.$$

Es claro que esta expresión coincide con la anterior. ■

Como consecuencia:

**Teorema 14.29** *Sea  $V$  una variedad compacta y orientable  $n$ -dimensional. La clase de Lefchetz de  $V$  es la única clase  $\Lambda_V \in H^n(V \times V)$  que cumple*

$$\int_V^* \pi_2^*(\alpha) \wedge \Lambda_V = \alpha \quad \text{para todo } \alpha \in H^n(V).$$

En particular  $\int_V^* \Lambda_V = 1$ .

Ahora mostraremos la relación entre la clase de Lefchetz y la característica de Euler. Para ello consideramos la diagonal  $\Delta : V \rightarrow V \times V$ , que nos permite transportar la clase de Lefchetz a  $\Delta^*(\Lambda_V) \in H^n(V)$ . Esta clase está completamente determinada por su integral. Enseguida veremos que dicha integral es precisamente la característica de Euler  $\chi_V$  y más adelante probaremos que  $\Delta^*(\Lambda_V)$  es la clase de Euler  $\chi_S$  de  $V$ .

**Definición 14.30** *Sea  $V$  una variedad compacta y orientable de dimensión  $n$ . Definimos la traza  $\text{Tr} : L_V \rightarrow \mathbb{R}$  como la aplicación lineal dada por*

$$\text{Tr}(\sigma) = \sum_{p=1}^n (-1)^p \text{Tr}(\sigma_p),$$

donde  $\sigma = \sum_p \sigma_p$ , con  $\sigma_p \in L_V^p$  y en el segundo miembro  $\text{Tr}$  representa la traza de un endomorfismo en el sentido algebraico usual.

**Teorema 14.31** *Si  $V$  es una variedad compacta y orientable y  $\sigma \in L_V$ , entonces*

$$\int_V^* \Delta^*(\lambda_V(\sigma)) = \text{Tr}(\sigma).$$

DEMOSTRACIÓN: Por linealidad podemos suponer que  $\sigma = r(\beta \otimes D_V \gamma)$ , con  $\beta \in H^p(V)$ ,  $\gamma \in H^{n-p}(V)$ , de modo que  $\lambda_V(\sigma) = \beta \times \gamma$  y

$$\Delta^*(\lambda_V(\sigma)) = \Delta^*(\pi_1^*(\beta) \wedge \pi_2^*(\gamma)) = \Delta^*(\pi_1^*(\beta)) \wedge \Delta^*(\pi_2^*(\gamma)) = \beta \wedge \gamma,$$

donde hemos usado que  $\Delta \circ \pi_1$  y  $\Delta \circ \pi_2$  son la identidad en  $V$ .

Por otra parte, considerando una base  $e_1, \dots, e_m$  de  $H^p(V)$  y su base dual  $e^1, \dots, e^m$ , observamos que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\sigma) &= (-1)^{np+p} \sum_i e^i(r_p(\beta \otimes D_V \gamma)(e_i)) = (-1)^{np+p} \sum_i e^i(D_V(\gamma)(e_i)\beta) \\ &= (-1)^{np+p} \sum_i D_V(\gamma)(e_i)e^i(\beta) = (-1)^{np+p} D_V \gamma(\beta) \\ &= (-1)^{np+p} \int_V \gamma \wedge \beta = \int_V \beta \wedge \gamma = \int_V \Delta^*(\lambda_V(\sigma)). \end{aligned}$$

■

Si particularizamos este teorema al caso en que  $\sigma$  es la identidad obtenemos:

**Teorema 14.32** *Si  $V$  es una variedad compacta y orientable entonces*

$$\int_V^* \Delta^*(\Lambda_V) = \chi_V.$$

Ahora nos falta probar que  $\Delta^*(\Lambda_V)$  es precisamente la clase de Euler. Para ello usaremos la función exponencial de  $V$  respecto a cualquier métrica de Riemann prefijada. Como  $V$  es compacta podemos tomar un  $\epsilon > 0$  tal que todas las bolas  $B_\epsilon(p)$  son geodésicas, es decir, tal que la función exponencial está definida en el abierto

$$W_\epsilon = \{w \in TV \mid \|w\| < \epsilon\}.$$

Es fácil ver que  $W_\epsilon$  es un subfibrado de  $TV$  con fibra  $B = B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$ . La prueba es idéntica a la comprobación de que el fibrado de esferas de un fibrado vectorial es un subfibrado.

La inclusión  $i : W_\epsilon \rightarrow TV$  transporta la orientación de  $TV$  (como fibrado) a una orientación del fibrado  $W_\epsilon$ . En la página 331 definimos la aplicación  $i_{c\sharp} : \Lambda_c(W_\epsilon) \rightarrow \Lambda_c(TV)$  que extiende cada forma como la forma nula. Allí la llamábamos simplemente  $i_\sharp$ , pero ahora escribimos  $i_{c\sharp}$  para distinguirla de  $i_\sharp : \Lambda(TV) \rightarrow \Lambda(W_\epsilon)$ . (Notemos que al ser  $V$  compacta  $\Lambda_c = \Lambda_{cf}$ .)

Teniendo en cuenta que  $i_{c\sharp} \circ i_\sharp$  es la identidad, el teorema 13.28 nos da la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_c(W_\epsilon) & \xrightarrow{i_{c\sharp}} & \Lambda_c(TV) \\ & \searrow f_B & \downarrow f_{\mathbb{R}^n} \\ & & \Lambda(V) \end{array}$$

de donde se sigue a su vez la de

$$\begin{array}{ccc} H_c(W_\epsilon) & \xrightarrow{i_c^*} & H_c(TV) \\ & \searrow f_B^* & \downarrow f_{\mathbb{R}^n}^* \\ & & H(V) \end{array}$$

Teniendo en cuenta que la fibra de  $W_\epsilon$  es contractible, el teorema 14.17 implica que las dos integrales en fibras son isomorfismos, luego  $i_{c\#}$  también lo es. De aquí se concluye inmediatamente el teorema siguiente:

**Teorema 14.33** *Si  $V$  es una variedad diferencial compacta y orientable, para cada  $\epsilon > 0$  existe un representante  $\omega \in \Lambda_c(TV)$  de la clase de Thom de  $V$  cuyo soporte está contenido en  $W_\epsilon$  y dos cualesquiera de ellos se diferencian en la diferencial de una forma también con soporte en  $W_\epsilon$ .*

Consideramos ahora la función  $h : W_\epsilon \rightarrow V \times V$  dada por  $h(q, w) = (q, \exp_q w)$ . Esta aplicación la definimos ya en la página 297, donde probamos que  $dh|_{(q,0)}$  es un isomorfismo, para todo punto  $q \in V$ . Reduciendo  $\epsilon$  si es necesario podemos suponer que  $h$  es un difeomorfismo local, pero ciertamente es inyectiva, luego es un difeomorfismo en la imagen.

Claramente  $h$  es un homomorfismo de fibrados cuya restricción a cada fibra es la exponencial  $\exp_p$ . Vamos a ver que conserva las orientaciones de los fibrados. Esto es tanto como decir que  $\exp_p$  transforma la orientación de  $B_\epsilon(p) \subset T_p V$  en la de  $V$ . Para ello a su vez basta con que  $d\exp_p|_0 : T_0(T_p V) \rightarrow T_p V$  conserve la orientación.

La orientación de  $V$  es una orientación de  $TV$  como fibrado vectorial, es decir, una determinación de una orientación algebraica de cada espacio vectorial  $T_p V$ . A su vez, ésta induce una orientación de  $TV$  como fibrado, es decir, una determinación de una orientación como variedad de cada fibra  $T_p V$ . Dicha orientación es la que a cada tangente  $T_w(T_p V)$  le asigna la orientación que se corresponde con la de  $T_p V$  mediante el isomorfismo canónico. En particular, el isomorfismo canónico  $\theta_0 : T_0(T_p V) \rightarrow T_p V$  conserva las orientaciones (algebraicas). Ahora bien, según la observación tras el teorema 10.25 tenemos que ésta es precisamente  $d\exp_p|_0$ .

Si  $\omega \in \Lambda_c(TV)$  es un representante de la clase de Thom de  $V$  con soporte contenido en  $W_\epsilon$ , podemos aplicarle  $h_{c\#} : \Lambda_c(W_\epsilon) \rightarrow \Lambda(V \times V)$ . Vamos a demostrar que  $h_{c\#}(\omega)$  representa a la clase de Lefschetz de  $V$ . Para ello usaremos la caracterización del teorema 14.29.

Si  $\eta \in \Lambda(V \times V)$ , entonces el soporte de  $\eta \wedge h_{c\#}(\omega)$  está contenido obviamente en la imagen de  $h$ , luego podemos aplicar el teorema 13.28 para concluir que

$$\int_B h_{\#}(\eta \wedge h_{c\#}(\omega)) = \int_V \eta \wedge h_{c\#}(\omega).$$

Es claro que  $h_{c\#} \circ h_{\#}$  es la identidad, luego tenemos

$$\int_B h_{\#}(\eta) \wedge \omega = \int_V \eta \wedge h_{c\#}(\omega).$$

Tomando clases:

$$\int_B h^*([\eta]) \wedge [\omega] = \int_V [\eta] \wedge [h_{c\#}(\omega)].$$

Ahora particularizamos, de acuerdo con 14.29, al caso en que  $[\eta] = \pi_2^*(\alpha)$ , con  $\alpha \in H^n(V)$ . Nos queda

$$\int_V^* \pi_2^*(\alpha) \wedge [h_{c\sharp}(\omega)] = \int_B^* h^*(\pi_2^*(\alpha)) \wedge [\omega].$$

Si  $\pi_\epsilon : W_\epsilon \rightarrow V$  es la proyección y  $0 : V \rightarrow W_\epsilon$  es la sección nula, tenemos que  $0 \circ h = \Delta$  y  $\pi_\epsilon \circ 0$  es homotópica a la identidad en  $W_\epsilon$  (la homotopía es  $H_t(w) = tw$ ). Por consiguiente  $h$  es homotópica a  $\pi_\epsilon \circ 0 \circ h = \pi_\epsilon \circ \Delta$ . Así pues,

$$\begin{aligned} \int_V^* \pi_2^*(\alpha) \wedge [h_{c\sharp}(\omega)] &= \int_B^* \pi_\epsilon^*(\Delta^*(\pi_2^*(\alpha))) \wedge [\omega] = \int_B^* \pi_\epsilon^*(\alpha) \wedge [\omega] \\ &= \alpha \wedge \int_B^* [\omega] = \alpha \wedge \int_{TV}^* \theta_V = \alpha. \end{aligned}$$

Esto prueba que  $[h_{c\sharp}(\omega)] = \Lambda_V$ . En la sección siguiente usaremos la siguiente consecuencia de este hecho y del teorema anterior:

**Teorema 14.34** *Si  $V$  es una variedad diferencial compacta y orientable y  $U$  es un entorno de la diagonal  $\Delta[V] \subset V \times V$  entonces existe un representante de  $\Lambda_V$  con soporte contenido en  $U$ .*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que  $h^{-1}[U]$  es un entorno de  $V$  en  $TV$  (donde identificamos  $V$  con los vectores nulos) y que por compacidad todo entorno de  $V$  contiene un abierto  $W_\epsilon$ . ■

Ahora es fácil probar el resultado que perseguíamos:

**Teorema 14.35** *Si  $V$  es una variedad compacta y orientable, entonces*

$$\chi_S = \Delta^*(\Lambda_V).$$

DEMOSTRACIÓN: Continuando con la discusión precedente tenemos que  $\Lambda_V = [h_{c\sharp}(\omega)]$ , donde  $[\omega] = \theta_V$ . Por otra parte, la observación tras 14.22 nos da que  $\chi_S = [0_\sharp(\omega)]$ . Como  $0 \circ h = \Delta$  concluimos que

$$\Delta^*(\Lambda_V) = [0_\sharp(h_{c\sharp}(h_{c\sharp}(\omega)))] = [0_\sharp(\omega)] = \chi_S. \quad \blacksquare$$

Combinando esto con el teorema 14.32 tenemos la caracterización de la clase de Euler que anunciamos al principio de la sección:

**Teorema 14.36** *Si  $V$  es una variedad compacta y orientable, entonces su clase de Euler  $\chi_S$  y su característica de Euler  $\chi_V$  guardan la relación dada por*

$$\int_V^* \chi_S = \chi_V.$$

Del teorema 14.24 se sigue ahora que si  $V$  es una variedad compacta y orientable y  $X \in \mathfrak{X}(V)$  es un campo con un número finito de ceros, entonces la suma de los índices de los ceros de  $X$  es igual a la característica de Euler  $\chi_V$ . No obstante, en la sección siguiente podremos probar que la hipótesis de orientabilidad puede suprimirse.

## 14.6 El teorema de punto fijo de Lefchetz

En esta sección daremos una condición suficiente para que una aplicación diferenciable  $f : V \rightarrow V$  en una variedad compacta y orientable  $V$  tenga un punto fijo. Concretamente, la condición es que su número de Lefchetz sea distinto de 0. La definición es la siguiente:

**Definición 14.37** Si  $f : V \rightarrow V$  es una aplicación diferenciable en una variedad compacta y orientable  $V$ , definimos su *número de Lefchetz* como el dado por  $L(f) = \text{Tr}(f^*)$ , donde la traza es la definida en 14.30.

Puede probarse que  $L(f)$  es un entero. Una forma de verlo es comprobar que  $L(f)$  es también la traza del homomorfismo que induce  $f$  en la cohomología singular con coeficientes enteros. Vamos a relacionar el número de Lefchetz con la clase de Lefchetz de  $V$ . Observemos en particular que

$$L(1) = \sum_{p=1}^n (-1)^p \dim H^p(V) = \chi_V.$$

**Teorema 14.38** Si  $f : V \rightarrow V$  es una aplicación diferenciable en una variedad compacta y orientable  $V$  y  $\sigma \in L_V$ , entonces

$$(f \times 1)^*(\lambda_V(\sigma)) = \lambda_V(\sigma \circ f^*).$$

En particular

$$\lambda_V(f^*) = (f \times 1)^*(\Lambda_V).$$

Además

$$L(f) = \int_V^* \Delta^*((f \times 1)^*(\Lambda_V)).$$

DEMOSTRACIÓN: Por linealidad podemos suponer que  $\sigma = r(\alpha \otimes D_V \beta)$ , donde  $\alpha \in H^p(V)$  y  $\beta \in H^{n-p}(V)$ . Entonces, si  $\gamma \in H^p(V)$  se cumple

$$\begin{aligned} (\sigma \circ f^*)(\gamma) &= f^*((-1)^{np}(\alpha \times D_V \beta)(\gamma)) = (-1)^{np} f^*((D_V \beta)(\gamma)\alpha) \\ &= (-1)^{np} (D_V \beta)(\gamma) f^*(\alpha) = r(f^*(\alpha) \otimes D_V \beta)(\gamma). \end{aligned}$$

Por consiguiente  $\sigma \circ f^* = r(f^*(\alpha) \otimes D_V \beta)$ , luego

$$\lambda_V(\sigma \circ f^*) = f^*(\alpha) \times \beta = (f \otimes 1)^*(\alpha \otimes \beta) = (f \otimes 1)^*(\lambda_V(\sigma)).$$

La segunda afirmación se obtiene tomando como  $\sigma$  la identidad. Para la tercera basta aplicar el teorema 14.31. ■

**Teorema 14.39 (Teorema de punto fijo de Lefchetz)** Si  $f : V \rightarrow V$  es una aplicación diferenciable en una variedad compacta y orientable y  $L(f) \neq 0$ , entonces  $f$  tiene al menos un punto fijo.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $f$  no tiene puntos fijos y consideremos la aplicación  $g : V \rightarrow V \times V$  dada por  $g(p) = (f(p), p)$ . Como  $V$  es compacta, también lo es  $g[V]$  y por hipótesis  $g[V] \cap \Delta[V] = \emptyset$ . Así  $U = (V \times V) \setminus g[V]$  es un entorno de la diagonal  $\Delta[V]$ . Según el teorema 14.34 la clase  $\Lambda_V$  tiene un representante  $\eta$  con soporte en  $U$ , lo que implica que  $g_{\#}(\eta) = 0$ , es decir,  $\Delta_{\#}((f \otimes 1)_{\#}(\eta)) = 0$ . Tomando clases vemos que  $\Delta^*((f \times 1)^*(\Lambda_V)) = 0$  y el teorema anterior nos da que  $L(f) = 0$ . ■

Como aplicación consideremos una variedad diferencial compacta no orientable  $V$  y sea  $W$  su variedad de orientaciones (ver la página 12.1). Sea  $J : W \rightarrow W$  la involución canónica. Como  $J$  no tiene puntos fijos, el teorema de Lefschetz nos da que  $L(J) = 0$ .

Teniendo en cuenta la descomposición  $H^p(W) = H_+^p(W) \oplus H_-^p(W)$  y la forma en que  $J_p^*$  actúa sobre estos subespacios, es fácil ver que la traza (en el sentido algebraico usual) de  $J_p^*$  es igual a  $\dim H_+^p(W) - \dim H_-^p(W)$ , luego concluimos que

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \dim H_+^p(W) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \dim H_-^p(W).$$

Por otra parte, tenemos que  $H^p(V) \cong H_+^p(W)$ , luego

$$\chi_W = \sum_{p=0}^n (-1)^p \dim H^p(W) = 2 \sum_{p=0}^n (-1)^p \dim H^p(V) = 2\chi_V.$$

Este hecho tiene interés en sí mismo:

**Teorema 14.40** *Si  $V$  es una variedad diferencial no orientable y  $W$  es su variedad de orientaciones, entonces las características de Euler satisfacen la relación  $\chi_W = 2\chi_V$ .*

Ahora ya podemos calcular la suma de los índices de un campo vectorial sobre una variedad compacta no necesariamente orientable:

**Teorema 14.41** *Sea  $V$  una variedad diferencial compacta de dimensión  $n \geq 2$ , sea  $X \in \mathfrak{X}(V)$  un campo vectorial con un número finito de ceros  $a_1, \dots, a_m$ . Entonces*

$$\sum_{i=1}^m j_{a_i}(X) = \chi_V.$$

DEMOSTRACIÓN: Si  $V$  es orientable el teorema 14.24 nos da que la suma de los índices es la integral de la clase de Euler de  $V$ , y el teorema 14.36 nos da a su vez que ésta es la característica de Euler de  $V$ . Supongamos, pues, que  $V$  no es orientable y sea  $W$  su variedad de orientaciones. Sea  $p : W \rightarrow V$  la proyección natural. Entonces  $dp : TW \rightarrow TV$  es un homomorfismo de fibrados que se restringe a isomorfismos entre las fibras (porque  $p$  es un difeomorfismo local) y es fácil ver que conserva la orientación.



Sean  $b_i$  y  $c_i$  las dos antiimágenes de  $a_i$  por la proyección  $p$ . El teorema 14.23 nos da ahora que  $j_{b_i}(dp_{\#}(X)) = j_{c_i}(dp_{\#}(X)) = j_{a_i}(X)$ . También es claro que  $dp_{\#}(X)$  no se anula en más puntos. Por consiguiente

$$\sum_{i=1}^m j_{b_i}(dp_{\#}(X)) + \sum_{i=1}^m j_{c_i}(dp_{\#}(X)) = 2 \sum_{i=1}^m j_{a_i}(X).$$

Como  $W$  es orientable esta suma es igual a  $\chi_W = 2\chi_V$ , luego simplificando los doses tenemos el teorema. ■

Como consecuencia inmediata tenemos:

**Teorema 14.42** *Una variedad diferencial  $V$  de dimensión  $n \geq 2$  admite un campo de vectores tangentes que no se anula en ningún punto si y sólo si no es compacta o bien es compacta y su característica de Euler es nula.*

DEMOSTRACIÓN: Aplicando el teorema 14.25 al fibrado de tangentes  $TV$  tenemos que si  $V$  no es compacta entonces tiene un campo de vectores tangentes sin ceros y si  $V$  es compacta tiene un campo de vectores  $X$  con a lo sumo un cero en  $a \in V$ . Ahora bien, si  $\chi_V = 0$  el teorema anterior nos da que  $j_a(X) = 0$ . Fijamos una métrica de Riemann en  $V$  y normalizamos  $X$  de modo que podemos considerarlo como una sección del fibrado de esferas asociado con a lo sumo una singularidad en  $a$ , cuyo índice será 0. Por el teorema 14.14 podemos modificar el campo alrededor de  $a$  para tener una sección sin singularidades, es decir, un campo de vectores tangentes a  $V$  que no se anula en ningún punto.

Recíprocamente, si  $V$  es compacta y tiene un campo de vectores sin ceros, el teorema anterior nos da que  $\chi_V = 0$ . ■

En particular, toda variedad de dimensión impar admite un campo de vectores tangentes que no se anula en ningún punto.

Terminamos con un par de consecuencias del teorema de Lefchetz:

**Ejemplo** Consideremos la esfera  $S^n$ . Por el teorema de Künneth,

$$H^n(S^n \times S^n) \cong H^n(S^n) \otimes H^0(S^n) \oplus H^0(S^n) \otimes H^n(S^n).$$

Por consiguiente, la clase de Lefchetz de  $S^n$  ha de ser de la forma

$$\Lambda_{S^n} = a O_{S^n} \otimes 1 \oplus b 1 \otimes O_{S^n} = a\pi_1^*(O_{S^n}) + b\pi_2^*(O_{S^n}),$$

donde  $O_{S^n}$  es la clase de la orientación de  $S^n$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Usando que  $\int_{S^n} \Lambda_{S^n} = 1$  obtenemos que  $b = 1$  y usando que

$$\int_{S^n} \pi_2^*(O_{S^n}) \wedge \Lambda_{S^n} = O_{S^n}$$

llegamos a que  $a = (-1)^n$ . En definitiva,

$$\Lambda_{S^n} = (-1)^n \pi_1^*(O_{S^n}) + \pi_2^*(O_{S^n}).$$

Ahora, si  $f : S^n \rightarrow S^n$  es cualquier aplicación diferenciable, se cumple que

$$(f \times 1)^*(\Lambda_{S^n}) = (-1)^n \pi_1^*(f^*(O_{S^n})) + \pi_2^*(O_{S^n}),$$

con lo que, por el teorema 14.38,

$$\begin{aligned} L(f) &= (-1)^n \int_{S^n}^* \Delta^*(\pi_1^*(f^*(O_{S^n}))) + \int_{S^n}^* \Delta^*(\pi_2^*(O_{S^n})) \\ &= (-1)^n \int_{S^n}^* f^*(O_{S^n}) + \int_{S^n}^* O_{S^n} = (-1)^n \text{grad } f + 1. \end{aligned}$$

De este modo, el teorema de Lefchetz nos dice que  $f$  tendrá un punto fijo siempre que

$$\text{grad } f \neq (-1)^{n+1}.$$

Por otra parte, la aplicación antipodal no tiene puntos fijos y su grado es, naturalmente,  $(-1)^{n+1}$ . ■

**Teorema 14.43** *Si una variedad compacta y orientable  $V$  admite una estructura de grupo de Lie (es decir, una estructura de grupo en la que el producto  $V \times V \rightarrow V$  y la aplicación  $g \mapsto g^{-1}$  son diferenciables) entonces  $\chi_V = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un punto  $g \in V$  en un entorno arcoconexo del elemento neutro 1. Sea  $\phi : [0, 1] \rightarrow V$  un arco diferenciable tal que  $\phi(0) = 1$ ,  $\phi(1) = g$ . Entonces la aplicación  $f : V \rightarrow V$  dada por  $f(v) = vg$  es homotópica a la identidad, a través de la homotopía  $f_t(v) = v\phi(t)$ . Es claro que el número de Lefchetz se conserva por homotopías, así que

$$\chi_V = L(1) = L(f) = 0,$$

pues  $f$  no tiene puntos fijos. ■

No es difícil ver que todo grupo de Lie es orientable, así que en realidad hemos demostrado que todo grupo de Lie compacto tiene característica de Euler nula. En particular, todo grupo de Lie compacto de dimensión 2 es homeomorfo a un toro.

# Apéndice A

## Las superficies compactas

Este apéndice está dedicado a probar que toda superficie compacta es homeomorfa a una de las superficies canónicas  $M_g$  o  $N_h$  definidas en 1.21, es decir, a una esfera con  $g$  asas o con  $h$  cintas de Möbius.

### A.1 Consecuencias del teorema de Jordan

En la sección siguiente haremos uso repetidas veces de una versión fuerte del teorema de la curva de Jordan, que enunciamos aquí sin demostración.<sup>1</sup> Para ello necesitamos algunas definiciones:

**Definición A.1** Un *arco de Jordan* en un espacio topológico  $X$  es una aplicación  $\phi : I \rightarrow X$  que sea un homeomorfismo en su imagen. Si en lugar de  $I = [0, 1]$  el dominio de  $\phi$  es la circunferencia unidad  $S^1$ , entonces  $\phi$  es una *curva de Jordan* en  $X$ . Representaremos por  $\phi^*$  a la imagen de  $\phi$  en  $X$ .

Dado que  $I$  y  $S^1$  son compactos, si el espacio  $X$  es de Hausdorff podemos sustituir “homeomorfismo en su imagen” por “inyectiva y continua”. Alternativamente, una curva de Jordan en  $X$  es un arco continuo  $\phi : I \rightarrow X$  que es inyectivo salvo por que  $\phi(0) = \phi(1)$ .

El teorema clásico de Jordan afirma que una curva de Jordan  $\phi$  en  $\mathbb{R}^2$  divide al plano en dos componentes conexas, ambas con frontera  $\phi^*$ . Esto es una consecuencia inmediata del teorema siguiente:

**Teorema A.2** [12.52] *Toda curva de Jordan  $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se extiende a un homeomorfismo  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .*

En otras palabras, dada una curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ , existe un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  en sí mismo que la transforma en una circunferencia.

---

<sup>1</sup>Está probado en mi libro de variable compleja. Las citas entre corchetes en esta sección hacen referencia a él.

Como  $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$  consta de dos componentes conexas, ambas con  $S^1$  como frontera, ahora es claro que a  $\mathbb{R}^2 \setminus \phi^*$  le sucede lo mismo. Una de las componentes de  $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$  es el disco unidad abierto  $D$ , luego  $\Omega = \phi[D]$  es una de las componentes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \phi^*$ . Como  $\overline{\phi[D]} = \phi[\overline{D}]$  es compacto, tenemos que  $\Omega$  está acotado. Obviamente la otra componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus \phi^*$  no puede estar acotada, luego podemos definir el *interior* de una curva de Jordan  $\phi$  en  $\mathbb{R}^2$  como la (única) componente conexa acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \phi^*$ .

Hemos probado el teorema siguiente:

**Teorema A.3** *Si  $\Omega$  es el interior de una curva de Jordan  $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , entonces  $\phi$  se extiende a un homeomorfismo  $\phi : \overline{D} \rightarrow \overline{\Omega}$ , donde  $D$  es el disco unidad en  $\mathbb{R}^2$ .*

Vamos a necesitar un par de consecuencias más del teorema de Jordan. La primera es que si  $\phi$  es una curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$  entonces  $\phi^*$  tiene interior vacío (porque esto es claramente cierto si  $\phi$  es una circunferencia). La segunda consecuencia es un resultado conocido (ver [12.47]).

**Teorema A.4** *Sea  $\phi$  una curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ . Sean  $a$  y  $b$  dos puntos distintos en  $\phi^*$  y sea  $\gamma$  un arco de Jordan de extremos  $a$  y  $b$  tal que  $\gamma^* \setminus \{a, b\}$  esté contenido en el interior de  $\phi$ . Entonces existen dos arcos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  de extremos  $a$  y  $b$  cuya unión es  $\phi$ , los arcos  $\phi_1 = \psi_1 \cup \gamma$  y  $\phi_2 = \psi_2 \cup \gamma$  son curvas de Jordan, sus interiores son disjuntos y su unión es igual al interior de  $\phi$  menos  $\gamma^*$ .*

En otras palabras, que un arco de Jordan que atravesase el interior de una curva de Jordan desde un punto frontera hasta otro divide a dicho interior en dos partes, que son a su vez los interiores de dos curvas de Jordan.

## A.2 Triangulaciones

La parte más delicada de la clasificación de las superficies compactas consiste en demostrar que todas ellas son triangulables, en el sentido que introducimos a continuación:

**Definición A.5** Un *triángulo* en un espacio topológico  $X$  es una aplicación  $\phi : \Delta \rightarrow X$ , homeomorfismo en su imagen, donde  $\Delta$  es un 2-símplice afín en  $\mathbb{R}^2$ . Las imágenes de las tres caras de dimensión 1 de  $\Delta$  se llaman *lados* o *aristas* del triángulo. Las imágenes de los tres vértices de  $\Delta$  se llaman *vértices* del triángulo.

Cuando no haya confusión no distinguiremos entre un triángulo como aplicación y su imagen. De este modo podemos decir que un triángulo es un subespacio compacto y conexo. Cuando hablemos de la intersección de dos triángulos nos referiremos, naturalmente, a la intersección de sus imágenes. No obstante hemos de tener presente que un triángulo como conjunto no determina sus lados y sus vértices.

Una *triangulación* de una superficie  $S$  es un conjunto finito de triángulos que cubren  $S$  y de modo que la intersección de dos de ellos sea vacía, un vértice común o una arista común. Una superficie  $S$  es *triangulable* si tiene una triangulación.

Notemos que una superficie triangulable es necesariamente compacta. Es posible relajar la noción de triangulación para que no implique la compacidad, pero entraremos en ello.

Una triangulación en una superficie  $S$  determina un complejo simplicial abstracto bidimensional  $\mathcal{K}$ : sus vértices son los vértices de los triángulos que la componen, sus aristas son los pares de vértices unidos por una arista de uno de los triángulos, y sus caras son los conjuntos de vértices de cada triángulo. Sea  $K$  una realización de  $\mathcal{K}$  y llamemos  $K_1$  al 1-esqueleto de  $K$ , es decir, al complejo formado por los vértices y las aristas de  $K$ .

A cada arista de  $K$  le corresponde una arista de  $\mathcal{K}$ , que está formada por dos vértices que determinan a su vez una única arista de la triangulación de  $S$ . Ambas son trivialmente homeomorfas. Fijamos un homeomorfismo para cada arista de  $K$  y con todos ellos formamos un homeomorfismo  $f$  entre  $|K_1|$  y el subespacio de  $S$  formado por la unión de todas las aristas.

Consideremos ahora una cara  $C$  de  $K$ , en correspondencia con una cara de  $\mathcal{K}$  y, por consiguiente, con un triángulo  $\phi : \Delta \rightarrow S$  de la triangulación. La frontera de  $C$  (es decir, sus tres lados con los vértices) es claramente homeomorfa a  $S^1$ . Considerando a  $C$  como subespacio de su envoltura afín, que es homeomorfa a  $\mathbb{R}^2$ , podemos aplicar el teorema A.3 y obtener un homeomorfismo  $\psi : D \rightarrow C$ , donde  $D$  es el disco unidad cerrado.

Componemos  $\psi|_{S^1} \circ f \circ \phi^{-1} : S^1 \rightarrow \Delta$ . De nuevo, la frontera de  $\Delta$  es una curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$  y el teorema A.3 nos da una extensión a un homeomorfismo  $\chi : D \rightarrow \Delta$ . La composición  $\psi^{-1} \circ \chi \circ \phi$  es un homeomorfismo de  $C$  en la imagen de  $\phi$  que extiende a  $f$ . Por consiguiente, se trata de un triángulo con la misma imagen, las mismas aristas y los mismos vértices que  $\phi$ , pero cuyo dominio es una cara de  $K$ . Sustituyendo cada  $\phi$  por este nuevo triángulo, tenemos una triangulación con las mismas características que la original pero con la diferencia de que los distintos triángulos se combinan en un único homeomorfismo de  $K$  en  $S$ . Con esto hemos probado la implicación no trivial del teorema siguiente:

**Teorema A.6** *Una superficie es triangulable si y sólo si es homeomorfa a un poliedro (de dimensión 2).*

Ponemos entre paréntesis la dimensión del poliedro porque del teorema 3.22 se sigue que la dimensión de un poliedro homeomorfo a una superficie es necesariamente 2. En efecto, si el poliedro tiene dimensión  $n$  (es decir, si está generado por un complejo de dimensión  $n$ ) contiene un punto con un entorno abierto homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$  (el interior de un  $n$ -símplice) y, por otra parte, dicho punto ha de tener un entorno abierto homeomorfo a un abierto en  $\mathbb{R}^2$ . La intersección de ambos entornos es un espacio homeomorfo a la vez a un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y de  $\mathbb{R}^2$ . El teorema 3.22 implica que  $n = 2$ .

La prueba de que toda superficie compacta es triangulable la descompondremos en dos partes: en primer lugar daremos una condición suficiente para que una superficie sea triangulable, y después comprobaremos que todas las superficies compactas la satisfacen.

**Definición A.7** Un dominio de Jordan  $J$  en un espacio topológico es un subespacio abierto cuya clausura  $\bar{J}$  es homeomorfa a un disco cerrado de modo que  $J$  se corresponde con el disco abierto. El dominio es *regular* si su clausura está contenida a su vez en un abierto homeomorfo a un disco abierto de  $\mathbb{R}^2$ .

Un cubrimiento abierto de una superficie compacta  $S$  es *triangulable* si está formado por un número finito de recintos de Jordan regulares y las fronteras de dos cualesquiera de ellos se cortan a lo sumo en un número finito de puntos.

**Teorema A.8** Si una superficie tiene un cubrimiento triangulable entonces es triangulable.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\mathcal{C}$  un cubrimiento triangulable de una superficie  $S$ . Podemos eliminar de  $\mathcal{C}$  cualquier abierto  $J$  tal que  $\bar{J}$  esté contenida en  $\bar{J}'$ , para cierto  $J' \in \mathcal{C}$  distinto de  $J$ . Los abiertos restantes siguen siendo un cubrimiento (obviamente triangulable). En efecto, en caso contrario habría un punto  $x \in S$  no contenido en ningún abierto de los restantes. Si  $x \in J_1 \in \mathcal{C}$ , entonces  $\bar{J}_1 \subset \bar{J}_2$ , para cierto  $J_2 \in \mathcal{C}$ . No puede ocurrir que  $x \in \partial J_2$ , pues entonces no tendríamos la inclusión. Por consiguiente  $x \in J_2$ , luego  $J_2$  no es ninguno de los abiertos que hemos dejado, luego  $\bar{J}_2 \subset \bar{J}_3$ , para cierto  $J_3 \in \mathcal{C}$  distinto de  $J_2$  (luego de  $J_1$ ). Procediendo de este modo contradecimos la finitud del cubrimiento.

Así pues, si  $\mathcal{C} = \{J_1, \dots, J_r\}$ , podemos suponer que  $\bar{J}_m \not\subset \bar{J}_n$ , para  $m \neq n$ . Llamaremos  $\gamma_n$  a la frontera de  $J_n$ , que es una curva de Jordan.

Supongamos que existen  $m \neq n$  tales que  $\gamma_n^* \subset \bar{J}_m$ . Vamos a probar que esto sólo puede ocurrir si  $S$  es homeomorfa a una esfera, y es fácil ver que las esferas son triangulables.

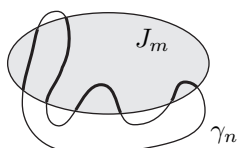
Como  $J_m$  es regular, existe un abierto  $V$  en  $S$  homeomorfo a un disco abierto en  $\mathbb{R}^2$  de modo que  $\bar{J}_m \subset V$ . De hecho  $V$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , luego podemos aplicar el teorema de Jordan. Sea  $\Omega \subset V$  el interior de la curva de Jordan  $\gamma_n$ . Veamos que  $\Omega \subset \bar{J}_m$ .

Para ello basta probar que si  $\gamma_n$  y  $\gamma_m$  son curvas de Jordan en  $\mathbb{R}^2$  con interiores  $\Omega$  y  $J_m$  y  $\gamma_n^* \subset \bar{J}_m$ , entonces  $\Omega \subset \bar{J}_m$ . En efecto,  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{J}_m$  es un abierto conexo no acotado que no corta a  $\gamma_n^*$ , luego está en su exterior, luego  $\Omega \subset \bar{J}_m$ .

Ahora,  $\Omega$  y  $J_n$  son abiertos y cerrados conexos en  $S \setminus \gamma_n^*$ , luego son dos componentes conexas. No pueden ser la misma, pues en tal caso  $\bar{J}_n = \bar{\Omega} \subset \bar{J}_m$ . Por lo tanto son disjuntas. Así pues,  $J_n$  es una componente conexa de  $S \setminus \bar{\Omega}$ . Ahora bien, por el teorema de Jordan  $V \setminus \bar{\Omega}$  es conexo, de donde se sigue fácilmente que  $S \setminus \bar{\Omega}$  también lo es. Así pues,  $J_n = S \setminus \bar{\Omega}$ . En otros términos,

$S$  puede obtenerse identificando dos discos cerrados  $\bar{J}_n$  y  $\bar{\Omega}$  a través de sus fronteras. Por consiguiente  $S$  es homeomorfa a una esfera.

Así pues, de aquí en adelante podemos suponer que  $\gamma_n^* \not\subset \bar{J}_m$  siempre que  $m \neq n$ . Si  $\gamma_n^* \cap J_m \neq \emptyset$ , esta intersección es abierta en  $\gamma_n^*$ . Un abierto en  $I$  es unión de una cantidad a lo sumo numerable de intervalos abiertos disjuntos, luego  $\gamma_n^* \cap J_m$  es unión de una cantidad a lo sumo numerable de arcos disjuntos. Ahora bien, los extremos de estos arcos son puntos de  $\gamma_n^* \cap \gamma_m^*$ , y esta intersección es finita, luego  $\gamma_n^* \cap J_m$  consta de un número finito de arcos con extremos en la frontera  $\gamma_m^*$ .



Ahora vamos a describir una construcción. Con ella, cada curva  $\gamma_n$  quedará dividida en un número finito de arcos de Jordan. Llamemos  $\gamma'_i$  a todos estos arcos, de modo que dos de ellos se cortan a lo sumo en los extremos. Construiremos también un conjunto finito de dominios de Jordan  $J'_i$ , de modo que sus interiores sean disjuntos dos a dos y no contengan ningún punto de ningún  $\gamma_n$ , sus fronteras sean unión de arcos  $\gamma'_i$  y sus clausuras cubran toda la superficie  $S$ .

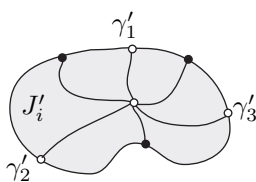
Para ello partimos del dominio  $J_1$  y consideramos una curva  $\gamma_n$  tal que  $J_1 \cap \gamma_n^* \neq \emptyset$ . Según hemos visto, la intersección se descompone en un número finito de arcos. Tomamos uno de ellos, digamos  $\phi_1$ . Sus extremos están en  $\gamma_1$ . Por el teorema A.4 este arco divide a  $\bar{J}_1$  en la unión de las clausuras de dos dominios de Jordan disjuntos. Más concretamente,  $\gamma_1$  se divide en dos arcos y la frontera de cada subdominio es la unión de  $\phi_1$  con uno de ellos.

Consideramos ahora otro de los arcos de  $J_1 \cap \gamma_n^*$ , digamos  $\phi_2$ . Como es disjunto de  $\phi_1$ , de hecho  $\phi_2^*$  está contenido en uno de los dos subdominios que hemos formado. Aplicamos de nuevo el teorema A.4 y éste queda dividido a su vez en otros dos subdominios. Repitiendo este proceso terminamos con un número finito de dominios de Jordan disjuntos dos a dos tales que la unión de sus clausuras es  $\bar{J}_1$ , además sus fronteras están formadas por la unión de un número finito de arcos que se cortan a lo sumo en sus extremos y están contenidos en  $\gamma_1$  o  $\gamma_n$ . Además, ninguno de estos recintos contiene puntos de  $\gamma_1$  o  $\gamma_n$ .

Podemos repetir este proceso cambiando  $\gamma_n$  por cualquier otra curva que corte a  $J_1$ , pero trabajando con los subdominios que hemos obtenido en lugar de  $J_1$  (hay que comprobar que cualquier otro  $\gamma_m$  corta a los subdominios en un número finito de arcos, lo cual se sigue de que la intersección de  $\gamma_m$  con la frontera de los subdominios es también finita). El resultado es que tenemos dividida la clausura de  $J_1$  en unión de las clausuras de un número finito de dominios de Jordan disjuntos dos a dos cuyas fronteras son uniones de un número finito de subarcos de las curvas  $\gamma_m$  que se cortan a lo sumo en sus extremos y de modo que sus interiores no contienen puntos de ninguna curva  $\gamma_m$ .

Repetimos todo el proceso cambiando  $J_1$  por cada uno de los dominios del cubrimiento. Observemos que si tenemos dos divisiones de un  $\gamma_n$  en un número finito de arcos, podemos refinarlas a una sola. Notemos también que un dominio  $J'_i$  obtenido al dividir un  $J_n$  y otro  $J'_j$  obtenido al dividir un  $J_m$  han de ser iguales o disjuntos, pues si tienen un punto en común  $x \in J'_i \cap J'_j$ , como ninguno contiene un punto de la frontera del otro, han de ser iguales (si hubiera un punto  $y \in J'_j \setminus J'_i$ , un arco que uniera  $x$  con  $y$  sin salir de  $J'_j$  habría de pasar la frontera de  $J'_i$ ).

Ahora estamos en condiciones de construir la triangulación: tomamos como vértices los extremos de los arcos  $\gamma'_i$ , más un punto en el interior de cada arco, más un punto en el interior de cada dominio  $J'_i$ .



Tomamos un homeomorfismo  $\phi_i : \Delta \rightarrow \bar{J}'_i$ , donde  $\Delta$  es el disco unidad cerrado, de modo que  $S^1$  se corresponda con la frontera de  $J'_i$ . Podemos exigir que el centro se corresponda con el vértice interior de  $J'_i$ . Los demás vértices en la frontera se corresponden con un número finito de puntos en  $S^1$ . Los radios que unen el centro del disco con estos puntos se corresponden con arcos de Jordan en  $\bar{J}'_i$ . Cada sector circular determinado en  $\Delta$  por dos radios contiguos es homeomorfo a un triángulo, luego  $\phi_i$  se restringe a un número finito de triángulos, que claramente determinan una triangulación de  $S$ . ■

Ahora nos falta probar que toda superficie compacta tiene un cubrimiento triangulable. Para ello necesitamos algunos hechos previos:

Diremos que un conjunto  $\Gamma$  de arcos de Jordan en una superficie  $S$  es *discreto* si todo punto de  $S$  tiene un entorno que corta a lo sumo a un número finito de arcos de  $\Gamma$ .

Obviamente un conjunto finito de arcos es discreto. Si  $A$  es un abierto en  $S$ , la intersección con  $A$  de cada arco de  $\Gamma$  es un conjunto a lo sumo numerable de arcos disjuntos. Llamaremos  $\Gamma \cap A$  al conjunto de todas estas intersecciones. Veamos que sigue siendo un conjunto discreto de arcos en  $A$ . En efecto, fijado un punto  $x \in A$ , tiene un entorno  $V \subset A$  que corta a un número finito de arcos de  $\Gamma$ . De hecho, si  $x$  no está en uno de estos arcos, podemos reducir  $V$  para que no lo corte. Podemos suponer, pues, que los arcos a los que corta  $V$  pasan por  $x$ . Si  $\gamma \in \Gamma$  es uno de estos arcos, el problema es que  $\gamma^* \cap A$  puede haberse dividido en infinitos subarcos, pero reduciendo  $V$  podemos exigir que  $V$  sólo corte al que contiene a  $x$ , llamémoslo  $\gamma_0$ . En efecto, en caso contrario podríamos tomar una sucesión de puntos en  $\gamma^*$ , todos contenidos en subarcos distintos de  $\gamma_0$ , pero que convergieran a  $x$ . Esto es imposible, porque  $\gamma_0^*$  es un entorno de  $x$  en  $\gamma$ .

Teniendo esto en cuenta, podemos probar:



**Teorema A.9** *Sea  $\Gamma$  un conjunto discreto de arcos de Jordan en una superficie  $S$  y sean  $p_1$  y  $p_2$  puntos en  $S$  no contenidos en ninguno de ellos. Entonces  $p_1$  y  $p_2$  pueden ser unidos por un arco de Jordan que corta a los arcos de  $\Gamma$  en un número finito de puntos.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un arco  $\phi$  que una  $p_1$  con  $p_2$ . Podemos exigir que no pase por ningún extremo de ningún arco de  $\Gamma$ . En efecto, si  $p \in \phi^*$ , tiene un entorno que corta a un número finito de arcos de  $\Gamma$ . Restringiéndolo, podemos exigir que no contenga ningún extremo aparte de  $p$ . Así pues, el conjunto de extremos de arcos de  $\Gamma$  contenidos en  $\phi^*$  es discreto en  $\phi^*$ , luego finito. Cada extremo  $p \in \phi^*$  tiene un entorno homeomorfo a un disco abierto, mediante el cual es fácil “desviar”  $\phi$  para hacer que no pase por  $p$ .

Para cada  $p \in \phi^*$  tomamos un entorno  $V_p$  que sea un dominio de Jordan regular, que corte a un número finito de arcos de  $\Gamma$  y que no contenga a ningún extremo. De este modo, la intersección con  $V_p$  de cada arco de  $\Gamma$  es una cantidad a lo sumo numerable de arcos de Jordan con extremos en la frontera. Además cada uno de estos arcos  $\gamma$  tiene interior vacío en  $V_p$ . En efecto, podemos suponer que  $V_p$  es un disco abierto en  $\mathbb{R}^2$  y que los extremos de  $\gamma$  están en la frontera. Podemos unir estos extremos con un arco de Jordan exterior al disco, con lo que formamos una curva de Jordan, que tiene interior vacío en  $\mathbb{R}^2$  por el teorema de Jordan, luego  $\gamma$  también tiene interior vacío en  $V_p$ .

Podemos cubrir  $\phi^*$  con un número finito de entornos  $V_p$ . Además podemos ordenarlos como  $V_1, \dots, V_r$  de manera que  $p_1 \in V_1$ ,  $p_2 \in V_r$  y  $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$ . Tomamos puntos  $q_i \in V_i \cap V_{i+1}$  que no estén en ningún arco de  $\Gamma$  (lo cual es posible porque son un conjunto numerable de cerrados con interior vacío, luego su unión tiene interior vacío por el teorema de Baire). Ahora basta unir  $p_0$  con  $q_1$ , cada  $q_i$  con  $q_{i+1}$  y  $q_{r-1}$  con  $p_2$  mediante arcos contenidos en el correspondiente  $V_i$  que corten a los arcos de  $\Gamma$  en un número finito de puntos. Observemos que al unir dos arcos de Jordan no obtenemos necesariamente un arco de Jordan, pero basta cortar uno por el primer punto donde encuentra al otro.

Así pues, basta probar el teorema sustituyendo  $S$  por un dominio de Jordan y exigiendo que los arcos de  $\Gamma$  tengan sus extremos en la frontera. Más aún, puesto que  $V_i$  corta a un número finito de arcos de  $\Gamma$ , al restringirnos a  $V_i$  podemos descomponer  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$ , de modo que los arcos de un mismo  $\Gamma_i$  sean disjuntos dos a dos (salvo quizá por sus extremos). Como antes, podemos suponer que cada arco de  $\Gamma$  se prolonga hasta una curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ . Teniendo todo esto en cuenta basta probar la afirmación siguiente:

*Sea  $J$  un dominio de Jordan en  $\mathbb{R}^2$  y  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$  un conjunto discreto de arcos de Jordan contenidos en  $J$  salvo por sus extremos (que están en la frontera) y prolongables hasta curvas de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ . Los arcos de cada  $\Gamma_i$  son disjuntos dos a dos (salvo por los extremos). Sean  $p_1$  y  $p_2$  dos puntos en  $J$  no contenidos en ningún arco de  $\Gamma$ . Entonces existe un arco de Jordan contenido en  $J$  que une  $p_1$  con  $p_2$  y que corta a los arcos de  $\Gamma$  en un número finito de puntos.*

Lo demostraremos por inducción sobre  $n$ . El caso  $n = 0$  (es decir,  $\Gamma = \emptyset$ ) es trivial. Suponemos, pues, que se cumple para  $n - 1 \geq 0$  y vamos a probarlo para  $n$ . En primer lugar reduciremos el problema al caso en que  $\Gamma_n$  tiene un solo arco. Para ello tomamos un arco cualquiera  $\phi$  que una  $p_1$  con  $p_2$  en  $J$ . Para cada  $p \in \phi^*$  tomamos un entorno  $V$  que corte a un número finito de arcos de  $\Gamma$ . Restringiéndolo más podemos hacer que sólo corte a aquellos arcos que pasan por  $p$ . A lo sumo un arco de  $\Gamma_n$  pasará por  $p$ . Si existe tal arco  $\gamma$ , el teorema A.2 nos da que existe un homeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que lo transforma en un arco de circunferencia (porque  $\gamma$  se prolonga hasta una curva de Jordan). Dentro de  $f[V]$  podemos tomar un disco abierto  $W$  de centro  $f(p)$  que cortará a la circunferencia en una única componente conexa. Cambiando  $V$  por  $f^{-1}[W]$  tenemos un dominio de Jordan entorno de  $p$  que corta a  $\Gamma$  en un número finito de arcos, de los cuales sólo uno está en  $\Gamma_n$ , a saber,  $\gamma$ , y además ahora  $V \cap \gamma^*$  es un único arco. Además  $\Gamma_i \cap V$  sigue siendo una familia de arcos disjuntos dos a dos (salvo quizá por sus extremos).

En definitiva, al restringirnos a  $V$  tenemos las mismas hipótesis pero ahora  $\Gamma_n$  tiene un único arco o es vacío. Tenemos un entorno  $V$  para cada punto del arco  $\phi$ . Como antes, podemos extraer un subcubrimiento finito de  $\phi^*$  y reducir el problema a cada uno de sus miembros.

Ahora, si  $\Gamma_n = \emptyset$  basta aplicar la hipótesis de inducción. Si  $\Gamma_n = \{\gamma\}$ , por el teorema A.4 tenemos que  $\gamma$  divide a  $J$  en dos componentes conexas. Los puntos  $p_1$  y  $p_2$  no están en  $\gamma$ . Pueden estar ambos en la misma componente o bien en componentes distintas. Si están en la misma componente, digamos  $J'$ , basta aplicar la hipótesis de inducción al dominio  $J$  y los arcos de  $\Gamma_i \cap J$ , para  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Supongamos por último que  $p_1$  y  $p_2$  están en componentes conexas distintas. La idea es tomar un punto  $q \in \gamma^*$  y unir cada  $p_i$  con  $q$  mediante un arco contenido en la componente correspondiente, pero no podemos aplicar la hipótesis de inducción porque  $q$  es un punto frontera. Para llegar a la conclusión debemos elegir  $q$  adecuadamente.

Para cada  $\delta \in \Gamma$  distinto de  $\gamma$ , sea  $F_\delta$  el conjunto de los puntos frontera de  $\delta^* \cap \gamma^*$  en  $\gamma^*$ . Se trata de un cerrado de interior vacío en  $\gamma^*$  (por ser la frontera de un cerrado). Como  $\Gamma$  es numerable, el teorema de Baire nos da que existe un punto  $q \in \Gamma^*$  que no es un extremo y no pertenece a ningún  $F_\delta$ . Llamemos  $J'$  a la componente conexa de  $J \setminus \gamma^*$  que contiene a  $p_1$ . Basta probar que  $p_1$  se puede unir con  $q$  mediante un arco de Jordan contenido en  $J'$  (salvo por su extremo) y que corta a los arcos de  $\Gamma \setminus \{\gamma\}$  en un número finito de puntos. Lo mismo valdrá para  $p_2$  y uniendo los dos arcos tendremos el teorema.

Tenemos que  $J'$  es un dominio de Jordan con  $q$  en su frontera. En principio tenemos un arco de Jordan  $\phi$  que une  $p_1$  con  $q$  (por A.2, pues es trivialmente cierto si  $J'$  es un disco cerrado). Por la elección de  $q$  existe un subarco  $\phi'$  de  $\phi$  con extremo  $q$  que no corta a ningún arco de  $\Gamma$  (salvo a  $\gamma$  en su extremo). En efecto,  $q$  tiene un entorno que sólo corta a un número finito de arcos de  $\Gamma$ . Si en todo entorno menor hubiera puntos de  $\phi^*$  que estuvieran en otro arco de  $\Gamma$ , podríamos tomar una sucesión de tales puntos convergente a  $q$  y de modo que todos estuvieran en el mismo arco  $\delta$ . Por consiguiente  $q \in \delta^* \cap \gamma^*$ , digamos

$q = \delta(t_0)$ , pero  $q$  no es un punto frontera de  $\delta^* \cap \gamma^*$ , luego es un punto interior. Sea  $E \subset \delta^* \cap \gamma^*$  un abierto de  $\gamma^*$ . Podemos tomarlo homeomorfo a un intervalo abierto. Entonces  $E' = \delta^{-1}[E]$  es un conexo en el intervalo unidad  $I$ , luego es un intervalo. Además  $t_0$  lo desconecta, luego está en su interior. Sin embargo, la sucesión en  $\phi^*$  que converge a  $q$  corresponde con una sucesión de parámetros que debe converger a  $t_0$  pero que nunca entra en  $E'$ , lo cual es absurdo.

Así pues, tenemos un arco de Jordan  $\phi'$  con un extremo en  $q$  y otro en un punto  $q' \in J'$  que no corta a ningún arco de  $\Gamma$ . Por hipótesis de inducción en  $J'$  podemos encontrar un arco de Jordan  $\phi''$  que una  $p_1$  con  $q'$  y que corte a las curvas de  $\Gamma \setminus \{\gamma\}$  en un número finito de puntos. En principio, la unión de  $\phi'$  y  $\phi''$  no tiene por qué ser un arco de Jordan, pero basta cortar ambos arcos en el primer punto en que corten y unirlos por él. ■

Finalmente podemos probar:

**Teorema A.10** *Toda superficie compacta es triangulable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $S$  una superficie compacta. Hemos de probar que admite un cubrimiento triangulable. Para cada punto  $p \in S$  tomemos un entorno  $U_p$  homeomorfo a un disco abierto en  $\mathbb{R}^2$ . Tomemos

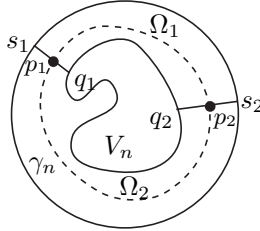
$$p \in V_p \subset \overline{V}_p \subset W_p \subset \overline{W}_p \subset U_p$$

de modo que  $V_p$  y  $W_p$  se correspondan con discos abiertos a través del homeomorfismo. Los abiertos  $V_p$  constituyen un cubrimiento abierto de  $S$ , del que podemos extraer un subcubrimiento finito  $V_1, \dots, V_r$ , con sus correspondientes  $W_n$  y  $U_n$ . Vamos a construir dominios de Jordan  $J_n$  tales que  $V_n \subset \overline{J}_n \subset W_n$  y de modo que sus fronteras  $\gamma_n$  se corten a lo sumo en un número finito de puntos. Éstos formarán claramente un cubrimiento triangulable.

Tomemos  $J_1 = V_1$  y supongamos que ya hemos construido  $J_1, \dots, J_{n-1}$  en las condiciones indicadas. Consideremos un homeomorfismo que transforme  $W_n$  en un disco cerrado en  $\mathbb{R}^2$ . Podemos suponer que su centro se corresponde con un punto de  $V_n$ . Teniendo en cuenta que los arcos  $\gamma_i$  se corresponden con arcos de interior vacío en el disco, podemos encontrar dos puntos  $p_1$  y  $p_2$  en el disco, situados sobre radios distintos, que no estén en ninguno de los arcos. Además, podemos elegirlos de modo que el segmento de radio que los une con la circunferencia no corte a  $\overline{V}_n$ . Llamemos  $s_1$  y  $s_2$  a los segmentos de radio que unen la circunferencia con el primer punto donde los radios encuentran a  $\overline{V}_n$ . Si llamamos  $q_1$  y  $q_2$  los puntos de corte, éstos dividen la frontera de  $V_n$  en dos arcos. Consideramos las dos regiones de Jordan  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  descritas por la figura de la página siguiente.

Puesto que  $p_1$  y  $p_2$  no están sobre ninguno de los arcos  $\gamma_i$ , podemos unirlos con dos segmentos a dos puntos de  $\Omega_1$  sin pasar por ningún  $\gamma_i$ . Por el teorema anterior, estos dos puntos pueden unirse a su vez mediante un arco de Jordan contenido en  $\Omega_1$  que corte a cada  $\gamma_i$  en un número finito de puntos. Al unir este arco con los dos segmentos (eliminando las posibles autointersecciones) obtenemos un arco de Jordan contenido en  $\Omega_1$  salvo por sus extremos, que son  $p_1$  y  $p_2$ . Hacemos lo mismo en  $\Omega_2$  y, al unir los dos arcos, conseguimos una

curva de Jordan  $\gamma_n$ . Llamemos  $J_n$  a su interior. Puesto que  $\mathbb{R}^2 \setminus W_n$  no corta a la frontera de  $J_n$  y es conexo no acotado, ha de estar en el exterior de  $\gamma_n$ , es decir,  $J_n \subset W_n$ .



Hemos de probar que  $V_n \subset \bar{J}_n$ . Como  $J_n$  no tiene frontera en  $V_n$ , si no se da la inclusión es que  $V_n$  está en el exterior de  $J_n$ . La frontera de  $\Omega_1$  está formada por parte de la frontera de  $W_n$  (en el exterior de  $\gamma_n$ ), parte de la frontera de  $V_n$  (también en el exterior), y los segmentos  $s_1$  y  $s_2$  que, por conexión, están en el exterior excepto por los puntos  $p_1$  y  $p_2$ , que están en  $\gamma_n$ . Así,  $\Omega_1$  no tiene puntos frontera en  $J_n$  (y sí tiene puntos exteriores), lo que implica que  $\Omega_1 \cap \bar{J}_n = \emptyset$ , pero esto es absurdo, pues media frontera de  $J_n$  está en  $\Omega_1$ . ■

Con esto hemos probado que toda superficie compacta es homeomorfa a un poliedro de dimensión 2. No obstante, no todo poliedro de dimensión 2 es una superficie. A este respecto tenemos el teorema siguiente:

**Teorema A.11** *Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión 2. Entonces  $|K|$  es una superficie si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:*

- a) *es conexo,*
- b) *cada arista está contenida exactamente en dos caras,*
- c) *las aristas que confluyen en un vértice dado pueden ordenarse en la forma  $a_1, \dots, a_n$  de modo que  $a_i$  y  $a_{i+1}$  (así como  $a_n$  y  $a_1$ ) forman parte de una cara común.*

DEMOSTRACIÓN: Las condiciones son suficientes: si  $x \in |K|$ , sea  $C$  la única cara que lo tiene en su interior. Si  $C$  tiene dimensión 2, entonces el interior de  $C$  es homeomorfo a un abierto en  $\mathbb{R}^2$  y es un entorno de  $x$  en  $|K|$  (es la estrella de  $C$ ).

Si  $C$  es una arista, entonces su estrella está formada por el interior de  $C$  más los interiores de las dos caras que tienen a  $C$  por arista, es decir, está formada por dos triángulos unidos por una arista común y sin sus otras aristas. Es fácil ver que este espacio es homeomorfo a un abierto en  $\mathbb{R}^2$ .

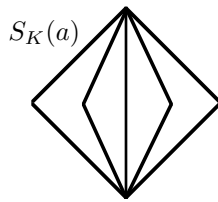
Si  $C$  es un vértice, sean  $a_1, \dots, a_n$  las aristas con vértice  $C$ , ordenadas según la condición c). Entonces las caras con vértice  $C$  serán  $A_1, \dots, A_n$ , donde  $A_i$  tiene por aristas a  $a_i$  y  $a_{i+1}$  (salvo  $A_n$ , que tiene por aristas a  $a_n$  y  $a_1$ ). Entonces, la estrella de  $C$  está formada por  $C$ , más los interiores de las aristas  $a_i$ , más los interiores de las caras  $A_i$ . Es fácil ver que este conjunto es homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^2$ .

Supongamos ahora que  $|K|$  es una superficie. Claramente cumple a). Veamos que b) implica c). Dado un vértice  $v$ , sea  $a_1$  una arista de extremo  $v$  (si no hubiera ninguna,  $v$  sería un punto aislado y  $|K|$  no sería conexo). Existen dos caras  $A_0$  y  $A_1$  que comparten la arista  $a_1$ . Sea  $a_2$  la otra arista del triángulo  $A_1$  con vértice  $v$ . Sea  $A_2$  la otra cara que tiene a  $a_2$  por arista. No puede ocurrir que  $A_2 = A_0$ , pues dos caras no pueden tener dos aristas en común (por definición de complejo simplicial). Sea  $a_3$  la otra arista de  $A_2$  con vértice  $v$ . Puede ocurrir que  $a_3 = a_1$ . Si no es así, existirá otra cara  $A_3$  con arista  $a_3$ . Puesto que el número de aristas es finito, este proceso tiene que terminar. En resumen, existe un número finito de caras  $A_0, \dots, A_n$  con vértice  $v$  de modo que cada una comparte una arista con la siguiente, al igual que  $A_n$  con  $A_0$ . Falta probar que no hay más caras (o más aristas) con vértice  $v$ .

Si las hubiera, podríamos generar otro ciclo de caras  $A_1^1, \dots, A_m^1$  con aristas comunes. Siguiendo así, las caras con vértice  $v$  se dividen en grupos en las condiciones de c). Cada uno de estos grupos de caras (con sus fronteras correspondientes) es cerrado en el entorno simplicial de  $v$ . Al quitar  $v$ , estos grupos se vuelven disjuntos dos a dos, luego  $N(v) \setminus \{v\}$  tiene tantas componentes conexas como grupos de caras. Si  $v$  tiene un entorno homeomorfo a un disco en  $\mathbb{R}^2$ , ningún entorno conexo de  $v$  puede desconectarse al eliminar  $v$ , luego sólo puede haber un grupo de caras. Esto prueba c).

Para probar b), observamos que, si  $x \in |K|$ , entonces  $|S_K(x)|$  ha de ser homotópico a  $S^1$ . De hecho, admitiendo b), es fácil ver que ha de ser homeomorfo, pero de momento probaremos únicamente la homotopía. En efecto, existe un 2-símplice  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  y un homeomorfismo  $h : \Delta \rightarrow h[\Delta] \subset |K|$  tal que  $h[\Delta]$  sea un entorno de  $x$ . Aplicamos el teorema 4.32 tomando como  $K$  (de 4.32) el complejo formado por  $\Delta$  junto sus caras y como  $L$  el complejo  $K$  de este teorema. Concluimos que  $|S_K(x)|$  es homotópico a la esfera de  $h^{-1}(x)$  en  $\Delta$ , que es claramente homeomorfa a  $S^1$ .

Tomemos ahora una arista  $a$  de  $|K|$  de vértices  $v_1, v_2$  y consideremos un punto  $x$  en su interior. Tiene que haber al menos una cara con arista  $a$ , pues en caso contrario  $S_K(x) = \{v_1, v_2\}$ , y la esfera no sería homotópica a  $S^1$  (como es fácil comprobar). Supongamos ahora que hay  $r$  caras con arista  $a$ . Entonces el entorno simplicial de  $x$  está formado por estas  $r$  caras junto con sus aristas y vértices.



La estrella de  $a$  contiene a los interiores de las caras más el interior de  $a$ , luego  $S_K(a)$  está formada por las dos aristas restantes de cada cara, más los vértices que las unen, más  $v_1$  y  $v_2$ . En definitiva,  $S_K(a)$  está formada por  $r$  arcos de Jordan disjuntos unidos por sus extremos. Hemos de probar que  $S_K(a)$  no es homotópico a  $S^1$  salvo si  $r = 2$ . Para ello calculamos sus grupos de homología.

Definimos  $U_1$  como el complementario en  $S_K(a)$  de uno de los extremos de los arcos y  $U_2$  como el complementario del otro extremo. Así,  $V = U_1 \cap U_2$  es  $S_K(a)$  menos los dos extremos. Claramente  $V$  está formado por  $r$  componentes arcoconexas contractibles, luego es homotópico al espacio de  $r$  puntos. Por otra parte,  $U_1$  y  $U_2$  son contractibles. La sucesión de Mayer-Vietoris para la homología reducida es

$$0 \longrightarrow H_2(S_K(a)) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_1(S_K(a)) \longrightarrow \mathbb{A}^{r-1} \longrightarrow 0$$

De hecho, es fácil ver en general que  $H_p(S_K(a)) = 0$  si  $p \neq 0$ . Así pues,

$$H_p(S_K(a)) \cong \begin{cases} \mathbb{A}^{r-1} & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{si } p \neq 1. \end{cases}$$

Comparando con los grupos de  $S^1$ , vemos que  $S_K(a)$  sólo puede ser homotópico a  $S^1$  si  $r = 2$  (y en tal caso es claro que es homeomorfo a  $S^1$ ). ■

### A.3 La clasificación

El siguiente paso en el proceso de clasificación es el teorema siguiente:

**Teorema A.12** *Sea  $K$  un complejo simplicial cuyo poliedro sea una superficie. Entonces  $|K|$  es homeomorfo a un cociente obtenido a partir de un polígono regular de  $2n$  lados identificando éstos dos a dos.*

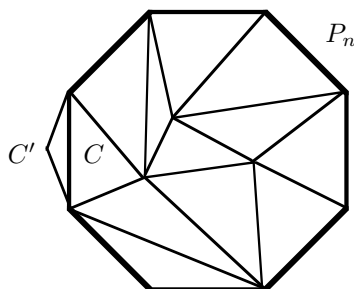
DEMOSTRACIÓN: Tomemos una cara  $C_1$  de  $K$  y consideremos una de sus aristas. Por el teorema A.11, ésta debe ser también la arista de otra cara  $C_2$ . Consideremos, por otra parte, un cuadrado dividido por una diagonal en dos triángulos  $T_1$  y  $T_2$ . Más concretamente, tenemos un complejo simplicial  $P_2$  en  $\mathbb{R}^2$  cuyo poliedro asociado es un cuadrado. Existen homeomorfismos afines  $\psi_i : T_i \rightarrow C_i$  que hacen corresponder la arista común de  $T_1$  y  $T_2$  con la arista común de  $C_1$  y  $C_2$ . Por ser afines, ambos coinciden sobre dicha arista común, luego se extienden a una aplicación simplicial  $\phi_2 : |P_2| \rightarrow |K|$  que es un homeomorfismo en su imagen, la cual está formada por las dos caras  $C_1$  y  $C_2$ .

Supongamos ahora que tenemos un complejo  $P_n$  en  $\mathbb{R}^2$  y una aplicación simplicial  $\phi_n : |P_n| \rightarrow |K|$  que cumplan las condiciones siguientes:

- $|P_n|$  es un polígono convexo de  $2n$  lados, tal que dos lados consecutivos no están alineados.
- Cada arista de  $P_n$  cuyo interior (como símplice) esté contenido en el interior (respecto a  $\mathbb{R}^2$ ) de  $|P_n|$  está exactamente en dos caras de  $P_n$ .
- Cada arista fronteriza de  $P_n$  (es decir, cada lado del polígono) pertenece únicamente a una cara de  $P_n$ .
- La restricción de  $\phi_n$  al interior de  $|P_n|$  es un homeomorfismo en su imagen.

Si  $a$  es una arista fronteriza de  $|P_n|$ , contenida en la cara  $C$ , entonces  $\phi_n[a]$  es una arista de  $K$ . Puede ocurrir que coincida con la imagen de otra arista  $b$  de  $P_n$ . En tal caso,  $b$  ha de ser una arista fronteriza, ya que, si fuera interior,  $b$  estaría compartida por dos caras de  $P_n$ , digamos  $C_1$  y  $C_2$ , ninguna de las cuales puede ser  $C$ , ya que  $\phi_n$  (al ser simplicial) no puede identificar dos aristas de una misma cara. Entonces  $\phi_n[a] = \phi_n[b]$  estaría compartida por las imágenes de las tres caras  $C$ ,  $C_1$  y  $C_2$ , lo cual contradice a A.11. Además  $\phi_n$  no puede identificar  $a$  con más de una arista, pues sus caras correspondientes en  $P_n$  han de ser distintas y al aplicar  $\phi$  obtendríamos de nuevo una arista compartida por más de dos caras.

De este modo, puede haber un grupo de aristas fronterizas de  $|P_n|$  identificadas a pares por  $\phi_n$  y otras no identificadas. Vamos a ver que mientras haya aristas sin identificar podemos extender  $\phi_n$  a un polígono con más lados que cubra más aristas de  $K$ . En efecto, sea  $a$  una arista fronteriza de  $|P_n|$  sin identificar. Sea  $C$  la cara de  $P_n$  a la que pertenece. Entonces  $\phi_n[a]$  es una arista de  $K$  compartida por dos caras. Una ha de ser  $\phi_n[C]$ , llamemos  $T$  a la segunda. No puede ocurrir que  $T$  sea la imagen de una cara  $C'$  de  $P_n$ , pues entonces  $\phi_n$  estaría identificando  $a$  con una arista de  $C'$ . Como  $|P_n|$  es convexo, queda a un lado de la recta que prolonga a  $a$ . Esto nos permite construir un triángulo  $C'$  en  $\mathbb{R}^2$  que comparta con  $|P_n|$  el lado  $a$  únicamente. Del hecho de que los lados consecutivos de  $|P_n|$  no estén alineados se sigue que  $C'$  puede tomarse de modo que  $|P_n| \cup C'$  siga siendo un polígono convexo en las mismas condiciones que  $|P_n|$ .



Llamemos  $P_{n+1}$  al complejo que resulta de añadir a  $P_n$  el triángulo  $C'$  con su nuevo vértice y sus dos nuevas aristas. La aplicación afín que hace corresponder los vértices de  $C'$  con los de  $T$  (de modo que los de  $a$  se correspondan con sus imágenes por  $\phi_n$ ) se restringe a un homeomorfismo de  $C'$  en  $T$  que coincide con  $\phi_n$  sobre  $a$ . Es claro entonces que se combina con  $\phi_n$  para formar una aplicación simplicial  $\phi_{n+1} : |P_{n+1}| \rightarrow |K|$ . Es fácil ver que  $P_{n+1}$  y  $\phi_{n+1}$  cumplen todas las propiedades que cumplen  $P_n$  y  $\phi_n$ , pero ahora  $\phi_{n+1}$  cubre una cara más del complejo  $K$ .

Puesto que  $K$  tiene un número finito de caras, tras un número finito de pasos hemos de llegar a un complejo  $P_n$  cuyas aristas fronterizas estén todas identificadas dos a dos. Ahora falta probar que la aplicación correspondiente  $\phi_n : |P_n| \rightarrow |K|$  es suprayectiva, pues entonces  $|K|$  será homeomorfo al cociente

que resulta de identificar en  $|P_n|$  los pares de aristas con la misma imagen por  $\phi_n$ .

Llamemos  $K'$  a la imagen de  $\phi_n$  y supongamos que en  $K$  hay caras que no están en  $K'$ . Llamemos  $K''$  al subcomplejo de  $K$  formado por las caras que no están en  $K'$  junto con sus aristas y vértices. Como  $K$  es conexo,  $|K'| \cap |K''| \neq \emptyset$ . La intersección ha de ser un poliedro, pero no puede contener ninguna cara (por definición de  $K''$ ) ni tampoco una arista. En efecto, cada arista de  $K'$  está compartida por dos caras de  $K'$ , y por A.11 no puede formar parte de otra cara en  $K''$ . Por consiguiente,  $|K'| \cap |K''|$  está formado por un conjunto (finito) de vértices de  $K$ . De este modo, si a  $|K|$  le quitamos sus vértices obtenemos un espacio disconexo, pero esto es imposible: es fácil probar que si a una superficie le quitamos un conjunto finito de puntos obtenemos un espacio conexo.

Por último, en el enunciado del teorema hemos exigido que el polígono sea regular, mientras que en la prueba hemos obtenido únicamente un polígono convexo. El teorema 1.3 nos permite transformarlo en un disco cerrado. Por conexión, cada lado del polígono se ha de transformar en un arco de circunferencia. Es fácil ver que podemos aplicar un homeomorfismo al disco para que las imágenes de los vértices resulten equiespaciadas, y entonces una nueva aplicación del teorema 1.3 transforma el disco en un polígono regular, de modo que los arcos que hay que identificar se convierten en sus lados. ■

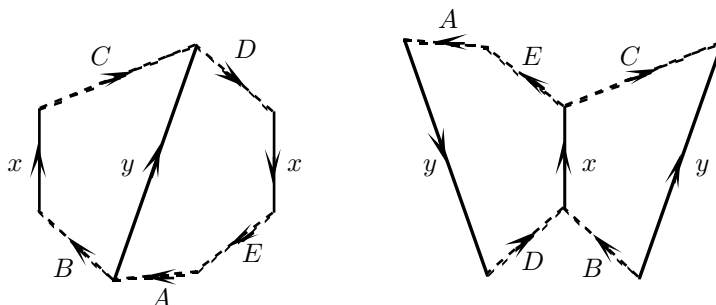
En la sección anterior hemos probado que toda superficie compacta es triangulable, es decir, es homeomorfa a un poliedro (que será, por tanto, una superficie). Uniendo esto al teorema anterior, tenemos que toda superficie es homeomorfa a un cociente obtenido a partir de un polígono regular de  $2n$  lados identificando éstos dos a dos. Tal y como hacíamos en la sección 1.4, podemos representar estos cocientes mediante sucesiones de letras repetidas a pares, con exponentes  $\pm 1$  que indiquen el sentido en que recorremos las aristas al identificarlas. El teorema siguiente nos permitirá reducir cualquier cociente al que determina una de las superficies  $M_g$  o  $N_h$ . Las letras mayúsculas  $A, B, C, \dots$  representarán sucesiones de aristas. Si  $A$  representa a  $a_1, \dots, a_n$ , entonces  $A^{-1}$  representará la sucesión  $a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$ .

**Teorema A.13** *Las operaciones siguientes transforman un cociente de un polígono en otro homeomorfo:*

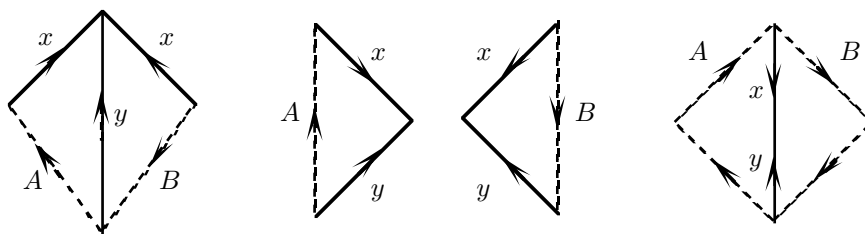
- a) Reemplazar  $ABxCDxE$  por  $AyDB^{-1}yC^{-1}E$ .
- b) Reemplazar  $ABxCDxE$  por  $AyDCy^{-1}BE$ .
- c) Reemplazar  $Axx^{-1}B$  o  $Ax^{-1}xB$  por  $AB$ , supuesto que  $AB$  contiene al menos dos pares de letras.

DEMOSTRACIÓN: a) Basta observar la figura:





Observemos que el polígono resultante no es convexo, pero es fácil ver que es homeomorfo a un polígono convexo. La prueba de b) es similar. Respecto a c) tenemos:



■

Con esto tenemos todo lo necesario para probar el teorema principal:

**Teorema A.14** *Toda superficie compacta es homeomorfa a una de las superficies  $M_g$  o  $N_h$  definidas en 1.21.*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que la superficie es homeomorfa a un cociente de un polígono de  $2n$  lados identificados dos a dos. Diremos que un par de aristas identificadas es *similar* si es de la forma  $x, x$  o  $x^{-1}, x^{-1}$ . Diremos que es *inverso* si es de la forma  $x, x^{-1}$  o  $x^{-1}, x$ . Veamos en primer lugar que la identificación puede tomarse de la forma  $AB$ , donde  $A$  es de la forma  $x_1x_1 \cdots x_r x_r$  y  $B$  contiene únicamente pares inversos (admitiendo que  $A$  o  $B$  sea vacío).

Notemos que, sin más que cambiar la notación, todo par similar puede tomarse de la forma  $x, x$ . Si la identificación es  $CDxExF$ , donde  $C$  ya es de la forma  $x_1x_1x_2x_2 \cdots$ , dos aplicaciones de la operación a) del teorema anterior nos dan

$$CDxExF \rightarrow CyD^{-1}yE^{-1}F \rightarrow Cz z DE^{-1}F.$$

De este modo agrupamos todos los pares similares que hubiera en la identificación original.

En segundo lugar, veamos que podemos reemplazar  $AB$  por  $ACD$ , donde  $C$  es de la forma  $y_1z_1y_1^{-1}z_1^{-1} \cdots y_s z_s y_s^{-1} z_s^{-1}$  y  $D$  no contiene ningún par de pares de aristas de la forma  $\cdots y \cdots z \cdots y^{-1} \cdots z^{-1} \cdots$  así como tampoco pares de aristas similares.

Suponiendo que  $E$  ya es de la forma requerida, aplicamos varias veces la operación b) del teorema anterior, tomando como  $x$  las aristas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  respectivamente:

$$\begin{aligned} EFaGbHa^{-1}Ib^{-1}J &\rightarrow EcGbHc^{-1}FIb^{-1}J \rightarrow EcGdFIHc^{-1}d^{-1}J \\ &\rightarrow EeFIHGde^{-1}d^{-1}J \rightarrow Eefe^{-1}f^{-1}FIHGJ. \end{aligned}$$

Así agrupamos todos los pares de la forma considerada.

Suponiendo que  $A$  sea no vacío, veamos que podemos reemplazar  $ACD$  por  $ED$ , donde  $E$  es de la forma  $x_1x_1x_2x_2\cdots$ . Para ello usamos a) al revés:

$$\begin{aligned} Fxxaba^{-1}b^{-1}G &\leftarrow Fyb^{-1}a^{-1}ya^{-1}b^{-1}G \leftarrow Fyay^{-1}accG \\ &\leftarrow FyyddccG. \end{aligned}$$

De este modo reducimos todos los pares de pares de  $C$  en pares  $x_ix_i$ . Con esto tenemos una sucesión  $ED$ , con  $E$  de la forma  $x_1x_1x_2x_2\cdots$  o bien de la forma  $x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\cdots$  y  $D$  no contiene pares de pares de este tipo ni pares de aristas similares.

Veamos finalmente que podemos eliminar  $D$ . Consideremos el par  $x\cdots x^{-1}$  más cercano a  $E$ . No puede haber aristas entre  $x$  y  $x^{-1}$ , pues si hubiera un par completo  $y\cdots y^{-1}$ , sería un par más cercano a  $E$ , y si hubiera una arista  $y$ , con su inversa formaría un par de pares  $x\cdots y\cdots x^{-1}\cdots y^{-1}$ . Así pues, tenemos un par  $xx^{-1}$  en  $D$ , que puede eliminarse por la operación c) del teorema anterior. De este modo podemos eliminar todos los pares de  $D$  salvo en el caso en que  $E$  sea vacío o conste de un único par  $xx$ . En el primer caso obtenemos  $xx^{-1}yy^{-1}$  o bien  $xyy^{-1}x^{-1}$ ; en el segundo  $xxyy^{-1}$ .

De estos tres, el primero es la esfera,  $M_0$  y el tercero es el plano proyectivo  $N_1$ . El espacio  $xyy^{-1}x^{-1}$  es el mismo que  $x^{-1}xyy^{-1}$  (podemos permutar cíclicamente las aristas) y también el mismo que  $xx^{-1}yy^{-1}$ , o sea, la esfera de nuevo.

Dejando aparte estos casos, podemos eliminar por completo el bloque  $D$ , con lo que llegamos a uno de los espacios

$$M_g = x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\cdots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}, \quad N_h = x_1x_1\cdots x_hx_h.$$

■

Recordemos que en la sección 3.5 probamos que las superficies  $M_g$  y  $N_h$  no son homeomorfas entre sí.

## Apéndice B

# Variedades complejas

Incluimos en este apéndice una breve introducción a las variedades diferenciales complejas, como complemento a los resultados que hemos visto sobre variedades reales. Antes de introducir las variedades complejas veremos lo que podemos decir sobre las funciones de variable compleja en el contexto de las variedades diferenciales reales.

### B.1 Funciones complejas sobre variedades reales

Sea  $V$  una variedad diferencial de dimensión  $2n$ . Podemos considerar a sus cartas como aplicaciones  $z : U \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{C}^n$ , de modo que tenemos  $n$  funciones coordenadas  $z_1, \dots, z_n$  con valores complejos. Si  $z_k = x_k + iy_k$ , entonces las funciones coordenadas “usuales” de la carta son  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ .

Si  $p \in V$ , llamaremos  $C_p^\infty(V, \mathbb{C})$  al espacio de las funciones diferenciables en un entorno de  $p$  con valores en  $\mathbb{C}$ , y  $G_p(V, \mathbb{C})$  será el correspondiente espacio de gérmenes. Éste último tiene estructura de  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial y contiene a  $G_p(V)$  como subespacio vectorial real. Más aún, cada  $\alpha \in G_p(V, \mathbb{C})$  se expresa de forma única como  $\alpha = \beta + i\gamma$ , con  $\beta, \gamma \in G_p(V)$ .

Llamaremos  $T_p(V, \mathbb{C})$  al espacio vectorial de las derivaciones en  $G_p(V, \mathbb{C})$ , es decir, las aplicaciones  $\mathbb{C}$ -lineales  $v : G_p(V, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  que cumplen

$$v(\alpha\beta) = v(\alpha)\beta(p) + \alpha(p)v(\beta).$$

Cada  $v \in T_p(V)$  se extiende a una derivación en  $T_p(V, \mathbb{C})$  estableciendo que

$$v(\beta + i\gamma) = v(\beta) + iv(\gamma), \quad \text{para cada } \beta, \gamma \in G_p(V).$$

Una comprobación rutinaria muestra que  $v$  así extendida es ciertamente una derivación  $\mathbb{C}$ -lineal. Más aún, la extensión es única pues —de hecho— si dos derivaciones  $v, w \in T_p(V, \mathbb{C})$  coinciden sobre las funciones coordenadas  $x_k, y_k$ , entonces son iguales. En efecto, basta probar que  $v$  y  $w$  coinciden sobre  $G_p(V)$ , para lo cual, a su vez, basta probar que coinciden las funciones  $\operatorname{Re} v$  e  $\operatorname{Im} v$  (restringidas a  $G_p(V)$ ), pero una simple comprobación muestra que ambas

son derivaciones reales, por lo que coinciden si actúan igual sobre las funciones coordenadas.

Así pues, podemos identificar a  $T_p V$  con un subespacio vectorial (real) de  $T_p(V, \mathbb{C})$ . Más exactamente, si  $v \in T_p(V, \mathbb{C})$ , tenemos que

$$v = \sum_{k=1}^n \left( v(x_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p + v(y_k) \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p \right),$$

pues ambos miembros coinciden sobre las funciones coordenadas. De hecho, las derivaciones  $\partial_{x_k}|_p, \partial_{y_k}|_p$  son una base de  $T_p(V, \mathbb{C})$  (si una combinación lineal de ellas es nula, al hacerla actuar sobre las funciones coordenadas obtenemos que todos los coeficientes son nulos). Esto implica que  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_p(V) \cong T_p(V, \mathbb{C})$ .

Separando las partes reales de las imaginarias de los coeficientes de una combinación lineal de los vectores de la base deducimos que cada elemento de  $T_p(V, \mathbb{C})$  se expresa de forma única como  $v + iw$ , con  $v, w \in T_p(V)$ .

Cada forma  $\omega \in T_p^* V$  se extiende a una forma en  $T_p(V, \mathbb{C})^*$  mediante

$$\omega(v + iw) = \omega(v) + i\omega(w).$$

Es fácil ver que la extensión es ciertamente  $\mathbb{C}$ -lineal y la base dual  $dx_k|_p, dy_k|_p$  se corresponde con la base dual de  $\partial_{x_k}|_p, \partial_{y_k}|_p$  en  $T_p(V, \mathbb{C})^*$ , por lo que tenemos el isomorfismo  $T_p(V, \mathbb{C})^* \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_p^* V$ . Análogamente al caso de los espacios tangentes, cada  $\omega \in T_p(V, \mathbb{C})^*$  se expresa de forma única como  $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ , con  $\omega_1, \omega_2 \in T_p^* V$ .

Extendemos el operador  $d : C_p^\infty(V, \mathbb{C}) \longrightarrow T_p(V, \mathbb{C})^*$  mediante

$$d(f + ig) = df + i dg.$$

Equivalentemente:  $df(v) = v(f)$ , para toda  $v \in T_p(V, \mathbb{C})$ ,  $f \in C_p^\infty(V, \mathbb{C})$ .

En particular tenemos definidas las formas  $dz_k|_p = dx_k|_p + idy_k|_p$  y, si llamamos  $\bar{z}_k = x_k - iy_k$  a la composición de  $z_k$  con la conjugación compleja, también tenemos  $d\bar{z}_k|_p = dx_k|_p - idy_k|_p$ .

Las formas  $dz_k|_p, d\bar{z}_k|_p$  son claramente una base de  $T_p(V, \mathbb{C})^*$ . Resulta conveniente considerar su base dual en  $T_p(V, \mathbb{C})$ , que no es sino la formada por las derivaciones

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_p = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p - i \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \Big|_p = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p + i \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p \right).$$

De este modo, para cada  $v \in T_p(V, \mathbb{C})$  se cumple

$$v = \sum_{k=1}^n \left( v(z_k) \frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_p + v(\bar{z}_k) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \Big|_p \right).$$

Así mismo, si  $f \in C_p^\infty(V, \mathbb{C})$  se cumple

$$df_p = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial z_k} \Big|_p dz_k|_p + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \Big|_p d\bar{z}_k|_p \right).$$

Si  $f : V \rightarrow W$  es una aplicación diferenciable entre variedades de dimensión  $2n$  y  $2m$  respectivamente y  $p \in V$ , definimos  $df_p : T_p(V, \mathbb{C}) \rightarrow T_{f(p)}(V, \mathbb{C})$  mediante  $df_p(v)(g) = v(f \circ g)$ . Es fácil ver que a través de los isomorfismos  $T_p(V, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes T_p V$  y  $T_{f(p)}(W, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes T_{f(p)} W$  esta aplicación se corresponde con  $1 \otimes df_p$ .

Poco más puede decirse sin introducir la noción de variedad compleja. Observemos que el espacio  $T_p(V, \mathbb{C})$  no es “razonable” como espacio tangente complejo, pues tiene dimensión  $2n$  sobre  $\mathbb{C}$ , cuando, por ejemplo, sería de esperar que el espacio tangente complejo de  $\mathbb{C}^n$  fuera canónicamente isomorfo a  $\mathbb{C}^n$  en lugar de tener dimensión  $2n$ .

## B.2 Estructuras analíticas

Las variedades complejas se definen de modo que permitan definir la noción de función diferenciable compleja o función holomorfa. Para funciones definidas en abiertos de  $\mathbb{C}^n$  la definición no requiere ninguna estructura adicional, y constituye la base de la generalización del concepto a variedades arbitrarias:

**Definición B.1** Una función  $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  es *holomorfa* si es diferenciable (como aplicación de un abierto en  $\mathbb{R}^{2n}$  en  $\mathbb{R}^{2m}$ ) y para cada  $p \in U$ , la diferencial  $df_p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  es  $\mathbb{C}$ -lineal. Una biyección holomorfa con inversa holomorfa entre dos abiertos de  $\mathbb{C}^n$  se llama *transformación conforme*.

Es claro que la composición de funciones holomorfas es una función holomorfa.

Un *atlas analítico* en una variedad diferencial  $V$  de dimensión  $2n$  es un atlas de  $V$  tal que si  $w$  y  $z$  son dos sistemas de coordenadas (considerados como aplicaciones en  $\mathbb{C}^n$ ) entonces la aplicación  $w^{-1} \circ z$  es una transformación conforme. Una *estructura analítica* en  $V$  es un atlas analítico maximal respecto a la inclusión. Una *variedad diferencial compleja* es una variedad diferencial dotada de una estructura analítica. Si  $V$  tiene dimensión  $2n$  como variedad real diremos que tiene dimensión  $n$  como variedad compleja.

Observemos que no es necesario tener una estructura diferencial previa, sino que cada estructura analítica determina en particular una estructura diferencial. Como en el caso real, cada atlas analítico está contenido en una única estructura analítica.

Una aplicación  $f : V \rightarrow W$  entre dos variedades complejas es *holomorfa* si sus lecturas respecto de las cartas de las estructuras analíticas son holomorfas.

Es claro que basta con que para cada punto  $p$  existan cartas alrededor de  $p$  y  $f(p)$  respecto a las cuales la lectura de  $f$  sea holomorfa. Obviamente todo abierto de  $\mathbb{C}^n$  es una variedad compleja de dimensión  $n$  con el atlas que tiene por única carta a la identidad. Las cartas de una variedad  $V$  resultan ser las transformaciones conformes entre un abierto de  $V$  y un abierto de  $\mathbb{C}^n$ .

Sea  $V$  una variedad compleja y  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  una función diferenciable. Por definición,  $f$  es holomorfa si para cada  $p \in V$  existe un sistema de coordenadas analítico  $z$  alrededor de  $p$  de modo que  $f = z^{-1} \circ f$  es holomorfa, lo cual equivale a su vez a que  $d\tilde{f}_{z(p)} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  sea  $\mathbb{C}$ -lineal.

Más concretamente, han de existir números complejos  $\Delta_k = \alpha_k + i\beta_k$  tales que

$$d\tilde{f}_{z(p)}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=1}^n \Delta_k z_k = \sum_{k=1}^n ((\alpha_k x_k - \beta_k y_k) + i(\alpha_k y_k + \beta_k x_k)).$$

Si comparamos con

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \operatorname{Re} \tilde{f}}{\partial x_k} \Big|_{z(p)} x_k + \frac{\partial \operatorname{Re} \tilde{f}}{\partial y_k} \Big|_{z(p)} y_k + i \frac{\partial \operatorname{Im} \tilde{f}}{\partial x_k} \Big|_{z(p)} x_k + i \frac{\partial \operatorname{Im} \tilde{f}}{\partial y_k} \Big|_{z(p)} y_k \right),$$

que es otra expresión para  $d\tilde{f}_{z(p)}(z_1, \dots, z_n)$ , vista como aplicación de  $\mathbb{R}^{2n}$  en  $\mathbb{R}^2$ , concluimos que

$$\alpha_k = \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_k} \Big|_p = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y_k} \Big|_p, \quad \beta_k = -\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y_k} \Big|_p = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_k} \Big|_p.$$

Recíprocamente, basta con que se den las igualdades anteriores entre las derivadas parciales (en cada punto  $p$  respecto de algún sistema de coordenadas a su alrededor) para que los  $\Delta_k$  definidos por las ecuaciones anteriores justifiquen que  $d\tilde{f}_p$  es  $\mathbb{C}$ -lineal. Dichas relaciones entre las derivadas parciales se conocen como *ecuaciones de Cauchy-Riemann*. Una simple comprobación muestra que esta condición es equivalente a la siguiente caracterización:

**Teorema B.2** *Una función diferenciable  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  definida sobre una variedad compleja de dimensión  $n$  es holomorfa si y sólo si para cada  $p \in V$  existe un sistema de referencia  $z$  alrededor de  $p$  tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \Big|_p = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Además en tal caso esta relación se cumple para cualquier sistema de referencia de  $V$ .

Diremos que una función  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  es *antiholomorfa* si su conjugada  $\bar{f}$  (la composición con la conjugación compleja) es holomorfa. Es inmediato comprobar las relaciones

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z_k} \Big|_p = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \Big|_p, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}_k} \Big|_p = \frac{\partial f}{\partial z_k} \Big|_p,$$

de donde se sigue que una función  $f$  es antiholomorfa si y sólo si sus derivadas respecto a las coordenadas  $z_k$  son nulas. Esto nos permite definir:

$$T_p^h V = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \Big|_p \right\rangle, \quad T_p^a V = \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \Big|_p \right\rangle,$$

sin que la definición dependa del sistema de coordenadas, pues el *espacio tangente holomorfo*  $T_p^h V$  está formado por las derivaciones que se anulan sobre las funciones antiholomorfas y el *espacio tangente antiholomorfo*  $T_p^a V$  está formado por las derivaciones que se anulan sobre las funciones holomorfas. Obviamente tenemos la relación

$$T_p(V, \mathbb{C}) = T_p^h V \oplus T_p^a V.$$

Es inmediato comprobar que si  $f : V \rightarrow W$  es holomorfa y  $p \in V$ , entonces  $df_p$  se restringe a una aplicación lineal  $df_p : T_p^h V \rightarrow T_{f(p)}^h W$ .

El espacio  $T_p^h V$  tiene dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{C}$  y dimensión  $2n$  sobre  $\mathbb{R}$ . De hecho es canónicamente isomorfo al espacio tangente real  $T_p V$ . En efecto, observemos que una base de  $T_p^h V$  sobre  $\mathbb{R}$  está formada por los vectores  $\partial_{z_k}|_p$  e  $i\partial_{z_k}|_p$ , que son las imágenes de los vectores  $\partial_{x_k}|_p$  y  $\partial_{y_k}|_p$  a través de la composición de la extensión  $e : T_p V \rightarrow T_p(V, \mathbb{C})$  con la proyección  $\pi : T_p(V, \mathbb{C}) \rightarrow T_p^h V$ .

Esto nos permite identificar a  $T_p V$  con  $T_p^h V$ , de modo que a partir de ahora escribiremos simplemente  $T_p V$ .

Notemos ahora un hecho importante sobre las variedades complejas y las aplicaciones holomorfas. Se trata de una consecuencia del siguiente hecho algebraico:

*Si  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  es una aplicación  $\mathbb{C}$ -lineal, también es una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal, y el determinante de  $f$  como aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal es el módulo al cuadrado de su determinante como aplicación  $\mathbb{C}$ -lineal.*

En efecto, si  $(e_k)$  es la base canónica de  $\mathbb{C}^n$ , entonces una  $\mathbb{R}$ -base de  $\mathbb{C}^n$  la forman los vectores  $e_k, ie_k$ . Si  $f(e_k) = (a_{kj} + ib_{kj})$ , entonces tenemos que  $f(ie_k) = (-b_{kj} + ia_{kj})$ , con lo que la matriz de  $f$  como aplicación  $\mathbb{C}$ -lineal es  $A = (a_{kj} + ib_{kj})$  y la matriz de  $\mathbb{C}$  como aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal es

$$B = \left( \begin{array}{c|c} a_{kj} & b_{kj} \\ \hline -b_{kj} & a_{kj} \end{array} \right).$$

Para calcular su determinante podemos considerarla como matriz compleja, con lo que

$$\left| \begin{array}{c|c} a_{kj} & b_{kj} \\ \hline -b_{kj} & a_{kj} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} a_{kj} + ib_{kj} & b_{kj} \\ \hline -b_{kj} + ia_{kj} & a_{kj} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} a_{kj} + ib_{kj} & b_{kj} \\ \hline 0 & a_{kj} - ib_{kj} \end{array} \right|,$$

con lo que  $\det B = (\det A)(\det \bar{A}) = (\det A)(\overline{\det A}) = |\det A|^2$ . ■

En particular, el determinante jacobiano de una transformación conforme entre dos abiertos de  $\mathbb{C}^n$  es mayor que 0 en todo punto o, dicho de otro modo, las transformaciones conformes conservan la orientación. Como consecuencia, toda variedad compleja es orientable. Así mismo es claro que las transformaciones conformes entre variedades complejas conservan la orientación.

**Ejemplo: Los espacios proyectivos** Las variedades complejas más simples después de los abiertos de  $\mathbb{C}^n$  son los espacios proyectivos complejos  $P^n(\mathbb{C})$ .

Recordemos que  $P^n(\mathbb{C})$  puede definirse como el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión 1 de  $\mathbb{C}^{n+1}$  o, equivalentemente, como el conjunto cociente de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  respecto a la relación de equivalencia  $w R z \leftrightarrow w = \lambda z$ , para un  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Llamemos  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n(\mathbb{C})$  a la proyección natural. La topología de  $P^n(\mathbb{C})$  es la topología de identificación determinada por  $\pi$ , es decir, los abiertos de  $P^n(\mathbb{C})$  son los conjuntos cuya antiimagen es abierta. Como la restricción de  $\pi$  a la esfera unitaria es suprayectiva,  $P^n(\mathbb{C})$  es un espacio compacto conexo.

Un atlas analítico de  $P^n(\mathbb{C})$  se obtiene tomando como abiertos coordenados los abiertos  $U_k$  formados por los puntos cuya coordenada  $k$ -ésima es no nula y como carta  $z : U_k \rightarrow \mathbb{C}^n$  la aplicación

$$[z_1, \dots, z_{n+1}] \mapsto [z_1/z_k, \dots, z_{k-1}/z_k, z_{k+1}/z_k, \dots, z_{n+1}/z_k].$$

Su inversa es la que a cada  $n$ -tupla le inserta un 1 en la posición  $k$ -ésima. En inmediato comprobar que la composición de la inversa de una carta con otra carta es holomorfa.

Consideremos en particular el espacio  $P^1(\mathbb{C})$ . La aplicación  $\mathbb{C} \rightarrow P^1(\mathbb{C})$  dada por  $z \mapsto [z, 1]$  es una transformación conforme entre  $\mathbb{C}$  y un abierto de  $P^1(\mathbb{C})$  (es la inversa de una carta), lo que nos permite identificar a  $\mathbb{C}$  con su imagen, que es todo  $P^1(\mathbb{C})$  menos el punto  $\infty = [1, 0]$ . Así pues, tenemos que  $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Esto muestra que  $P^1(\mathbb{C})$  es homeomorfo a  $S^2$  (a menudo se le llama *esfera de Riemann*). Vamos a construir explícitamente una estructura analítica que convierta a  $S^2$  en una variedad conformemente equivalente a  $P^1(\mathbb{C})$ .

Para ello distinguimos el polo norte  $N = (0, 0, 1)$  y el polo sur  $S = (0, 0, -1)$ . Como carta de  $S^2 \setminus \{N\}$  tomamos la proyección estereográfica

$$(x, y, z) \mapsto \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

y como carta de  $S^2 \setminus \{S\}$  tomamos una variante de la proyección estereográfica, a saber:

$$(x, y, z) \mapsto \left( \frac{x}{1+z}, \frac{-y}{1+z} \right).$$

Es claro que estas cartas son difeomorfismos respecto a la estructura diferencial usual de  $S^2$ , es decir, determinan la única estructura diferencial en  $S^2$  que la convierte en subvariedad de  $\mathbb{R}^3$ . Para probar que constituyen un atlas analítico basta ver que la inversa de una carta compuesta con la otra es la aplicación de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  en sí mismo que, al identificarlo con  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , se corresponde con la aplicación  $z \mapsto 1/z$ . Esta aplicación es concretamente

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$



Al componer la primera carta con esta aplicación obtenemos

$$\left( \frac{x}{\frac{1-z}{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\frac{1-z}{x^2+y^2}} \right) = \left( \frac{x}{1+z}, \frac{-y}{1+z} \right),$$

donde hemos usado que  $x^2 + y^2 = 1 - z^2 = (1+z)(1-z)$ . Así pues, tenemos ciertamente la segunda carta.

Ahora construimos una transformación conforme entre  $S^2$  y  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . La composición de la proyección estereográfica en  $S^2 \setminus \{N\}$  con la inclusión  $z \mapsto [z, 1]$  es una transformación conforme entre  $S^2 \setminus \{N\}$  y  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty\}$  (es la composición de una carta de  $S^2$  con la inversa de una carta de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ). Si la completamos con la asignación  $N \mapsto \infty$  obtenemos una biyección  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Falta probar que su restricción a entornos respectivos de  $N$  e  $\infty$  es conforme. Para ello calculamos su lectura respecto a las cartas que estamos considerando alrededor de estos puntos. Se trata de una aplicación  $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Si tomamos  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , su imagen se calcula aplicando la inversa de la carta alrededor de  $S$  (con lo que obtenemos un punto de  $S^2 \setminus \{N, S\}$ ), luego la carta alrededor de  $N$  (con lo que obtenemos  $1/z$ ), luego pasamos a  $[1/z, 1] = [1, z]$  y por último la carta alrededor de  $\infty$  nos lleva a  $z$ . En definitiva,  $\tilde{f}(z) = z$  para todo  $z \neq 0$ , pero  $f(N) = \infty$  implica que  $\tilde{f}(0) = 0$ , con lo que  $\tilde{f}$  resulta ser la identidad. ■

Para terminar la sección introducimos un concepto algebraico que subyace en los resultados que hemos obtenido. En general, si  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  de dimensión finita  $n$ , podemos considerar el automorfismo  $I : V \rightarrow V$  dado por  $I(v) = iv$ , que tiene la propiedad de que  $I^2 = -1$ , donde  $1$  representa a la identidad en  $V$ . Si consideramos a  $V$  como espacio vectorial real de dimensión  $2n$  entonces  $I$  sigue siendo un automorfismo con estas propiedades.

**Definición B.3** Si  $V$  es un espacio vectorial real de dimensión finita, una *estructura compleja* en  $V$  es una aplicación lineal  $I : V \rightarrow V$  tal que  $I^2 = -1$ .

Es inmediato que una estructura compleja es necesariamente un automorfismo y además induce en  $V$  una estructura de espacio vectorial complejo mediante el producto

$$(a + bi)v = av + bI(v), \quad a, b \in \mathbb{R}, v \in V.$$

SI  $V$  es un espacio vectorial complejo, la estructura de espacio vectorial inducida por la estructura compleja  $I(v) = iv$  es la propia estructura de  $V$ . Así pues, es equivalente hablar de espacios vectoriales complejos o de espacios vectoriales reales con una estructura compleja  $I$ .

Si  $V$  es un espacio vectorial real con una estructura compleja  $I$ , podemos tomar una  $\mathbb{C}$ -base  $e_1, \dots, e_n$  de  $V$ , de modo que  $e_1, \dots, e_n, I(e_1), \dots, I(e_n)$  es una  $\mathbb{R}$ -base de  $V$ . Consideramos  $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$  y definimos

$$u_k = \frac{1}{2}(e_k - iI(e_k)), \quad \bar{u}_k = \frac{1}{2}(e_k + iI(e_k)), \quad (\text{B.1})$$

con lo que los vectores  $u_k, \bar{u}_k$  forman una base de  $V^{\mathbb{C}}$ . Además, si extendemos el automorfismo  $I$  a  $V^{\mathbb{C}}$  identificándolo con  $1 \otimes I$ , tenemos que

$$I(u_k) = iu_k, \quad I(\bar{u}_k) = -i\bar{u}_k.$$

Si definimos

$$V^h = \{v \in V^{\mathbb{C}} \mid I(v) = iv\}, \quad V^a = \{v \in V^{\mathbb{C}} \mid I(v) = -iv\}$$

tenemos que  $V^{\mathbb{C}} = V^h \oplus V^a$ . Además, la inclusión  $V \rightarrow V^{\mathbb{C}}$  dada por  $v \mapsto 1 \otimes v$  seguida de la proyección de  $V^{\mathbb{C}}$  en  $V^h$  es un isomorfismo de espacios vectoriales complejos (considerando en  $V$  la estructura inducida por  $I$ ).

Con esto tenemos una réplica abstracta de lo que sucede en cada espacio tangente de una variedad compleja. Para trasladar estos hechos a una variedad sólo hemos de sustituir el endomorfismo  $I$  por un tensor de tipo  $(1, 1)$ .

**Definición B.4** Una *estructura casi compleja* en una variedad diferencial  $V$  es un tensor  $I$  de tipo  $(1, 1)$  tal que para todo  $p \in V$  (identificando a  $I_p$  con endomorfismo  $I_p : T_p V \rightarrow T_p V$  según el teorema 9.31) se cumple  $I_p^2 = -1$ .

Una variedad  $V$  dotada de una estructura casi compleja es una *variedad casi compleja*.

Toda variedad compleja  $V$  tiene asociada de forma natural una estructura casi compleja: para cada  $p \in V$  definimos  $I_p$  como el automorfismo de  $T_p V$  que se corresponde con la multiplicación por  $i$  a través del isomorfismo canónico  $T_p V \cong T_p^h V$ . De este modo, si  $(x_k, y_k)$  es cualquier sistema de coordenadas analítico alrededor de  $p$ , tenemos que  $I_p(\partial_{x_k}|_p) = I_p(\partial_{z_k}|_p) = i\partial_{z_k}|_p = i\partial_{y_k}|_p$  y, análogamente,  $I_p(\partial_{y_k}|_p) = -\partial_{x_k}|_p$ . Estas relaciones muestran que los coeficientes de  $I$  respecto a la base asociada a la carta son constantes, por lo que  $I$  es, ciertamente, un tensor diferenciable.

El nombre de “estructuras casi complejas” se debe a que para que una variedad casi compleja sea de hecho una variedad compleja es hace falta una condición adicional, cuya necesidad acabamos de comprobar:

**Teorema B.5** *Sea  $V$  una variedad diferencial de dimensión  $2n$  dotada de una estructura casi compleja  $I$ . Entonces  $V$  admite una estructura de variedad compleja cuya estructura casi compleja asociada es  $I$  si y sólo si para todo punto  $q \in V$  existe un sistema de coordenadas  $(x_k, y_k)_{k=1}^n$  (definido en un entorno  $U$  de  $q$ ) de modo que para todo  $p \in U$  se cumple*

$$I_p(\partial_{x_k}|_p) = \partial_{y_k}|_p, \quad I_p(\partial_{y_k}|_p) = -\partial_{x_k}|_p.$$

*En tal caso las cartas analíticas de  $V$  son precisamente las que cumplen esta condición.*

DEMOSTRACIÓN: Sean  $(x_k, y_k)$  y  $(u_k, v_k)$  dos sistemas de coordenadas que cumplan las condiciones del enunciado y con parte de su dominio en común. Digamos que

$$\begin{aligned} u_k &= f_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), \\ v_k &= g_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} &= \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial v_j} \\ \frac{\partial}{\partial y_k} &= \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial v_j} \end{aligned}$$

Aplicando  $I$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_k} &= \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial v_j} - \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial u_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_k} &= -\sum_j \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial v_j} + \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial u_j} \end{aligned}$$

Comparando las ecuaciones concluimos que

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial g_j}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial g_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial f_j}{\partial y_k}.$$

Éstas son las ecuaciones de Cauchy-Riemann para la función de cambio de variables  $(f_1, g_1, \dots, f_n, g_n)$ , luego los cambios de variables son holomorfos. ■

## B.3 Tensores complejos

Estudiamos ahora el cálculo tensorial complejo. Para empezar consideramos un espacio vectorial real  $V$  de dimensión finita y  $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ . Podemos identificar cada  $v \in V$  con  $1 \otimes v \in V^{\mathbb{C}}$ , de modo que cada vector  $v \in V^{\mathbb{C}}$  se expresa de forma única como  $v = v_1 + iv_2$ , con  $v_1, v_2 \in V$ .

Consideramos el espacio  $\mathcal{T}_s^r(V)$  de los tensores de tipo  $(r, s)$  en  $V$  y  $\mathcal{T}_s^r(V, \mathbb{C})$  el espacio de los tensores complejos de tipo  $(r, s)$  en  $V^{\mathbb{C}}$  (es decir, las formas multilineales complejas de  $r$  copias de  $V^{\mathbb{C}}$  por  $s$  copias de su dual).

Podemos identificar a  $\mathcal{T}_s^r(V)$  con un subespacio vectorial (real) de  $\mathcal{T}_s^r(V, \mathbb{C})$ . Para ello fijamos una base  $e_1, \dots, e_n$  de  $V$ , que nos da la base de  $\mathcal{T}_s^r(V)$  formada por los tensores

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_s}^*$$

y a cada uno de ellos le hacemos corresponder el tensor análogo en  $\mathcal{T}_s^r(V, \mathbb{C})$  que resulta de considerar a  $e_1^*, \dots, e_n^*$  como la base dual de  $e_1, \dots, e_n$  en  $V^{\mathbb{C}}$

en lugar de en  $V$ . Esta correspondencia induce un monomorfismo de  $T_s^r(V)$  en  $\mathcal{T}_s^r(V, \mathbb{C})$  y se comprueba que no depende de la elección de la base de  $V$ . Más precisamente, la correspondencia entre las bases induce un isomorfismo natural  $\mathcal{T}_s^r(V, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{T}_s^r(V)$ .

Observemos que cada  $e_i^*$ , considerado como elemento de  $(V^{\mathbb{C}})^*$ , extiende al correspondiente  $e_i^*$  en  $V^*$  (considerando a  $V$  como subespacio de  $V^{\mathbb{C}}$  de forma natural), por lo que cada tensor de tipo  $(0, s)$  de  $V$  se identifica con su única extensión  $\mathbb{C}$ -multilineal a  $V^{\mathbb{C}}$ . De estos isomorfismos de espacios vectoriales obtenemos a su vez un isomorfismo de álgebras  $\mathcal{T}(V, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{T}(V)$ , que a su vez se restringe a un isomorfismo  $A(V, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} A(V)$  entre las álgebras de tensores antisimétricos.

Cada  $T \in \mathcal{T}_s^r(V, \mathbb{C})$  se expresa de forma única como combinación de los tensores básicos  $e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_r}^* \otimes e_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_s}^*$ . Separando las partes real e imaginaria de los coeficientes obtenemos que  $T$  se expresa de forma única como  $T = T_1 + iT_2$ , donde  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_s^r(V)$ . Es fácil ver que  $T$  es antisimétrico si y sólo si lo son  $T_1$  y  $T_2$ .

Supongamos ahora que  $V$  tiene dimensión  $2n$  y que tiene asociada una estructura compleja  $I$ . Definimos  $I^t : V^* \rightarrow V^*$  mediante  $I^t(\omega)(v) = \omega(I(v))$ . Es claro que  $I^t$  es una estructura compleja en  $V^*$ .

Sea  $e_1, \dots, e_n$  una  $\mathbb{C}$ -base de  $V$  y tomemos  $u_k, \bar{u}_k$  según (B.1), de manera que los vectores  $u_k$  son una base de  $V^h$  y los vectores  $\bar{u}_k$  son una base de  $V^a$ . Es fácil ver entonces que los vectores  $u_k^*$  son una base de  $V^{*h}$  y los vectores  $\bar{u}_k^*$  son una base de  $V^{*a}$ . Esto nos permite identificar a  $V^{*h}$  con  $V^{h*}$  y a  $V^{*a}$  con  $V^{a*}$ .

Definimos el espacio  $A^{p,q}(V, \mathbb{C})$  como el subespacio de  $A^{p+q}(V, \mathbb{C})$  generado por los tensores de la forma

$$u_{k_1}^* \wedge \cdots \wedge u_{k_p}^* \wedge \bar{u}_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge \bar{u}_{j_q}^*.$$

Esta definición no depende de la base. Para probarlo observamos que si llamamos  $\omega$  a la forma anterior y  $k_1 < \cdots < k_p, j_1 < \cdots < j_q$ , entonces, para  $k'_1 < \cdots < k'_{p'}, j'_1 < \cdots < j'_{q'}$ , se cumple

$$\omega(u_{k'_1}^*, \dots, u_{k'_{p'}}^*, \bar{u}_{j'_1}^*, \dots, \bar{u}_{j'_{q'}}^*) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = p', q = q', k_i = k'_i, j_i = j'_i, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De aquí se sigue que una forma  $\omega \in A^{p+q}(V, \mathbb{C})$  es de tipo  $(p, q)$  si y sólo si cuando  $v_1, \dots, v_{p'} \in V^h, v'_1, \dots, v'_{q'} \in V^a$ , entonces

$$\omega(v_1, \dots, v_{p'}, v'_1, \dots, v'_{q'}) = 0$$

si  $p \neq p'$  o  $q \neq q'$  y no es nula en algún caso cuando  $p = p'$  y  $q = q'$ .

$$\text{Claramente tenemos que } A^r(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} A^{p,q}(V, \mathbb{C}).$$

Consideremos ahora el caso en que  $V$  es una variedad diferencial. Definimos  $\mathcal{T}_s^r(V, \mathbb{C})$  como el espacio de tensores diferenciables de tipo  $(r, s)$ , es decir, las

aplicaciones  $T$  que a cada punto  $p \in V$  le asignan un tensor  $T_p \in \mathcal{T}_s^r(T_p(V, \mathbb{C}))$  de modo que  $T_p = T_{1p} + iT_{2p}$  con  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_s^r(V)$ .

Estos espacios de tensores forman el álgebra  $\mathcal{T}(V, \mathbb{C})$ , que contiene como subespacio vectorial al álgebra exterior  $\Lambda(V, \mathbb{C})$  de las formas diferenciales complejas. Sobre ésta tenemos definida la diferencial exterior

$$d(\omega + i\eta) = d\omega + i d\eta,$$

que es una antiderivación y cumple  $d^2 = 0$ . De hecho  $\Lambda(V, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda(V)$  y  $d$  se corresponde con la diferencial usual en el producto tensorial, de modo que la cohomología de  $\Lambda(V, \mathbb{C})$  cumple  $H(V, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes H(V)$  (es la cohomología de De Rham con coeficientes complejos).

Si suponemos que  $V$  es una variedad compleja entonces podemos distinguir entre tensores (puntualmente) holomorfos y antiholomorfos y además

$$\Lambda^r(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q}(V, \mathbb{C}).$$

Concretamente, las formas de tipo  $(p, q)$  son las que en cada abierto coordinado admiten una expresión de la forma

$$\omega = \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_p \\ k'_1 < \dots < k'_q}} \omega_{k_1, \dots, k_p, k'_1, \dots, k'_q} dz_{k_1} \wedge \dots \wedge dz_{k_p} \wedge d\bar{z}_{k'_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k'_q}.$$

Entonces  $d\omega$  se calcula sustituyendo cada función coordinada por

$$dz_{k_1, \dots, k_p, k'_1, \dots, k'_q} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \omega_{k_1, \dots, k_p, k'_1, \dots, k'_q}}{\partial z_r} dz_r + \sum_{r=1}^n \frac{\partial \omega_{k_1, \dots, k_p, k'_1, \dots, k'_q}}{\partial \bar{z}_r} d\bar{z}_r,$$

de donde se sigue que  $d\omega \in \Lambda^{p+1,q}(V, \mathbb{C}) \oplus \Lambda^{p,q+1}(V, \mathbb{C})$ . Como la suma es directa, podemos definir las *diferenciales parciales*

$$\partial\omega \in \Lambda^{p+1,q}(V, \mathbb{C}) \quad \text{y} \quad \bar{\partial}\omega \in \Lambda^{p,q+1}(V, \mathbb{C})$$

de modo que  $d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega$ . Localmente se cumple

$$\partial\omega = \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_p \\ k'_1 < \dots < k'_q}} \sum_{r=1}^n \frac{\partial \omega_{k_1, \dots, k_p, k'_1, \dots, k'_q}}{\partial z_r} dz_r \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{k_p} \wedge d\bar{z}_{k'_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k'_q},$$

$$\bar{\partial}\omega = \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_p \\ k'_1 < \dots < k'_q}} \sum_{r=1}^n \frac{\partial \omega_{k_1, \dots, k_p, k'_1, \dots, k'_q}}{\partial \bar{z}_r} d\bar{z}_r \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{k_p} \wedge d\bar{z}_{k'_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k'_q},$$

Es claro que  $\partial$  y  $\bar{\partial}$  son dos antiderivaciones de grado 1 de  $\Lambda(V, \mathbb{C})$  tales que  $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ .

Un tensor es puntualmente holomorfo si es holomorfo en cada punto, mientras que se dice que un tensor es *holomorfo* si además sus funciones coordenadas son holomorfas. En particular es fácil ver que una forma  $\omega$  es holomorfa si y sólo si es de tipo  $(p, 0)$  y  $\bar{\partial}\omega = 0$ . Representaremos por  $\mathcal{H}^*(V)$  al álgebra de las formas diferenciales holomorfas en  $V$ . Notemos que, en cada punto  $p$ , una forma  $\omega \in \mathcal{H}^q(V)$  puede verse como un tensor antisimétrico en  $T_p^h(V)$ , que es un espacio de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{C}$ , por lo que  $\mathcal{H}^q(V) = 0$  para  $q > n$ .

Si  $f : V \rightarrow W$  es diferenciable, llamaremos  $f_{\sharp} : \Lambda(W, \mathbb{C}) \rightarrow \Lambda(V, \mathbb{C})$  a la aplicación lineal  $1 \otimes f_{\sharp}$ , que es un homomorfismo de complejos y de álgebras. Equivalentemente, la aplicación  $f_{\sharp}$  viene definida por  $f_{\sharp}(\omega + i\eta) = f_{\sharp}(\omega) + if_{\sharp}(\eta)$ . Es claro que si  $f$  es holomorfa entonces  $f_{\sharp}$  se restringe a un homomorfismo  $f_{\sharp} : \mathcal{H}(W) \rightarrow \mathcal{H}(V)$ .

Terminamos con unas observaciones sobre orientación e integración de formas. Ante todo, la orientación natural de una variedad compleja  $V$  es la inducida localmente por cualquier sistema de coordenadas analítico  $x_k, y_k$ , es decir, la orientación determinada por la forma  $dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$ . Conviene observar que esta forma coincide con

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n.$$

Obviamente podemos prescindir del factor  $(1/2)^n$  sin alterar la orientación.

Respecto a la integración, si  $\omega + i\eta \in \Lambda^r(V, \mathbb{C})$  y  $c \in C_{\infty}^r(V)$ , podemos definir

$$\int_c \omega + i\eta = \int_c \omega + i \int_c \eta \in \mathbb{C}.$$

Todas las propiedades de la integral de formas reales se traducen inmediatamente al caso complejo, incluyendo el teorema de Stokes. Similarmente se puede definir la integral sobre  $V$  de una  $2n$ -forma de soporte compacto.

# Bibliografía

- [1] Ahlfors, L., Sario, L., *Riemann surfaces*, Princeton (1960).
- [2] Artin, E., Braun, H. *Introduction to Algebraic Topology*, Charles E. Merrill P. C., Ohio (1969).
- [3] Bredon, G.E., *Topolgy and geometry*, Springer, New York (1993).
- [4] Greenberg, M.J., Harper, J.R. *Algebraic Topology*, Benjamin, New York (1981).
- [5] Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R. *Connections, Curvature and Cohomology*, Academic Press, New York (1972).
- [6] Matsushima Y., *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, New York (1972).
- [7] Maunder, C.R.F., *Algebraic Topology*, van Nostrand, London (1970).
- [8] Spanier, E.H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York (1966).
- [9] Vick, J.W., *Homology Theory*, Springer, New York (1994).
- [10] Wallace, A. H., *Algebraic Topology*, W.A. Benjamin, New York (1970).

# Índice de Materias

- álgebra exterior, 313, 314
- índice, 429, 440
  
- abierto coordinado, 6, 233
- acíclico (complejo), 117
- adjunción
  - de un espacio a otro, 81
  - de una celda, 82
- afínmente independientes, 28
- antiderivación, 314
- antiholomorfa (aplicación), 472
- antipodal (aplicación), 68
- aproximación diagonal, 164
- arco
  - de Jordan, 453
  - regular, 268
- asociados (elementos de un anillo), 180
- atlas, 232
  - analítico, 471
  
- balanceada (aplicación), 120
- baricentro, 50
- base de un funtor, 152
- Betti (números de), 101
- bola geodésica, 292
- botella de Klein, 18
- bucle, 213
  
- cadena, 31, 35
  - celular, 92
  - diferenciable, 305
- campo
  - horizontal, vertical, 388
  - radial, 337
  - tensorial, 258
    - sobre un arco, 268
  
- carta, 232
  - cúbica, 233
- categoría, 113
  - con modelos, 152
  - opuesta, 141
- celular (aplicación), 96
- ciclo, 35
- clase
  - de Euler, 422, 443
  - de la orientación, 353
  - del volumen, 354
  - fundamental, 191, 197
- cociclo, 138
- cociente (espacio), 14
- codiferencial, 246
- cofinal, 195
- cofrontera, 138
- cohomología
  - con soporte compacto, 196
  - de De Rham, 318
  - con soportes compactos, 329
  - diferenciable, 310
  - singular, 140
- combinación
  - afín, 27
  - convexa, 3
- complejo
  - celular, 85
  - inverso, 138
  - simplicial
    - afín, 104
- complejo simplicial
  - abstracto, 106
- completitud geodésica, 301
- conexión, 266
  - de Levi-Civita, 285



- simétrica, 275
- conforme (transformación), 471
- cono, 118
- contracción, 257, 259
- contractible (complejo), 117
- contractible (espacio), 25
- convexo, 3, 296
- coordenadas, 232
  - baricéntricas, 28
- corchete de Lie, 265
- cubrimiento, 218
- Cuchy-Riemann (ecuaciones), 472
- curva de Jordan, 453
  
- derivación, 263, 264
- derivada
  - covariante, 266, 269
  - de Lie, 266
- diferencia, 426
- diferenciable (aplicación), 235
- diferencial, 244
  - exterior, 316
- dimensión, 104
- dirigido (conjunto), 192
- dominio de Jordan, 456
- dual (módulo), 140
  
- elemento
  - de longitud, 278
  - de volumen, 340
- elevación, 218
- entorno
  - fundamental, 218
  - simplicial, 107
- envoltura convexa, 3
- equivalencia homotópica, 117
- escisión (de una sucesión exacta), 124
- esfera
  - geodésica, 292
  - simplicial, 107
- espacio
  - cotangente, 246
  - proyectivo, 83
  - recubridor, 218
  - tangente, 240
  
- holomorfo, 473
- esqueleto, 85, 105
- estrella, 108
- estrellado, 303
- estructura
  - analítica, 471
  - diferencial, 232
- evaluación, 314
- exacta (sucesión), 44
  
- factorización local, 379
- fibrado, 379
  - de tangentes, 254
  - horizontal, 387
  - trivial, 380
  - vectorial, 381
  - vertical, 385
- forma
  - diferencial, 314
  - horizontal, vertical, 388
- frontera, 35
- funtor, 141
  - covariante, 115
  
- germen diferenciable, 240
- grado, 361
  - local, 370
- grupo
  - de cohomología, 138
  - de homología, 35
  - de transformaciones de un cubrimiento, 221
  - fundamental, 213
- Gysin (aplicación de), 421
  
- holomorfa (aplicación), 471
- homeomorfismo relativo, 84
- homología, 31
- homomorfismo
  - de complejos, 34
  - de conexión, 47
  - de fibrados, 380
  - graduado, 32
- homotopía, 23, 24, 41, 44
  - de bucles, 213
  
- identificación, 14

- integral en fibras, 402
- involución, 341
- isometría, 281
- isomorfismo de fibrados, 380
- Lefschetz (isomorfismo, clase), 444
- lema
  - de Gauss, 292
  - de localización, 260
- longitud, 278
- límite inductivo, 192
- matriz jacobiana, 245
- Mayer-Vietoris, 322
- minimizante, 291
- modelo, 152
- métrica de Riemann, 276
- módulo graduado, 31
- normal
  - carta, 290
  - espacio, 8
- nulo (conjunto), 251
- orientación, 177, 184
  - canónica de  $\mathbb{R}^n$ , 337
  - de fibrados, 391
    - vectoriales, 391
  - local, 175, 176
  - producto, 358
- partición de la unidad, 238
- plano proyectivo, 17
- poliedro, 104
- prisma, 41
- producto
  - exterior, 163
  - tensorial, 120
- propia (aplicación), 196
- propiedad proyectiva, 118
- punto crítico, 250
- resolución, 127
- retracción, 9
- retracto, 9
  - absoluto, 9
  - de entornos, 11
- por deformación, 24
- sección, 183, 383
  - con singularidades, 411
- simple (cubrimiento), 303
- simplemente conexo, 215
- simplicial (aplicación), 106
- singularidad, 411
- sistema de coordenadas, 233
- sistema inductivo, 192
- soporte, 31, 329
  - compacto en fibras, 396
- subcomplejo, 35, 105
- subfibrado, 380
  - vectorial, 381
- submódulo graduado, 31
- sucesión
  - de homología, 47
  - exacta, 44
- suma
  - amalgamada, 15
  - conexa, 234
  - topológica, 15
- superficie, 21
- suspensión, 374
- símplice
  - afín, 28
  - singular
    - afín, 30
    - diferenciable, 305
- tensor, 255, 259
  - antisimétrico, 310
  - holomorfo, 480
  - simétrico, 310
- Teorema
  - de Borsuk-Ulam, 224, 225
  - de Brouwer, 67
  - de De Rham, 328
  - de dualidad de Alexander, 208
  - de Eilenberg-Zilber, 158
  - de escisión, 56, 142
  - de Fubini, 402
  - de homotopía, 41
  - de Hopf, 377
  - de Hopf-Rinow, 302

- de Jordan-Brouwer, 73
- de Künneth, 156
- de la función inversa, 248
- de Lebesgue, 55
- de Lefchetz, 449
- de los modelos acíclicos, 152
- de Mayer-Vietoris, 63, 64, 142
- de Poincaré, 197, 353
- de Sard, 252
- de Stokes, 324, 348
- de Tietze, 9
- del bocadillo de jamón, 226
- general de separación, 211
- Thom (isomorfismo de), 435
- torsión, 275
  - producto de, 129
- transformación natural, 116
- transporte paralelo, 272
- traza, 445
- triangulación, 455
- triángulo, 454
- tríada, 57
- ténsamente sumergido, 205
  
- valor crítico, regular, 250
- variedad
  - afín, 27
  - de orientaciones, 180
  - de Riemann, 276
  - diferencial, 232
    - casi compleja, 476
    - compleja, 471
  - topológica, 5
- volumen, 346